Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 76 (2001)

Artikel: Surfaces de la classe VII0 admettant un champ de vecteurs, II

Autor: Dloussky, Georges / Oeljeklaus, Karl / Toma, Matei

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-57408

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helv. 76 (2001) 640–664
0010-2571/01/040640-25 $ 1.50+0.20/0

© 2001 Birkhäuser Verlag, Basel

Commentarii Mathematici Helvetici

Surfaces de la classe VII_0 admettant un champ de vecteurs, II

Georges Dloussky, Karl Oeljeklaus et Matei Toma

Dédié à Alan T. Huckleberry, à l'occasion de son soixantième anniversaire

Résumé. On termine la classification des surfaces holomorphes compactes pour lesquelles existe un champ de vecteurs holomorphe global non trivial. On démontre, sous cette hypothèse, que toute surface S de la classe VII_0 avec $b_2(S) > 0$ contient une coquille sphérique globale. C'est exactement le cas où cette classification était incomplète. Cet article est la suite de [3].

Mathematics Subject Classification (2000). 32J15, 32M25, 32Q57.

Keywords. Compact complex surface, class VII_0, holomorphic vector field, global spherical shell.

Une *surface* est une variété complexe compacte S de dimension 2. On note $b_i(S)$ le i-ième nombre de Betti de S.

0. Introduction et rappels

La classe VII_0 de Kodaira, qui est formée des surfaces complexes compactes minimales S à $b_1(S) = 1$, est complètement comprise seulement dans le cas $b_2(S) = 0$. Introduisons la notation VII_0^+ pour désigner la sous-classe des surfaces S à $b_2(S) > 0$. Une surface de la classe VII_0^+ ne contient qu'un nombre fini de courbes compactes, [9]. Les seuls exemples connus dans la classe VII_0^+ sont ceux admettant une coquille sphérique globale (CSG). Les surfaces à CSG sont maintenant bien comprises. Nous renvoyons le lecteur à [2] et à [4] pour la définition et leurs propriétés. Rappelons ici seulement qu'une surface S de la classe VII_0^+ avec CSG contient exactement $b_2(S)$ courbes rationnelles. D'après [10] nous appelerons une surface S de la classe VII_0^+ *spéciale* si elle contient $b_2(S)$ courbes rationnelles.

Le but de cet article est d'achever la classification des surfaces complexes compactes admettant un champ de vecteurs holomorphe non trivial ou, ce qui est équivalent, une action holomorphe presque effective du groupe de Lie complexe $(\mathbb{C}, +)$. Cette classification était incomplète précisement dans le cas de la classe VII_0^+.

On a montré dans [3] que, si S est une surface de la classe VII_0^+ munie d'un champ de vecteurs holomorphe non trivial, alors S est une surface spéciale. Il restait le problème de savoir si, sous ces hypothèses, S contient une CSG. C'est ce problème que nous résolvons dans cet article.

Théorème 0.1. *Soit S une surface complexe compacte minimale munie d'un champ de vecteurs holomorphe non trivial, pour laquelle les nombres de Betti satisfont les conditions $b_1(S) = 1$ et $n = b_2(S) > 0$. Alors S contient une coquille sphérique globale.*

Remarque 0.2. *Le champ induit une action presque effective de $(\mathbb{C}, +)$. Comme le nombre de courbes compactes sur S est fini, il n'y a pas d'action de tore. Seuls les deux cas suivants se produisent :*

1) *Le champ induit une action effective de $(\mathbb{C}^\star, \cdot)$. Alors S est une surface d'Inoue parabolique* [6]*, et donc à CSG.*

2) *L'action de $(\mathbb{C}, +)$ est effective. On a montré dans* [2] *que de telles surfaces à CSG existent.*

Rappellons que pour une surface spéciale S, on a $H^1(S, \mathbb{C}^\star) \simeq \mathbb{C}^\star$, [10], p. 481, ce qui permet de noter par L^λ le fibré plat correspondant à $\lambda \in \mathbb{C}^\star$. On désigne par $M(S)$ la matrice d'intersection des $b_2(S)$ courbes rationnelles. On sait que

$$k(S) := 1 + \sqrt{|\det M(S)|}$$

est un entier. Lorsque S contient une CSG et $b_2(S) > 0$, cet entier est égal, d'après [4], à l'entier $k(S)$ défini dans [2].

On note $kod(S)$ la dimension de Kodaira d'une surface S. D'après notre résultat, [2] et [5], la classification des surfaces complexes compactes avec champs de vecteurs holomorphes est terminée :

Théorème 0.3. *Une surface compacte complexe minimale admet un champ de vecteurs holomorphe non trivial si, et seulement si elle appartient à la liste suivante :*

I) *Surfaces vérifiant $kod(S) \geq 0$:*

a) *Tores complexes.*

b) *Fibrés principaux de Seifert au dessus d'une surface de Riemann à fibre une courbe elliptique.*

II) *Surfaces kähleriennes vérifiant $kod(S) = -\infty$:*

a) *Fibrés holomorphes à fibre $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ et à groupe structural $\mathbb{C}^\star$ au-dessus d'une surface de Riemann de genre $g \geq 1$, $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ et surfaces de Hirzebruch $\Sigma_n, n = 0, 2, 3, \ldots$.*

b) *Fibrés holomorphes à fibre $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ avec groupe structural connexe résoluble au-dessus d'une surface de Riemann de genre $g \geq 1$, tel que le fibré en droites associé ait une section holomorphe non triviale.*

III) *Surfaces non kähleriennes vérifiant kod$(S) = -\infty$:*

a) *Surfaces de Hopf presque homogènes.*

b) *Surfaces d'Inoue de type* $S^{(+)}_{N,p,q,r;t}$.

c) *Surfaces S de la classe* VII_0^+ *admettant une CSG et dont le fibré anticanonique est de la forme*

$$K^{-1} = \mathcal{O}(D_{-K}) \otimes L^{k(S)},$$

où D_{-K} est le diviseur numériquement anticanonique. Ici $k(S) = 1$ si et seulement si S est une surface d'Inoue parabolique.

Notons θ un champ de vecteurs holomorphe non-trivial sur une surface S de la classe VII_0^+. Comme dans [3], on supposera dans la suite, grâce à [6], que l'action du groupe $(\mathbb{C}, +)$ induite par θ est *effective.* On note D_θ le diviseur des zéros de θ, et D le diviseur réduit maximal de S. On a montré dans [3], que D consiste en exactement $b_2(S)$ courbes rationnelles, c'est-à-dire que S est spéciale.

Voici le contenu de l'article : l'idée directrice est de reconstituer à partir du feuilletage réduit $\mathcal{F}$ associé au champ de vecteurs θ et du diviseur maximal D de S un certain germe d'application contractante $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ qui permet, grâce aux résultats de Ch. Favre [4], de retrouver la CSG.

- Dans le §1 on démontre que le feuilletage $\mathcal{F}$ est également défini par une 1-forme méromorphe logarithmique

  $$\omega \in H^0(S, \Omega^1(Log D) \otimes L^k),$$

  avec pôles le long du diviseur D et tordue par un fibré plat L^k, où $k = k(S) > 1$, comme dans le cas des surfaces à CSG, [2].
- Dans le §2, on montre qu'il existe un voisinage ouvert $V \cup D$ du diviseur maximal D, invariant par le feuilletage $\mathcal{F}$, avec $V = V \setminus D$ tel que le revêtement universel de V est isomorphe à $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$ et $\pi_1(V) \simeq \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$. Ici $\mathbb{H}_g = \{w \in \mathbb{C} \mid \Re e(w) < 0\}$.
- Dans le §3, on calcule une forme normale des générateurs g_γ, g d'un groupe $G \simeq \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ agissant proprement discontinûment sur $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$. On obtient

  $$\begin{aligned} g_\gamma(w, z) &= (w + 2\pi i, z) \\ g(w, z) &= (kw, z + f_g(w)) \end{aligned}$$

  où $f_g(w) = H(e^{-w})$ et

  $$H(\zeta) = A_0 + \sum_{m>0, k\nmid m} A_m \zeta^m$$

  est un polynôme.
- Ceci permet de reconstituer dans le §5 un germe d'application contractante et de voir que V peut-être compactifié par des courbes rationnelles de façon à obtenir une surface avec CSG, ce qui donne le résultat. En même temps, nous voyons que l'ouvert V était en fait égal à $S \setminus D$.

Remerciements. Nous remercions vivement Alexander Borichev (CNRS, Université de Bordeaux I). Nous lui devons la démonstration du fait que la fonction H doit être un polynôme dans le cas d'une action proprement discontinue. La démonstration de la partie directe de la Proposition 3.2 lui est due. Nous tenons aussi à remercier le rapporteur, dont les remarques et les suggestions ont beaucoup amélioré la forme de cet article.

1. Forme logarithmique tordue et coefficient de torsion

Soit S une surface *spéciale* au sens de Nakamura, c'est-à-dire que S est minimale, $b_1(S) = 1$, $n := b_2(S) > 0$ et il existe exactement n courbes rationnelles. D'après [10], la surface S est difféomorphe à une surface contenant une CSG, en particulier son groupe fondamental $\pi_1(S)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. En utilisant le fait que $H^1(S, \mathbb{C}) \simeq H^1(S, \mathcal{O}) \simeq \mathbb{C}$, on voit aussitôt que les fibrés holomorphes en droites topologiquement triviaux sont exactement les fibrés en droites plats. Ces fibrés sont à leur tour canoniquement parametrés par $\mathbb{C}^\star$: un homomorphisme ρ de $\pi_1(S) \simeq \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}^\star$ est uniquement déterminé par la valeur $\lambda := \rho(1)$. Nous notons par L^λ le fibré correspondant.

À l'exception des surfaces d'Inoue–Hirzebruch et d'Inoue paraboliques, le diviseur maximal réduit D d'une surface spéciale consiste en un cycle de courbes rationnelles auquel se rattache un système non vide d'arbres de courbes rationnelles (voir [10]). De plus, le morphisme $\pi_1(D) \to \pi_1(S)$ est bijectif ([9]). Cela implique que dans le revêtement universel $\tilde{S}$ de S, l'image réciproque du cycle est une chaîne infinie de courbes rationnelles.

Dorénavant S désignera une surface spéciale admettant un champ de vecteurs global non trivial θ qui induit une action *effective* de $(\mathbb{C}, +)$. On montrera ici que le feuilletage $\mathcal{F}$ induit par θ est également défini par une 1-forme méromorphe logarithmique tordue par le fibré plat $L^{k(S)}$. On note D_θ le diviseur d'annulation de θ. D'après [3], il existe un diviseur numériquement anticanonique D_{-K}, et un fibré plat L^κ, $\kappa \in \mathbb{C}^*$ tels que

$$D_{-K} = D_\theta + D, \qquad (*)$$

$$K^{-1} \otimes L^\kappa = D_{-K}. \qquad (**)$$

Lemme 1.1. *Il existe une* 1*-forme méromorphe logarithmique fermée tordue*

$$\omega \in H^0(S, \Omega^1(\log D) \otimes (L^\kappa)^{-1})$$

qui a ses pôles le long de D.

Démonstration. Soit Z l'espace analytique des singularités du feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ et $\mathcal{J}_Z$ le faisceau d'ideaux associé. D'après [3], Z est l'espace des points d'intersections des courbes rationnelles de S. On notera aussi par Θ_S le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes. Le champ de vecteurs θ induit, d'après $(*)$ et $(**)$ une suite exacte courte de $\mathcal{O}_S$-modules

$$0 \to \mathcal{O}(D_\theta) \to \Theta_S \to \mathcal{J}_Z \otimes (L^\kappa)^{-1} \otimes \mathcal{O}(D) \to 0.$$

En dualisant on obtient la suite exacte courte

$$0 \to L^\kappa \otimes \mathcal{O}(-D) \to \Omega_S^1 \to \mathcal{J}_Z \otimes \mathcal{O}(-D_\theta) \to 0,$$

et donc une section

$$\omega \in \Gamma(S, \Omega^1 \otimes (L^\kappa)^{-1} \otimes \mathcal{O}(D)),$$

qui vérifie $\omega(\theta) \equiv 0$. Autour d'un point lisse de D on choisit des coordonnées locales (z_1, z_2) telles que $D = \{z_2 = 0\}$. On sait que les courbes sont invariantes pour $\mathcal{F}$ et donc θ est tangent à D (voir [3]). On a alors

$$\theta = a(z_1, z_2) z_2^m \frac{\partial}{\partial z_1}$$

et

$$\omega = b(z_1, z_2) \frac{dz_2}{z_2},$$

avec $a(0,0) \neq 0$, $b(0,0) \neq 0$ et $m \in \mathbb{N}$, puisque le morphisme $L^\kappa \otimes \mathcal{O}(-D) \to \Omega_S^1$ ne s'annule qu'en codimension 2.

Par conséquent, la forme ω a des pôles logarithmiques le long de D et, en outre, elle est fermée puisque

$$d\omega \in \Gamma(S, \Omega^2 \otimes (L^\kappa)^{-1} \otimes \mathcal{O}(D)) = \Gamma(S, \mathcal{O}(-D_\theta)) = 0.$$

□

Notons g le générateur de $\pi_1(S) = \mathbb{Z}$ qui agit sur $\tilde{S}$ de façon que $g^\star \omega = \kappa^{-1} \omega$.

Lemme 1.2. *$\kappa \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ ou $\frac{1}{\kappa} \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.*

Démonstration. Le relevé de ω sur le revêtement universel $\tilde{S}$ de S est une 1-forme méromorphe à pôles logarithmiques le long de l'image réciproque $\tilde{D}$ de D. Notons encore cette forme ω. Soient $D_0, \dots, D_{m-1}$ les courbes rationnelles du cycle de S et $C_0, \dots, C_{m-1}$ une chaine connexe de courbes dans $\tilde{D}$ recouvrant $D_0, \dots, D_{m-1}$. On pose $C_m := g(C_0)$. Soit U un voisinage pseudoconvexe de D et $\tilde{U}$ son image réciproque dans $\tilde{S}$. Pour un petit lacet γ_0 dans $\tilde{U} \setminus \tilde{D}$ autour de C_0 on a

$$\int_{g \circ \gamma_0} \omega = \int_{\gamma_0} g^\star \omega = \kappa^{-1} \int_{\gamma_0} \omega.$$

Soit γ_1 un lacet autour de C_1. Nous allons comparer les intégrales $\int_{\gamma_0} \omega$ et $\int_{\gamma_1} \omega$. Dans un voisinage de $p := C_0 \cap C_1$ on prend des coordonnées locales (x, y) telles que $C_0 = \{x = 0\}$ et $C_1 = \{y = 0\}$. On a vu dans [3] qu'en p, θ a la forme

$$\theta = f(x, y) x^a y^b \bar{\theta}$$

avec $f(0,0) \neq 0$, où

$$\bar{\theta} = (\mu x + x f_1)\frac{\partial}{\partial x} - (\nu y + y f_2)\frac{\partial}{\partial y},$$

$\mu, \nu \in \mathbb{N}^\star$ et $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$, car les courbes sont toutes invariantes. Cette forme est d'ailleurs valable pour toute intersection de courbes de D.

Le premier jet de $\bar{\theta}$ s'écrit

$$J_1(\theta) = \mu x \frac{\partial}{\partial x} - \nu y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Si on pose $\omega = g_1 \dfrac{dx}{x} + g_2 \dfrac{dy}{y}$, la condition

$$0 = \langle \omega, \bar{\theta} \rangle = \frac{g_1}{x}(\mu x + x f_1) - \frac{g_2}{y}(\nu y + y f_2)$$

entraîne $g_1(\mu + f_1) = g_2(\nu + f_2)$.

Maintenant nous avons

$$\int_{\gamma_0} \omega = 2\pi i \ \mathrm{Res}(\omega)|_{y=c_1} = 2\pi i \ g_1(0, c_1)$$

pour un $c_1 \neq 0$ fixé. Puisque ω est fermée, cette intégrale est indépendante de c_1. De plus, $g_1(0,c_1) \neq 0$, car ω a des pôles logarithmiques le long de $\tilde{D}$. Par conséquent $\int_{\gamma_0} \omega = 2\pi i g_1(0,0) \neq 0$ et de façon analogue $\int_{\gamma_1} \omega = 2\pi i g_2(0,0) \neq 0$.

Le rapport de ces deux intégrales est

$$\frac{\int_{\gamma_1} \omega}{\int_{\gamma_0} \omega} = \frac{g_2(0,0)}{g_1(0,0)} = \frac{\mu}{\nu} = -\mathrm{CS}(\mathcal{F}, C_1, C_0 \cap C_1)$$

et donc

$$\kappa^{-1} = \frac{\int_{g \circ \gamma_0} \omega}{\int_{\gamma_0} \omega} = \prod_{i=1}^{m} \frac{\int_{\gamma_i} \omega}{\int_{\gamma_{i-1}} \omega} = \prod_{i=1}^{m} (-\mathrm{CS}(\mathcal{F}, C_i, C_{i-1} \cap C_i)),$$

où les γ_i sont de petits lacets dans $\tilde{U} \setminus \tilde{D}$ autour de C_i. On a noté $\mathrm{CS}(\mathcal{F}, C, p)$ l'indice de Camacho–Sad du feuilletage $\mathcal{F}$ le long de la courbe C au point p, voir [1].

En particulier $\kappa \in \mathbb{Q}_+^\star$. On se propose maintenant de montrer que le nombre κ ne dépend que du graphe dual de D, c'est-à-dire de la matrice d'intersection de D.

Soit $B_{i1}, \ldots, B_{im_i}$ l'arbre de courbes rationnelles dont la racine est C_i, $b_{ij} :=$

$-B_{ij}^2$ et

$$\begin{aligned} b_i :&= -\mathrm{CS}(\mathcal{F}, C_i, C_i \cap B_{i1}) &&= \frac{1}{-\mathrm{CS}(\mathcal{F}, B_{i1}, C_i \cap B_{i1})} \\ &= \frac{1}{b_{i1} - (-\mathrm{CS}(\mathcal{F}, B_{i1}, B_{i1} \cap B_{i2}))} &&= \frac{1}{b_{i1} - \cfrac{1}{-\mathrm{CS}(\mathcal{F}, B_{i2}, B_{i1} \cap B_{i2})}} \\ &= \dots \\ &= \cfrac{1}{b_{i1} - \cfrac{1}{b_{i2} - \cfrac{1}{b_{i3} - \dots\dots - \cfrac{1}{b_{im_i}}}}}. \end{aligned}$$

On pose $b_i = 0$, s'il n'y a pas d'arbre sur C_i. Alors on a $0 \le b_i < 1$, pour tout i. Soient

$$d_i := -C_i^2 - b_i > 1$$

et

$$\alpha_i := -\mathrm{CS}(\mathcal{F}, C_i, C_{i-1} \cap C_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

La formule de Camacho–Sad ([1]) entraîne

$$\alpha_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}} = d_i, \quad \text{pour } 1 \le i \le m-1 \tag{1}$$

et

$$\alpha_m + \frac{1}{\alpha_1} = d_m. \tag{2}$$

On démontrera dans l'annexe que les équations (1) et (2) entraînent que

$$\kappa^{-1} = \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_m$$

ne dépend que des d_i, $1 \le i \le m$. Plus précisement on verra que κ est unique à inversion près. Le lecteur pourrait aussi consulter le fameux article [7] de F. Hirzebruch qui traite le cas où tous les b_i sont nuls par une méthode différente.

D'après [10], il existe une surface S' avec *coquille sphérique globale* dont le diviseur maximal admet le même graphe dual que le diviseur maximal de S.

L'unique feuilletage holomorphe singulier de S' est induit par une forme logarithmique tordue $\omega' \in H^0(S', \Omega^1(\operatorname{Log} D') \otimes L^k)$ avec $k = k(S') = k(S) \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ (voir [2]). Puisque κ et k se calculent à partir du graphe dual par la même équation à inversion près, d'après l'annexe, on aura $\kappa = k$ ou $\kappa = \frac{1}{k}$. □

Remarque 1.3. *On peut choisir le générateur g de $\pi_1(S)$ tel que $\kappa < 1$, ce que nous faisons par la suite et alors $\kappa^{-1} = k(S) = k$.*

En résumé, nous avons obtenu dans cette section la

Proposition 1.4. *Il existe une* 1*-forme méromorphe logarithmique fermée tordue*

$$\omega \in H^0(S, \Omega^1(\log D) \otimes L^{k(S)}),$$

$k(S) \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$*, qui a ses pôles le long de* D *et qui définit le feuilletage* $\mathcal{F}$*.*

2. Revêtement universel du complémentaire des courbes

Soit U un petit voisinage ouvert de D, tel que D soit une rétraction par déformation de U. On a

$$\pi_1(U) = \pi_1(D) = \pi_1(S) = \mathbb{Z}.$$

Il existe un domaine fondamental U_0 pour l'action de $\mathbb{Z}$ dans l'image réciproque $\tilde{U}$ de U dans $\tilde{S}$, tel que le bord de U_0 dans $\tilde{U}$ coupe $\tilde{D}$ sur une composante C_0 et sur sa translatée $g(C_0)$ le long d'un cercle S^1. Soit $Y_0 := \bigcup_{\nu \geq 0} g^{\nu}(U_0)$.

Lemme 2.1. *Il existe une normalisation de* ω *de façon que la représentation*

$$\rho : \pi_1(\tilde{S} \setminus \tilde{D}) \to \mathbb{C}$$

$$\gamma \mapsto \int_{\gamma} \omega$$

ait comme image $2\pi i \mathbb{Z}[\frac{1}{k}] \subset \mathbb{C}$*. En plus, on peut choisir cette normalisation telle que* $\rho(\pi_1(Y_0 \setminus \tilde{D})) = 2\pi i \mathbb{Z}$*.*

Démonstration. Puisque $\tilde{S}$ est simplement connexe, le groupe $\pi_1(\tilde{S} \setminus \tilde{D})$ est engendré par les petits lacets autour des composantes irréductibles de $\tilde{D}$. D'après les résultats de la section précédente (démonstration du lemme 1.2) et en utilisant les mêmes notations, on voit que $\rho(\pi_1(\tilde{S} \setminus \tilde{D}))$ est un $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$-module engendré par $2\pi i a_0 = \int_{\gamma_0} \omega, \ldots, 2\pi i a_{n-1} = \int_{\gamma_{n-1}} \omega$, où $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}$ désignent les petits lacets autour des courbes $C_0, \ldots, C_{n-1}$ dans U_0.

Maintenant on peut normaliser la forme ω de sorte que les nombres $a_0, \ldots, a_{n-1}$ soient des entiers positifs à p.g.c.d. égal à 1 ; donc le groupe $\rho(\pi_1(\tilde{S} \setminus \tilde{D}))$ est libre de rang 1 comme $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$-module.

De manière similaire le groupe $\rho(\pi_1(Y_0 \setminus \tilde{D}))$ sera engendré comme $\mathbb{Z}$-module par les petits lacets autour des courbes irréductibles de $\tilde{D}$ qui rencontrent U_0. $\square$

Nous supposerons dans la suite que ω est normalisée comme dans le lemme 2.1.

Soit A un domaine fondamental pour l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\tilde{S}$ et $X_0 := \bigcup_{j \geq 0} g^j(A)$. En translatant par g, on peut supposer que $\tilde{D} \cap X_0 \subset Y_0$. Remarquons qu'après une telle translation, on a

$$\rho(\pi_1((Y_0 \cup X_0) \setminus \tilde{D})) = \rho(\pi_1(Y_0 \setminus \tilde{D})) = 2\pi i \mathbb{Z}.$$

Fixons $z_0 \in U_0$. Nous définissons une fonction holomorphe f sur $(Y_0 \cup X_0) \setminus \tilde{D}$ par

$$f(z) = \exp\Big(\int_{z_0}^{z} \omega + \frac{1}{k-1}\int_{z_0}^{g(z_0)} \omega\Big).$$

On vérifie aisément que f est bien définie et que

$$f(g(z)) = f^k(z) \tag{†}$$

pour $z \in (Y_0 \cup X_0) \setminus \tilde{D}$.

Soit C la partie lisse dans $\tilde{D}$ d'une composante irréductible de $\tilde{D} \cap Y_0$. Comme ω est une forme logarithmique fermée, quitte à remplacer ω par $-\omega$, un calcul local autour de C montre que f se prolonge en tant que fonction continue et donc aussi holomorphiquement en prenant la valeur 0 sur C. Nous prolongeons maintenant f sur l'ensemble $\tilde{D} \cap Y_0$, en utilisant à nouveau que les rapports des résidus de ω sur les composantes de $\tilde{D}$ sont des rationnels positifs.

Le noyau $Ker\rho$ définit un revêtement $\pi : X' := \widetilde{S \setminus D}/Ker\rho \to \tilde{S} \setminus \tilde{D}$. On vérifie aussitôt que l'action de g sur $\pi_1(\tilde{S} \setminus \tilde{D})$ stabilise $Ker\rho$ et induit donc une action de $\mathbb{Z}$ sur X'. Notons encore par g un relèvement de g sur X'. Soit $\omega' = \pi^\star\omega$ et $\phi : X' \to \mathbb{C}$ une primitive de ω' sur X', telle que $\exp(\phi)$ coïncide avec $\pi^\star f$ sur une composante connexe de l'image réciproque par π de $(Y_0 \cup X_0) \setminus \tilde{D}$.

Comme $\phi \circ g = k\phi$, l'image de ϕ est invariante sous l'action du groupe multiplicatif $\{k^\nu, \nu \in \mathbb{Z}\}$; cette image est aussi invariante sous l'action du groupe additif $2\pi i\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$. Comme, d'autre part, f s'annule sur $Y_0 \cap \tilde{D}$, $\phi(X')$ contient le demi-plan gauche $\mathbb{H}_g := \{w \in \mathbb{C} \mid \Re e(w) < 0\}$. La fonction ϕ est une submersion holomorphe. Les composantes connexes de ses fibres sont isomorphes à $\mathbb{C}$ en tant qu'orbites du flot relevé.

Proposition 2.2. *Les fibres de ϕ au-dessus de $\mathbb{H}_g$ sont connexes.*

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de cette section. La démonstration de la Proposition 2.2 est reportée à la fin de la section.

La Proposition 2.2 implique que la restriction de ϕ à l'ouvert $V' := \phi^{-1}(\mathbb{H}_g)$ est en fait un $\mathbb{C}$-fibré principal au-dessus de $\mathbb{H}_g$ et donc trivial. Soit $\tilde{V} := \pi(V')$ et V son image dans S. Soit $\gamma \in \pi_1(\tilde{V})$ un lacet avec $\rho(\gamma) = 2\pi i$ et g_γ l'automorphisme de $V' \simeq \mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$ correspondant à γ.

Le résultat principal de cette section est la

Proposition 2.3. *Le revêtement universel de $\tilde{V}$ et donc celui de V sont isomorphes au produit $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$ et $\pi_1(V)$ est engendré par les deux automorphismes g et g_γ de $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$. De plus, $\alpha(g)(g_\gamma) := gg_\gamma g^{-1} = g_\gamma^k$ et $\pi_1(V) \simeq \mathbb{Z} \ltimes_\alpha \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$.*

Démonstration. Remarquons que $V \cup D$ est un voisinage de D dans S. La variété $V' = \mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$ est déjà le revêtement universel de V. D'après le Lemme 2.1 et la Proposition 2.2

$$\pi_1(\tilde{V}) \simeq \mathbb{Z}\Big[\frac{1}{k}\Big] \simeq \{g^n g_\gamma^l g^{-n} \mid l, n \in \mathbb{Z}\}.$$

La conclusion en découle. $\square$

C'est à la fin de l'article seulement qu'on verra que $V \cup D$ est compact et donc coïncide avec S. Avant d'attaquer la démonstration de la Proposition 2.2, nous démontrons le

Lemme 2.4. *Chaque fibre $f^{-1}(\alpha)$ pour $\alpha \in \Delta^\star := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid 0 < |\zeta| < 1\}$ est contenue dans une feuille du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ induit par $\mathcal{F}$ sur $\tilde{S}$.*

Démonstration. Remarquons d'abord qu'il suffit de montrer le lemme pour α dans un voisinage arbitrairement petit de 0 dans $\Delta := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| < 1\}$. En effet, s'il était faux pour un certain α, on aurait deux composantes de $f^{-1}(\alpha)$ se trouvant dans deux feuilles différentes de $\tilde{\mathcal{F}}$. D'après la relation (†) les images par $g^\nu, \nu > 0$, des deux composantes considérées se trouveraient dans deux composantes de $f^{-1}(\alpha^{k^\nu})$. L'invariance du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ par g, donnerait l'existence de deux feuilles différentes coupant $f^{-1}(\alpha^{k^\nu})$.

Lorsque α tend vers zéro, l'ensemble $f^{-1}(\alpha) \cap U_0$ s'accumule sur $\tilde{D} \cap U_0$. Plus précisément pour tout voisinage de $\tilde{D} \cap \overline{U_0}$ et α assez petit, $f^{-1}(\alpha) \cap U_0$ se trouvera dans ce voisinage. Prenons une composante Z de $f^{-1}(\alpha)$. Elle se trouve dans une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$.

Notons (z_i, z_j) un système local de coordonnées analytiques autour d'un noeud $C_i \cap C_j$, dans lequel $C_i = \{z_i = 0\}, C_j = \{z_j = 0\}$. Puisque le feuilletage est localement défini par $\omega = df/f$ ou par df, les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ au voisinage de $C_i \cap C_j$ sont les hypersurfaces de niveau d'une fonction $l(z_i^{m_i} z_j^{m_j})$ (voir [8], page 498, VI.3 et la démonstration du lemme 1, page 503). On a noté par l un élément de $Diff(\mathbb{C}, 0)$. En particulier il s'ensuit que chaque feuille qui est suffisamment proche de l'une des courbes C_i, sera proche de toute autre courbe C_j de $\tilde{D} \cap U_0$. En plus, si $p.g.c.d.(m_i, m_j) = 1$

- une composante locale d'une feuille autour du noeud $C_i \cap C_j$ contient localement m_i composantes connexes locales autour de C_i, et m_j autour de C_j ;
- la fonction $l(z_i^{m_i} z_j^{m_j})$ n'est pas une puissance, donc est à fibres connexes, d'après le lemme 1 de [8], page 500.

Notons par p_i le nombre des composantes locales de Z autour d'un point lisse de la courbe C_i. La fibre $f^{-1}(\alpha)$ a $a_i := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} \omega$ composantes locales autour de C_i, et $d_{ij} := p.g.c.d.(a_i, a_j)$ composantes locales autour d'un noeud $C_i \cap C_j \neq \emptyset$. Remarquons que $p_i \leq a_i$. Avec les notations précédentes, on a

$$m_i = \frac{a_i}{d_{ij}},\ m_j = \frac{a_j}{d_{ij}}.$$

Il s'ensuit que le nombre de composantes locales de Z autour d'un noeud $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ est

$$\frac{p_i}{m_i} = \frac{p_i d_{ij}}{a_i} = \frac{p_j d_{ij}}{a_j} = \frac{p_j}{m_j}.$$

Nous obtenons la relation $\frac{p_i}{a_i} = \frac{p_j}{a_j}$ pour chaque $C_i \cap C_j \neq \emptyset$. En utilisant la connexité de $\tilde{D} \cap U_0$ et le fait que Z est contenu dans une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$ on déduit l'existence d'un nombre rationnel s tel que $s = \frac{p_i}{a_i}, i = 0, \dots, n-1$. Maintenant $p.g.c.d.(a_0, \dots a_{n-1}) = 1$ entraîne $s \in \mathbb{Z}$ et donc $p_i = a_i$ pour tout $i = 0, \dots, n-1$ et Z est l'unique composante connexe de $f^{-1}(\alpha) \cap U_0$. □

Démonstration de la Proposition 2.2. Soient L_1, L_2 deux composantes connexes d'une fibre $\phi^{-1}(\beta)$ avec $\beta \in \mathbb{H}_g$. On peut se ramener à la situation où $\alpha := e^\beta$ est petit en utilisant l'action de $\{g^\nu \mid \nu \in \mathbb{Z}\}$. La même action permet de supposer que $\pi(L_1)$ et $\pi(L_2)$ coupent X_0, au besoin on remplace α par α^{k^ν}. On peut supposer même que L_1 et L_2 coupent la même composante connexe de $\pi^{-1}((X_0 \cup Y_0) \setminus \tilde{D})$. Pour voir ceci, on prend un chemin qui relie L_1 et L_2, et on considère le recouvrement $(\pi^{-1}(g^n((X_0 \cup Y_0) \setminus \tilde{D})))_{n \in \mathbb{Z}}$. D'après le lemme précédent $\pi(L_1)$ et $\pi(L_2)$ se trouvent dans la même feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$, puisque f prend sur $\pi(L_1) \cap (X_0 \cup Y_0) \neq \emptyset$ la même valeur que sur $\pi(L_2) \cap (X_0 \cup Y_0) \neq \emptyset$. Soit $z \in \pi(L_1) \cap Y_0 = \pi(L_2) \cap Y_0$ et $z_1 \in L_1, z_2 \in L_2$ des préimages par π. Un chemin γ reliant z_1 à z_2 dans X' se projette sur un chemin fermé dans $\tilde{S} \setminus \tilde{D}$. L'intégrale de ω sur ce chemin sera nulle et donc $\rho(\gamma) = 0$, i.e. $z_1 = z_2$ et $L_1 = L_2$. □

3. Actions proprement discontinues sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$

Le but de cette section est de montrer un théorème général concernant certains groupes d'automorphismes holomorphes agissant proprement discontinûment sur $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$, où $\mathbb{H}_g = \{w \in \mathbb{C} \mid \Re e(w) < 0\}$.

Notons par (w, z) les coordonnées globales de $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$.

Théorème 3.1. *Soit $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Soit G un sous-groupe du groupe des automorphismes holomorphes de $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$. On suppose que*

– *le groupe G est isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$, c'est-à-dire qu'il existe deux générateurs $g, g_\gamma \in G$ de G tels que $g g_\gamma g^{-1} = g_\gamma^k$,*

– *l'action de G sur $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$ est proprement discontinue,*

– *elle préserve un champ de vecteurs θ intégrable sans zéros.*

Alors, à conjugaison près, $\theta = \partial/\partial z$ et le groupe G est engendré par les deux automorphismes

$$\begin{cases} g_\gamma(w, z) = (w + 2\pi i, z) \\ g(w, z) \ = (kw, z + H(e^{-w})), \end{cases}$$

où $H(\zeta) = \sum_{m=0}^{s} A_m \zeta^m$ est un polynôme tel que $A_m = 0$ pour tout $m > 0$ avec $k|m$ et $A_s \neq 0$. Réciproquement, l'action d'un groupe d'automorphismes de $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$ engendré par deux éléments g, g_γ de la forme ci-dessus est libre et proprement discontinue.

Démonstration. Une application évidente du théorème de Liouville montre qu'un automorphisme de $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$ est de la forme

$$(w, z) \mapsto (Aw, f_1(w)z + f_2(w)),$$

où $A \in Aut_{\mathcal{O}}(\mathbb{H}_g) \simeq PSL(2,\mathbb{R})$, $f_1 \in \mathcal{O}^*(\mathbb{H}_g)$ et $f_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{H}_g)$. En particulier, la projection de $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$ sur $\mathbb{H}_g$ induit canoniquement un homomorphisme de groupes η de G dans $Aut_{\mathcal{O}}(\mathbb{H}_g)$. L'hypothèse de la propre discontinuité de l'action montre que si $Ker(\eta)$ était non-trivial, il serait isomorphe à $\mathbb{Z}$ où à $\mathbb{Z}^2$. Mais ce n'est pas difficile à voir que $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ n'admet pas de tels sous-groupes normaux. Donc η est injectif, i.e. $G \simeq \eta(G) \subset Aut_{\mathcal{O}}(\mathbb{H}_g) \simeq PSL(2,\mathbb{R})$. Puisque G est un groupe résoluble non-commutatif, l'adhèrence de Zariski réelle de $\eta(G)$ dans $PSL(2,\mathbb{R})$ l'est aussi. Cette adhèrence est donc conjuguée au sous-groupe de Borel standard de $PSL(2,\mathbb{R})$. Ce fait et la structure de G impliquent maintenant que $\eta(G)$ est conjugué dans $Aut_{\mathcal{O}}(\mathbb{H}_g)$ au groupe engendré par $(w \mapsto w + 2\pi i)$ et $(w \mapsto kw)$.

Le champ de vecteurs intégrable θ ne s'annule pas par hypothèse. Il est donc constant sur chaque fibre de la projection de $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$ sur $\mathbb{H}_g$. Par conséquent ce champ est de la forme $\alpha(w)\frac{\partial}{\partial z}$ sur $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$, où $\alpha \in \mathcal{O}^\star(\mathbb{H}_g)$. En conjuguant avec l'automorphisme

$$(w, z) \mapsto (w, \alpha^{-1} \cdot z),$$

on se ramène au cas $\alpha \equiv 1$.

Puisque g et g_γ préservent $\theta = \partial/\partial z$, on a :

$$\begin{aligned} g_\gamma(w,z) &= (w + 2\pi i, z + f_\gamma(w)) \\ g(w,z) &= (kw, z + f_g(w)). \end{aligned}$$

L'automorphisme g_γ engendre une action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$, qui induit un $\mathbb{C}$-fibré principal holomorphe

$$\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}/\mathbb{Z} \to \mathbb{H}_g/\mathbb{Z} \simeq \Delta^\star = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid 0 < |\zeta| < 1\}.$$

La trivialité holomorphe de ce fibré entraîne l'existence d'une fonction holomorphe $h : \mathbb{H}_g \to \mathbb{C}$ telle que

$$h(w + 2\pi i) - h(w) = f_\gamma(w)$$

et la conjugaison par $(w, z) \mapsto (w, z + h(w))$ nous mène à la nouvelle forme

$$g_\gamma(w, z) = (w + 2\pi i, z).$$

Par la suite nous supposerons donc que $f_\gamma \equiv 0$.

On a par hypothèse

$$g \circ g_\gamma \circ g^{-1} = g_\gamma^k,$$

ce qui conduit à la $2\pi i$-périodicité de la fonction f_g.

En factorisant par $\exp : \mathbb{H}_g \to \Delta^\star$, $w \mapsto e^w =: \zeta$, on obtient un développement en série de Laurent

$$f_g(w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m e^{mw} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m \zeta^m.$$

Une conjugaison par
$$(w,z)\mapsto(w,z+\beta(w))$$
où β est une fonction $2\pi i$-périodique sur $\mathbb{H}_g$, ne modifie pas la forme de g_γ, mais remplace f_g par
$$w\mapsto f_g(w)+\beta(kw)-\beta(w).$$

Soit
$$h(\zeta):=\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_m\zeta^m,\quad h_+(\zeta):=\sum_{m>0}a_m\zeta^m.$$

La série $\sum_{l=0}^{\infty}h_+(\zeta^{k^l})$ converge uniformément sur tout compact de $\Delta^\star$. Pour le voir il suffit d'écrire $h_+(\zeta)=\zeta(\zeta^{-1}h_+(\zeta))$ et de remarquer que $\zeta^{-1}h_+(\zeta)$ est holomorphe en 0. Soit
$$\chi(\zeta):=\sum_{l=0}^{\infty}h_+(\zeta^{k^l}).$$
On a
$$\chi(\zeta)-\chi(\zeta^k)=h_+(\zeta).$$

En posant $\beta(w):=\chi(e^w)$, nous obtenons
$$f_g(w)+\beta(kw)-\beta(w)=\sum_{m\le 0}a_me^{mw}.$$

On peut donc supposer que $f_g(w)=h(e^w)$, où $h\in\mathcal{O}(\mathbb{P}_1(\mathbb{C})\setminus\{0\})$.

Il nous reste la possibilité de conjuguer avec $(w,z)\mapsto(w,z+\varphi(e^w))$, où $\varphi\in\mathcal{O}(\mathbb{P}_1(\mathbb{C})\setminus\{0\})$.

Pour une fonction
$$h(\zeta)=\sum_{m\le 0}a_m\zeta^m$$
et $l\in\mathbb{N}^\star$, on considère
$$h_l(\zeta):=\sum_{k^l|m,\ m<0}a_m\zeta^m$$
et
$$h_0:=h.$$

Chaque h_l est de la forme $h_l(\zeta)=f_l(\zeta^{k^l})$, avec une fonction f_l. Si φ désigne la série formelle $-\sum_{l\ge1}f_l$, on a formellement :
$$\begin{aligned}h(\zeta)+\varphi(\zeta^k)-\varphi(\zeta)&=(h(\zeta)-f_1(\zeta^k))+(f_1(\zeta)-f_2(\zeta^k))+(f_2(\zeta)-f_3(\zeta^k))+\dots\\&=\textstyle\sum_{l\ge0}(f_l(\zeta)-f_{l+1}(\zeta^k))\end{aligned}$$
et chaque terme ne contient dans son développement en série de Laurent en ζ que des termes $b_m\zeta^m$ avec $k\nmid m$. Dans le premier terme de la somme, on peut bien sûr avoir $b_0\neq0$.

Pour $0 < R < 1$, $l \geq 1$ et $|\zeta| \geq R$ on a :

$$|f_l(\zeta)| \leq \sum_{\substack{k^l|m \\ m<0}} |a_m| R^{\frac{m}{k^l}} \leq \sum_{\substack{k^l|m \\ m<0}} |a_m| R^{m+k^l-1} \leq R^{k^l-1} \sum_{m\leq 0} |a_m| R^m,$$

ce qui montre que la série qui définit φ est uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$. Il en découle une forme normale pour h :

$$h(\zeta) = a_0 + \sum_{\substack{m<0 \\ k\nmid m}} a_m \zeta^m.$$

Si h a cette forme normale, toute modification non triviale

$$h(\zeta) + \varphi(\zeta^k) - \varphi(\zeta)$$

de $h(\zeta)$ par une conjugaison perdra la forme normale. Autrement dit, la fonction $\zeta \mapsto \varphi(\zeta^k) - \varphi(\zeta)$ a la forme normale si, et seulement si elle est identiquement nulle. Pour voir ceci, on écrit les développements en série de ces fonctions :

$$\varphi(\zeta) = \sum_{m\leq 0} b_m \zeta^m \ , \ -\varphi(\zeta^k) + \varphi(\zeta) = \sum_{m\leq 0} c_m \zeta^m.$$

S'il existe $c_r \neq 0$ pour $r \in \mathbb{Z}_-$, alors $k \nmid r$, $b_r = c_r$, $b_{kr} = c_{kr} + b_r = c_r$, $b_{k^2r} = c_{k^2r} + b_{kr} = c_r$, $\ldots$ et la série $\sum_{m\leq 0} b_m \zeta^m$ ne serait pas convergente sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$. Contradiction !

Les générateurs de G s'écrivent maintenant sous la forme

$$\begin{aligned} g_\gamma(w,z) &= (w + 2\pi i, z) \\ g(w,z) &= (kw, z + f_g(w)) \end{aligned}$$

avec $f_g(w) = h \circ \exp(w) = H \circ \exp(-w)$ où

$$H(\zeta) = A_0 + \sum_{\substack{m>0 \\ k\nmid m}} A_m \zeta^m,$$

$A_0 = a_0$, $A_m = a_{-m}$.

Pour voir que H est un polynôme, nous utiliserons la propre discontinuité de l'action du sous-groupe $\Gamma := \{g_{l,n} := g^{-n} \circ g_\gamma^l \circ g^n \mid n \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$.

Nous démontrerons la

Proposition 3.2. *La fonction H est un polynôme de degré non-nul, si et seulement si l'action de Γ sur $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$ est libre et proprement discontinue.*

Explicitement nous avons

$$g_{l,n}(w,z) = \Big(w + \frac{2\pi i l}{k^n}, z + \sum_{j=0}^{n-1} \Big(f_g(k^j w) - f_g\Big(k^j w + \frac{2\pi i l}{k^{n-j}}\Big)\Big)\Big).$$

Posons pour $l = 1$,

$$G_{n,j}(\zeta) = H(\zeta^{k^j}) - H(\zeta^{k^j} \exp(-2\pi i k^{j-n})), \quad 0 \le j < n,$$

$$F_n(\zeta) = \sum_{0 \le j < n} G_{n,j}(\zeta).$$

Avec ces notations et $\zeta = \exp(-w)$, on a

$$\sum_{j=0}^{n-1} \Big(f_g(k^j w) - f_g\Big(k^j w + \frac{2\pi i}{k^{n-j}}\Big)\Big) = \sum_{j=0}^{n-1} G_{n,j}(\zeta) = F_n(\zeta),$$

et

$$g_{1,n}(w,z) = \Big(w + \frac{2\pi i}{k^n}, z + F_n(\zeta)\Big).$$

Fixons les notations suivantes :

$r\mathbb{T}$ (resp. $r\mathbb{D}$) est le cercle (resp. le disque ouvert) de rayon $r > 0$. Les différents cercles $r\mathbb{T}$ sont munis de la mesure de Lebesgue normalisée $dm(\zeta)$, pour laquelle $\int_{r\mathbb{T}} dm(\zeta) = 1$.

Si f est holomorphe sur $3\bar{\mathbb{D}}$, $wind(f)$ désigne le nombre de zéros de f dans $3\mathbb{D}$. Soit $K := \{z \in \mathbb{C} \mid 3 \le |z| \le 3^k\}$.

Dans la démonstration de la partie directe de la Proposition 3.2 on utilisera les lemmes suivants :

Lemme 3.3. *Soit f une fonction holomorphe sur le disque fermé $3^k\bar{\mathbb{D}}$ telle que pour tout $z \in K$, $\mid f(z) \mid \ge 1$. Alors on a les relations*

$$\int_{3\mathbb{T}} \ln \mid f(\zeta)\zeta^{-wind(f)} \mid dm(\zeta) = \int_{3^k\mathbb{T}} \ln \mid f(\zeta)\zeta^{-wind(f)} \mid dm(\zeta),$$

$$\int_{3\mathbb{T}} \ln \mid f(\zeta) \mid dm(\zeta) = \int_{3^k\mathbb{T}} \ln \mid f(\zeta) \mid dm(\zeta) - (k-1) wind(f) \ln 3.$$

Démonstration. La fonction $z \mapsto \ln(f(z)z^{-wind(f)})$ est holomorphe sur K, ce qui donne la première relation d'après la formule de Cauchy. La deuxième s'en déduit facilement. □

Lemme 3.4. *Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, tels que $\mid a \mid > 2$ et $\mid b \mid < 1$, on a*

$$\ln \mid a + b \mid \ge \ln(\mid a \mid) - \mid b \mid .$$

Démonstration. Comme $\mid a + b \mid > 1$, l'inégalité

$$\ln \mid a \mid \le \ln \mid a + b \mid + \ln\Big(1 + \frac{\mid b \mid}{\mid a + b \mid}\Big)$$

donne le résultat. □

Lemme 3.5. *Soit f une fonction holomorphe définie au voisinage du disque fermé $3\bar{\mathbb{D}}$. On pose*

$$A = \int_{3\mathbb{T}} \ln^+ \mid f(\zeta) \mid dm(\zeta).$$

Alors il existe une constante $C > 0$, indépendante de f, pour laquelle

$$\ln \int_{2\mathbb{T}} \mid f(\zeta) \mid dm(\zeta) \leq CA.$$

(Ici on a noté $\ln^+ = \max(\ln, 0)$.)

Démonstration. Une estimation immédiate au moyen de la formule de Poisson donne l'existence d'une constante $C > 0$, telle que pour tout $z \in 2\mathbb{T}$, on ait

$$\ln \mid f(z) \mid \leq CA.$$

Il s'ensuit

$$\int_{2\mathbb{T}} \mid f(\zeta) \mid dm(\zeta) \leq \exp(CA);$$

l'inégalité voulue en découle. □

Lemme 3.6. *Soit $f = \sum_{s \geq 0} \hat{f}(s) z^s$ une fonction holomorphe sur un voisinage du disque $2\mathbb{D}$. Alors, pour tout $s \in \mathbb{N}$,*

$$|\hat{f}(s)| = \left| \int_{2\mathbb{T}} f(\zeta)\zeta^{-s} dm(\zeta) \right| \leq 2^{-s} \int_{2\mathbb{T}} \mid f(\zeta) \mid dm(\zeta).$$

Lemme 3.7. *Pour tout $n \geq 0$ on a*

$$F_{n+1}(\zeta) = G_{n+1,0}(\zeta) + F_n(\zeta^k).$$

Démonstration. Avec les notations précédentes on a

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(\zeta) &= \textstyle\sum_{0 \leq j \leq n} \big(H(\zeta^{k^j}) - H(\zeta^{k^j} \exp(-2\pi i k^{j-n-1}))\big) \\
&= G_{n+1,0}(\zeta) + \textstyle\sum_{1 \leq j \leq n} \big(H(\zeta^{k^j}) - H(\zeta^{k^j} \exp(-2\pi i k^{j-n-1})\big) \\
&= G_{n+1,0}(\zeta) + \textstyle\sum_{0 \leq j-1 < n} \big(H((\zeta^k)^{k^{j-1}}) - H((\zeta^k)^{k^{j-1}} \exp(-2\pi i k^{(j-1)-n})\big) \\
&= G_{n+1,0}(\zeta) + F_n(\zeta^k).
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.8. *Pour tout $\nu \geq 1$,*

$$\widehat{F_n}(\nu k^{n-1}) = A_\nu(1 - \exp(-2\pi i \nu / k)).$$

En particulier,

$$\mid \widehat{F_n}(\nu k^{n-1}) \mid \geq \mid A_\nu \mid / k.$$

Démonstration. On a pour tout s,

$$\begin{aligned}\widehat{G_{n,n-1}}(s) &= \int_{\mathbb{T}} \big(H(\zeta^{k^{n-1}}) - H(\zeta^{k^{n-1}} \exp(-2\pi i k^{-1})\big)\zeta^{-s} dm(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \big(\sum_{m\geq 0} A_m \zeta^{mk^{n-1}} - \sum_{m\geq 0} A_m \zeta^{mk^{n-1}} \exp(-2\pi i m/k)\big)\zeta^{-s} dm(\zeta).\end{aligned}$$

On voit que le seul terme non nul dans $\widehat{G_{n,n-1}}(\nu k^{n-1})$ est celui obtenu pour $m = \nu$. On a donc

$$\widehat{G_{n,n-1}}(\nu k^{n-1}) = A_\nu(1 - \exp(-2\pi i \nu/k)).$$

En outre, s'il existe un indice j, $0 \leq j < n-1$, pour lequel $\widehat{G_{n,j}}(\nu k^{n-1}) \neq 0$, il existerait $m \geq 1$ pour lequel $A_m \neq 0$, $mk^j = \nu k^{n-1}$. Mais alors $m/k = \nu k^{n-j-2} \in \mathbb{N}$, ce qui est exclu, puisque lorsque k divise m on a $A_m = 0$. Pour obtenir l'inégalité on remarque que si $A_\nu \neq 0$, $\nu/k \notin \mathbb{N}$ et $\mid 1 - \exp(-2\pi i \nu/k) \mid \geq 1/k$. □

Démonstration de la Proposition 3.2. 1) Nous faisons une démonstration par l'absurde. Supposons que H ne soit pas un polynôme et néanmoins que Γ opère proprement discontinûment. En particulier les images $g_{1,n}(K)$ du compact K doivent tendre vers l'infini. Comme le premier membre converge, cela implique que la suite $(\mid F_n \mid)$ converge uniformément sur K vers $+\infty$ ce que nous supposons donc dorénavant.

Puisque H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur K, il existe une constante $c > 0$ indépendante de n pour laquelle

$$\beta_n := \sup_{\zeta\in K} \mid G_{n,0}(\zeta) \mid = \sup_{\zeta\in K} \mid H(\zeta) - H(\zeta \exp(-2\pi i k^{-n})) \mid \leq ck^{-n}.$$

Fixons un entier positif N tel que

$$\text{pour tous } \zeta \in K,\ n \geq N, \mid F_n(\zeta) \mid \geq 2 \qquad (*)$$

et

$$\sum_{n>N} \beta_n \leq 1. \qquad (**)$$

On note $W := wind(F_N)$ et on pose $F(\zeta) := F_N(\zeta^k)$. En utilisant $(*)$, on obtient $wind(F) = kW$. On rappelle que $F_{N+1}(\zeta) = F(\zeta) + G_{N+1,0}(\zeta)$. La combinaison du théorème de Rouché appliqué à F et $G_{N+1,0}$ avec les inégalités $(*)$ et $(**)$ montre que $wind(F_{N+1}) = kW$. Par récurrence, on montre que pour $p \in \mathbb{N}$,

$$wind(F_{N+p}) = k^p W.$$

D'après les lemmes 3.3 et 3.7, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{3\mathbb{T}} \ln \mid F_N(\zeta) \mid dm(\zeta) &= \int_{3^k\mathbb{T}} \ln \mid F_N(\zeta) \mid dm(\zeta) - (k-1)W \ln 3 \\ &= \int_{3\mathbb{T}} \ln \mid F_N(\zeta^k) \mid dm(\zeta) - (k-1)W \ln 3 \\ &= \int_{3\mathbb{T}} \ln \mid F_{N+1}(\zeta) - G_{N+1,0}(\zeta) \mid dm(\zeta) - (k-1)W \ln 3.\end{aligned}$$

En appliquant le lemme 3.4 et les inégalités $(*)$ et $(**)$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{3\mathbb{T}} \ln |F_N(\zeta)| dm(\zeta) &\geq \int_{3\mathbb{T}} \big(\ln |F_{N+1}(\zeta)| - |G_{N+1,0}(\zeta)|\big) dm(\zeta) - (k-1)W \ln 3 \\ &\geq \int_{3\mathbb{T}} \ln \mid F_{N+1}(\zeta) \mid dm(\zeta) - \beta_{N+1} - (k-1)W \ln 3,\end{aligned}$$

ou encore

$$\int_{3\mathbb{T}} \ln \mid F_{N+1}(\zeta) \mid dm(\zeta) \leq \int_{3\mathbb{T}} \ln \mid F_N(\zeta) \mid dm(\zeta) + \beta_{N+1} + (k-1)W \ln 3.$$

Un raisonnement par récurrence nous conduit aux inégalités

$$\begin{aligned}\int_{3\mathbb{T}} \ln \mid F_{N+p}(\zeta) \mid dm(\zeta) &\leq \int_{3\mathbb{T}} \ln \mid F_N(\zeta) \mid dm(\zeta) + \sum_{N<s\leq N+p} \beta_s \\ &\quad +(k-1)W \ln 3 \sum_{0\leq s<p} k^s \\ &\leq C + Wk^p \ln 3,\end{aligned} \tag{††}$$

pour une certaine constante $C > 0$ indépendante de $p \in \mathbb{N}$.

Le lemme 3.5 ainsi que les inégalités $(*)$ et $(\dagger\dagger)$ nous donnent l'existence d'une constante $C_1 > 0$ indépendante de p telle que

$$\ln \int_{2\mathbb{T}} \mid F_{N+p}(\zeta) \mid dm(\zeta) \leq C_1 + C_1 k^p.$$

Puisque H *n'est pas un polynôme* on peut trouver un entier ν qui vérifie

$$\nu > C_1 k^{1-N} / \ln 2, \quad \text{et} \quad A_\nu \neq 0.$$

Mais alors, d'une part le lemme 3.6 nous donne

$$\begin{aligned}\ln \mid \widehat{F_{N+p}}(\nu k^{N+p-1}) \mid &\leq \ln \int_{2\mathbb{T}} \mid F_{N+p}(\zeta) \mid dm(\zeta) - \nu k^{N+p-1} \ln 2 \\ &\leq C_1 + C_1 k^p - \nu k^{N+p-1} \ln 2 \longrightarrow -\infty \quad \text{lorsque} \quad p \longrightarrow \infty.\end{aligned}$$

D'autre part, d'après le lemme 3.8,

$$\mid \widehat{F_{N+p}}(\nu k^{N+p-1}) \mid \geq \mid A_\nu \mid / k > 0,$$

ce qui donne une contradiction. Par conséquent, si H n'est pas un polynôme, et si $A_{sk} = 0$ pour tout $s \in \mathbb{N}$, les fonctions $\mid F_n \mid$ ne peuvent pas converger vers $+\infty$ uniformément sur K.

2) Réciproquement, supposons que H soit un polynôme, c'est-à-dire que

$$H(\zeta) = \sum_{m=1}^{s} A_m \zeta^m,$$

avec $A_m = 0$ quand $k \mid m$; le terme constant ne joue aucun rôle dans l'expression de $g_{l,n}$. Considérons, par l'absurde, l'existence d'une suite $(g_{l_\nu,n_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ qui contredirait la propre discontinuité de l'action.

Alors, en particulier, la suite

$$\left(\frac{2\pi i l_\nu}{k^{n_\nu}}\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$$

est bornée et donc $(n_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ peut être supposé strictement croissante (en passant, le cas échéant, à une sous-suite).

En examinant la deuxième composante de $g_{l_\nu,n_\nu}(w,z)$, on voit que la suite

$$\left(\sum_{1\le m\le s,\ 0\le j\le n_\nu-1} A_m e^{-mk^j w}(1 - e^{\frac{2\pi i l_\nu m}{k^{n_\nu-j}}})\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$$

est aussi bornée (pour w fixé). Il existe un diviseur $t \in \mathbb{N}^\star$ de k, tel que la sous-suite de $(n_\nu, l_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ satisfaisant $t = \text{p.g.c.d.}(k, l_\nu)$ soit de longueur infinie. Nous nous restreignons à cette sous-suite et supposons qu'elle contredise la propre discontinuité. Soit

$$s_0 := \max(\{m \in \mathbb{N} \mid\ A_m \neq 0 \text{ et } \frac{tm}{k} \notin \mathbb{Z}\} \cup \{0\}).$$

Si $s_0 \neq 0$, on a

$$A_{s_0} e^{-s_0 k^{n_\nu-1} w}(1 - e^{\frac{2\pi i l_\nu s_0}{k}}) \neq 0$$

et, plus précisément, puisque $(|1 - e^{\frac{2\pi i l_\nu s_0}{k}}|)_{\nu\in\mathbb{N}}$ est minoré par $|1 - e^{\frac{2\pi i t}{k}}|$, ce terme est dominant dans l'expression

$$\sum_{1\le m\le s,\ 0\le j\le n_\nu-1} A_m e^{-mk^j w}\left(1 - e^{\frac{2\pi i l_\nu m}{k^{n_\nu-j}}}\right)$$

et tend vers l'infini avec n_ν. Donc $s_0 = 0$. Soit alors

$$s_1 := \max\left(\left\{m \in \mathbb{N} \mid\ A_m \neq 0 \text{ et } \frac{tm}{k^2} \notin \mathbb{Z}\right\} \cup \{0\}\right).$$

Si $s_1 \neq 0$, on aura

$$A_{s_1} e^{-s_1 k^{n_\nu-2} w}(1 - e^{\frac{2\pi i l_\nu s_1}{k^2}}) \neq 0$$

et c'est le terme dominant dans ce cas. Comme avant, on voit que $s_1 = 0$. De façon analogue, on considère $s_2, s_3, \dots$ etc. D'une part tous ces s_j sont nuls, d'autre part cela est impossible, car il existe un $p \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{ts}{k^p} \notin \mathbb{Z}$. Pour ce p on a $s = s_p \neq 0$. $\square$

La démonstration du Théorème 3.1 s'achève en remarquant que l'action d'un groupe G engendré par les automorphismes

$$\begin{cases} g_\gamma(w,z) &= (w+2\pi i, z) \\ g(w,z) &= (kw, z+H(e^{-w})). \end{cases}$$

de $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$ est proprement discontinue si, et seulement si l'action du sous-groupe $\Gamma \simeq \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ l'est.

En effet, supposons que Γ agit proprement discontinûment et notons $\alpha : G \to \mathbb{Z}$ la projection de noyau Γ. Il est évident que le facteur $\mathbb{Z}$ dans $\pi_1(V)$ agit de façon proprement discontinue sur $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$. Donc, si une suite d'éléments de G contredisait la propre discontinuité, il existerait une sous-suite infinie ayant une image constante par α. Après une multiplication de cette sous-suite avec un élément convenablement fixé, on peut supposer que l'image par α est l'élément neutre de $\mathbb{Z}$. On obtient ainsi une suite dans Γ qui contredit la propre discontinuité de l'action de Γ. $\square$

4. Construction du germe contractant

Dans cette section nous terminons la demonstration du Théorème 0.1. D'après la Proposition 2.3 et le Théorème 3.1, l'action du groupe $\pi_1(V)$ sur $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$ est engendrée par les deux automorphismes

$$\begin{cases} g_\gamma(w,z) &= (w+2\pi i, z) \\ g(w,z) &= (kw, z+H(e^{-w})). \end{cases}$$

où $H(\zeta) = \sum_{m=0}^{s} A_m \zeta^m$ est un polynôme en forme normale, c'est-à-dire $A_m = 0$ pour tout $m > 0$ avec $k|m$ et $A_s \neq 0$.

Soit $l := [s/k] + 1$. Nous allons conjuguer notre groupe avec

$$\phi(w,z) = (w, z + \sum_{m=1}^{l-1} A_m e^{-mw}).$$

Ceci n'aura pas d'effet sur g_γ, mais

$$\phi \circ g \circ \phi^{-1}(w,z) = (kw, z + A_0 + Q(e^{-w})),$$

où $Q(\zeta) = H(\zeta) - A_0 - \sum_{m=1}^{l-1} A_m \zeta^m + \sum_{m=1}^{l-1} A_m \zeta^{mk}$ est un polynôme de degré s avec

$$\zeta^{\min(k,l)} | Q(\zeta).$$

En itérant au besoin cette procédure, on finira avec un polynôme Q de degré s tel que $\zeta^l | Q(\zeta)$. Soit $Q(\zeta) := \sum_{m=l}^{s} b_m \zeta^m$ et $d := \text{p.g.c.d.}\{k,\ m \mid b_m \neq 0\}$.

Conjuguons maintenant avec $\phi(w,z) = (dw, z)$:

$$\phi \circ g_\gamma \circ \phi^{-1}(w,z) = (w + 2\pi i d, z)$$

$$\phi \circ g \circ \phi^{-1}(w,z) = (kw, z + A_0 + Q(e^{-w/d})).$$

On vérifie que le groupe engendré est égal au groupe G' engendré par

$$(w,z) \mapsto (w+2\pi i, z)$$
$$(w,z) \mapsto (kw, z + A_0 + Q(e^{-w/d})).$$

Soit maintenant

$$l' := [s/kd] + 1$$

et

$$Q'(\zeta) := \sum_{m=l}^{s} b_m \zeta^{m/d}.$$

En utilisant l'inégalité $d[x/d] < [x]+1$, $d \in \mathbb{N}^\star$, $x \in \mathbb{R}$ et le fait que les indices des coefficients non nuls de Q' sont divisibles par d, on vérifie aisément que $\zeta^{l'}|Q'(\zeta)$. Nous conjuguons maintenant par $(w,z) \mapsto (w, e^{l'w}z)$ et les générateurs de G' deviennent

$$(w,z) \mapsto (w+2\pi i, z)$$
$$(w,z) \mapsto (kw, e^{l'(k-1)w}z + A_0 e^{l'kw} + P(e^w)),$$

où P est le polynôme défini par

$$P(\xi) := \xi^{l'k} Q'(\xi^{-1}).$$

Remarquons que $\deg P \le l'(k-1)$ et que $P(0) = 0$. Soit

$$P(\xi) = \sum_{m=1}^{l'(k-1)} c_m \xi^m.$$

On a p.g.c.d.$\{k, m \mid c_m \neq 0\} = 1$.

Cette relation implique que le germe contractant

$$f : \Delta^* \times \mathbb{C} \to \Delta^* \times \mathbb{C},$$
$$f(\xi, z) := (\xi^k, \xi^{l'(k-1)}z + A_0 \xi^{l'k} + P(\xi))$$

est localement injectif autour de $(0,0)$. En effet, si $f(\xi_1, z_1) = f(\xi_0, z_0)$, alors $\xi_0^k = \xi_1^k$ et $\xi_0^{l'(k-1)} z_0 + P(\xi_0) = \xi_1^{l'(k-1)} z_1 + P(\xi_1)$. Posons $\epsilon := \xi_1/\xi_0$. On a $\epsilon^k = 1$ et

$$z_1 = \epsilon^{l'} \big[z_0 + \xi_0^{-l'(k-1)} \sum_{m=1}^{l'(k-1)} c_m \xi_0^m (1 - \epsilon^m) \big].$$

Si $\epsilon = 1$, on a $z_1 = z_0$. Sinon, prenons m_0 le plus petit indice tel que $c_{m_0} \neq 0$ et $\epsilon^{m_0} \neq 1$. L'existence d'un tel indice est garantie par la relation p.g.c.d.$\{k, m \mid c_m \neq 0\} = 1$. On écrit maintenant

$$z_1 = \epsilon^{l'} \left[z_0 + \xi_0^{-l'(k-1)+m_0} \Big(c_{m_0}(1 - \epsilon^{m_0}) + \sum_{m=m_0+1}^{l'(k-1)} c_m \xi_0^{m-m_0} (1 - \epsilon^m) \Big) \right]$$

et on voit que pour z_0 et ξ_0 assez petits, z_1 reste loin de 0. L'injectivité locale en résulte.

Par la Proposition 1.2.8 de [4], il s'ensuit que f est un germe définissant une surface à CSG minimale S' dont on note D' le diviseur maximal.

On peut aussi vérifier que le quotient de $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$ par l'action de G' est le même que celui de $\Delta^* \times \mathbb{C}$ par la relation d'équivalence $u_1 \sim u_2$: il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $f^{\circ n_1}(u_1) = f^{\circ n_2}(u_2)$.

Il s'ensuit de la construction que V et $S' \setminus D'$ sont isomorphes. Comme les matrices d'intersection de D et de D' sont définies négatives et ni D ni D' ne contiennent des courbes exceptionnelles de première espèce, cet isomorphisme se prolonge en un isomorphisme de $V \cup D$ sur S'. En particulier $V \cup D$ est compacte et coïncide avec S, ce qui démontre le théorème. □

5. Annexe

On considère la suite de polynômes $P_0, P_1, \dots, P_i, \dots$ de variables $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$ définis par récurrence par

$$P_0 := 1, P_1 := X_1, P_i := X_i P_{i-1} - P_{i-2}, \quad i \geq 2.$$

Le but de cette annexe est de démontrer la proposition suivante.

Proposition 5.1. *Soit* $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ *une solution du système*

$$\alpha_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}} = d_i, \quad \textit{pour } 1 \leq i \leq m-1 \tag{1}$$

$$\alpha_m + \frac{1}{\alpha_1} = d_m. \tag{2}$$

pour des nombres fixés d_i, $i = 1, \dots, m$ *et soit* $\kappa^{-1} := \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_m$. *Alors*

$$\kappa + \frac{1}{\kappa} = P_m(d_1, \dots, d_m) - P_{m-2}(d_2, \dots, d_{m-1}).$$

Nous commençons avec un lemme préparatoire.

Lemme 5.2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$, *on a*

$$P_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = P_n(X_n, X_{n-1}, \dots, X_1).$$

Démonstration. Nous allons montrer par récurrence la relation :

$$P_i(X_1, \dots, X_i) = X_1 P_{i-1}(X_i, \dots, X_2) - P_{i-2}(X_i, \dots, X_3), \tag{3}$$

pour $i \geq 2$. L'assertion du lemme en est une conséquence directe. Les cas $i = 2, 3$

sont clairs. Supposons que (3) soit vraie pour $i-1$ et pour i. Alors

$$\begin{aligned}
P_{i+1}(X_1,\dots,X_{i+1}) &= X_{i+1}P_i(X_1,\dots,X_i) - P_{i-1}(X_1,\dots,X_{i-1})\\
&= X_{i+1}(X_1P_{i-1}(X_i,\dots,X_2) - P_{i-2}(X_i,\dots,X_3))\\
&\quad -(X_1P_{i-2}(X_{i-1},\dots,X_2) - P_{i-3}(X_{i-1},\dots,X_3))\\
&= X_1(X_{i+1}P_{i-1}(X_i,\dots,X_2) - P_{i-2}(X_{i-1},\dots,X_2))\\
&\quad -(X_{i+1}P_{i-2}(X_i,\dots,X_3) - P_{i-3}(X_{i-1},\dots,X_3))\\
&= X_1P_i(X_{i+1},\dots,X_2) - P_{i-1}(X_{i+1},\dots,X_3)
\end{aligned}$$

ce qui démontre (3). □

Démonstration de la Proposition 5.1. Le système (1) est équivalent à

$$\prod_{j=i}^{m}\alpha_j = d_i\prod_{j=i+1}^{m}\alpha_j - \prod_{j=i+2}^{m}\alpha_j \text{ pour } 1\le i\le m-1.$$

Il en découle

$$\begin{aligned}
\kappa^{-1} &= \alpha_1\dots\alpha_m\\
&= d_1\alpha_2\dots\alpha_m - \alpha_3\dots\alpha_m\\
&= P_1(d_1)\alpha_2\dots\alpha_m - P_0\alpha_3\dots\alpha_m\\
&= d_2(P_1(d_1)-1)\alpha_3\dots\alpha_m - P_1(d_1)\alpha_4\dots\alpha_m\\
&= P_2(d_1,d_2)\alpha_3\dots\alpha_m - P_1(d_1)\alpha_4\dots\alpha_m\\
&\dots\dots\\
&= P_{m-1}(d_1,\dots,d_{m-1})\alpha_m - P_{m-2}(d_1,\dots,d_{m-2}).
\end{aligned}$$

De façon analogue, en partant de

$$\begin{aligned}
(\alpha_1\dots\alpha_m)^{-1} &= d_{m-1}(\alpha_1\dots\alpha_{m-1})^{-1}-(\alpha_1\dots\alpha_{m-2})^{-1}\\
(\alpha_1\dots\alpha_{m-1})^{-1} &= d_{m-2}(\alpha_1\dots\alpha_{m-2})^{-1}-(\alpha_1\dots\alpha_{m-3})^{-1}\\
&\dots\dots\dots\\
\alpha_1\alpha_2 &= d_1(\alpha_1)^{-1}-1
\end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned}
\kappa &= (\alpha_1\dots\alpha_m)^{-1}\\
&= P_{m-1}(d_{m-1},\dots,d_1)\alpha_1^{-1}-P_{m-2}(d_{m-1},\dots,d_2)
\end{aligned}$$

et encore, d'après le lemme et (2)

$$\begin{aligned}
\kappa+\frac{1}{\kappa} &= P_{m-1}(d_1,\dots,d_{m-1})\Big(\alpha_m+\frac{1}{\alpha_1}\Big)-P_{m-2}(d_1,\dots,d_{m-2})\\
&\quad -P_{m-2}(d_{m-1},\dots,d_2)\\
&= P_{m-1}(d_1,\dots,d_{m-1})d_m-P_{m-2}(d_1,\dots,d_{m-2})-P_{m-2}(d_{m-1},\dots,d_2)\\
&= P_m(d_1,\dots,d_m)-P_{m-2}(d_{m-1},\dots,d_2).
\end{aligned}$$

□

Références

[1] C. Camacho et P. Sad, Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. *Annals of Math.* **115** (1982), 579–595.

[2] G. Dloussky et K. Oeljeklaus, Vector fields and foliations on surfaces of class VII_0. *Ann. Inst. Fourier* **49** (1999), 1503–1545.

[3] G. Dloussky et K. Oeljeklaus, M. Toma, Surfaces de la classe VII_0 admettant un champ de vecteurs. *Comm. Math. Helv.* **75** (2000), 255–270.

[4] Ch. Favre, Dynamique des applications rationnelles. *Thèse*, Orsay, 2000.

[5] C. Gellhaus et P. Heinzner, Komplexe Flächen mit holomorphen Vektorfeldern. *Abh. Math. Sem. Hamburg* **60** (1990), 37–46.

[6] J. Hausen, Zur Klassifikation glatter kompakter $\mathbb{C}^*$-Flächen. *Math. Ann.* **301** (1995), 763–769.

[7] F. Hirzebruch, Hilbert Modular Surfaces. *Ens. Math.* **19** (1973), 183–281.

[8] J.-F. Mattei et R. Moussu, Holonomie et intégrales premières. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4. série*, t. **13** (1980), 499–523.

[9] I. Nakamura, On surfaces of class VII_0 with curves. *Invent. Math.* **78** (1984), 393–443.

[10] I. Nakamura, On surfaces of class VII_0 with curves II. *Tohôku Math. Jour.* **42** (1990), 475–516.

G. Dloussky
LATP (UMR-CNRS 6632)
CMI – Université d'Aix Marseille I
39, rue Joliot-Curie
F–13453 Marseille Cedex 13
France
e-mail : dloussky@cmi.univ-mrs.fr

K. Oeljeklaus
LATP (UMR-CNRS 6632)
CMI – Université d'Aix Marseille I
39, rue Joliot-Curie
F–13453 Marseille Cedex 13
France
e-mail : karloelj@cmi.univ-mrs.fr

M. Toma
Universität Osnabrück
Fachbereich Mathematik-Informatik
D–49069 Osnabrück
Germany
e-mail : Matei.Toma@mathematik.Uni-Osnabrueck.de

(Received: July 7, 2000)