**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

**Band:** 77 (2002)

**Artikel:** Divergence exponentielle des sous-groupes discrets en rang supérieur

Autor: Quint, Jean-François

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-57939

## Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

# Commentarii Mathematici Helvetici

# Divergence exponentielle des sous-groupes discrets en rang supérieur

Jean-François Quint

Résumé. Soient G un groupe de Lie semi-simple, réel, connexe et de centre fini,  $\mathfrak a$  un sous-espace de Cartan de l'algèbre de Lie de G et  $\mathfrak a^+ \subset \mathfrak a$  une chambre de Weyl fermée de  $\mathfrak a$ . Si  $\Gamma$  est un sous-groupe discret Zariski dense de G, nous lui associons une fonction homogène  $\psi_\Gamma:\mathfrak a^+ \to \mathbb R \cup \{-\infty\}$  qui généralise l'exposant de convergence de  $\Gamma$  considéré en  $\mathbb R$ -rang 1. Nous montrons alors que cette fonction est concave. Dans un travail ultérieur, nous en déduirons des constructions de généralisations des mesures de Patterson–Sullivan.

Nous démontrons aussi des analogues de nos résultats sur les corps locaux.

Mathematics Subject Classification (2000). Primaire 22E40; Secondaire 53C35.

Mots clés. Lie groups, discrete subgroups, higher rank geometries.

### 1. Introduction

#### 1.1. Résultats

Soit G un groupe de Lie semi-simple, réel, connexe et de centre fini. On choisit une involution de Cartan  $\tau$  de G. On note K le sous-groupe compact maximal de G constitué de l'ensemble des points fixes de  $\tau$  et  $\mathfrak a$  un sous-espace de Cartan de l'algèbre de Lie de  $\mathfrak g$  tel que, pour x dans  $\mathfrak a$ ,  $\tau(\exp x) = \exp(-x)$ . Soit  $\mathfrak a^+ \subset \mathfrak a$  une chambre de Weyl. On dispose alors de la décomposition de Cartan  $G = K(\exp \mathfrak a^+)K$  et de la projection associée  $\mu: G \to \mathfrak a^+$ .

Si  $\Gamma$  est un sous-groupe de G, l'étude des propriétés asymptotiques de  $\Gamma$  passe par la description de l'ensemble  $\mu(\Gamma)$ . Dans [4], Y. Benoist a démontré que, si  $\Gamma$  est un sous-groupe Zariski dense de G, le cône asymptote à l'ensemble  $\mu(\Gamma)$  est convexe et d'intérieur non vide. On l'appelle cône limite de  $\Gamma$ .

Si le  $\mathbb{R}$ -rang de G est égal à 1, pour g dans G, la donnée de  $\mu(g)$  est simplement celle de la distance entre le point fixe x de K dans l'espace symétrique de G et son translaté gx par g. Si  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de G, un rôle important est alors joué par l'exposant de convergence de la série de Dirichlet

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-td(x,\gamma x)} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

c'est-à-dire par le nombre réel

$$\limsup_{a \to \infty} \left( \frac{1}{a} \log \left( \operatorname{card} \{ \gamma \in \Gamma \mid d(x, \gamma x) \le a \} \right) \right).$$

Citons par exemple, la théorie de Patterson-Sullivan introduite dans [14] et [18].

Le but de cet article est la généralisation à la situation de rang supérieur de l'étude de la divergence exponentielle des sous-groupes discrets. On voit alors apparaître un phénomène nouveau de convexité, que nous allons à présent décrire.

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret Zariski dense de G. Soit  $\|.\|$  une norme (invariante par le groupe de Weyl) sur  $\mathfrak{a}$ . Si  $\|.\|$  est la norme euclidienne provenant d'une métrique riemannienne G-invariante sur l'espace symétrique de G, pour tout g dans G,  $\|\mu(g)\|$  est la distance entre le point fixe de K et son translaté par g.

Pour tout cône ouvert  $\mathcal C$  de  $\mathfrak a$ , on note  $\tau_{\mathcal C}$  l'exposant de convergence de la série de Dirichlet

$$\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \mu(\gamma) \in \mathcal{C}}} e^{-t \|\mu(\gamma)\|} \quad (t \in \mathbb{R})$$

et, pour x dans  $\mathfrak{a}$ , on pose

$$\psi(x) = ||x|| \inf \tau_{\mathcal{C}},$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des cônes ouverts  $\mathcal C$  de  $\mathfrak a$  qui contiennent x. La fonction homogène  $\psi$  ne dépend pas de la norme choisie. Si  $\|.\|$  est une norme sur  $\mathfrak a$ , la série de Dirichlet

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-t \|\mu(\gamma)\|} \quad (t \in \mathbb{R})$$

a pour exposant de convergence

$$\sup_{x \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}} \frac{\psi(x)}{\|x\|}.$$

Soit  $\rho$  la forme linéaire sur  $\mathfrak a$  qui est la somme des racines multipliées par la dimension de leurs espaces poids dans l'algèbre de Lie de  $\mathfrak g$ . Notre principal résultat s'écrit :

**Théorème.** La fonction  $\psi$  est majorée par  $\rho$ . Elle est concave et semi-continue supérieurement. L'ensemble

$$\{x \in \mathfrak{a} \mid \psi(x) > -\infty\}$$

est exactement le cône limite de  $\Gamma$ . De plus,  $\psi$  est positive sur le cône limite de  $\Gamma$  et strictement positive sur son intérieur relatif.

Dans [17], nous appliquerons ce théorème à la construction de généralisations des mesures de Patterson–Sullivan. Ce problème avait déjà été considéré par P. Albuquerque dans [1]. En  $\mathbb{R}$ -rang 1, c'est l'étude de ces mesures qui permet, sous

certaines hypothèses, d'obtenir des équivalents des fonctions orbitales de comptage pour l'action de  $\Gamma$  dans l'espace symétrique de G. Concernant les questions de comptage, nos méthodes permettent de montrer :

**Proposition.** Soit  $\|.\|$  une norme sur  $\mathfrak{a}$ . Alors

$$\frac{1}{a}\log\left(\operatorname{card}\left\{\gamma\in\Gamma\ |\ \|\mu(\gamma)\|\leq a\right\}\right)$$

admet une limite  $\tau \in \mathbb{R}_+^*$  quand a tend vers  $\infty$  et l'on a :

$$\operatorname{card} \left\{ \gamma \in \Gamma \mid \|\mu(\gamma)\| \le a \right\} = O\left(a^{r-1}e^{a\tau}\right)$$

où r est le  $\mathbb{R}$ -rang de G.

En d'autres termes, en appliquant ce résultat aux normes euclidiennes invariantes par le groupe de Weyl :

Corollaire. Soit X l'espace symétrique de G, muni d'une métrique riemannienne G-invariante. Alors, il existe  $\tau > 0$  tel que, pour tous x, y dans X, on ait :

$$\frac{1}{a}\log\left(\operatorname{card}\left\{\gamma\in\Gamma\mid d(x,\gamma y)\leq a\right\}\right)\xrightarrow[a\to\infty]{}\tau$$

et

$$\operatorname{card}\left\{\gamma\in\Gamma\ |\ d(x,\gamma y)\leq a\right\}\underset{a\to\infty}{=}O\left(a^{r-1}e^{a\tau}\right).$$

## 1.2. Structure des démonstrations

La démonstration du théorème s'effectue en deux étapes. Dans la première partie du texte, on établit :

**Proposition.** Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret Zariski dense de G. Il existe une application  $\pi: \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$  ayant les propriétés suivantes :

(i) il existe un réel  $\kappa \geq 0$  tel que, pour tous  $\gamma_1, \gamma_2$  dans  $\Gamma$ ,

$$\|\mu(\pi(\gamma_1, \gamma_2)) - \mu(\gamma_1) - \mu(\gamma_2)\| \le \kappa.$$

(ii) pour tout réel  $R \geq 0$ , il existe une partie finie H de  $\Gamma$  telle que, pour  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1', \gamma_2'$  dans  $\Gamma$ , avec  $\|\mu(\gamma_1) - \mu(\gamma_1')\| \leq R$  et  $\|\mu(\gamma_2) - \mu(\gamma_2')\| \leq R$ ,

$$\pi(\gamma_1, \gamma_2) = \pi(\gamma_1', \gamma_2') \Rightarrow (\gamma_1' \in \gamma_1 H \text{ et } \gamma_2' \in H\gamma_2).$$

Une telle application  $\pi$  sera, dans la suite du texte, appelée produit générique dans  $\Gamma$ . L'idée de la preuve est d'écrire  $\pi(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1 f \gamma_2$  où f est choisi dans une partie finie F de  $\Gamma$ , de façon à éliminer les problèmes qui se posent quand

 $\gamma_1$  est proche de  $\gamma_2^{-1}.$  La partie F sera construite en utilisant un résultat de H. Abels, G.-A. Margulis et G.-A. Soifer, le lemme 2.3.4, dont nous redonnerons la démonstration. La vérification du point (i) de la proposition s'effectue en estimant la norme de  $\gamma_1 f \gamma_2$  dans suffisament de représentations de G, au lemme 2.3.3. Le point délicat est la vérification de la partie (ii). Sa démonstration s'inspire de phénomènes de géométrie dans G/K liés à l'existence en rang supérieur d'analogues du fameux lemme des ombres de Sullivan ([18]). On définit, pour g dans G, une partie  $B_g^\varepsilon$  de la variété des drapeaux de G de sorte que  $gB_g^\varepsilon$  joue le rôle des ombres de [18] et on montre un analogue du lemme des ombres, la proposition 2.3.7. Reste alors à vérifier que, sous les hypothèses que nous aurons faites, les ombres  $\gamma_1 B_{\gamma_1}^\varepsilon$  et  $\gamma_1 f \gamma_2 B_{\gamma_1 f \gamma_2}^\varepsilon$  se rencontrent, c'est ce qui est fait dans la démonstration du lemme 2.3.8.

Dans la deuxième partie on déduit de l'existence d'un produit générique dans  $\Gamma$  qu'il existe des réels  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  tels que, pour x, y dans  $\mathfrak{a}$ ,

$$\operatorname{card}(\Gamma \cap \mu^{-1}(b(x+y,\alpha))) \ge \gamma \operatorname{card}(\Gamma \cap \mu^{-1}(b(x,\beta))) \operatorname{card}(\Gamma \cap \mu^{-1}(b(y,\beta))),$$

et l'on démontre la concavité de  $\psi$  à partir de cette seule propriété de l'ensemble  $u(\Gamma)$ .

Enfin, dans une troisième partie, nous terminerons la démonstration précise du théorème.

### 1.3. Corps locaux

Dans l'esprit de [4], nous démontrerons des analogues des résultats ci-dessus pour les groupes semi-simples définis sur un corps valué localement compact. Nous utiliserons les analogues des décompositions de Cartan et d'Iwasawa pour ces groupes, établis par F. Bruhat et J. Tits dans [8] et [9]. Nous renvoyons le lecteur à [20], pour un résumé de cette théorie.

J'ai bénéficié, pour l'élaboration de ce travail, des remarques et des suggestions d'Yves Benoist. Je tiens ici à l'en remercier.

### 2. Produit générique

Soit  $\mathbb{K}$  un corps local :  $\mathbb{K}$  est soit  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , soit une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ , pour un entier premier p, soit le corps des fractions  $\mathbb{F}_q((T))$  de l'anneau des séries formelles sur le corps fini à q éléments.

Si  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on le munit de la valeur absolue usuelle et on pose q=e,  $u=e^{-1}$  et pour tout  $x\neq 0$  dans  $\mathbb{K}$ ,  $\omega(x)=-\log|x|$ .

Si  $\mathbb{K}$  est non-archimédien, on note  $\mathcal{O}$  l'anneau de valuation de  $\mathbb{K}$ ,  $\mathfrak{m}$  l'idéal maximal de  $\mathcal{O}$ ,  $k=\mathcal{O}/\mathfrak{m}$  le corps résiduel de  $\mathbb{K}$ , q le cardinal de k et u une uniformisante de  $\mathbb{K}$ , i.e. un élément de  $\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{m}^2$ ; on note  $\omega$  la valuation de  $\mathbb{K}$  telle

que  $\omega(u)=1$  et on munit  $\mathbb K$  de la valeur absolue  $x\mapsto q^{-\omega(x)}.$ 

Étant donnée une extension algébrique de  $\mathbb{K}$ , on la munit de l'unique valeur absolue prolongeant celle de  $\mathbb{K}$ .

Soit (X,d) un espace métrique. Pour tout  $\varepsilon>0,$  pour toute partie Y de X, on note :

$$b(Y,\varepsilon) = \{x \in X | d(x,Y) \le \varepsilon\} \text{ et } B(Y,\varepsilon) = \{x \in X | d(x,Y) \ge \varepsilon\}.$$

Pour toutes parties Y et Z de X, on note :

$$d(Y,Z) = \inf_{(y,z) \in Y \times Z} d(y,z) \text{ et } \delta(Y,Z) = \sup_{y \in Y} d(y,Z).$$

Pour tout ensemble X et pour tout x dans X, on note  $\delta_x$  la mesure de Dirac en x.

Si t est un nombre réel, on note [t] sa partie entière.

### 2.1. Algèbre linéaire normée

Nous démontrons ici l'ensemble des résultats d'algèbre linéaire qui seront utilisés dans ce texte. Ils seront ensuite réinterprétés dans les groupes réductifs, à travers leurs représentations linéaires.

Soit V un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie m. On munit  $\mathbb{P}(V)$  de la topologie quotient de celle de  $V - \{0\}$ : c'est un espace topologique compact.

# 2.1.1. Rayon spectral et proximalité

Soit f un endomorphisme de V. On note  $\lambda_1(f)$  le rayon spectral de f, c'est-à-dire le plus grand des modules des valeurs propres de f. On note  $V_f^+$  le plus grand sous-espace vectoriel f-stable de V où toutes les valeurs propres de f sont de module  $\lambda_1(f)$  et  $V_f^<$  l'unique supplémentaire f-stable de  $V_f^+$ .

Munissons V d'une norme. On a la formule du rayon spectral :

$$\forall f \in \mathcal{L}(V) \quad \|f^n\|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \lambda_1(f).$$

Un endomorphisme  $f \neq 0$  de V est dit proximal dans  $\mathbb{P}(V)$  si et seulement si f possède une unique valeur propre de module maximal et qu'elle est de multiplicité 1, i.e. si et seulement si dim  $V_f^+ = 1$ . Cette valeur propre appartient alors à  $\mathbb{K}$ .

Soit f un endomorphisme non nul de V. Alors f est proximal dans  $\mathbb{P}(V)$  si et seulement si f possède un point fixe attracteur dans  $\mathbb{P}(V)$ . Ce point fixe est alors  $V_f^+$ .

# 2.1.2. Bonnes normes et bonnes sommes directes

Une norme sur V est une application  $\|.\|: V \to \mathbb{R}_+$  vérifiant les axiomes usuels :

(i) 
$$\forall v \in V \quad ||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

- (ii)  $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall v \in V \quad \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|.$
- (iii)  $\forall v, w \in V \quad ||v + w|| \le ||v|| + ||w||.$

Si  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ ), on dit qu'une norme sur V est une bonne norme si et seulement si elle est induite par un produit scalaire euclidien (resp. un produit scalaire hermitien). Si V est muni d'une bonne norme, on dit qu'une somme directe  $V = V_1 \oplus V_2$  est une bonne somme directe si et seulement si elle est orthogonale pour le produit scalaire.

Si  $\mathbb{K}$  est non archimédien, on dit qu'une norme sur V est une bonne norme si et seulement si elle est ultramétrique, c'est-à-dire si et seulement si, pour tous v, w dans V, on a  $\|v+w\| \leq \max(\|v\|, \|w\|)$ . Si V est muni d'une bonne norme, on dit qu'une somme directe  $V = V_1 \oplus V_2$  est une bonne somme directe si et seulement si, pour tout  $v = v_1 + v_2$  dans V, avec  $v_1$  dans  $V_1$  et  $v_2$  dans  $V_2$ , on a :

$$||v|| = \max(||v_1||, ||v_2||).$$

Supposons dorénavant V muni d'une bonne norme. Donnons une caractérisation des bonnes sommes directes; c'est une généralisation d'un exercice classique de géométrie euclidienne :

**Lemme 2.1.1.** Soit  $V = V_1 \oplus V_2$  une somme directe dans V. Elle est bonne si et seulement si ses projecteurs sont de norme 1.

Démonstration. Soit p le projecteur sur  $V_1$  parallèlement à  $V_2$ . Si la somme directe est bonne, on a ||p|| = 1. Réciproquement, supposons que p est de norme 1.

Supposons que  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit v dans  $V_2^{\perp}$ . Soit w = v - p(v). Alors v et w sont orthogonaux et p(v) = v - w. Par conséquent, on a :

$$||v|| \ge ||p(v)|| = \sqrt{||v||^2 + ||w||^2} \ge ||v||$$

et, donc, ||p(v)|| = ||v||, ou encore w = 0. Il vient  $V_2^{\perp} \subset V_1$  et, comme ces deux espaces ont même dimension,  $V_2^{\perp} = V_1$ , ce qu'il fallait démontrer.

Supposons que  $\mathbb K$  est non-archimédien. Remarquons que l'on a  $\|1-p\| \le \max(1,\|p\|) \le 1$ . Pour tout v dans V, il vient :

$$\left\|v\right\| = \left\|p(v) + (1-p)(v)\right\| \leq \max(\left\|p(v)\right\|, \left\|(1-p)(v)\right\|) \leq \left\|v\right\|$$

et, donc, 
$$||v|| = \max(||p(v)||, ||(1-p)(v)||)$$
, ce qu'il fallait démontrer.

Il existe une unique bonne norme sur  $\wedge^2 V$  telle que, pour toute bonne somme directe  $V_1 \oplus V_2 \subset V$  la somme directe  $(\wedge^2 V_1) \oplus (V_1 \wedge V_2) \oplus (\wedge^2 V_2) \subset \wedge^2 V$  soit bonne et que, pour v, w dans V, si  $\mathbb{K}v$  et  $\mathbb{K}w$  sont en bonne somme directe, on ait  $||v \wedge w|| = ||v|| ||w||$ . Alors, l'application

$$(V - \{0\})^2 \to \mathbb{R}_+$$
$$(v, w) \mapsto \frac{\|v \wedge w\|}{\|v\| \|w\|}$$

factorise à travers une distance sur  $\mathbb{P}(V)$ , qui y induit sa topologie usuelle. C'est un résultat classique si  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Le cas général est traité dans [15]. On munira toujours l'espace projectif d'un espace vectoriel bien normé de cette distance. Si le dual  $V^*$  de V est muni de la bonne norme duale de celle de V, pour tous  $v \neq 0$  dans  $\mathbb{P}(V)$  et  $\varphi \neq 0$  dans  $\mathbb{P}(V^*)$ , on a :

$$d(\mathbb{K}v, \varphi^{\perp}) = \frac{|\varphi(v)|}{\|\varphi\| \|v\|} = d(\mathbb{K}\varphi, v^{\perp}).$$

Nous utiliserons:

**Lemme 2.1.2.** Soit  $\varepsilon > 0$ . Soient  $V = V_1 \oplus V_2$  une bonne somme directe et p le projecteur sur  $V_1$  parallèlement à  $V_2$ . Pour tout v dans  $V - \{0\}$  avec  $d(\mathbb{K}v, \mathbb{P}(V_2)) \ge \varepsilon$ , on a  $\|p(v)\| \ge \varepsilon \|v\|$ .

Démonstration. On peut, bien sûr, supposer  $v \notin V_1$ . Alors, soient  $v_1$  et  $v_2$  les composantes de v sur  $V_1$  et  $V_2$ . On a  $d(\mathbb{K}v, \mathbb{K}v_2) \geq \varepsilon$ . Or

$$d(\mathbb{K}v, \mathbb{K}v_2) = \frac{\|v \wedge v_2\|}{\|v\| \|v_2\|} = \frac{\|v_1 \wedge v_2\|}{\|v\| \|v_2\|} = \frac{\|v_1\|}{\|v\|},$$

d'où le résultat.

### 2.1.3. Semi-similitudes

Nous étudions ici une classe particulière d'endomorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

On dit qu'un endomorphisme f de V est une similitude si et seulement s'il existe un réel  $\lambda > 0$  tel que, pour tout v dans V, on ait :

$$||f(v)|| = \lambda ||v||.$$

On dit alors que  $\lambda$  est le rapport de f. On dit que f est une semi-similitude si et seulement s'il existe une bonne somme directe  $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$  telle que, pour tout i dans  $[\![1,k]\!]$ , f stabilise  $V_i$  et induise sur  $V_i$  une similitude de rapport  $\lambda_i$ . Dans ce cas, on peut supposer que l'on a :

$$\lambda_1 > \ldots > \lambda_k$$
.

On a alors, pour tout v dans V,  $\lambda_k ||v|| \le ||fv|| \le \lambda_1 ||v||$ . En particulier,  $\lambda_1$  est à la fois la norme et le rayon spectral de f.

Si  $\mathbb K$  est  $\mathbb R$  ou  $\mathbb C$ , une semi-similitude est simplement un endomorphisme normal de V.

**Lemme 2.1.3.** Soit f une semi-similitude. Soit  $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$  une bonne somme directe dans V telle que, pour tout i dans [1, k], f laisse stable  $V_i$  et induise sur  $V_i$  une similitude de rapport  $\lambda_i$ . Supposons que l'on a  $\lambda_1 > \ldots > \lambda_k$ .

(i) Soit W un sous-espace vectoriel de V stable par f. Alors on a  $W = (W \cap V_1) \oplus \ldots \oplus (W \cap V_k)$  et, en particulier, la restriction de f à W est une semi-similitude.

(ii) Soit  $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_l$  une autre somme directe, non nécessairement bonne, telle que, pour tout j dans  $[\![1,l]\!]$ , f laisse stable  $W_j$  et induise sur  $W_j$  une similitude de rapport  $\mu_j$  et que l'on ait  $\mu_1 > \ldots > \mu_l$ . Alors k = l et, pour tout i dans  $[\![1,k]\!]$ ,  $W_i = V_i$  et  $\lambda_i = \mu_i$ .

 $D\'{e}monstration$ . Pour tout entier n, posons

$$h_n = -\left\lceil \frac{\log\left(\|f^n\|\right)}{\log q}\right\rceil \text{ et } p_n = \frac{1}{u^{h_n}} f^n.$$

On a, pour tout n dans  $\mathbb{N}$ ,

$$1 \le ||p_n|| \le q.$$

On fixe une valeur d'adhérence p dans  $\mathcal{L}(V)$  de la suite  $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

Pour tout v dans  $V_1$ , le vecteur p(v) appartient à  $V_1$  et ||p(v)|| = ||p|| ||v||. En particulier, la restriction de p à  $V_1$  est un automorphisme. Par ailleurs, pour tout v dans  $V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$ , on a p(v) = 0.

Soit W un sous-espace vectoriel de V stable par f. Alors, W est stable par p. En particulier,  $W \cap V_1$  est stable par p et, donc, par l'inverse de la restriction de p à  $V_1$ 

Soit v dans W. Écrivons  $w=v_1+v'$  avec  $v_1$  dans  $V_1$  et v' dans  $V_2\oplus\ldots\oplus V_k$ . On a :

$$p(v) = p(v_1) \in W \cap V_1$$

et, donc,

$$v_1 \in W$$
.

Il vient:

$$W = (W \cap V_1) \oplus (W \cap (V_2 \oplus \ldots \oplus V_k))$$

d'où la première propriété par récurrence.

La seconde en est une conséquence.

Soit f une semi-similitude. On note  $V_f^M$  le plus grand sous-espace vectoriel stable par f où f induise une similitude de rapport  $\|f\|$  et  $V_f^m$  son unique supplémentaire stable par f. La somme directe  $V=V_f^M\oplus V_f^m$  est bonne. Une semi-similitude f est proximale si et seulement si  $\dim V_f^M=1$  et, alors, on a  $V_f^+=V_f^M$  et  $V_f^<=V_f^m$ .

# 2.1.4. Propriétés des semi-similitudes

Nous effectuons ici des contrôles uniformes sur l'action des semi-similitudes dans  $\mathbb{P}(V)$  qui seront utilisés pour la construction du produit générique, à la section 2.3.

Commençons par remarquer que beaucoup de vecteurs permettent d'estimer la norme d'une semi-similitude :

**Lemme 2.1.4.** Soient f une semi-similitude de V et  $\varepsilon > 0$ . Pour tout vecteur non nul v de V, si  $d\left(\mathbb{K}v, \mathbb{P}\left(V_f^m\right)\right) \geq \varepsilon$ , alors on a  $||fv|| \geq \varepsilon ||f|| \, ||v||$ .

Démonstration. Écrivons  $v = v_1 + v_2$  avec  $v_1$  dans  $V_f^M$  et  $v_2$  dans  $V_f^m$ . D'après le lemme 2.1.2, on a  $||v_1|| \ge \varepsilon ||v||$  et, donc,

$$||fv|| \ge ||fv_1|| = ||f|| \, ||v_1|| \ge \varepsilon \, ||f|| \, ||v||.$$

On a aussi une information sur l'action des semi-similitudes sur  $\mathbb{P}\left(V\right)$  en termes de métrique :

**Lemme 2.1.5.** Soient f une semi-similitude de V et  $\varepsilon > 0$ . La restriction de f à  $B\left(\mathbb{P}\left(V_f^m\right), \varepsilon\right)$  est  $\frac{1}{\varepsilon^2}$ -lipschitzienne.

Démonstration. Remarquons que, comme f est une semi-similitude, on a  $\|\wedge^2 f\| \le \|f\|^2$ . Donnons-nous alors deux vecteurs non nuls v et w avec  $d(\mathbb{K}v, \mathbb{P}\left(V_f^m\right)) \ge \varepsilon$  et  $d(\mathbb{K}w, \mathbb{P}\left(V_f^m\right)) \ge \varepsilon$ . D'après le lemme 2.1.4, on a  $\|fv\| \ge \varepsilon \|f\| \|v\|$  et  $\|fv\| \ge \varepsilon \|f\| \|v\|$ . Il vient :

$$\begin{split} d(\mathbb{K}fv,\mathbb{K}fw) &= \frac{\|(fv) \wedge (fw)\|}{\|fv\| \|fw\|} \leq \frac{\|f\|^2 \|v \wedge w\|}{\|fv\| \|fw\|} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\|v \wedge w\|}{\|v\| \|w\|} = \frac{1}{\varepsilon^2} d(\mathbb{K}v,\mathbb{K}w). \end{split}$$

Le lemme suivant et notre généralisation du lemme des ombres serviront de base au contrôle de distance dans la construction du produit générique :

**Lemme 2.1.6.** Soient r > 0 et  $\varepsilon > 0$ . Il existe un réel  $\eta > 0$  tel que pour toute semi-similitude f de V, pour tout hyperplan W de V avec  $\delta\left(\mathbb{P}\left(V_f^M\right),\mathbb{P}(W)\right) \geq r$ , on ait :

$$f^{-1}b(\mathbb{P}\left(W\right),\eta)\subset b(\mathbb{P}\left(f^{-1}W\right),\varepsilon).$$

Démonstration. Soit f une semi-similitude de V. Alors, son adjoint  $f^*$  est une semi-similitude de  $V^*$ . Soit  $\varphi$  une forme linéaire non nulle de V. On a  $f^{-1}(\varphi^{\perp}) = (f^*(\varphi))^{\perp}$ . Supposons que  $\delta\left(\mathbb{P}\left(V_f^M\right), \mathbb{P}\left(\varphi^{\perp}\right)\right) \geq r$ . Alors, comme, pour v dans  $V_f^M$ ,  $(V^*)_{f^*}^m \subset v^{\perp}$ , on a

$$d\left(\mathbb{K}\varphi,\mathbb{P}\left((V^*)_{f^*}^m\right)\right)\geq r.$$

Soit  $0<\eta\leq\frac{r}{2}$ . Soit v un vecteur non nul de V et supposons que l'on a  $d(\mathbb{K}v,\mathbb{P}\left(\varphi^{\perp}\right))\leq\eta$ . On a  $d(\mathbb{K}\varphi,\mathbb{P}\left(v^{\perp}\right))\leq\eta$  et, donc, d'après le lemme 2.1.5,

572 J.-F. Quint CMH

on a  $d(\mathbb{K}f^*(\varphi), \mathbb{P}(f^*(v^{\perp}))) \leq \frac{4\eta}{r^2}$ . Comme  $f^*(v^{\perp}) = (f^{-1}(v))^{\perp}$ , il vient,

$$f^{-1}b(\varphi^\perp,\eta)\subset b\left(f^{-1}(\varphi^\perp),\frac{4\eta}{r^2}\right),$$

d'où le résultat. □

### 2.2. Groupes réductifs

On fixe un  $\mathbb{K}$ -groupe réductif connexe G. On note G le groupe de ses  $\mathbb{K}$ -points. Nous introduisons ici le vocabulaire concernant G et ses décompositions qui sera utilisé dans la suite du texte. Le lecteur trouvera plus de précisions, pour la théorie générale des groupes réductifs, dans [6] et [12], pour la théorie sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , dans [10] et [11] et, pour la théorie sur des corps non-archimédiens, dans [8], [9] et [20].

#### 2.2.1. Système de racines et chambre de Weyl

Pour tout  $\mathbb{K}$ -groupe  $\mathbf{H}$ , on note  $X(\mathbf{H})$  le groupe de ses caractères rationnels.

On note r le  $\mathbb{K}$ -rang de  $\mathbf{G}$ . On fixe un tore  $\mathbb{K}$ -déployé maximal  $\mathbf{A}$  de  $\mathbf{G}$  et on note A le groupe de ses  $\mathbb{K}$ -points. On note  $\mathbf{Z}$  le centralisateur de  $\mathbf{A}$  dans  $\mathbf{G}$  et Z le groupe de ses  $\mathbb{K}$ -points. Le groupe  $\mathbf{X}(\mathbf{A})$  est un groupe abélien libre de rang r. L'homomorphisme de restriction identifie  $\mathbf{X}(\mathbf{Z})$  à un sous-groupe d'indice fini de  $\mathbf{X}(\mathbf{A})$ . On note  $E^*$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{X}(\mathbf{A})$  et E son dual. Pour tout  $\chi$  dans  $\mathbf{X}(\mathbf{A})$ , on note  $\chi^{\omega}$  la forme linéaire associée sur E.

Soit  $\mathfrak g$  l'algèbre de Lie de  $\mathbf G$ . Soit  $\Sigma$  l'ensemble des racines de  $\mathbf A$  dans  $\mathfrak g$ . Alors  $\Sigma^{\omega}$  est un système de racines dans  $E^*$ . On choisit dans  $\Sigma$  un système de racines positives  $\Sigma^+$  et on note  $\Pi$  la base de  $\Sigma$  associée à ce choix.

On note  $E^+$  et  $E^{++}$  les chambres de Weyl positive et strictement positive de  $\Sigma^+$  dans  $E^+$ . On munit E de l'ordre associé à  $E^+$ : si x et y sont deux vecteurs de E, on a  $x \geq y$  si et seulement si x-y appartient à  $E^+$ . Plus généralement, pour tous x,y dans E, pour tout  $C \geq 0$ , on note  $x \geq_C y$  si et seulement si

$$\forall \alpha \in \Pi \quad \alpha^{\omega}(x-y) \ge -C.$$

On note W le groupe de Weyl de  $\Sigma$  : il s'identifie au quotient du normalisateur de A dans G par Z. Pour tout  $\alpha$  dans  $\Sigma$ , on note  $\sigma_{\alpha} \in W$  la réflexion associée. On note  $w_0$  le plus long élément de W: c'est l'unique élément de W qui envoie  $E^+$  sur  $-E^+$ . On appelle  $\iota = -w_0$  l'involution d'opposition de  $E^+$ . On note  $E_S$  l'unique supplémentaire W-stable de l'espace  $E^W$  des points fixes de W dans E et  $(\varpi_{\alpha})_{\alpha \in \Pi}$  la famille des poids fondamentaux de  $\Pi$ , avec la convention  $(\varpi_{\alpha})_{|E^W} = 0$ , pour  $\alpha$  dans  $\Pi$ .

Pour tout z dans Z, on note  $\nu(z)$  l'unique vecteur de E tel que, pour tout  $\chi$  dans  $X(\mathbf{Z})$ , on ait :

$$\chi^{\omega}(\nu(z)) = -\omega(\chi(z)).$$

L'application  $\nu$  est un homomorphisme de groupes de Z dans E. Si  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , l'application  $\nu$  est surjective. Si  $\mathbb{K}$  est non-archimédien, l'image de  $\nu$  est un réseau stable par l'action de W dans E. On note  $Z^+ = \nu^{-1}(E^+)$ .

Pour tout  $\alpha$  dans  $\Sigma$ , on note  $m_{\alpha}$  la dimension de l'espace poids de  $\alpha$  dans  $\mathfrak{g}$  et on pose  $\rho = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha^{m_{\alpha}}$ .

Dorénavant, on considèrera tout caractère rationnel de  $\bf A$  comme une forme linéaire sur E. On fixe une partie  $X_C$  de  $\bf X(\bf Z)$  qui engendre  $(E^*)^W$ 

On fixe un produit scalaire W-invariant (.,.) sur E. On note  $\|.\|$  la norme euclidienne associée.

#### 2.2.2. Facettes

On note  $\mathbf{P}_\Pi$  le  $\mathbb{K}$ -sous-groupe parabolique minimal de  $\mathbf{G}$  associé au choix de  $\mathbf{A}$  et de  $\Sigma^+$ 

Soit  $\theta \subset \Pi$ . On note  $\theta^c$  le complémentaire de  $\theta$  dans  $\Pi$ . On note

$$E_{\theta} = \bigcap_{\alpha \in \theta^c} \ker \alpha, \ E_{\theta}^+ = E_{\theta} \cap E^+ \text{ et } E_{\theta}^{++} = E_{\theta}^+ - \left( \bigcup_{\tau \subseteq \theta} E_{\tau}^+ \right).$$

Les  $(E_{\theta}^+)_{\theta \subset \Pi}$  sont les facettes du cône polyhédral  $E^+$ .

On note  $W_{\theta}$  le fixateur de  $E_{\theta}$  dans W: c'est le sous-groupe de W engendré par les réflexions associées aux éléments de  $\theta^c$ . On note  $p_{\theta}$  l'unique projecteur (orthogonal)  $W_{\theta}$ -invariant de E dans  $E_{\theta}$ . Nous aurons à utiliser:

**Lemme 2.2.1.** Pour tout x dans E, pour tout y dans  $E_{\theta}$ , on a :

$$(p_{\theta}(x) = y) \Leftrightarrow (\forall \chi \in X_C \cup \{\varpi_{\alpha} | \alpha \in \theta\} \quad \chi(x) = \chi(y)).$$

Démonstration. Nous utilisons ici librement les résultats de [7, 1.10].

Il s'agit de montrer que l'on a :

$$\ker p_\theta = E_S \cap \bigcap_{\alpha \in \theta} \ker \varpi_\alpha.$$

Soit  $p_{\theta}^*$ , l'adjoint de  $p_{\theta}$ . Alors, comme l'image de  $p_{\theta}$  est  $E_{\theta}$ ,  $p_{\theta}^*$  est un projecteur orthogonal de noyau  $\bigoplus_{\alpha \in \theta^c} \mathbb{R}^{\alpha}$  et, donc, d'image

$$\left(\bigoplus_{\alpha\in\theta^{\circ}}\mathbb{R}\alpha\right)^{\perp}=\bigoplus_{\alpha\in\theta}\mathbb{R}\varpi_{\alpha}\oplus(E^{*})^{W},$$

d'où le résultat.

On note  $\mathbf{A}_{\theta}$  la composante Zariski connexe de  $\bigcap_{\alpha \in \theta^{c}} \ker \alpha$  dans  $\mathbf{A}$ . Soit  $\mathbf{L}_{\theta}$  le centralisateur de  $\mathbf{A}_{\theta}$  dans  $\mathbf{G}$ : c'est un  $\mathbb{K}$ -groupe réductif connexe. On note  $L_{\theta}$  le groupe de ses  $\mathbb{K}$ -points. On note  $\mathbf{P}_{\theta}$  le  $\mathbb{K}$ -groupe  $\mathbf{L}_{\theta}\mathbf{P}_{\Pi}$  et  $P_{\theta}$  le groupe de ses  $\mathbb{K}$ -points. De même, on note  $\mathbf{P}_{\theta}^{\vee}$  le  $\mathbb{K}$ -sous-groupe parabolique de  $\mathbf{G}$  opposé à  $\mathbf{P}_{\theta}$  par rapport à  $\mathbf{A}$  et  $P_{\theta}^{\vee}$  le groupe de ses  $\mathbb{K}$ -points.

#### 2.2.3. Représentations de G

Soit  $(\rho,V)$  une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de  ${\bf G}$ . On appelle poids restreints de  $\rho$  les poids rationnels de la représentation  $\rho_{|{\bf A}}$ . D'après [19, 7.2], l'ensemble des poids restreints possède un plus grand élément  $\chi$  pour l'ordre associé à  $\Pi$  sur  $E^*$ . On dit que  $\chi$  est le plus haut poids restreint de  $\rho$ . Les autres poids restreints sont de la forme  $\chi - \sum_{\alpha \in \Pi} n_{\alpha} \alpha$  avec, pour tout  $\alpha$  dans  $\Pi$ ,  $n_{\alpha} \in \mathbb{N}$ . On note  $V_{\Pi}^+$  l'espace poids associé à  $\chi$  et  $V_{\Pi}^<$  l'unique supplémentaire A-stable de  $V_{\Pi}^+$ .

D'après [19], on a :

**Proposition 2.2.2.** (Tits) Il existe une famille de représentations rationnelles irréductibles  $(\rho_{\alpha}, V_{\alpha})_{\alpha \in \Pi}$  de  $\mathbf{G}$  telles que, pour tout  $\alpha$  dans  $\Pi$ , le plus haut poids restreint  $\chi_{\alpha}$  de  $(\rho_{\alpha}, V_{\alpha})$  soit un multiple du poids fondamental associé à  $\alpha$  et que  $\dim V_{\alpha,\Pi}^+ = 1$ .

Dorénavant, on fixe une telle famille de représentations. D'après le lemme 2.2.1, on a :

**Lemme 2.2.3.** Pour tout  $\theta \subset \Pi$ , pour tous x dans E et y dans  $E_{\theta}$ , on a:

$$(p_{\theta}(x) = y) \Leftrightarrow (\forall \chi \in X_C \cup \{\chi_{\alpha} | \alpha \in \theta\} \quad \chi(x) = \chi(y)).$$

Pour tout  $\alpha$  dans  $\Pi$ , on note  $X_{\alpha}$  la droite  $V_{\alpha,\Pi}^+$  et  $V_{\alpha}^{<}$  son unique supplémentaire A-stable. Tous les poids de  $\mathbf{A}$  dans  $V_{\alpha}^{<}$  sont de la forme

$$\chi_{\alpha} - \alpha - \sum_{\beta \in \Pi} n_{\beta} \beta$$

avec, pour tout  $\beta$  dans  $\Pi$ ,  $n_{\beta} \in \mathbb{N}$ .

## 2.2.4. Décomposition de Jordan

Un élément de G est dit elliptique si et seulement s'il est semi-simple et contenu dans un sous-groupe compact de G. Un élément de G est dit hyperbolique si et seulement s'il est conjugué à un élément de A. On dit qu'un élément g de G admet une décomposition de Jordan si et seulement s'il peut s'écrire sous la forme  $g=g_eg_hg_u$  avec  $g_e$  elliptique,  $g_h$  hyperbolique et  $g_u$  unipotent qui commutent deux à deux. Dans ce cas, on note  $\lambda(g)$  l'image par  $\nu$  d'un élément de  $A^+$  conjugué à  $g_h$ : il ne dépend que de g.

Si  $\mathbb K$  est  $\mathbb R$  ou  $\mathbb C,$  tous les éléments de G admettent une décomposition de Jordan.

Si  $\mathbb{K}$  est non-archimédien, pour tout g dans G, il existe n dans  $\mathbb{N}^*$  tel que  $g^n$  admette une décomposition de Jordan. On note encore  $\lambda(g) = \frac{1}{n}\lambda(g^n)$ : il ne dépend pas de n.

L'application  $\lambda: G \to E^+$  est  $\mathbb{R}$ -analytique si  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et localement constante si  $\mathbb{K}$  est non-archimédien. Pour tout g dans G, on a :  $\lambda(g^{-1}) = \iota(\lambda(g))$ .

Soit  $(\rho, V)$  une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de G de plus haut poids restreint  $\chi$ . Pour tout g dans G, on a  $\lambda_1(\rho(g)) = q^{\chi(\lambda(g))}$ .

Supposons dim  $V_{\Pi}^+=1$ . Alors  $\rho(g)$  est proximal si et seulement si, pour tout  $\alpha$  dans  $\Pi$  tel que  $\chi-\alpha$  soit un poids de  $\rho$ , on a  $\alpha(\lambda(g))>0$ . En particulier, pour tous  $\alpha$  dans  $\Pi$  et g dans G,  $\rho_{\alpha}(g)$  est proximal dans  $\mathbb{P}(V_{\alpha})$  si et seulement si  $\alpha(\lambda(g))\neq 0$ .

Soient  $\theta \subset \Pi$  et g dans G. On dit que g est  $\theta$ -proximal si et seulement si, pour tout  $\alpha$  dans  $\theta$ ,  $\alpha(\lambda(g)) > 0$ , c'est-à-dire si et seulement si, pour tout  $\alpha$  dans  $\theta$ ,  $\rho_{\alpha}(g)$  est proximal dans  $\mathbb{P}(V_{\alpha})$ .

#### 2.2.5. Décomposition de Cartan

Soit K un bon sous-groupe compact maximal de G relativement à A, c'est à dire tel que le normalisateur de A dans K contienne des représentants de tous les éléments de W.

Si  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , K est l'ensemble des points fixes d'une involution de Cartan  $\tau$  de G telle que, pour tout a dans A,  $\tau(a) = a^{-1}$ .

On a  $G=KZ^+K$ . De plus, pour tous  $z_1,z_2$  dans  $Z^+,z_2$  appartient à  $Kz_1K$  si et seulement si  $\nu(z_1)=\nu(z_2)$ . En particulier, on a ker  $\nu=K\cap Z$ . Il existe donc une unique application  $\mu:G\to E^+$  telle que, pour tous  $g_1,g_2$  dans  $G,g_2$  appartienne à  $Kg_1K$  si et seulement si  $\mu(g_1)=\mu(g_2)$  et que  $\mu_{|Z^+}=\nu_{|Z^+}$ . L'application  $\mu$  est propre. Elle est  $\mathbb R$ -analytique si  $\mathbb K$  est  $\mathbb R$  ou  $\mathbb C$  et localement constante si  $\mathbb K$  est non-archimédien. Pour tout g dans G, on a  $\mu(g^{-1})=\iota(\mu(g))$  et la formule du rayon spectral :

$$\frac{1}{n}\mu(g^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda(g).$$

L'application  $g \mapsto p_{\emptyset}(\mu(g))$  est un homomorphisme de G dans  $E^W$ ; en d'autres termes, pour tout  $\chi$  dans  $X_C$ , pour tous g, h dans G, on a  $\chi(\mu(gh)) = \chi(\mu(g)) + \chi(\mu(h))$ .

Soit  $(\rho, V)$  une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de  $\mathbf{G}$ , de plus haut poids restreint  $\chi$ . Pour tout  $\kappa$  dans  $\mathbf{X}(\mathbf{A})$ , on note  $V_{\kappa}$  l'espace poids associé à  $\kappa$ .

Si  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ ), on peut choisir un produit scalaire (resp. un produit scalaire hermitien) sur V pour lequel les éléments de  $\rho(K)$  sont orthogonaux (resp. unitaires) et ceux de  $\rho(A)$  symétriques (resp. hermitiens). On munit V de la norme associée. Les  $(V_{\kappa})_{\kappa \in \mathcal{X}(\mathbf{A})}$  sont en bonne somme directe et, pour tout z dans Z, pour tout  $\kappa$  dans  $\mathcal{X}(\mathbf{A})$ ,  $\rho(z)$  induit sur  $V_{\kappa}$  une similitude de rapport  $e^{\kappa(\nu(z))}$ .

Si  $\mathbb{K}$  est non-archimédien, on peut trouver, d'après [16, 6], une norme ultramétrique K-invariante sur V telle que les  $(V_{\kappa})_{\kappa \in \mathcal{X}(\mathbf{A})}$  soient en bonne somme directe et que, pour tout z dans Z, pour tout  $\kappa$  dans  $\mathcal{X}(\mathbf{A})$ ,  $\rho(z)$  induise sur  $V_{\kappa}$  une similitude de rapport  $q^{\kappa(\nu(z))}$ .

Dans les deux cas, on dira qu'une norme sur V ayant ces propriétés est  $(\rho, A, K)$ -bonne. Pour une norme  $(\rho, A, K)$ -bonne, les éléments de  $\rho(K)$  sont des isométries et ceux de  $\rho(Z)$  des semi-similitudes. Pour tout g dans G, la décomposition de Cartan permet donc d'écrire  $\rho(g)$  comme le produit d'une isométrie et d'une semi-

similitude. En particulier, on a :

$$\|\rho(g)\| = q^{\chi(\mu(g))}$$

et, si k est un élément de K tel que g appartienne à kZK, pour tout v dans V tel que  $\rho(g)v$  appartienne à  $kV_{\Pi}^+$ , on a :

$$\left\|\rho(g)v\right\|=\left\|\rho(g)\right\|\left\|v\right\|.$$

Dorénavant, on munit, pour tout  $\alpha$  dans  $\Pi$ ,  $V_{\alpha}$  d'une norme  $(\rho_{\alpha}, A, K)$ -bonne et  $\mathbb{P}(V_{\alpha})$  de la distance associée. Rappelons un résultat de Y. Benoist :

**Lemme 2.2.4.** (Benoist, [3, 5.1]) Pour toute partie compacte L de G, il existe une partie compacte M de E telle que, pour tout g dans G, on ait :

$$\mu(LgL) \subset \mu(g) + M$$
.

Démonstration. Soit L une partie compacte de G. Soient g dans G et  $l_1$  et  $l_2$  dans L. D'une part, pour tout  $\alpha$  dans  $\Pi$ , on a :

 $\left\|\rho_{\alpha}(l_{1})^{-1}\right\|^{-1}\|\rho_{\alpha}(g)\|\left\|\rho_{\alpha}(l_{2})^{-1}\right\|^{-1} \leq \|\rho_{\alpha}(l_{1}gl_{2})\| \leq \|\rho_{\alpha}(l_{1})\|\left\|\rho_{\alpha}(g)\right\|\left\|\rho_{\alpha}(l_{2})\right\|$  d'où, par conséquent,

$$\chi_{\alpha}(\mu(g)) - 2 \max_{l \in L} \chi_{\alpha}(\mu(l^{-1})) \le \chi_{\alpha}(\mu(l_1 g l_2)) \le \chi_{\alpha}(\mu(g)) + 2 \max_{l \in L} \chi_{\alpha}(\mu(l))$$

et, d'autre part, pour tout  $\chi$  dans  $X_C$ , on a :

$$\chi(\mu(l_1gl_2)) = \chi(\mu(l_1)) + \chi(\mu(g)) + \chi(\mu(l_2))$$

d'où

$$|\chi(\mu(l_1gl_2)) - \chi(\mu(g))| \le 2 \max_{l \in L} |\chi(\mu(l))|.$$

Le résultat en découle, puisque l'ensemble  $X_C \cup \{\chi_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$  engendre  $E^*$ .  $\square$ 

De même, on peut montrer:

**Lemme 2.2.5.** Pour tout voisinage V de 0 dans E, il existe un voisinage W de e dans G tel que, pour tout g dans G,

$$\mu(WgW) \subset \mu(g) + V.$$

#### 2.2.6. Sous-groupes paraboliques et variétés drapeaux

Soit  $\theta \subset \Pi$ . On note  $\mathcal{P}_{\theta}$  l'ensemble des  $\mathbb{K}$ -sous-groupes paraboliques conjugués à  $\mathbf{P}_{\theta}$  de  $\mathbf{G}$ . L'application

$$G \to \mathcal{P}_{\theta}$$
$$q \mapsto q \mathbf{P}_{\theta} q^{-1}$$

identifie  $\mathcal{P}_{\theta}$  et  $G/P_{\theta}$ : on peut ainsi voir  $\mathcal{P}_{\theta}$  comme une variété  $\mathbb{K}$ -analytique. Comme l'action de K sur  $\mathcal{P}_{\theta}$  est transitive, cette variété analytique est compacte. On note  $\nu_{\theta}$  l'unique probabilité borélienne K-invariante de  $\mathcal{P}_{\theta}$ .

On note  $\xi_{\theta}$  le sous-groupe  $\mathbf{P}_{\theta}$  vu comme un point de  $\mathcal{P}_{\theta}$  et  $\mathcal{Q}_{\theta}^{-}$  la sous-variété fermée  $\mathcal{P}_{\theta} - P_{\theta}^{\vee} \xi_{\theta} = \mathcal{P}_{\theta} - P_{\Pi}^{\vee} \xi_{\theta}$  de  $\mathcal{P}_{\theta}$ .

Pour tout  $\alpha$  dans  $\theta$ ,  $GX_{\alpha}$  est une sous-variété  $\mathbb{K}$ -analytique fermée de  $\mathbb{P}(V_{\alpha})$ . En particulier, le G-entrelacement

$$\mathcal{P}_{ heta} 
ightarrow \prod_{lpha \in heta} \mathbb{P}\left(V_{lpha}
ight)$$

qui, à un sous-groupe parabolique de type  $\theta$ , associe la famille de ses uniques points fixes dans les  $V_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \theta$ , est une immersion fermée. Il identifie  $\xi_{\theta}$  avec  $(X_{\alpha})_{\alpha \in \theta}$  et  $\mathcal{Q}_{\theta}^{-}$  avec le complémentaire de l'intersection de son image et de  $\prod_{\alpha \in \theta} (\mathbb{P}(V_{\alpha}) - \mathbb{P}(V_{\alpha}^{<}))$ . Pour tout  $\xi$  dans  $\mathcal{P}_{\theta}$ , on note  $(\xi_{\alpha})_{\alpha \in \theta}$  son image par cette application. On munit  $\mathcal{P}_{\theta}$  de la distance induite par la distance produit de  $\prod_{\alpha \in \theta} \mathbb{P}(V_{\alpha})$ . Alors, K agit par isométries et G par transformations lipschitziennes sur  $\mathcal{P}_{\theta}$ .

Soit g dans G. Alors g est  $\theta$ -proximal si et seulement s'il possède un point fixe attracteur dans  $\mathcal{P}_{\theta}$ . On note alors  $\xi_{\theta,g}^+$  ce point fixe : il s'identifie à  $\left(V_{\alpha,\rho_{\alpha}(g)}^+\right)_{\alpha\in\theta}$ .

Soit  $L \subset P_{\Pi}$  une partie bornée. L'ensemble  $\bigcup_{z \in Z^+} z^{-1}Lz$  est encore borné. De même, si  $L \subset P_{\Pi}^{\vee}$  est une partie bornée, l'ensemble  $\bigcup_{z \in Z^+} zLz^{-1}$  est encore borné. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on pose :

$$B_{\theta}^{\varepsilon} = \{ \xi \in \mathcal{P}_{\theta} | \forall \alpha \in \theta \quad d(\xi_{\alpha}, \mathbb{P}(V_{\alpha}^{<})) \geq \varepsilon ) \}.$$

Il existe une partie compacte L de  $P_{\Pi}^{\vee}$  telle que  $B_{\theta}^{\varepsilon} \subset L\xi_{\theta}$ .

### 2.2.7. Sous-groupes Zariski denses

Nous rappelons ici une partie des résultats de [4, 4] et de [5].

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe Zariski dense de G. On appelle cône limite de  $\Gamma$  et on note  $l_{\Gamma}$  le cône fermé engendré par  $\lambda(\Gamma)$  dans  $E^+$ .

Soit  $P \subset E$ . On appelle cône asymptote à P l'ensemble des vecteurs x dans E pour lesquels il existe une suite de vecteurs  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans P et une suite de réels positifs  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers 0 telles que  $t_n x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$ .

Par la formule du rayon spectral,  $l_{\Gamma}$  est contenu dans le cône asymptote à  $\mu(\Gamma)$ .

**Théorème 2.2.6.** (Benoist, [4]) Le cône limite  $l_{\Gamma}$  de  $\Gamma$  est exactement le cône asymptote à  $\mu(\Gamma)$  et l'ensemble  $\mu(\Gamma)$  reste à distance bornée de  $l_{\Gamma}$ . Le cône  $l_{\Gamma}$  est convexe et, si  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$ , son intersection avec  $E_S$  est d'intérieur non vide dans  $E_S$ .

On appelle type de  $\Gamma$  et on note  $\theta_{\Gamma}$  l'unique partie  $\theta$  de  $\Pi$  telle que  $l_{\Gamma} \subset E_{\theta}^{+}$  et que  $l_{\Gamma} \cap E_{\theta}^{++} \neq \emptyset$  : c'est le plus grand  $\theta \subset \Pi$  tel que  $\Gamma$  contienne des éléments  $\theta$ -proximaux. Si  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$ ,  $\theta_{\Gamma} = \Pi$ . L'ensemble  $\theta_{\Gamma}$  est stable par  $\iota$  et, si  $\Gamma$  est discret,  $\theta_{\Gamma} \neq \emptyset$ .

On note  $F_{\Gamma}$  le sous-espace vectoriel de E engendré par  $l_{\Gamma}$ . Nous aurons à utiliser l'existence dans  $\Gamma$  de sous-semi-groupes libres :

578 J.-F. Quint CMH

Proposition 2.2.7. (Benoist, [4, 5.1]) Si  $\theta_{\Gamma} \neq \emptyset$ , il existe un réel  $\kappa \geq 0$  tel que, pour tout cône  $\mathcal{C}$  dans E, si l'intérieur dans  $F_{\Gamma}$  de  $\mathcal{C} \cap l_{\Gamma}$  est non vide, il existe des éléments  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  dans  $\Gamma$  et des vecteurs  $x_1$  et  $x_2$  dans  $\mathcal{C} \cap l_{\Gamma}$  tels que le sous-semi-groupe  $\Delta$  de  $\Gamma$  engendré par  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  soit libre et que, si  $\Phi$  est l'unique homomorphisme de semi-groupes envoyant  $\gamma_1$  sur  $x_1$  et  $\gamma_2$  sur  $x_2$ , pour tout  $\gamma$  dans  $\Delta$ , mot de longueur  $\ell$  en les générateurs  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , on ait :

$$\mu(\gamma) \in \mathcal{C} \ et \ \|\mu(\gamma) - \Phi(\gamma)\| \le \kappa l.$$

#### 2.3. Produit générique

Dans cette section nous allons démontrer :

**Proposition 2.3.1.** Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret Zariski dense de G. Il existe une application  $\pi: \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$  ayant les propriétés suivantes :

(i) il existe un réel  $\kappa \geq 0$  tel que, pour tous  $\gamma_1, \gamma_2$  dans  $\Gamma$ ,

$$\|\mu(\pi(\gamma_1, \gamma_2)) - \mu(\gamma_1) - \mu(\gamma_2)\| \le \kappa.$$

(ii) pour tout réel  $R \geq 0$ , il existe une partie finie H de  $\Gamma$  telle que, pour  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma'_1, \gamma'_2$  dans  $\Gamma$ , avec  $\|\mu(\gamma_1) - \mu(\gamma'_1)\| \leq R$  et  $\|\mu(\gamma_2) - \mu(\gamma'_2)\| \leq R$ ,

$$\pi(\gamma_1, \gamma_2) = \pi(\gamma_1', \gamma_2') \Rightarrow (\gamma_1' \in \gamma_1 H \text{ et } \gamma_2' \in H\gamma_2).$$

L'idée de la construction est d'écrire, pour  $\gamma_1, \gamma_2$  dans  $\Gamma$ ,  $\pi(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1 f_{\gamma_1, \gamma_2} \gamma_2$  où  $f_{\gamma_1, \gamma_2}$  est choisi dans une partie finie de  $\Gamma$  de façon à vérifier les hypothèses des lemmes 2.3.3 et 2.3.8.

Dorénavant, on fixe, pour tout élément g de G, un élément  $z_g$  de  $Z^+$  et des éléments  $k_g$  et  $l_g$  de K tels que  $g=k_gz_gl_g$ .

# 2.3.1. Un calcul de composante de Cartan

Nous effectuons ici le calcul qui permet de valider le point (i) de la proposition 2.3.1.

Soit  $(\rho,V)$  une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de G munie d'une norme  $(\rho,A,K)$ -bonne. On munit  $\mathbb{P}(V)$  de la distance associée. Rappelons que, pour tout z dans  $Z^+$ , si, pour tout  $\alpha$  dans  $\Pi$ ,  $\alpha(\nu(z))>0$ ,  $\rho(z)$  est une semi-similitude avec  $V_{\rho(z)}^M=V_\Pi^+$  et  $V_{\rho(z)}^m=V_\Pi^<$  et que, pour tout g dans G, pour tout v dans V tel que  $\rho(g)v$  appartienne à  $k_gV_\Pi^+$ , on a :

$$\|\rho(g)v\| = \|\rho(g)\| \|v\|.$$

Pour tout g dans G, on note:

$$V_{\rho,g}^{M} = k_g V_{\Pi}^{+} \text{ et } V_{\rho,g}^{m} = l_g^{-1} V_{\Pi}^{<}.$$

Pour  $\alpha$  dans  $\Pi,$  on notera  $V^M_{\alpha,g}$  et  $V^m_{\alpha,g}$  pour  $V^M_{\rho_\alpha,g}$  et  $V^m_{\rho_\alpha,g}$ 

Si  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et si, pour tout  $\alpha$  dans  $\Pi$ ,  $\alpha(\mu(g)) > 0$ ,  $V_{\rho,g}^M$  et  $V_{\rho,g}^m$  ne dépendent pas des  $k_g$  et  $l_g$  choisis.

En appliquant le lemme 2.1.4 aux représentations de G, on obtient :

**Lemme 2.3.2.** Soit  $(\rho, V)$  une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de G munie d'une norme  $(\rho, A, K)$ -bonne. Pour tous  $\varepsilon > 0$  et g dans G, on a:

$$\forall v \in V - \{0\} \quad \left( d\left( \mathbb{K}v, \mathbb{P}\left(V_{\rho, g}^{m}\right) \right) \geq \varepsilon \right) \Rightarrow \left( \|gv\| \geq \varepsilon \|\rho(g)\| \|v\| \right).$$

Démonstration. Comme K agit par isométries sur V, il suffit de démontrer ce résultat quand g est dans  $Z^+$ . Alors,  $\rho(g)$  est une semi-similitude et  $V^m_{\rho(g)}$  est contenu dans  $V^{<}_{\Pi}$ . Le résultat est alors une conséquence du lemme 2.1.4.

Nous sommes à présent en mesure d'effectuer le calcul de la composante de Cartan du produit générique. L'hypothèse sur les distances dans l'énoncé ci-dessous traduit le fait que f écarte suffisament les uns des autres les ensembles de drapeaux associés à g et à h.

**Lemme 2.3.3.** Soient  $\theta \subset \Pi$ , r > 0 et F une partie compacte de G. Il existe un réel  $\kappa \geq 0$  tel que, pour tous g, h dans G, pour tout f dans F,

$$\left(\forall \alpha \in \theta \quad d\left(fV_{\alpha,h}^{M}, \mathbb{P}\left(V_{\alpha,g}^{m}\right)\right) \geq r\right) \Rightarrow \left(\|p_{\theta}(\mu(gfh) - \mu(g) - \mu(h))\| \leq \kappa\right).$$

*Démonstration.* Comme on l'a vu au paragraphe 2.2.5., pour tous g et h dans G, pour tout f dans F, pour tout  $\chi$  dans  $X_C$ , on a :

$$\chi(\mu(gfh)) = \chi(\mu(g)) + \chi(\mu(f)) + \chi(\mu(h))$$

et, donc,

$$|\chi(\mu(gfh) - \mu(g) - \mu(h))| \le \max_{f \in F} |\chi(\mu(f))|.$$

Par ailleurs, d'après le lemme 2.3.2, pour tout g dans G, pour tout  $\alpha$  dans  $\theta$ , on a :

$$\forall v \in V_{\alpha} \quad \left( d\left( \mathbb{K}v, \mathbb{P}\left(V_{\alpha, g}^{m}\right) \right) \geq r \right) \Rightarrow \left( \left\| gv \right\| \geq r \left\| \rho_{\alpha}(g) \right\| \left\| v \right\| \right).$$

Soient g et h dans G. Soit f dans F tels que, pour tout  $\alpha$  dans  $\theta$ , on ait :

$$d\left(fV_{\alpha,h}^{M}, \mathbb{P}\left(V_{\alpha,q}^{m}\right)\right) \geq r.$$

Soit  $\alpha$  dans  $\theta$ . D'une part, on a :

$$\begin{aligned} \|\rho_{\alpha}(gfh)\| &\leq \|\rho_{\alpha}(g)\| \|\rho_{\alpha}(h)\| \|\rho_{\alpha}(f)\| \\ &\leq \|\rho_{\alpha}(g)\| \|\rho_{\alpha}(h)\| \max_{k \in F} \|\rho_{\alpha}(k)\| \end{aligned}$$

donc,

$$\chi_{\alpha}(\mu(gfh) - \mu(g) - \mu(h)) \le \max_{k \in F} \chi_{\alpha}(\mu(k)).$$

D'autre part, soit v un vecteur non nul de  $V_{\alpha}$  tel que  $hv \in V_{\alpha,h}^{M}$ . On a :

$$\|\rho_{\alpha}(gfh)v\| \ge r \|\rho_{\alpha}(g)\| \|\rho_{\alpha}(fh)v\|$$

$$\ge r \|\rho_{\alpha}(g)\| \|\rho_{\alpha}(f)^{-1}\|^{-1} \|\rho_{\alpha}(h)v\|$$

$$\ge r \|\rho_{\alpha}(g)\| \|\rho_{\alpha}(f)^{-1}\|^{-1} \|\rho_{\alpha}(h)\| \|v\|.$$

Il vient:

$$\|\rho_{\alpha}(gfh)\| \ge r \left( \max_{k \in F} \|\rho_{\alpha}(k)^{-1}\| \right)^{-1} \|\rho_{\alpha}(g)\| \|\rho_{\alpha}(h)\|$$

d'où

$$\chi_{\alpha}(\mu(gfh) - \mu(g) - \mu(h)) \ge \log_q r - \max_{k \in F} \chi_{\alpha}(\mu(k^{-1})).$$

Le résultat en découle, puisque, d'après le lemme 2.2.3, pour tout x dans E,  $p_{\theta}(x)$  est entièrement déterminé par les  $\chi(x)$ , pour  $\chi$  dans  $X_C \cup \{\chi_{\alpha} \mid \alpha \in \theta\}$ .

#### 2.3.2. Un résultat de finitude

Rappelons que, si V est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, une famille de droites  $(X_j)_{j\in J}$  est dite être en position générale si et seulement si pour toute partie finie K de J de cardinal  $\leq \dim V$ , la famille de droites  $(X_j)_{j\in K}$  est en somme directe. Si J est fini, l'ensemble des familles de droites en position générale est un ouvert de Zariski de  $\mathbb{P}(V)^J$ .

Le résultat suivant est dû à H. Abels, G.-A. Margulis et G.-A. Soifer ([2, 4.7]). Il nous permettra de trouver, dans un sous-groupe Zariski dense  $\Gamma$  de G, une partie finie F telle que, étant donnés deux éléments g et h de G, il existe f dans F vérifiant les hypothèses des lemmes 2.3.3 et 2.3.8.

Si  $(\rho, V)$  est une représentation rationnelle irréductible et de dimension finie de  $\mathbf{G}$ , de plus haut poids restreint  $\chi$ , on note  $\theta_{\rho}$  l'ensemble des  $\alpha$  dans  $\Pi$  tels que  $\chi - \alpha$  soit un poids de  $\rho$ .

**Proposition 2.3.4.** (Abels–Margulis–Soifer) Soit  $\Gamma$  un sous-groupe Zariski dense de G. Soit  $(\rho_i, V_i)_{i \in I}$  une famille finie de représentations rationnelles, irréductibles et de dimensions finies de G, chacune munie d'une norme. On suppose que, pour tout i dans I, on a  $\theta_{\rho_i} \subset \theta_{\Gamma}$ . Alors, il existe une partie finie F de  $\Gamma$  et un réel r > 0 ayant la propriété suivante : pour toutes familles  $(X_i)_{i \in I}$  et  $(Y_i)_{i \in I}$  où, pour tout i dans I,  $X_i$  est une droite et  $Y_i$  un hyperplan de  $V_i$ , il existe f dans F tel que, pour tout i dans I,

$$d(fX_i, \mathbb{P}(Y_i)) \geq r$$
.

Démonstration. Soit h un élément  $\theta_{\Gamma}$ -proximal de  $\Gamma$ : pour tout i dans I,  $\rho(h)$  est proximal dans  $\mathbb{P}(V_i)$ . Notons, pour simplifier,

$$V_i^+ = V_{i,\rho_i(h)}^+ \text{ et } V_i^{<} = V_{i,\rho_i(h)}^{<}.$$

Soit  $l \in \mathbb{N}$ . Par récurrence, comme  $\Gamma$  est Zariski dense dans G, qui est Zariski connexe, et comme les  $(\rho_i, V_i)_{i \in I}$  sont irréductibles, on peut construire une famille  $(g_i)_{1 \le i \le l}$  d'éléments de  $\Gamma$  telle que, pour tout i dans I,

- (i) la famille de droites  $(g_j V_i^+)_{1 \le j \le l}$  est en position générale.
- (ii) la famille d'hyperplans  $(g_i V_i^{<})_{1 \le i \le l}$  est en position générale.
- (iii) pour tous j, k dans  $[1, l], g_j V_i^+ \not\subset g_k V_i^<$ .

Supposons  $l \geq \sum_{i \in I} \dim V_i$ . Alors, on peut trouver r > 0 tel que, pour toutes familles  $(X_i)_{i\in I}$  et  $(Y_i)_{i\in I}$  où, pour tout i dans  $I, X_i$  est une droite et  $Y_i$  un hyperplan de  $V_i$ ,

(i) il existe j dans [1, l] tel que, pour tout i dans I,

$$d\left(X_{i}, \mathbb{P}\left(g_{j}V_{i}^{<}\right)\right) \geq r.$$

(ii) il existe k dans [1, l] tel que, pour tout i dans I,

$$d\left(g_k V_i^+, \mathbb{P}\left(Y_i\right)\right) \ge r.$$

(iii) pour tous j, k dans [1, l],

$$d(g_j V_i^+, \mathbb{P}(g_k V_i^<)) \ge r.$$

Pour tout j dans  $[\![1,l]\!]$ , on pose  $V_{i,j}^+=g_jV_i^+$  et  $V_{i,j}^<=g_jV_i^<$ . Choisissons, pour tout j dans  $[\![1,l]\!]$ , un entier  $n_j$  suffisament grand pour que, pour tout i dans I,  $\rho(g_jh^{n_j}g_j^{-1})$  envoie

$$B\left(\mathbb{P}\left(V_{i,j}^{<}\right),\frac{r}{2}\right) \text{ dans } b\left(V_{i,j}^{+},\frac{r}{2}\right)$$

et posons, pour tout j dans [1, l],  $h_j = g_j h^{n_j} g_j^{-1}$ .

Posons  $F = \{h_k h_j | 1 \leq j, k \leq l\}$  et montrons que la partie F et le réel  $\frac{r}{2}$ vérifient les conclusions de la proposition.

Soient, pour tout i dans I,  $X_i$  une droite de  $V_i$  et  $Y_i$  un hyperplan de  $V_i$ . Il existe j dans [1, l] tel que, pour tout i dans I,

$$d\left(X_{i}, \mathbb{P}\left(V_{i,j}^{\leq}\right)\right) \geq r$$

et, par conséquent,

$$d\left(h_j X_i, V_{i,j}^+\right) \le \frac{r}{2}.$$

Par ailleurs, il existe k dans [1, l] tel que, pour tout i dans I,

$$d\left(V_{i,k}^{+},\mathbb{P}\left(Y_{i}\right)\right)\geq r.$$

Or, pour tout i dans I, comme

$$d\left(V_{i,j}^{+}, \mathbb{P}\left(V_{i,k}^{<}\right)\right) \ge r,$$

on a

$$d\left(h_jX_i,\mathbb{P}\left(V_{i,k}^<\right)\right)\geq \frac{r}{2}$$

et, donc,

$$d\left(h_k h_j X_i, \mathbb{P}\left(V_{i,k}^+\right)\right) \le \frac{r}{2}.$$

Il vient:

$$d(h_k h_j X_i, \mathbb{P}(Y_i)) \ge \frac{r}{2},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Déduisons-en un résultat qui sera utilisé dans la démonstration du lemme 2.3.8:

Corollaire 2.3.5. Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que, pour toutes familles  $(U_{\alpha})_{\alpha \in \Pi}$  et  $(W_{\alpha})_{\alpha \in \Pi}$ , où, pour tout  $\alpha$  dans  $\Pi$ ,  $U_{\alpha}$  et  $W_{\alpha}$  sont des hyperplans de  $V_{\alpha}$ , il existe  $\xi$  dans  $\mathcal{P}_{\Pi}$  avec, pour tout  $\alpha$  dans  $\Pi$ ,

$$d(\xi_{\alpha}, \mathbb{P}(U_{\alpha})) \ge \varepsilon \ et \ d(\xi_{\alpha}, \mathbb{P}(W_{\alpha})) \ge \varepsilon.$$

Démonstration. Soit r>0 comme dans la proposition 2.3.4 avec  $\Gamma=G$  et, comme famille de représentations, la réunion de deux copies de  $(V_{\alpha})_{\alpha\in\Pi}$ . Soient, pour tout  $\alpha$  dans  $\Pi$ ,  $U_{\alpha}$  et  $W_{\alpha}$  des hyperplans de  $V_{\alpha}$ . Alors, il existe f dans G tel que, pour tout  $\alpha$  dans  $\Pi$ , on ait :

$$d(fX_{\alpha}, \mathbb{P}(U_{\alpha})) \geq r \text{ et } d(fX_{\alpha}, \mathbb{P}(W_{\alpha})) \geq r.$$

Le point  $\xi = f\xi_{\Pi}$  convient.

#### 2.3.3. Un contrôle de distance

Ce paragraphe et le suivant ont pour but d'établir les résultats intermédiaires permettant de démontrer le point (ii) de la proposition 2.3.1. Nous commençons ici par généraliser des phénomènes de géométrie à courbure strictement négative.

Soit toujours  $\theta \subset \Pi$ . On note  $K_{\theta}$  le groupe  $P_{\theta} \cap K$  et, pour tout  $C \geq 0$ , on pose

$$E_{\theta}^{C} = \{ x \in E^{+} | \forall \alpha \in \theta^{c} \quad \alpha(x) \leq C \}$$

et  $Z_{\theta}^{C} = \nu^{-1}(E_{\theta}^{C}).$ 

Dans [1, 3.5], P. Albuquerque démontrait une généralisation du lemme des ombres de Sullivan. Le lemme suivant est la contraposée de ce résultat : à partir d'une information sur les actions d'un élément k de K et d'un élément z de Z sur une variété drapeau, il permet de contrôler la distance entre z et kz.

**Lemme 2.3.6.** Pour tout  $C \geq 0$  et pour toute partie compacte L de  $P_{\Pi}^{\vee}$ , il existe une partie compacte M de G telle que, pour tout z dans  $Z_{\theta}^{C}$ , pour tout k dans K,

$$(k\xi_{\theta} \in zL\xi_{\theta}) \Rightarrow (z^{-1}kz \in M)$$
.

Démonstration. Donnons-nous C et L comme dans l'énoncé. On peut supposer que, pour tout z dans  $Z^+, zLz^{-1} \subset L$ .

Pour tout z dans  $Z^+$  et pour tout p dans L, choisissons k(z,p) dans K et q(z,p) dans  $P_{\Pi}$  tels que zp=k(z,p)q(z,p), i.e. k(z,p)q(z,p) est une décomposition

Pour z dans  $Z^+$  et p dans L, on a :  $q(z,p)z^{-1} = k(z,p)^{-1}zpz^{-1} \in KL$  et, donc, la partie de  $P_{\Pi}$ 

$$L' = \{q(z, p)z^{-1} | z \in Z^+, p \in L\}$$

est bornée. Par conséquent,

$$L^{\prime\prime}=\{z^{-1}q(z,p)|z\in Z^+,p\in L\}\subset\bigcup_{z\in Z^+}z^{-1}L^\prime z$$

est bornée. Or, pour tout z dans  $Z^+$ , pour tout p dans L,

$$z^{-1}k(z,p)z=z^{-1}(zpq(z,p)^{-1})z=p(z^{-1}q(z,p))^{-1}\in L(L'')^{-1}.$$

Par ailleurs, l'ensemble

$$L''' = \bigcup_{z \in Z_{\theta}^C} z^{-1} K_{\theta} z$$

est borné.

Soient alors k dans K et z dans  $Z_{\theta}^{C}$  tels que  $k\xi_{\theta} \in zL\xi_{\theta}$ . Écrivons  $k\xi_{\theta} = zp\xi_{\theta}$ avec p dans L. On a:

$$k\xi_{\theta} = k(z, p)\xi_{\theta}$$

i.e.  $k \in k(z, p)K_{\theta}$  et, donc,

$$z^{-1}kz \in (z^{-1}k(z,p)z)(z^{-1}K_{\theta}z) \subset L(L'')^{-1}L'''$$
.

Pour tous g dans G et  $\varepsilon > 0$ , on note

$$B_{\theta,q}^{\varepsilon} = l_q^{-1} B_{\theta}^{\varepsilon}.$$

Nous faisons jouer à l'ensemble  $gB^{\varepsilon}_{\theta,g}$  le rôle des ombres de [18] et [1]. L'énoncé du résultat suivant signifie que, si un élément de G a une composante de Cartan proche de la facette associé à  $\theta$ , on peut reconstituer cet élément, à un compact près, à partir de sa composante de Cartan et de son ombre dans  $\mathcal{P}_{\theta}$ .

**Proposition 2.3.7.** Pour tous  $C \geq 0$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe une partie compacte M de G telle que, pour tout  $\theta \subset \Pi$ , pour tous g,h dans G avec  $\mu(g) \in E_{\theta}^{C}$  et  $\mu(h) \geq_C \mu(g)$ , si  $gB_{\theta,g}^{\varepsilon} \cap hB_{\theta,h}^{\varepsilon} \neq \emptyset$ , alors on a :

$$g \in k_h z_g M$$
.

Démonstration. Choisissons une partie compacte L de  $P_{\Pi}^{\vee}$  telle que  $B_{\theta}^{\varepsilon} \subset L\xi_{\theta}$  et que, pour tout z dans  $Z^+$ ,  $zLz^{-1} \subset L$ . Posons :

$$L' = \bigcup_{\substack{z \in Z \\ \forall \alpha \in \Pi \ |\alpha(\nu(z))| \leq C}} z^{-1} L z.$$

L'ensemble L' est encore borné.

D'après le lemme 2.3.6, on peut trouver une partie compacte M de G telle que, pour tout z dans  $Z_{\theta}^{C}$ , pour tout k dans K,

$$(k\xi_{\theta} \in zL'\xi_{\theta}) \Rightarrow (kz \in zM)$$
.

Par ailleurs, on peut trouver une partie compacte M' de G telle que, pour tout z dans  $Z_{\theta}^C$ ,  $z^{-1}K_{\theta}z \subset M'$ .

Soient g et h comme dans l'énoncé. On a :

$$gB_{\theta,g}^{\varepsilon} \subset k_g z_g L \xi_{\theta}$$
 et  $hB_{\theta,h}^{\varepsilon} \subset k_h z_h L \xi_{\theta}$ .

Comme  $\mu(h) = \nu(z_h) \ge_C \mu(g) = \nu(z_g)$ , il vient :

$$k_h z_h L \xi_\theta \subset k_h z_q L' \xi_\theta$$

et, donc,

$$k_g z_g L' \xi_\theta \cap k_h z_g L' \xi_\theta \neq \emptyset$$
.

Soit  $\xi \in k_g z_g L' \xi_\theta \cap k_h z_g L' \xi_\theta$ . Soit  $m_1$  dans K tel que  $\xi = k_g m_1 \xi_\theta$ . On a :

$$m_1 \xi_\theta \in z_q L' \xi_\theta$$

et, donc,

$$m_1 z_g \in z_g M$$
 ou encore  $k_g m_1 z_g \in gKM$ .

Soient  $h'=k_hz_gl_h$  et  $m_2$  dans K tels que  $\xi=k_gm_2\xi_\theta.$  On a, de même,

$$k_h m_2 z_g \in h'KM$$
.

Or, comme

$$k_q m_1 \xi_\theta = \xi = k_h m_2 \xi_\theta,$$

on a:

$$k_g m_1 \in k_h m_2 K_\theta$$
.

Il vient:

$$g \in k_q m_1 z_q M^{-1} K \subset k_h m_2 K_\theta z_q M^{-1} K \subset h' K M M' M^{-1} K. \qquad \Box$$

# 2.3.4. Produit générique dans G

Le résultat suivant combine la proposition 2.3.7 et les raisonnements de la section 2.1.

**Lemme 2.3.8.** Soient  $\theta \subset \Pi$ , C > 0, r > 0 et F une partie compacte de G. Il existe une partie compacte M de G ayant la propriété suivante : soient g, h dans G et f dans F; si

$$\mu(g), \mu(gfh) \in E_{\theta}^{C} \ \ et \ si \ \forall \alpha \in \theta \quad d\left(fV_{\alpha,h}^{M}, \mathbb{P}\left(V_{\alpha,g}^{m}\right)\right) \geq r,$$

alors on a:

$$g \in k_{gfh} z_g M$$
.

Ce lemme signifie que, si f,g et h sont des éléments de G et que f met les ensembles de drapeaux associés à g et h en position suffisament générale, on peut retrouver g, à un compact près, à partir de sa composante de Cartan et de gfh. Comme on sait, d'après le lemme 2.3.3, que, quitte à augmenter C, sous nos hypothèses, on a  $\mu(gfh) \geq_C \mu(g)$ , on va chercher à appliquer la proposition 2.3.7, et, donc, à montrer que, pour un  $\varepsilon > 0$ , on a  $gB^{\varepsilon}_{\theta,g} \cap (gfh)B^{\varepsilon}_{\theta,gfh} \neq \emptyset$ , ou encore  $B^{\varepsilon}_{\theta,g} \cap fhB^{\varepsilon}_{\theta,gfh} \neq \emptyset$ . Pour montrer cette dernière propriété, on appliquera le lemme suivant à h:

**Lemme 2.3.9.** Soit  $(\rho, V)$  une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de G, munie d'une norme  $(\rho, A, K)$ -bonne. Pour tous r > 0 et  $\varepsilon > 0$ , il existe un réel  $\eta > 0$  tels que, pour tout g dans G, pour tout hyperplan W de V, si  $\delta\left(V_{\rho,g}^{M}, \mathbb{P}(W)\right) \geq r$ , on a:

$$g^{-1}b\left(\mathbb{P}\left(W\right),\eta\right)\subset b\left(\mathbb{P}\left(g^{-1}W\right),\varepsilon\right).$$

Démonstration. Comme K agit par isométries sur  $\mathbb{P}(V)$ , il suffit de le démontrer pour g dans  $Z^+$ . Alors,  $\rho(g)$  est une semi-similitude et notre résultat est le lemme 2.1.6.

Démonstration du lemme 2.3.8. Comme G agit par transformations lipschitziennes sur les  $\mathbb{P}(V_{\alpha})$ ,  $\alpha \in \Pi$ , on peut trouver r' > 0 tel que, pour tout f dans F, pour tout  $\alpha$  dans  $\theta$  et pour tous X, Y dans  $\mathbb{P}(V_{\alpha})$ , on ait

$$(d(fX,Y) > r) \Rightarrow (d(X, f^{-1}Y) > r').$$

Soit  $\varepsilon > 0$  comme dans le corollaire 2.3.5.

D'après le lemme 2.3.9, il existe un réel  $0 < \eta \le \varepsilon$  vérifiant la propriété suivante : soient g dans G et, pour tout  $\alpha$  dans  $\theta$ , un hyperplan  $W_{\alpha}$  de  $V_{\alpha}$  avec

$$d(\mathbb{P}\left(V_{\alpha,q}^{M}\right),\mathbb{P}\left(W_{\alpha}\right)) \geq r',$$

alors, on a

$$\forall \alpha \in \theta \quad g^{-1}b(\mathbb{P}(W_{\alpha})), \eta) \subset b(\mathbb{P}(g^{-1}W_{\alpha}), \varepsilon).$$

Il existe un réel  $0 < \varpi \le \eta$  tel que, pour tout  $\alpha$  dans  $\theta$ , pour tout hyperplan W de  $V_{\alpha}$ , pour tout f dans F, on ait :

$$f^{-1}b(\mathbb{P}(W), \varpi) \subset b(f^{-1}\mathbb{P}(W), \eta).$$

Par ailleurs, d'après le lemme 2.3.3, quitte à augmenter C, on peut supposer que, pour tous g, h dans G, pour tout f dans F, si

$$\forall \alpha \in \theta \quad d\left(fV_{\alpha,h}^{M}, \mathbb{P}\left(V_{\alpha,g}^{m}\right)\right) \geq r,$$

on a  $p_{\theta}(\mu(gfh)) \geq_C p_{\theta}(\mu(g))$ . Alors, si  $\mu(g)$ ,  $\mu(gfh)$  sont dans  $E_{\theta}^C$ , on a  $\mu(gfh) \geq_{3C} \mu(g)$ .

Enfin, d'après la proposition 2.3.7, il existe une partie compacte M de G telle que, pour tout  $\theta \subset \Pi$ , pour tous g, h dans G avec  $\mu(g) \in E_{\theta}^C$  et  $\mu(h) \geq_{3C} \mu(g)$ , si

 $gB_{\theta,q}^{\varepsilon} \cap hB_{\theta,h}^{\varepsilon} \neq \emptyset$ , alors on a :

$$g \in k_h z_q M$$
.

Soient g, h dans G et f dans F avec  $\mu(g), \mu(gfh) \in E_{\theta}^{C}$ . Supposons que l'on a :

$$\forall \alpha \in \theta \quad d\left(fV_{\alpha,h}^M, \mathbb{P}\left(V_{\alpha,q}^m\right)\right) \geq r,$$

On a  $\mu(gfh) \geq_{3C} \mu(g)$ . Par ailleurs, pour tout  $\alpha$  dans  $\theta$ , on a :

$$h^{-1}b\left(f^{-1}\mathbb{P}\left(V_{\alpha,g}^{m}\right),\eta\right)\subset b\left(h^{-1}f^{-1}\mathbb{P}\left(V_{\alpha,g}^{m}\right),\varepsilon\right)$$

ce qui implique :

$$h^{-1}f^{-1}b\left(\mathbb{P}\left(V_{\alpha,g}^{m}\right),\varpi\right)\subset b\left(h^{-1}f^{-1}\mathbb{P}\left(V_{\alpha,g}^{m}\right),\varepsilon\right).$$

On peut trouver  $\xi$  dans  $\mathcal{P}_{\theta}$  tel que, pour tout  $\alpha$  dans  $\theta$ , on ait :

$$d\left(\xi_{\alpha}, \mathbb{P}\left(V_{\alpha, qfh}^{m}\right)\right) \geq \varepsilon \text{ et } d\left(\xi_{\alpha}, h^{-1} f^{-1} \mathbb{P}\left(V_{\alpha, q}^{m}\right)\right) \geq \varepsilon.$$

On a alors:

$$\xi \in B^{\varepsilon}_{\theta,gfh} \subset B^{\varpi}_{\theta,gfh}$$
 et  $fh\xi \in B^{\varpi}_{\theta,g}$ 

ou encore:

$$gfh\xi \in (gfh)B_{\theta,afh}^{\varpi} \cap gB_{\theta,a}^{\varpi}$$

et, par conséquent, d'après la proposition 2.3.7,  $g \in k_{gfh}z_gM$ .

### 2.3.5. Produit générique dans $\Gamma$

Les lemmes 2.3.3 et 2.3.8 et la proposition 2.3.4 nous permettent maintenant de conclure :

Démonstration de la proposition 2.3.1. D'après le théorème 2.2.6, on peut trouver un réel C>0 tel que, pour tout  $\gamma$  dans  $\Gamma$ , pour tout  $\alpha$  dans  $\theta^c_{\Gamma}$ ,  $\alpha(\mu(\gamma)) \leq C$ .

La famille  $(\rho_{\alpha}, V_{\alpha})_{\alpha \in \theta_{\Gamma}}$  vérifie les hypothèses de la proposition 2.3.4. Il existe donc une partie finie F de  $\Gamma$  et un réel r > 0 tels que, pour toute famille  $(U_{\alpha}, W_{\alpha})_{\alpha \in \theta_{\Gamma}}$  où, pour tout  $\alpha$  dans  $\theta_{\Gamma}$ ,  $U_{\alpha}$  est une droite et  $W_{\alpha}$  un hyperplan de  $V_{\alpha}$ , il existe f dans F tel que, pour tout  $\alpha$  dans  $\theta_{\Gamma}$ ,

$$d(fU_{\alpha}, \mathbb{P}(W_{\alpha})) \geq r.$$

Soient  $\gamma_1, \gamma_2$  dans  $\Gamma$ . On peut trouver un élément  $f_{\gamma_1, \gamma_2}$  de F tel que, pour tout  $\alpha$  dans  $\theta_{\Gamma}$ , on ait :

$$d\left(f_{\gamma_{1},\gamma_{2}}V_{\alpha,\gamma_{2}}^{M},\mathbb{P}\left(V_{\alpha,\gamma_{1}}^{m}\right)\right)\geq r.$$

En d'autres termes, le triplet  $(g, h, f) = (\gamma_1, \gamma_2, f_{\gamma_1, \gamma_2})$  vérifie les hypothèses des lemmes 2.3.3 et 2.3.8.

On pose  $\pi(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1 f_{\gamma_1, \gamma_2} \gamma_2$ . Comme  $\mu(\Gamma)$  est à distance bornée de  $E_{\theta_{\Gamma}}$ , il existe, d'après le lemme 2.3.3, un réel  $\kappa \geq 0$  tel que, pour tous  $\gamma_1, \gamma_2$  dans  $\Gamma$ ,

$$\|\mu(\pi(\gamma_1, \gamma_2)) - \mu(\gamma_1) - \mu(\gamma_2)\| \le \kappa.$$

Par ailleurs, d'après le lemme 2.3.8, il existe une partie compacte M de G telle que, pour tous  $\gamma_1,\gamma_2$  dans  $\Gamma$ , on ait  $\gamma_1\in k_{\pi(\gamma_1,\gamma_2)}z_{\gamma_1}M$ . En particulier, soient  $R\geq 0$  et  $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_1',\gamma_2'$  dans  $\Gamma$ , avec  $\|\mu(\gamma_1)-\mu(\gamma_1')\|\leq R$ ,  $\|\mu(\gamma_2)-\mu(\gamma_2')\|\leq R$  et  $\pi(\gamma_1,\gamma_2)=\pi(\gamma_1',\gamma_2')=\gamma_3$ . On a :

$$\gamma_1 \in k_{\gamma_3} z_{\gamma_1} M$$
 et  $\gamma_1' \in k_{\gamma_3} z_{\gamma_1'} M$ .

Il vient

$$\gamma_1^{-1}\gamma_1' \in M^{-1}\nu^{-1}(b(0,R))M.$$

L'ensemble  $H = M^{-1}\nu^{-1}(b(0,R))M \cap \Gamma$  est fini et l'on a :

$$\gamma_2' = f_{\gamma_1', \gamma_2'}^{-1}(\gamma_1')^{-1}\gamma_3 \in F^{-1}H^{-1}F\gamma_2.$$

# 3. Mesures coniques

Cette partie est indépendant de la première. Nous y traitons d'un point de vue abstrait le problème du calcul de l'exposant de convergence d'une mesure de Radon sur un espace vectoriel. Nous restreignons ensuite notre attention à certaines classes de mesures : si  $\Gamma$  est un sous-groupe discret Zariski dense de G, la mesure de comptage  $\sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_{\mu(\gamma)}$  vérifiera les hypothèses que nous ferons.

Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie r et  $\nu$  une mesure de Radon positive sur  $\mathcal{E}$ .

### 3.1. Divergence exponentielle

Dans cette section, nous abordons d'un point de vue général l'étude des exposants de convergence de  $\nu$ . Nous commençons par donner des méthodes de calcul du type de la formule de Hadamard. Nous associons alors à  $\nu$  une fonction homogène  $\psi_{\nu}$  qui contient toutes les informations sur la divergence exponentielle de  $\nu$  dans chacune des directions de  $\mathcal{E}$ . Enfin, nous introduisons un vocabulaire pour l'étude particulière des exposants de convergence associés aux formes linéaires de  $\mathcal{E}$ .

## 3.1.1. Exposants de convergence et formules de Hadamard

Étant donnée une norme N sur  $\mathcal{E}$ , pour tout réel t, on pose :

$$\mathcal{L}_{\nu}^{N}(t) = \int_{\mathcal{E}} e^{-tN(x)} \mathrm{d}\nu(x)$$

et:

$$\begin{split} \tau_{\nu}^{N} &= \inf \left\{ t \in \mathbb{R} \left| \mathcal{L}_{\nu}^{N}(t) < \infty \right. \right\} \\ &= \sup \left\{ t \in \mathbb{R} \left| \mathcal{L}_{\nu}^{N}(t) = \infty \right. \right\} \in \mathbb{R} \cup \{ +\infty, -\infty \}. \end{split}$$

On l'appelle exposant de convergence de  $\nu$  relativement à N.

Pour tous x dans  $\mathcal{E}$  et  $a \leq b$  dans  $\mathbb{R}$ , on note  $b^N(x,a)$  la boule de centre x et de rayon a relativement à la norme N et  $C^N(a,b)$  la couronne :

$$\{x \in \mathcal{E} \mid a \le N(x) \le b\}$$
.

Donnons quelques formules de Hadamard pour le calcul de  $\tau_{\nu}^{N}$ :

**Lemme 3.1.1.** Pour tous a > 0 et  $b, c \ge 0$  avec  $b + c \ge a$ , on a:

$$\tau_{\nu}^{N} = \frac{1}{a} \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \left(\nu \left(C^{N}(na-b,na+c)\right)\right)}{n}.$$

Pour tous 0 < a < b et  $c, d \ge 0$ , on a:

$$\min\left(a\tau_{\nu}^{N},b\tau_{\nu}^{N}\right)\leq \limsup_{n\to\infty}\frac{\log\left(\nu\left(C^{N}(na-c,nb+d)\right)\right)}{n}\leq \max\left(a\tau_{\nu}^{N},b\tau_{\nu}^{N}\right).$$

 $Si \tau_{\nu}^{N} > 0$ , on a:

$$au_{
u}^{N} = \limsup_{a o \infty} \frac{\log \left( \nu \left( b^{N}(0, a) \right) \right)}{a}.$$

Démonstration. Soient a > 0 et  $b, c \ge 0$  avec  $b + c \ge a$ . Il existe un entier  $n_0 > 0$  tel que, pour tout x dans  $\mathcal{E}$ ,

$$0 < \operatorname{card} \left\{ n \in \mathbb{N} | x \in C^N(na - b, na + c) \right\} \le n_0.$$

Il vient, pour tout t dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{split} \frac{1}{n_0} e^{-|t| \max(b,c)} \sum_{n=0}^{\infty} \nu \left( (C^N(na-b,na+c)) \, e^{-tna} &\leq \int_{\mathcal{E}} e^{-tN(x)} \mathrm{d}\nu(x) \\ &\leq e^{|t| \max(b,c)} \sum_{n=0}^{\infty} \nu \left( (C^N(na-b,na+c)) \, e^{-tna}, \right. \end{split}$$

d'où la première formule.

Soient 0 < a < b et  $c, d \ge 0$ . Comme a < b, il existe  $R \ge 0$  tel que

$$\mathcal{E} - b^N(0, R) \subset \bigcup_{n>0} C^N(na - c, nb + d).$$

D'autre part, pour tout entier n > 0, pour tout x dans  $C^N(na - c, nb + d)$ , pour tout m > 0, on a :

$$(x \in C^N(ma-c, mb+d)) \Rightarrow (ma-c \le nb+d) \Rightarrow \left(m \le \frac{nb+c+d}{a}\right)$$

et, donc,

$$\operatorname{card}\left\{m\in\mathbb{N}^*|x\in C^N(ma-c,mb+d)\right\}\leq \frac{nb+c+d}{a}.$$

Il vient, par conséquent, pour tout t dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{split} ae^{-|t|\max(c,d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nb+c+d} \nu \left( C^N(na-c,nb+d) \right) e^{-n\max(at,bt)} \\ &\leq \int_{\mathcal{E}-b^N(0,R)} e^{-tN(x)} \mathrm{d}\nu(x) \\ &\leq e^{|t|\max(c,d)} \sum_{n=1}^{\infty} \nu \left( C^N(na-c,nb+d) \right) e^{-n\min(at,bt)}, \end{split}$$

d'où la deuxième formule.

Enfin, on a:

$$\begin{split} \tau_{\nu}^{N} &= \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \left(\nu \left(C^{N}(n-1,n)\right)\right)}{n} \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \left(\nu \left(b^{N}(0,n)\right)\right)}{n} \\ &\leq \limsup_{a \to \infty} \frac{\log \left(\nu \left(b^{N}(0,a)\right)\right)}{a}. \end{split}$$

Supposons  $\tau_{\nu}^{N} > 0$ . Soient t et s avec

$$0 < t < s < \limsup_{a \to \infty} \frac{\log \left(\nu \left(b^N(0, a)\right)\right)}{a}$$
.

Pour tout réel  $a \ge 0$ , il existe  $b \ge a$  tel que, pour tout  $c \ge b$ , on ait :

$$e^{sc} - e^{tc} \ge \nu \left( b^N(0, a) \right)$$

et, donc, il existe c > b tel que l'on ait :

$$\nu(C^N(a,c)) \ge \nu(b^N(0,c)) - \nu(b^N(0,a)) \ge e^{sc} - \nu(b^N(0,a)) \ge e^{tc}.$$

On peut donc construire une suite  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$  de réels  $\geq 0$  avec, pour tout n dans  $\mathbb{N}$ ,

$$a_{n+1} \ge a_n + 1$$
 et  $\nu\left(C^N(a_n + 1, a_{n+1})\right) \ge e^{ta_{n+1}}$ .

Il vient alors:

$$\int_{\mathcal{E}} e^{-tN(x)} d\nu(x) \ge \sum_{n=0}^{\infty} \nu\left(C^N(a_n+1, a_{n+1})\right) e^{-ta_{n+1}} = \infty,$$

donc  $t \leq \tau_{\nu}^{N}$ , d'où la troisième formule.

De ces formules, on déduit immédiatement :

Corollaire 3.1.2. Soient  $\nu$  et  $\nu'$  des mesures de Radon sur  $\mathcal{E}$ . S'il existe une partie compacte M de  $\mathcal{E}$  et un réel  $\omega \geq 0$  tels que, pour tout borélien B de  $\mathcal{E}$ ,

$$\nu'(B) \le \omega \nu(B+M),$$

alors, pour toute norme N sur  $\mathcal{E}$ , on a  $\tau_{\nu'}^N \leq \tau_{\nu'}^N$ .

#### 3.1.2. Indicateur de croissance

Soit N une norme sur  $\mathcal{E}$ . Soit  $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$  un cône ouvert. On note  $\tau^N_{\mathcal{C},\nu}$  l'exposant de convergence relativement à N de la mesure  $\nu_{|\mathcal{C}}$ .

Pour tout x dans  $\mathcal{E} - \{0\}$ , on pose

$$\psi_{\nu}(x) = N(x) \inf \tau_{\mathcal{C},\nu}^{N},$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des cônes ouverts  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{E}$  contenant x, et on pose  $\psi_{\nu}(0)=0$ . Cette fonction ne dépend pas de N. On l'appelle indicateur de croissance de  $\nu$ . Elle est positivement homogène, *i.e.* pour tous  $t\geq 0$  et x dans  $\mathcal{E}$ , on a  $\psi_{\nu}(tx)=t\psi_{\nu}(x)$ .

La fonction  $\psi_{\nu}$  permet de calculer tous les exposants de convergence de  $\nu$ :

**Lemme 3.1.3.** Soit  $\theta: \mathcal{E} \to \mathbb{R}$  une fonction homogène et continue.

Si, pour tout x dans  $\mathcal{E} - \{0\}$ ,  $\theta(x) > \psi_{\nu}(x)$ , alors on a:

$$\int_{\mathcal{E}} e^{-\theta(x)} \mathrm{d}\nu(x) < \infty.$$

S'il existe un x dans  $\mathcal{E}-\{0\}$  tel que  $\theta(x)<\psi_{\nu}(x),$  alors on a :

$$\int_{\mathcal{E}} e^{-\theta(x)} \mathrm{d} \nu(x) = \infty.$$

Démonstration. Soit N une norme sur  $\mathcal{E}$ .

Supposons que, pour tout x dans  $\mathcal{E} - \{0\}$ ,  $\theta(x) > \psi_{\nu}(x)$ . En particulier, pour tout x dans  $\mathcal{E}$ ,  $\psi_{\nu}(x) < \infty$ . Soit x dans  $\mathcal{E} - \{0\}$ . Il existe un cône ouvert  $\mathcal{C}_x$  contenant x et un réel  $t_x$  tels que

$$N(x)\tau_{\mathcal{C}_x,\nu}^N < N(x)t_x < \theta(x).$$

Il existe un cône ouvert  $\mathcal{D}_x \subset \mathcal{C}_x$  contenant x et tel que, pour tout  $y \neq 0$  dans  $\mathcal{D}_x$ , on ait :

$$N(y)t_x < \theta(y)$$

et, donc,

$$N(y)\tau_{\mathcal{D}_x,\nu}^N \le N(y)\tau_{\mathcal{C}_x,\nu}^N < N(y)t_x < \theta(y).$$

Soient  $x_1, \ldots, x_n$  dans  $\mathcal{E}$  tels que l'on ait :

$$\mathcal{E} - \{0\} \subset \mathcal{D}_{x_1} \cup \ldots \cup \mathcal{D}_{x_n}.$$

Il vient:

$$\int_{\mathcal{E}-\{0\}} e^{-\theta(x)} \mathrm{d}\nu(x) \leq \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{D}_{x_i}} e^{-t_{x_i} N(y)} \mathrm{d}\nu(y) < \infty.$$

Supposons à présent qu'il existe x dans  $\mathcal{E} - \{0\}$  tel que  $\theta(x) < \psi_{\nu}(x)$ . On peut trouver un cône ouvert  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{E}$  et un réel t tels que, pour tout  $y \neq 0$  dans  $\mathcal{C}$ ,

$$\theta(y) < N(y)t < N(y)\frac{\psi_{\nu}(x)}{N(x)} \le N(y)\tau_{\mathcal{C},\nu}^{N}.$$

591

Il vient:

$$\int_{\mathcal{E}} e^{-\theta(y)} d\nu(y) \ge \int_{\mathcal{C}} e^{-tN(y)} d\nu(y) = \infty.$$

Corollaire 3.1.4. Pour toute norme N sur  $\mathcal{E}$ , on a :

$$au_{
u}^N = \sup_{x \in \mathcal{E} - \{0\}} rac{\psi_{
u}(x)}{N(x)}.$$

Corollaire 3.1.5. Pour toute function  $\theta: \mathcal{E} \to \mathbb{R}$  homogène et continue, on a :

$$\psi_{e^{\theta}\nu} = \psi_{\nu} + \theta.$$

D'après le corollaire 3.1.2, on a :

**Lemme 3.1.6.** Soient  $\nu$  et  $\nu'$  des mesures de Radon sur  $\mathcal{E}$ . S'il existe une partie compacte M de  $\mathcal{E}$  et un réel  $\omega \geq 0$  tels que, pour tout borélien B de  $\mathcal{E}$ ,

$$\nu'(B) \le \omega \nu(B+M),$$

alors  $\psi_{\nu'} \leq \psi_{\nu}$ .

On suppose dorénavant qu'il existe une norme N sur  $\mathcal{E}$  pour laquelle  $\tau_{\nu}^{N} < \infty$ , c'est-à-dire que, pour toute norme N sur  $\mathcal{E}$ ,  $\tau_{\nu}^{N} < \infty$ .

**Lemme 3.1.7.** La fonction  $\psi_{\nu}: \mathcal{E} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  est semi-continue supérieurement.

 $D\acute{e}monstration$ . Soit N une norme sur  $\mathcal{E}$ .

Soit  $x \neq 0$  dans  $\mathcal{E}$  et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite tendant vers x. Soit  $\mathcal{C}$  un cône ouvert contenant x. Pour n suffisament grand,  $x_n$  appartient aussi à  $\mathcal{C}$ , et, donc, on a :

$$\psi_{\nu}(x_n) \le N(x_n) \tau_{\mathcal{C}, \nu}^N.$$

Il vient:

$$\limsup_{n\to\infty}\psi_{\nu}(x_n)\leq \limsup_{n\to\infty}\left(N(x_n)\tau_{\mathcal{C},\nu}^N\right)=N(x)\tau_{\mathcal{C},\nu}^N.$$

Par conséquent, on a :

$$\limsup_{n \to \infty} \psi_{\nu}(x_n) \le \psi_{\nu}(x)$$

et, donc,  $\psi_{\nu}$  est semi-continue supérieurement en x.

En particulier, il existe un réel M tel que, pour tout x dans  $\mathcal{E}$  avec N(x) = 1,  $\psi_{\nu}(x) \leq M$ . On a alors :

$$\limsup_{y \in \mathcal{E}, y \to 0} \psi_{\nu}(y) \leq \limsup_{t \in \mathbb{R}_+, t \to 0} (tM) = 0 = \psi_{\nu}(0)$$

et, donc,  $\psi_{\nu}$  est semi-continue supérieurement en 0.

### 3.1.3. Convergence suivant les hyperplans

Pour toute forme linéaire  $\varphi$  dans  $\mathcal{E}^*$ , on pose :

$$\mathcal{L}_{\nu}(\varphi) = \int_{\mathcal{E}} e^{-\varphi(x)} \mathrm{d}\nu(x).$$

D'après l'inégalité de Hölder, l'ensemble  $\{\varphi \in \mathcal{E}^*, \mathcal{L}_{\nu}(\varphi) < \infty\}$  est convexe. Si N est une norme sur  $\mathcal{E}$ , on pose

$$\sigma^N_\nu = \inf_{\substack{\varphi \in \mathcal{E}^* \\ \mathcal{L}_\nu(\varphi) < \infty}} N(\varphi).$$

Pour toute forme linéaire  $\varphi$  dans  $\mathcal{E}^*$ , on a :

$$\int_{\mathcal{E}} e^{-\varphi(x)} d\nu(x) \ge \int_{\mathcal{E}} e^{-N(\varphi)N(x)} d\nu(x)$$

et, donc,  $\sigma_{\nu}^{N} \geq \tau_{\nu}^{N}$ .

**Proposition 3.1.8.** S'il existe une forme linéaire  $\varphi$  dans  $\mathcal{E}^*$  telle que, pour tout x dans  $\mathcal{E} - \{0\}$ ,  $\varphi(x) > \psi_{\nu}(x)$ , alors, pour toute norme N sur  $\mathcal{E}$ , on a:

$$\sigma^N_\nu = \inf_{\substack{\varphi \in \mathcal{E}^* \\ \varphi > \psi_\nu}} N(\varphi).$$

Démonstration. D'après le lemme 3.1.3, on a toujours :

$$\sigma^N_{\nu} \ge \inf_{\substack{\varphi \in \mathcal{E}^* \\ \varphi \ge \psi_{\nu}}} N(\varphi).$$

Réciproquement, soit  $\varphi_0$  une forme linéaire majorant strictement  $\psi_{\nu}$  en dehors de 0. Alors, pour toute forme linéaire  $\varphi \geq \psi_{\nu}$ , pour tout t dans ]0,1],  $t\varphi_0 + (1-t)\varphi$  majore strictement  $\psi_{\nu}$  en dehors de 0. Par conséquent, d'après le lemme 3.1.3, on a :

$$\mathcal{L}_{\nu}(t\varphi_0 + (1-t)\varphi) < \infty$$

et, donc,

$$N(t\varphi_0 + (1-t)\varphi) \ge \sigma_{\nu}^N.$$

Il vient, quand  $t \to 0$ ,

$$N(\varphi) \ge \sigma_{\nu}^{N}$$
,

ce qu'il fallait démontrer.

# 3.2. Mesures à croissance concave

Soit toujours N une norme sur  $\mathcal{E}$ . Nous dirons que  $\nu$  est à croissance concave si et seulement s'il existe des réels  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  tels que, pour tous x, y dans  $\mathcal{E}$ ,

$$\nu\left(b^N(x+y,\alpha)\right) \geq \gamma\nu\left(b^N(x,\beta)\right)\nu\left(b^N(y,\beta)\right).$$

Cette condition ne dépend pas de la norme choisie.

Dans cette section, nous allons démontrer :

Théorème 3.2.1. Si  $\nu$  est à croissance concave, son indicateur de croissance est concave.

Le lecteur non intéressé par la démonstration de ce théorème peut directement passer à la section 3.3.

### 3.2.1. Évaluations préliminaires

Commençons par donner un lemme évident de recouvrement :

**Lemme 3.2.2.** Soient N une norme sur  $\mathcal{E}$  et  $\beta > 0$ . Il existe un réel M > 0 telle que, pour tout x dans  $\mathcal{E}$  et pour tout a > 0, il existe un entier

$$p \le M \left(1 + a\right)^r$$

et des points  $x_1, \ldots, x_p$  de  $\mathcal{E}$  avec

$$b^{N}(x,a) \subset \bigcup_{i=1}^{p} b^{N}(x_{i},\beta).$$

L'idée générale de nos preuves est d'utiliser le lemme 3.2.2 pour estimer la mesure d'une couronne  $C^N(a,b)$ ,  $0 \le a \le b$ , à un facteur  $(b+1)^r$  près, à l'aide de la mesure d'une boule  $b^N(x,\beta)$ , pour un certain x. Le facteur  $(b+1)^r$  ne jouera pas de rôle du point de vue de la divergence exponentielle.

Nous commençons par itérer la formule de définition :

**Lemme 3.2.3.** Supposons  $\nu$  à croissance concave. Soit N une norme sur  $\mathcal{E}$  et soient  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que, pour tous x, y dans E,

$$\nu\left(b^N(x+y,\alpha)\right) \geq \gamma\nu\left(b^N(x,\beta)\right)\nu\left(b^N(y,\beta)\right).$$

Alors il existe des réels  $\theta > 0$  et  $\eta > 0$  tels que, pour tout entier  $k \geq 2$  et pour tous  $x_1, \ldots, x_k$  dans  $\mathcal{E}$ , on ait :

$$\nu\left(b^{N}(x_{1}+\ldots+x_{k},(k-1)\alpha+(k-2)\beta)\right)$$

$$\geq\theta\eta^{k}\nu\left(b^{N}(x_{1},\beta)\right)\ldots\nu\left(b^{N}(x_{k},\beta)\right).$$

Démonstration. Soit N une norme sur  $\mathcal{E}$ . Donnons-nous  $\alpha, \beta, \gamma$  comme ci-dessus et M comme dans le lemme 3.2.2.

Posons

$$\eta = \frac{1}{M(\alpha + \beta + 1)^r}$$

et montrons par récurrence sur  $k \geq 2$  que, si l est le plus petit entier tel que  $2^l \geq k$ ,

alors, pour tous  $x_1, \ldots, x_k$  dans  $\mathcal{E}$ , on a:

$$\begin{split} \nu \left( b^N(x_1 + \ldots + x_k, (k-1)\alpha + (k-2)\beta) \right) \\ & \geq \frac{\gamma^{k-1}\eta^{k-2}}{\left( 2^{2(l-1) + 4(l-2) + 8(l-3) + \ldots + 2^{l-1} \right)r}} \nu \left( b^N(x_1, \beta) \right) \ldots \nu \left( b^N(x_k, \beta) \right), \end{split}$$

ce qui implique le lemme.

Pour k=2, il s'agit juste de la définition de la croissance concave.

Pour k=3, c'est un raisonnement analogue à celui fait ci-après.

Soit donc  $k \geq 4$  et supposons la formule vraie pour tous les entiers < k. Soient l le plus petit entier tel que  $2^l \ge k$  et  $x_1, \ldots, x_k$  dans  $\mathcal{E}$ . Si k est pair, on pose  $h = \frac{k}{2}$ ; s'il est impair, on pose  $h = \frac{k-1}{2}$ . Dans les deux

cas, on a

$$2^{l-1} \ge h > 2^{l-2}$$
 et  $2^{l-1} \ge k - h > 2^{l-2}$ .

D'après le lemme 3.2.2, il existe un point  $y_1$  dans  $b^N(x_1 + \ldots + x_h, (h-1)(\alpha + \beta))$ tel que l'on ait :

$$\begin{split} \nu\left(b^N(x_1+\ldots+x_h,(h-1)\alpha+(h-2)\beta)\right) \\ &\leq M\left(1+(h-1)\alpha+(h-2)\beta\right)^r\nu\left(b^N(y_1,\beta)\right) \\ &\leq \frac{2^{r(l-1)}}{\eta}. \end{split}$$

De même, il existe un point  $y_2$  dans  $b^N(x_{h+1}+\ldots+x_k,(k-h-1)(\alpha+\beta))$  tel

$$\nu \left( b^{N}(x_{h+1} + \ldots + x_{k}, (k-h-1)\alpha + (k-h-2)\beta) \right) \\
\leq M \left( 1 + (k-h-1)\alpha + (k-h-2)\beta \right)^{r} \nu \left( b^{N}(y_{2}, \beta) \right) \\
\leq \frac{2^{r(l-1)}}{\eta}.$$

On a alors:

$$\begin{split} \nu(b^{N}\left(y_{1}+y_{2},\alpha\right)) &\geq \gamma\nu(b^{N}(y_{1},\beta))\nu(b^{N}(y_{2},\beta)) \\ &\geq \frac{\gamma\eta^{2}}{2^{2r(l-1)}}\nu\left(b^{N}(x_{1}+\ldots+x_{h},(h-1)\alpha+(k-2)\beta)\right) \\ &\qquad \qquad \nu\left(b^{N}(x_{h+1}+\ldots+x_{k},(k-h-1)\alpha+(k-h-2)\beta)\right). \end{split}$$

Donc, par récurrence,

$$\nu \left( b^{N}(y_{1} + y_{2}, \alpha) \right) \\
\geq \frac{\gamma^{k-1} \eta^{k-2}}{(2^{2(l-1)+4(l-2)+8(l-3)+\ldots+2^{l-1})r}} \nu \left( b^{N}(x_{1}, \beta) \right) \ldots \nu \left( b^{N}(x_{k}, \beta) \right),$$

d'où le résultat, puisque l'on a :

$$b^{N}(y_1 + y_2, \alpha) \subset b^{N}(x_1 + \ldots + x_k, (k-1)\alpha + (k-2)\beta).$$

Par récurrence, la formule est vraie pour tout  $k \geq 2$ .

Rappelons que, si  $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$  est une suite de nombres réels avec, pour tous n,p dans  $\mathbb{N}$ ,  $t_{n+p} \geq t_n + t_p$ , alors la suite  $(\frac{1}{n}t_n)_{n\geq 1}$  converge dans  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ . Les deux lemmes qui suivent s'inspirent de la démonstration de ce résultat usuel pour minorer la limite inférieure du logarithme de la mesure des couronnes.

**Lemme 3.2.4.** Supposons  $\nu$  à croissance concave. Soit N une norme sur  $\mathcal{E}$ . Il existe des réels  $\theta, \eta, \kappa > 0$  ayant la propriété suivante : pour tout cône ouvert  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{E}$ , pour tout  $x \neq 0$  dans  $\mathcal{C}$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un cône ouvert  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$  contenant x et un réel  $a_0 > 0$  tels que, pour tous réels  $a \geq a_0$  et  $b \geq 0$ , pour tout entier naturel m et pour toute partition  $m = n_1 + \ldots + n_p$  de m, on ait :

$$\nu\left(C^{N}((1-\varepsilon)ma-(p-1)\kappa,ma+pb+(p-1)\kappa)\cap\mathcal{C}\right)$$

$$\geq \frac{\theta\eta^{p}}{\left(\prod_{k=1}^{p}(1+n_{k}a+b)\right)^{T}}\prod_{k=1}^{p}\nu\left(C^{N}(n_{k}a,n_{k}a+b)\cap\mathcal{D}\right).$$

Démonstration. Il suffit de montrer la propriété pour des partitions  $m = n_1 + \ldots + n_p$  de l'entier m avec  $p \ge 2$ .

Soit N une norme sur  $\mathcal{E}$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  comme dans la définition de la croissance concave, M comme dans le lemme 3.2.2 et  $\theta, \eta$  comme dans le lemme 3.2.3.

Soit  $\mathcal C$  un cône ouvert de  $\mathcal E$ , x un vecteur unitaire de  $\mathcal C$  et  $0 < \varepsilon < 1$ . Il existe un cône ouvert convexe  $\mathcal D$  de  $\mathcal E$  contenant x tel que  $\overline{\mathcal D} - \{0\} \subset \mathcal C$  et que, pour tout vecteur unitaire y de  $\mathcal D$ ,  $N(y-x) \le \varepsilon$ .

Soient  $x_1, \ldots, x_p$ , des vecteurs de  $\mathcal{D}$ . Pour tout i dans [1, p], on a :

$$N(x_i - N(x_i)x) \le \varepsilon N(x_i)$$

et, donc:

$$N((x_1 + \ldots + x_p) - (N(x_1) + \ldots + N(x_p))x) \le \varepsilon(N(x_1) + \ldots + N(x_p)).$$

Il vient:

$$N(x_1 + \ldots + x_p) \ge (1 - \varepsilon)(N(x_1) + \ldots + N(x_p)).$$

Il existe un réel  $a_0 > 0$  tel que, pour tout y dans  $\mathcal{D}$  avec  $N(y) \ge 1 - \varepsilon$ , on ait :

$$b^N\left(y,\frac{\alpha+2\beta}{a_0}\right)\subset\mathcal{C}.$$

Alors, pour tout  $a \ge a_0$ , pour tout  $b \ge 0$  et pour tout entier n, on ait :

$$b^{N}\left(C^{N}((1-\varepsilon)na,na+b)\cap\mathcal{D},(\alpha+2\beta)n\right)\subset\mathcal{C}.$$

Soient  $a \geq a_0$  et  $b \geq 0$ . Pour tout entier n, choisissons un point  $x_n$  dans  $b^N\left(C^N(na,na+b)\cap \mathcal{D},\beta\right)$  tel que l'on ait :

$$\nu\left(b^{N}(x_{n},\beta)\right) \geq \frac{1}{M(1+na+b)^{r}}\nu\left(C^{N}(na,na+b)\cap\mathcal{D}\right).$$

Soit m un entier naturel et  $m=n_1+\ldots+n_p$  une partition de m avec  $p\geq 2$ . On a :

$$\nu\left(b^{N}(x_{n_{1}}+\ldots+x_{n_{p}},(p-1)\alpha+(p-2)\beta)\right)$$

$$\geq\theta\eta^{p}\prod_{k=1}^{p}\nu\left(b^{N}(x_{n_{k}},\beta)\right)$$

$$\geq\frac{\theta\eta^{p}}{M^{p}\left(\prod_{k=1}^{p}(1+n_{k}a+b)\right)^{r}}\prod_{k=1}^{p}\nu\left(C^{N}(n_{k}a,n_{k}a+b)\cap\mathcal{D}\right).$$

Or, on a:

$$x_{n_1} + \ldots + x_{n_p} \in b^N \left( C^N((1 - \varepsilon)ma, ma + pb) \cap \mathcal{D}, p\beta \right)$$

et, donc, d'une part,

$$b^{N}(x_{n_{1}} + \ldots + x_{n_{p}}, (p-1)\alpha + (p-2)\beta)$$

$$\subset b^{N}\left(C^{N}((1-\varepsilon)ma, ma+pb) \cap \mathcal{D}, (p-1)(\alpha+2\beta)\right) \subset \mathcal{C}$$

et, d'autre part,

$$b^{N}(x_{n_{1}} + \ldots + x_{n_{p}}, (p-1)\alpha + (p-2)\beta)$$

$$\subset C^{N}((1-\varepsilon)ma - (p-1)(\alpha+\beta), ma + pb + (p-1)(\alpha+\beta)).$$

Il vient:

$$\begin{split} \nu\left(C^N((1-\varepsilon)ma - (p-1)(\alpha+\beta), ma + pb + (p-1)(\alpha+\beta)) \cap \mathcal{C}\right) \\ &\geq \frac{\theta\eta^p}{M^p\left(\prod_{k=1}^p (1+n_ka+b)\right)^r} \prod_{k=1}^p \nu\left(C^N(n_ka, n_ka+b) \cap \mathcal{D}\right). \end{split}$$

Pour les mesures à croissance concave, on a donc un complément aux formules du lemme 3.1.1 :

**Lemme 3.2.5.** Supposons  $\nu$  à croissance concave. Soit N une norme sur  $\mathcal{E}$ . Pour tout cône ouvert  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{E}$ , pour tout  $x \neq 0$  dans  $\mathcal{C}$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $a_0 > 0$  tel que, pour tout  $a \geq a_0$ , on ait :

$$\frac{1}{a} \liminf_{n \to \infty} \frac{\log \left( \nu \left( C^N(n(1-\varepsilon)a, n(1+\varepsilon)a) \cap \mathcal{C} \right) \right)}{n} \geq \frac{\psi_{\nu}(x)}{N(x)}.$$

Démonstration. Soient N une norme sur  $\mathcal{E}$  et  $\kappa, \theta, \eta$  comme dans le lemme 3.2.4. Soient  $\mathcal{C}$  un cône ouvert de  $\mathcal{E}$ , x un vecteur non nul de  $\mathcal{C}$  et  $\varepsilon > 0$ .

D'après le lemme 3.2.4, on peut trouver un cône ouvert  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$  contenant x et un réel  $a_0 > 0$  tel que, pour tout  $a \geq a_0$ , pour tous m et n entiers  $\geq 1$ , si

m = pn + q est la division euclidienne de m par n, alors on a :

$$\begin{split} \nu\left(C^{N}\left(\left(1-\varepsilon\right)ma-p\kappa,\left(m+p+1\right)a+p\kappa\right)\cap\mathcal{C}\right) \\ &\geq \frac{\theta\eta^{p+1}}{\left(\left(1+(n+1)a\right)^{p}\left(1+(q+1)a\right)\right)^{r}}\nu\left(C^{N}(na,(n+1)a)\cap\mathcal{D}\right)^{p} \\ &\qquad \qquad \nu\left(C^{N}(qa,(q+1)a)\cap\mathcal{D}\right). \end{split}$$

Soit  $n_0 > 0$  tel que

$$\frac{\kappa}{a_0 n_0} \le \varepsilon$$
 et que  $\frac{1}{n_0} \le \varepsilon$ .

Soit  $a \ge a_0$ . Pour tous  $m, n \ge n_0$ , si m = pn + q est la division euclidienne de m par n, on a :

$$\nu\left(C^{N}\left(m\left(1-3\varepsilon\right)a,m(1+3\varepsilon)a\right)\cap\mathcal{C}\right) \geq \frac{\theta\eta^{p+1}}{\left((1+(n+1)a)^{p}(1+(q+1)a)\right)^{r}}$$
$$\nu\left(C^{N}\left(na,(n+1)a\right)\cap\mathcal{D}\right)^{p}\nu\left(C^{N}\left(qa,(q+1)a\right)\cap\mathcal{D}\right)$$

et, donc, pour tout  $n \ge n_0$ ,

$$\begin{split} \frac{1}{a} \liminf_{m \to \infty} \frac{\log \left( \nu \left( C^N(m(1-3\varepsilon)a, m(1+3\varepsilon)a) \cap \mathcal{C} \right) \right)}{m} \\ & \geq \frac{1}{na} \log \left( \frac{\eta}{(1+(n+1)a)^r} \right) + \frac{\log \left( \nu \left( C^N(na, (n+1)a) \cap \mathcal{D} \right) \right)}{na}. \end{split}$$

Il vient, en faisant tendre n vers  $\infty$ , d'après le lemme 3.1.1,

$$\frac{1}{a} \liminf_{m \to \infty} \frac{\log \left( \nu \left( C^N(m(1 - 3\varepsilon)a, m(1 + 3\varepsilon)a) \cap \mathcal{C} \right) \right)}{m} \ge \tau_{\mathcal{D}, \nu}^N \ge \frac{\psi_{\nu}(x)}{N(x)}. \qquad \Box$$

#### 3.2.2. Démonstration du théorème de concavité

Nous pouvons à présent conclure la preuve du théorème 3.2.1. Puisque  $\psi_{\nu}$  est homogène, il s'agit de prouver qu'elle est sur-additive. L'idée consiste à se donner x et y dans  $\mathcal{E}$ , avec  $x+y\neq 0$  et à estimer le volume d'une couronne dans un cône autour de x+y à l'aide de  $\psi_{\nu}(x)+\psi_{\nu}(y)$ , en employant le lemme 3.2.5.

Démonstration du théorème 3.2.1. Soit N une norme sur  $\mathcal{E}$  et soient toujours  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  tels que, pour tous x, y dans  $\mathcal{E}$ ,

$$\nu\left(b^N(x+y,\alpha)\right) \geq \gamma\nu\left(b^N(x,\beta)\right)\nu\left(b^N(y,\beta)\right).$$

Soit M comme dans le lemme 3.2.2.

Soient x et y des vecteurs non nuls de  $\mathcal{E}$ . Commençons par supposer  $x+y\neq 0$ . Soit  $\mathcal{C}$  un cône ouvert contenant x+y.

Soient  $0 < \omega < \frac{1}{2}$  et  $C_1$  un cône ouvert de  $\mathcal{E}$ , contenant x + y et tel que  $\overline{C_1} - \{0\} \subset \mathcal{C}$ . On peut trouver un réel  $\varepsilon > 0$  et des cônes ouverts  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  contenant

598 J.-F. Quint CMH

respectivement x et y tels que l'on ait

$$\begin{split} \left(C^N(N(x)(1-\varepsilon),N(x)(1+\varepsilon))\cap\mathcal{A}\right) \\ &+\left(C^N(N(y)(1-\varepsilon),N(y)(1+\varepsilon))\cap\mathcal{B}\right) \\ &\subset \left(C^N(N(x+y)(1-\omega),N(x+y)(1+\omega))\cap\mathcal{C}_1\right). \end{split}$$

D'après le lemme 3.2.5, on peut trouver un réel a>0 tel que l'on ait :

$$\frac{1}{a} \liminf_{n \to \infty} \frac{\log \left(\nu \left(C^N(n(1-\varepsilon)aN(x), n(1+\varepsilon)aN(x)) \cap \mathcal{A}\right)\right)}{n} \geq \psi_{\nu}(x)$$

et de même en remplaçant x par y.

D'après le lemme 3.2.2, pour tout entier n, il existe un vecteur  $x_n$  de  $\mathcal{E}$  tel que

$$d(x_n, C^N(na(1-\varepsilon)N(x), na(1+\varepsilon)N(x)) \cap \mathcal{A}) < \beta$$

et que

$$\nu\left(C^{N}(na(1-\varepsilon)N(x),na(1+\varepsilon)N(x))\cap\mathcal{A}\right) \leq M\left(1+na(1+\varepsilon)N(x)\right)^{r}\nu\left(b^{N}(x_{n},\beta)\right)$$

et un vecteur  $y_n$  de  $\mathcal{E}$  vérifiant les inégalités analogues en remplaçant x par y. Alors, pour tout entier n > 0, le vecteur

$$\frac{x_n + y_n}{na}$$

est à une distance  $\leq \frac{2\beta}{na}$  de l'ensemble

$$(C^N(N(x)(1-\varepsilon),N(x)(1+\varepsilon))\cap \mathcal{A})+(C^N(N(y)(1-\varepsilon),N(y)(1+\varepsilon))\cap \mathcal{B})$$
.

de sorte qu'il existe un entier  $n_0 > 0$  tel que, pour tout  $n \ge n_0$ , on ait :

$$b^N(x_n + y_n, \alpha) \subset C^N(na(1 - 2\omega)N(x + y), na(1 + 2\omega)N(x + y)) \cap C$$

Il vient, pour tout entier  $n \geq n_0$ ,

$$\nu\left(C^{N}\left(na(1-2\omega)N(x+y),na(1+2\omega)N(x+y)\right)\cap\mathcal{C}\right)$$

$$\geq\nu\left(b^{N}\left(x_{n}+y_{n},\alpha\right)\right)$$

$$\geq\gamma\nu\left(b^{N}\left(x_{n},\beta\right)\right)\nu\left(b^{N}\left(y_{n},\beta\right)\right)$$

$$\geq\frac{\gamma}{M^{2}(1+na(1+\varepsilon)N(x))^{r}(1+na(1+\varepsilon)N(y))^{r}}$$

$$\nu\left(C^{N}\left(na(1-\varepsilon)N(x),na(1+\varepsilon)N(x)\right)\cap\mathcal{A}\right)$$

$$\nu\left(C^{N}\left(na(1-\varepsilon)N(y),na(1+\varepsilon)N(y)\right)\cap\mathcal{B}\right).$$

En faisant tendre n vers  $\infty$  on a, d'après le lemme 3.1.1.

$$\max \left(N(x+y)(1+2\omega)\tau_{\mathcal{C},\nu}^N, N(x+y)(1-2\omega)\tau_{\mathcal{C},\nu}^N\right) \geq \psi_{\nu}(x) + \psi_{\nu}(y).$$

Comme l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout  $0 < \omega < \frac{1}{2}$ , il vient :

$$N(x+y)\tau_{\mathcal{C},\nu}^{N} \ge \psi_{\nu}(x) + \psi_{\nu}(y),$$

d'où:

$$\psi_{\nu}(x+y) \ge \psi_{\nu}(x) + \psi_{\nu}(y),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Supposons à présent que y = -x. Pour tout t > 1, on a :

$$tx - x = (t - 1)x \neq 0$$

et, donc,

$$\psi_{\nu}(tx) + \psi_{\nu}(-x) \le \psi_{\nu}((t-1)x)$$

et, donc, comme  $\psi_{\nu}$  est homogène, on a bien, même quand  $\psi_{\nu}(x) = -\infty$ ,

$$\psi_{\nu}(x) + \psi_{\nu}(-x) \le 0.$$

## 3.3. Mesures à croissance concave divergente

Nous dirons que  $\nu$  est à croissance divergente (resp. strictement divergente) si et seulement si, étant donnée une norme N sur  $\mathcal{E}$ , on a  $\tau^N_{\nu} \geq 0$  (resp.  $\tau^N_{\nu} > 0$ ). Ces conditions sont indépendantes de la norme choisie.

# 3.3.1. Contrôle de la divergence

Pour les mesures à croissance concave, on peut améliorer le lemme 3.1.1 :

**Proposition 3.3.1.** Si  $\nu$  est à croissance concave strictement divergente, pour toute norme N sur  $\mathcal{E}$ , on a :

$$\frac{\log \left(\nu \left(b^N(0,a)\right)\right)}{a} \xrightarrow[a \to \infty]{} \tau^N_\nu \ \ et \ \nu \left(b^N(0,a)\right) \underset{a \to \infty}{=} O\left(a^{r-1}e^{a\tau^N_\nu}\right).$$

La démonstration utilise le lemme suivant, dont la démonstration est analogue à celle du lemme 3.2.4, en employant une variante du lemme 3.2.2.

Lemme 3.3.2. Supposons  $\nu$  à croissance concave. Soit N une norme sur  $\mathcal{E}$ . Il existe des réels  $\theta, \eta, \kappa > 0$  tels que, pour tout réel  $a \geq 0$  et pour tous réels  $a_1, \ldots, a_p$  tels que  $a = a_1 + \ldots + a_p$ , on ait :

$$\nu \left( b^{N}(0, a+p+(p-1)\kappa) \right) \\ \ge \frac{\theta \eta^{p}}{\left( (1+a_{1}) \dots (1+a_{p}) \right)^{r-1}} \nu \left( C^{N}(a_{1}, a_{1}+1) \right) \dots \nu \left( C^{N}(a_{p}, a_{p}+1) \right).$$

Démonstration de la proposition 3.3.1. Commençons par remarquer que, si  $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$  est une fonction croissante, on a :

$$\limsup_{\substack{a\to\infty\\a\in\mathbb{R}^*_+}}\frac{f(a)}{a}=\limsup_{\substack{n\to\infty\\n\in\mathbb{N}^*}}\frac{f(n)}{n}\text{ et }\liminf_{\substack{a\to\infty\\a\in\mathbb{R}^*_+}}\frac{f(a)}{a}=\liminf_{\substack{n\to\infty\\n\in\mathbb{N}^*}}\frac{f(n)}{n}.$$

Soit alors N une norme sur  $\mathcal{E}.$  D'après le lemme 3.1.1, on a :

$$au_{
u}^{N} = \limsup_{a o \infty} rac{\log \left(
u \left(b^{N}(0, a)
ight)
ight)}{a}.$$

Soient  $\theta, \eta, \kappa > 0$  comme dans le lemme 3.3.2. Soient  $m \ge n \ge 1$  des entiers naturels et m = pn + q la division euclidienne de m par n. On a :

$$\begin{split} \nu\left(b^{N}\left(0, m\left(1+\frac{\kappa+2}{n}\right)\right)\right) &\geq \nu\left(b^{N}\left(0, m+(p+1)+p\kappa\right)\right) \\ &\geq \frac{\theta\eta^{p+1}}{\left((1+n)^{p}(1+q)\right)^{r-1}} \\ &\quad \nu\left(C^{N}(n, n+1)\right)^{p} \nu\left(C^{N}(q, q+1)\right). \end{split}$$

Il vient, pour tout  $n \ge 1$ , d'après la remarque ci-dessus,

$$\left(1 + \frac{\kappa + 2}{n}\right) \liminf_{a \to \infty} \frac{\log\left(\nu\left(b^N(0, a)\right)\right)}{a}$$

$$\geq \left(\frac{1}{n}\log\left(\frac{\eta}{(1 + n)^{r - 1}}\right) + \frac{\log\left(\nu\left(C^N(n, n + 1)\right)\right)}{n}\right).$$

On en déduit, en réutilisant le lemme 3.1.1 :

$$\liminf_{a \to \infty} \frac{\log \left(\nu \left(b^N(0,a)\right)\right)}{a} \geq \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \left(\nu \left(C^N(n,n+1)\right)\right)}{n} = \tau_{\nu}^N$$

et, donc,

$$\frac{\log \left(\nu \left(b^N(0,a)\right)\right)}{a} \xrightarrow[a \to \infty]{} \tau^N_\nu.$$

Mais alors, pour tout  $n \ge 1$ , on a :

$$\left(n+\kappa+2\right)\tau_{\nu}^{N} \geq \log\left(\frac{\eta}{(1+n)^{r-1}}\right) + \log\left(\nu\left(C^{N}(n,n+1)\right)\right)$$

d'où

$$\nu\left(C^{N}(n, n+1)\right) \le \frac{1}{n}(1+n)^{r-1}e^{(n+\kappa+2)\tau_{\nu}^{N}}.$$

En d'autres termes, il existe un réel  $M \geq 0$  tel que, pour tout entier naturel n, on ait :

$$\nu\left(C^{N}(n, n+1)\right) \le M(1+n)^{r-1}e^{n\tau_{\nu}^{N}}.$$

Il vient, comme  $\tau_{\nu}^{N} > 0$ ,

$$\nu\left(b^{N}(0,n)\right) \le M \sum_{k=0}^{n-1} (1+k)^{r-1} e^{k\tau_{\nu}^{N}} = O\left(n^{r-1} e^{n\tau_{\nu}^{N}}\right).$$

On en déduit le résultat.

#### 3.3.2. Propriétés de concavité

Les résultats suivants appliquent des propriétés élémentaires de concavité au calcul des exposants de convergence.

**Proposition 3.3.3.** Si  $\nu$  est à croissance concave divergente et s'il existe une forme linéaire  $\varphi$  dans  $\mathcal{E}^*$  telle que, pour tout x dans  $\mathcal{E} - \{0\}$ ,  $\varphi(x) > \psi_{\nu}(x)$ , alors, pour toute norme N sur  $\mathcal{E}$ , on a:

$$\sigma_{\nu}^{N} = \tau_{\nu}^{N}$$
.

Démonstration. C'est une conséquence du corollaire 3.1.4, de la proposition 3.1.8, du théorème 3.2.1 et du résultat de convexité ci-après.

**Lemme 3.3.4.** Soit  $\psi : \mathcal{E} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  une fonction concave homogène semicontinue supérieurement. Soient N une norme sur  $\mathcal{E}$  et

$$au = \sup_{x \in \mathcal{E} - \{0\}} rac{\psi(x)}{N(x)}.$$

Si  $\tau \geq 0$ , il existe une forme linéaire  $\varphi$  dans  $\mathcal{E}^*$  telle que

$$\varphi \geq \psi$$
 et que  $N(\varphi) = \tau$ .

*Démonstration.* Si  $\tau=0$ , le résultat est clair. Supposons donc  $\tau>0$  et, pour simplifier les notations,  $\tau=1$ .

Soit x dans  $\mathcal{E}$  tel que N(x) = 1 et que  $\psi(x) = 1$ . Pour tout y dans  $\mathcal{E}$ , on a :

$$\psi(y) \le N(y)$$

et, donc, les parties convexes fermées de  $\mathbb{R}\times\mathcal{E}$ 

$$\{(s,y) \in \mathbb{R} \times \mathcal{E} | s \ge N(y)\} \text{ et } \{(t,z) \in \mathbb{R} \times \mathcal{E} | t \le \psi(z)\}$$

ne se rencontrent qu'en leurs bords. D'après le théorème de Hahn–Banach, il existe un réel  $\alpha$  et une forme linéaire  $\varphi$  dans  $\mathcal{E}^*$  non tout deux nuls et tels que, pour tous y,z dans  $\mathcal{E}$  avec  $\psi(z)>-\infty$ , on ait :

$$\alpha N(y) + \varphi(y) \ge \alpha \psi(z) + \varphi(z).$$

En particulier, pour tout y dans  $\mathcal{E}$ , on a:

$$\alpha N(y) + \varphi(y) \ge \alpha N(x) + \varphi(x).$$

Supposons  $\alpha \leq 0$ . Alors, pour tout y dans  $\mathcal{E}$ , on a :

$$\varphi(y) \ge \alpha + \varphi(x)$$

et, donc,  $\varphi = 0$ . Mais alors,  $\alpha \neq 0$  et, pour tout y dans  $\mathcal{E}$ , on a :

$$N(y) \le 1$$

ce qui est absurde. Par conséquent,  $\alpha > 0$ .

On peut donc supposer que  $\alpha = 1$ . Pour tout y dans  $\mathcal{E}$ , on a :

$$\varphi(x-y) \le N(y) - N(x) \le N(y-x)$$

donc  $N(\varphi) \leq 1.$  Mais, en posant  $y = \frac{x}{2}$  ci-dessus, il vient :

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \le -\frac{1}{2}$$

donc  $\varphi(x) = -1$  et  $N(\varphi) = 1$ .

Or, pour tout z dans  $\mathcal{E}$ , on a:

$$\psi(z) + \varphi(z) \le N(x) + \varphi(x) = 0$$

$$i.e. -\varphi \ge \psi.$$

Corollaire 3.3.5. Supposons que  $\nu$  est à croissance concave strictement divergente et qu'il existe une forme linéaire majorant strictement  $\psi_{\nu}$  en dehors de 0. Soit N la norme associée à un produit scalaire  $\langle .,. \rangle$  sur  $\mathcal{E}$ . Alors, il existe une unique forme linéaire  $\varphi \geq \psi_{\nu}$  de norme  $\tau_{\nu}^{N}$ . Si x est l'unique vecteur unitaire de  $\mathcal{E}$  tel que  $\psi_{\nu}(x) = \tau_{\nu}^{N}$ ,  $\varphi$  est la forme  $\langle \tau_{\nu}^{N} x, . \rangle$ .

Démonstration. L'existence a été prouvée au corollaire 3.3.3.

Démontrons l'unicité. Soit  $\varphi \geq \psi_{\nu}$  de norme  $\tau_{\nu}^{N}$ . Comme la norme euclidienne est strictement convexe, d'après le corollaire 3.1.4 et le théorème 3.2.1, il existe un unique vecteur unitaire x de  $\mathcal{E}$  tel que  $\psi_{\nu}(x) = \tau_{\nu}^{N}$ . On a :

$$\varphi(x) \ge \psi_{\nu}(x) = \tau_{\nu}^{N} = N(\varphi)N(x)$$

d'où le résultat, d'après le théorème de Cauchy-Schwarz.

#### 4. L'indicateur de croissance de $\Gamma$

Dans cette partie, nous utilisons l'existence d'un produit générique dans un sous-groupe discret Zariski dense  $\Gamma$  de G, démontrée à la section 2.3, pour montrer que la mesure de comptage  $\sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_{\mu(\gamma)}$ , c'est-à-dire la mesure image de  $\sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_{\gamma}$  par la composante de Cartan vérifie les hypothèses des énoncés de la partie 3. Nous commençons par contrôler l'indicateur de croissance de l'image par la composante de Cartan d'une mesure de Haar de G. Ensuite, nous utilisons les sous-semi-groupes libres de  $\Gamma$  pour montrer que ses exposants de convergence sont nécessairement positifs. Enfin, nous appliquons les résultats de la partie 3 à l'étude de  $\Gamma$ .

#### 4.1. Préliminaires

### 4.1.1. Estimations de volume dans G

Nous commençons par calculer ici l'indicateur de croissance de la mesure image par  $\mu$  d'une mesure de Haar de G.

On choisit une fois pour toutes une mesure de Haar  $\varrho$  sur G. On note  $\nu_G$  la mesure sur E image de  $\varrho$  par  $\mu$  et

$$\psi_G = rac{\psi_{
u_G}}{\log q}.$$

Montrons que  $\psi_G = \rho$ .

Supposons que  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Proposition 4.1.1.** ([11, I.5.8]) La mesure  $\nu_G$  est absolument continue par rapport à la classe de la mesure de Lebesgue. Si  $\lambda$  est une mesure de Lebesgue sur E, il existe un réel c > 0 tel que, pour tout x dans  $E^+$ , on ait :

$$rac{\mathrm{d}
u_G}{\mathrm{d}\lambda}(x) = c\prod_{lpha\in\Sigma^+}\sinh\left(lpha(x)
ight)^{m_lpha}.$$

Corollaire 4.1.2. Pour tout x dans  $E^+$ , on a :

$$\psi_G(x) = \rho(x).$$

Supposons que  $\mathbb K$  est non-archimédien. Pour z dans  $Z^+$ , notons  $\theta_z$  l'ensemble des  $\alpha$  dans  $\Pi$  tels que  $\alpha(\nu(z))>0$ .

**Proposition 4.1.3.** ([13, 3.2.7]) Il existe une famille  $(q_{\theta})_{\theta \subset \Pi}$  de nombres réels > 0 telle que, pour tout z dans  $Z^+$ , on ait :

$$\frac{\varrho(KzK)}{\varrho(K)} = q_{\theta_z} q^{\rho(\nu(z))}.$$

Corollaire 4.1.4. Pour tout x dans  $E^+$ , on a:

$$\psi_G(x) = \rho(x).$$

### 4.1.2. Exposant de convergence des semi-groupes libres

Soit  $\Delta$  un semi-groupe libre de générateurs  $\xi$  et  $\eta$ . Pour tous éléments x et y d'un semi-groupe S, on note  $\Phi_{x,y}^S$  l'unique homomorphisme de  $\Delta$  dans S envoyant  $\xi$  sur x et  $\eta$  sur y.

Pour calculer les exposants de convergence des sous-semi-groupes fournis par la proposition 2.2.7, nous utiliserons :

Lemme 4.1.5. Pour tous réels u, v > 1, la série de Dirichlet

$$\vartheta(t) = \sum_{\zeta \in \Delta} \frac{1}{\Phi^{\mathbb{R}^*_+}_{u,v}(\zeta)^t} \quad (t \in \mathbb{R})$$

a pour exposant de convergence l'unique réel  $\tau$  tel que

$$\frac{1}{u^{\tau}} + \frac{1}{v^{\tau}} = 1.$$

On a  $\tau > 0$  et, pour tout  $t > \tau$ ,

$$\vartheta(t) = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{u^t} + \frac{1}{v^t}\right)}.$$

Démonstration. Pour tout entier naturel n, on note  $\Delta_n$  l'ensemble des éléments de  $\Delta$  dont la longueur comme mot en  $\xi$  et en  $\eta$  est  $\leq n$ . On a :

$$\Delta_{n+1} = \{e\} \sqcup \xi \Delta_n \sqcup \eta \Delta_n.$$

Soit  $\tau$  l'unique réel tel que

$$\frac{1}{u^{\tau}} + \frac{1}{v^{\tau}} = 1.$$

On a  $\tau > 0$ .

On pose, pour tout entier naturel n et pour tout réel t,

$$\vartheta_n(t) = \sum_{\zeta \in \Delta_n} \frac{1}{\Phi_{u,v}^{\mathbb{R}_+^*}(\zeta)^t}.$$

Il vient, pour tout entier naturel n et pour tout réel t,

$$\vartheta_n(t) \le \vartheta_{n+1}(t) = 1 + \frac{1}{u^t}\vartheta_n(t) + \frac{1}{v^t}\vartheta_n(t).$$

Donc, d'une part, pour tout réel t tel que  $\vartheta(t)<\infty,$  on a :

$$\frac{1}{u^t} + \frac{1}{v^t} \neq 1 \text{ et } \vartheta(t) = \frac{1}{1 - (\frac{1}{u^t} + \frac{1}{v^t})}$$

et, par conséquent, l'exposant de convergence de  $\vartheta$  est  $\geq \tau$ . D'autre part, pour tout réel  $t > \tau$  et pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\vartheta_n(t) \le \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{u^t} + \frac{1}{v^t}\right)}$$

Donc  $\vartheta(t) < \infty$  et l'exposant de convergence de  $\vartheta$  est exactement  $\tau$ .

#### 4.2. La fonction $\psi_{\Gamma}$

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret Zariski dense de G. On note  $\nu_{\Gamma}$  la mesure

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_{\mu(\gamma)}.$$

C'est l'image de la mesure  $\sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_{\gamma}$  par  $\mu$ . Nous allons appliquer à  $\nu_{\Gamma}$  la théorie générale des sections 3.2 et 3.3.

On note

$$\psi_{\Gamma} = rac{\psi_{
u_{\Gamma}}}{\log q} \ \mathrm{et} \ au_{\Gamma} = rac{ au_{
u}^{\parallel \cdot \parallel}}{\log q}.$$

Pour tout cône ouvert  $\mathcal{C}$  de E, on note  $\tau_{\mathcal{C},\Gamma} = \frac{\tau_{\mathcal{C},\nu_{\Gamma}}^{\|\cdot\|}}{\log q}$ .

**Lemme 4.2.1.** Pour tout cône ouvert C de E rencontrant  $l_{\Gamma}$ , on a :

$$\tau_{C,\Gamma} > 0$$
.

Rappelons qu'on a noté  $F_{\Gamma}$  le sous-espace vectoriel de E engendré par  $l_{\Gamma}$  : si  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$  et si  $\mathbf{G}$  est semi-simple,  $F_{\Gamma} = E$ .

Démonstration. Soit  $\mathcal{C}$  un cône ouvert de E rencontrant  $l_{\Gamma}$ . L'intérieur dans  $F_{\Gamma}$  de  $l_{\Gamma} \cap \mathcal{C}$  est non vide. D'après la proposition 2.2.7, il existe un réel  $\kappa \geq 0$ , des éléments  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  dans  $\Gamma$  et des vecteurs  $x_1$  et  $x_2$  dans  $\mathcal{C} \cap l_{\Gamma}$  tels que le sous-semi-groupe  $\Delta$  de  $\Gamma$  engendré par  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  soit libre et que, avec les notations du paragraphe précédent, pour tout  $\gamma$  dans  $\Delta$ ,

$$\mu(\gamma) \in \mathcal{C} \text{ et } \|\mu(\gamma) - \Phi_{x_1, x_2}^E(\gamma)\| \le \Phi_{\kappa, \kappa}^{\mathbb{R}}(\gamma).$$

On a alors, pour tout  $\gamma$  dans  $\Gamma$ ,

$$\|\mu(\gamma)\| \le \Phi_{\|x_1\|+\kappa,\|x_2\|+\kappa}^{\mathbb{R}}(\gamma)$$

et, donc, pour tout réel  $t \ge 0$ ,

$$q^{-t\|\mu(\gamma)\|} \geq q^{-t\Phi_{\|x_1\|+\kappa,\|x_2\|+\kappa}^{\mathbb{R}}(\gamma)} = \left(\Phi_{q^{\|x_1\|+\kappa},q^{\|x_2\|+\kappa}}^{\mathbb{R}^*_+}(\gamma)\right)^{-t}.$$

D'après le lemme 4.1.5, la série de Dirichlet

$$\sum_{\gamma \in \Delta} q^{-t \|\mu(\gamma)\|} \quad (t \in \mathbb{R})$$

a un exposant de convergence > 0. Comme  $\mu(\Delta) \subset \mathcal{C}$ , la série de Dirichlet

$$\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \mu(\gamma) \in \mathcal{C}}} q^{-t \|\mu(\gamma)\|} \quad (t \in \mathbb{R})$$

a, elle aussi, un exposant de convergence strictement positif, ce qu'il fallait démontrer.  $\hfill\Box$ 

**Théorème 4.2.2.** Pour tout x dans  $E^+$ , on a:

$$\psi_{\Gamma}(x) \le \rho(x)$$
.

La mesure  $\nu_{\Gamma}$  est à croissance concave et, donc, la fonction  $\psi_{\Gamma}$  est concave et semi-continue supérieurement. L'ensemble

$$\{x \in E | \psi_{\Gamma}(x) > -\infty \}$$

est exactement le cône limite de  $\Gamma$ . De plus,  $\psi_{\Gamma}$  est positive sur  $l_{\Gamma}$  et strictement positive sur son intérieur relatif.

 $D\acute{e}monstration.$  Comme  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de G, d'après les lemmes 2.2.4 et 3.1.6, on a :

$$\psi_{\Gamma} \le \psi_G$$

et, d'après les corollaires 4.1.2 et 4.1.4, pour tout x dans  $E^+$ ,

$$\psi_G(x) = \rho(x).$$

En particulier,  $\tau_{\Gamma} < \infty$  et, d'après le lemme 3.1.7,  $\psi_{\Gamma}$  est semi-continue supérieurement.

D'après la proposition 2.3.1, la mesure  $\nu_{\Gamma}$  est à croissance concave et, donc, d'après le théorème 3.2.1, la fonction  $\psi_{\Gamma}$  est concave.

On a clairement  $\psi_{\Gamma}=-\infty$  en dehors de  $l_{\Gamma}$ . Réciproquement, d'après le lemme 4.2.1,  $\psi_{\Gamma}$  est positive sur  $l_{\Gamma}$  et, puisqu'on a  $\tau_{\Gamma}=\sup_{\|x\|=1}\psi_{\Gamma}(x)>0$ , elle y prend des valeurs strictement positives. Comme elle est concave, elle est strictement positive sur l'intérieur relatif de  $l_{\Gamma}$ .

#### Corollaire 4.2.3. On a:

$$\frac{1}{a}\log_q\left(\operatorname{card}\left\{\gamma\in\Gamma\left|\left\|\mu(\gamma)\right\|\leq a\right.\right\}\right)\xrightarrow[a\to\infty]{}\tau_\Gamma$$

et

$$\operatorname{card}\left\{\gamma\in\Gamma\left|\left\|\mu(\gamma)\right\|\leq a\right.\right\}\underset{a\to\infty}{=}O\left(a^{\dim F_{\Gamma}-1}q^{a\tau_{\Gamma}}\right).$$

Démonstration. Soit p un projecteur de E sur  $F_{\Gamma}$ . Comme, d'après le théorème 2.2.6,  $\mu(\Gamma)$  reste à distance bornée de  $F_{\Gamma}$ , la mesure  $p_*\nu_{\Gamma}$  est encore à croissance concave et, d'après le lemme 3.1.6, elle a même indicateur de croissance que  $\nu_{\Gamma}$ . Le résultat est alors une conséquence de la proposition 3.3.1 appliquée à  $p_*\nu_{\Gamma}$ .  $\square$ 

Nous pouvons enfin généraliser un résultat obtenu par P. Albuquerque ([1]) notamment dans le cas où  $l_{\Gamma} - \{0\}$  était inclus dans  $E^{++}$ .

Pour toute norme N sur E, notons  $\tau_{\Gamma}^N$  pour  $\frac{\tau_{\nu_{\Gamma}}^N}{\log q}$  et  $\sigma_{\Gamma}^N$  pour  $\frac{\sigma_{\nu_{\Gamma}}^N}{\log q}$ . Rappelons qu'un cône fermé  $\mathcal C$  d'un espace vectoriel réel  $\mathcal E$  de dimension finie est dit saillant si et seulement s'il ne contient pas de sous-espace vectoriel de  $\mathcal E$ .

Corollaire 4.2.4. Si  $l_{\Gamma}$  est saillant, ce qui est toujours vrai lorsque G est semi-simple, pour toute norme N sur E, on a:

$$\sigma_{\Gamma}^N = au_{\Gamma}^N.$$

En particulier, il existe alors un unique vecteur unitaire x de  $E^+$  tel que les séries de Dirichlet

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} q^{-t \|\mu(\gamma)\|} \ et \ \sum_{\gamma \in \Gamma} q^{-t(x,\mu(\gamma))} \quad (t \in \mathbb{R})$$

aient même exposant de convergence. Ce vecteur appartient à  $l_{\Gamma}$ .

Démonstration. Il s'agit de l'application à  $\nu_{\Gamma}$  des corollaires 3.3.3 et 3.3.5.

#### Références

- [1] P. Albuquerque, Patterson–Sullivan theory in higher rank symmetric spaces, Geometric and functional analysis 9 (1999), 1–28.
- [2] H. Abels, G.-A. Margulis and G.-A. Soifer, Semigroups containing proximal linear maps, *Israel journal of mathematics* **91** (1995), 1–30.
- [3] Y. Benoist, Actions propres sur les espaces homogènes réductifs, Annals of mathematics 144 (1996), 315–347.
- [4] Y. Benoist, Propriétés asymptotiques des groupes linéaires, Geometric and functional analysis 7 (1997), 1–47.
- [5] Y. Benoist, Propriétés asymptotiques des groupes linéaires (II), Advanced studies in pure mathematics 26 (2000), 33–48.
- [6] A. Borel, Linear algebraic groups, Graduate Texts in Mathematics 126, Springer Verlag, New York, 1991.
- [7] N. Bourbaki, Éléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie, Chapitre VI: Systèmes de racines, Hermann, Paris 1968.
- [8] F. Bruhat et J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local, I. Données radicielles valuées, Publications mathématiques de l'IHES 41 (1972), 5–251.
- [9] F. Bruhat et J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local, II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée, Publications mathématiques de l'IHES 60 (1984), 5–184.
- [10] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Pure and Applied Mathematics 80, Academic Press, San Diego, 1978.
- [11] S. Helgason, Groups and geometric analysis, Pure and Applied Mathematics 113, Academic Press, San Diego, 1984.
- [12] J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Graduate Text in Mathematics 21, Springer Verlag, New York, 1981.
- [13] H. Matsumoto, Analyse harmonique dans les systèmes de Tits bornologiques de type affine, Lecture Notes in Mathematics 590, Springer Verlag, Berlin, 1977.
- [14] S.-J. Patterson, The limit set of a fuchsian group, Acta mathematica 136 (1976), 241–273.
- [15] J.-F. Quint, Sous-groupes discrets des groupes de Lie semi-simples réels et p-adiques, thèse Université Paris VII.
- [16] J.-F. Quint, Cônes limites des sous-groupes discrets d'un groupe réductif sur un corps local, Transformation groups 7 (2002), 247–266.
- [17] J.-F. Quint, Mesures de Patterson-Sullivan en rang supérieur, Geometric and functional analysis 12 (2002).
- [18] D. Sullivan, The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions, Publications mathématiques de l'IHES 50 (1979), 171–202.
- [19] J. Tits, Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque, Journal für die reine und angewandte Mathematik 247 (1971), 196–220.
- [20] J. Tits, Reductive groups over local fields, Proceedings of the symposium in pure mathematics of the american mathematical society 33 (1977), 29–69.

Jean-François Quint École Normale Supérieure Département de Mathématiques et Applications 45, rue d'Ulm F-75230 Paris Cedex 05 France

e-mail: quint@dma.ens.fr

(Received: November 16, 2001)



To access this journal online: http://www.birkhauser.ch