Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 72 (1997)

Artikel: Sur les feuilletages algébriques de Rolle

Autor: Chazal, Frédéric

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54597

Comment. Math. Helv. 72 (1997) 411–425
0010-2571/97/030411-15 $ 1.50+0.20/0

Commentarii Mathematici Helvetici

Sur les feuilletages algébriques de Rolle

Frédéric Chazal

Résumé. L'objet de ce travail est l'étude des feuilletages algébriques de Rolle dans $\mathbb{R}^n$. On montre que leur restriction au complémentaire d'un nombre fini de feuilles possède une structure de produit. On précise aussi la topologie de certaines de leurs feuilles.

Mathematics Subject Classification (1991). 57R30, 58F18, 14P05.

Keywords. Algebraic set, fibration, Pfaffian hypersurface, polynomial, real algebraic foliation, separatrix, space of leaves.

Introduction

Soit $\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$ une 1-forme intégrable ($\omega \wedge d\omega = 0$) définie sur $\mathbb{R}^n$ où $P_1, ..., P_n$ sont des éléments de l'anneau des polynômes à n indéterminées $\mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ et soient $\text{Sing}(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n / P_1(x) = ... = P_n(x) = 0\}$ son lieu singulier. La restriction à $M = \mathbb{R}^n \backslash \text{Sing}(\omega)$ de l'équation de Pfaff $\omega = 0$ définit un feuilletage algébrique $\mathcal{F}$ de codimension un transversalement orienté par ω sur M. Le couple $\underline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}, \text{Sing}(\omega))$ est *le feuilletage singulier défini par* $\omega = 0$.

Nous dirons que $\mathcal{F}$ (ou $\underline{\mathcal{F}}$) est *un feuilletage de Rolle* si toute courbe transverse à $\mathcal{F}$ coupe au plus une fois chaque feuille de $\mathcal{F}$. Cette hypothèse est clairement vérifiée si ω est exacte. Elle l'est aussi lorsque $\text{codim}(\text{Sing}(\omega)) \geq 3$ d'après un argument classique de Haefliger puisque M est alors simplement connexe ([Hae 1], [Mo-Ro 2]). Dans toute la suite de ce travail $\underline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}, \text{Sing}(\omega))$ désigne un feuilletage algébrique de Rolle. On déduit deux propriétés de l'hypothèse de Rolle. D'une part, les feuilles F de $\mathcal{F}$ sont des hypersurfaces orientables et fermées de M. D'autre part, si $t \longrightarrow \gamma(t)$ est une courbe transverse à $\mathcal{F}$, elle coupe chaque feuille de $\text{Sat}(\gamma)$, le saturé de γ pour $\mathcal{F}$, en un unique point. Ainsi l'application p_γ de $\text{Sat}(\gamma)$ dans γ définie par $p_\gamma(x) = \gamma \cap F_x$, où F_x est la feuille passant par x, est bien définie. De plus la paramétrisation $t \longrightarrow \gamma(t)$ est un plongement d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans M et nous noterons également p_γ l'application $\gamma^{-1} \circ p_\gamma$.

Ces deux propriétés sont de nature différente. La première porte sur la topologie des feuilles. La seconde établit une bijection entre une courbe transverse au feuilletage et l'ensemble des feuilles que cette courbe rencontre. Elle permet, en particulier, de munir l'espace des feuilles d'une structure de variété topologique de dimension un possédant des points des branchement. Le but de cet article est d'utiliser de telles propriétés pour étudier la structure de $\mathcal{F}$. Par exemple, la considération de l'espace des feuilles et d'une relation d'ordre parmi les points de branchement permet de donner une classification complète des feuilletages non singuliers de $\mathbb{R}^2$ ([Ka], [Hae-Re]). Lorsque ceux-ci sont algébriques, le nombre de points de branchement dans leur espace des feuilles est fini ([Mu], [S-S]). En dimension plus grande tout se complique. L'espace des feuilles ne permet pas de décrire les feuilletages algébriques de Rolle. Il existe des feuilletages algébriques non singuliers de $\mathbb{R}^3$ dont l'espace des feuilles est homéomorphe à $\mathbb{R}$ et qui possèdent deux feuilles non homéomorphes (voir l'exemple 2). Cependant la structure des feuilletages algébriques de Rolle reste relativement simple comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1. *Un feuilletage algébrique de Rolle $\mathcal{F}$ possède un nombre fini de feuilles $F_1, ..., F_p$ telles que : chaque composante connexe V de $M \backslash (F_1 \cup ... \cup F_p)$ est le saturé d'une courbe γ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et la projection $p_\gamma : \mathrm{sat}(\gamma) = V \longrightarrow \gamma$ est une $\mathcal{C}^\infty$-fibration triviale.*

Ainsi les feuilles $F_1, ..., F_p$ "séparent" M en composantes sur lesquelles $\mathcal{F}$ possède une structure de produit. Nous dirons que ce sont des *séparatrices* pour $\mathcal{F}$. Les deux exemples suivants illustrent le théorème précédent et mettent en évidence deux types de séparatrices : les unes caractérisées par la structure transverse à $\mathcal{F}$, les autres par la structure "tangente" à $\mathcal{F}$, c'est-à-dire par les variations de la topologie des feuilles.

Exemple 1. Soit $\mathcal{F}_1$ le feuilletage sans singularité de $\mathbb{R}^2$ défini par l'équation de Pfaff

$$\omega_1 = xdx + (1 - x^2)dy = 0.$$

La fonction $g(x, y) = y - \frac{1}{2}\ln \mid 1 - x^2 \mid$ est une intégrale première de $\mathcal{F}_1$ (voir la figure 1).
Les feuilles $F_1 = \{x = -1\}$ et $F_2 = \{x = 1\}$ satisfont au théorème 1. Ce sont deux points de ramification dans l'espace des feuilles.

Exemple 2. Soit $\mathcal{F}_2$ le feuilletage sans singularité de $\mathbb{R}^3$ obtenu par "rotation autour de l'axe Oy" du feuilletage précédent (voir la figure 2). Il est défini par l'équation de Pfaff

$$\omega_2 = udu + (1 - u^2)dy = 0, \quad \text{avec} \quad u = x^2 + z^2.$$

Au voisinage de la feuille $F = \{u = 1\}$ la topologie des feuilles change. Certaines feuilles sont homéomorphes à des cylindres et d'autres à des plans. La courbe γ de la figure 2 est transverse à $\mathcal{F}_2$ et coupe toutes les feuilles. L'espace des feuilles

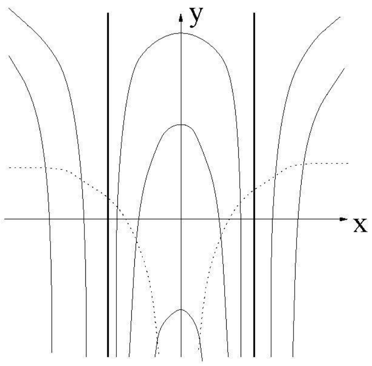

Figure 1

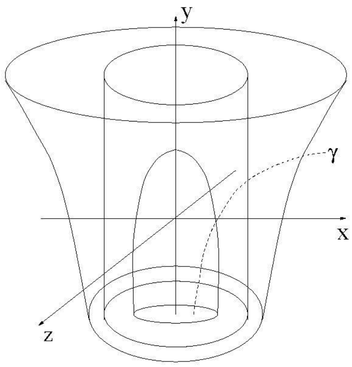

Figure 2

est homéomorphe à $\mathbb{R}$. La structure transverse à $\mathcal{F}_2$ ne suffit pas à caractériser la feuille F.

Le résultat suivant, bien connu dans le cadre algébrique complexe ([B], [Ha-Le]), est un corollaire immédiat du théorème précédent. On le déduit aussi de résultats classiques de géométrie algébrique réelle ([B-R] 2.7 p.98, [B-C-R] 9.3 p.195).

Corollaire 1. *Si P est un polynôme, il existe un sous-ensemble fini $\{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ de $\mathbb{R}$ tel que la restriction de P à $\mathbb{R}^n \backslash P^{-1}(\{\lambda_1, ..., \lambda_p\})$ soit une $\mathcal{C}^\infty$-fibration localement triviale.*

La preuve de l'existence des séparatrices pour $\mathcal{F}$ est assez "constructive". On en déduit que la topologie de certaines feuilles de $\mathcal{F}$ est liée à la géométrie de son lieu singulier.

Théorème 2. *Si $\mathcal{F}$ est non singulier, il existe des composantes connexes du complémentaire des séparatrices $F_1, ..., F_p$ qui contiennent des feuilles $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphes à des variétés planaires, i.e. difféomorphes à l'intérieur de sous-variétés compactes à bord de $\mathbb{R}^{n-1}$.*

De la preuve du théorème 2 on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 2. *Si P est un polynôme, il existe des réels λ et μ tels que pour toute valeur s de P contenue dans $\mathbb{R}\backslash[\lambda, \mu]$, chaque composante connexe de $P^{-1}(s)$ est $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe à S^{n-1} ou à une variété planaire.*

Il est alors naturel de se poser la question suivante : sous quelles conditions les feuilles d'un feuilletage algébrique de Rolle non singulier sont-elles planaires? La question est encore ouverte lorsqu'on impose à la forme ω d'être non singulière et exacte. En particulier, je ne connais pas d'application polynomiale de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ sans singularité dont une composante connexe d'un des niveaux soit une surface de genre non nul. Par contre la réponse à cette question est négative dans le cas général comme le montre le résultat suivant qui illustre la richesse possible de la topologie des feuilles.

Théorème 3. *Si V est une hypersurface $\mathcal{C}^\infty$ compacte sans bord de $\mathbb{R}^n$ et $p_1, ..., p_k$, $k \geq 1$, des points de V, il existe un feuilletage algébrique de $\mathbb{R}^n$ sans singularité possédant une feuille $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe à $V\backslash\{p_1, ..., p_k\}$.*

Cet article est divisé en 5 parties. La première est consacrée à l'étude d'une relation d'ordre sur l'espace des feuilles qui permet de construire les séparatrices de $\mathcal{F}$. Cette construction, donnée dans la partie 2, est le point essentiel de cet article. La preuve du théorème 1 est donnée dans la partie 3. La quatrième partie est consacrée à l'étude de la topologie des feuilles. Dans la dernière partie on étudie les feuilletages non singuliers et on prouve les théorèmes 2 et 3.

L'auteur remercie Christian Bonatti, Jean-Marie Lion et Robert Moussu de l'avoir encouragé dans ce travail.

1. Structure d'ordre sur l'espace des feuilles

L'espace des feuilles de $\mathcal{F}$ est l'espace quotient $M/\mathcal{F}$ de M par la relation d'équivalence associée à $\mathcal{F}$. On note $\Pi : M \longrightarrow M/\mathcal{F}$ la projection sur l'espace des feuilles muni de sa topologie quotient. Si F est une feuille de $\mathcal{F}$, la notation F désigne à la fois l'hypersurface de M correspondant à cette feuille et le point $\Pi(F)$. Un point F de $M/\mathcal{F}$ est un *point de branchement* s'il existe un point F' distinct de F tel que tout voisinage de F rencontre tout voisinage de F' et on dit que F et F' sont *non séparés.* Il est connu que l'espace $M/\mathcal{F}$ est une variété topologique de dimension un possédant éventuellement des points de branchement ([Hae 2]).

Une courbe dans M de classe $\mathcal{C}^\infty$ paramétrée, $\gamma : t \longrightarrow \gamma(t)$ est dite *$\mathcal{F}$-positive* si $\omega_{\gamma(t)}(\gamma^{'}(t)) > 0$ pour tout t. L'espace des feuilles est muni de la relation de Novikov [N] : un point F est dit *inférieur* à un point $F^{'}$, et on note $F \leq F^{'}$ s'il existe une courbe $\mathcal{F}$-positive rencontrant les feuilles F et $F^{'}$ en $\gamma(t)$ et $\gamma(t^{'})$ respectivement avec $t \leq t^{'}$.

Lemme 1.1. *La relation $\leq$ est une relation d'ordre partiel sur $M/\mathcal{F}$. Tout point de $M/\mathcal{F}$ possède des points qui lui sont inférieurs et supérieurs.*

Ce lemme est une conséquence de l'assertion classique suivante.

Assertion. *Soient $\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow M$ et $\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow M$ deux courbes $\mathcal{F}$-positives, telles que $\gamma_1(1)$ et $\gamma_2(0)$ appartiennent à la même feuille. Pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, il existe une courbe $\mathcal{F}$-positive $\tilde{\gamma}$ telle que $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_1(2t)$ si $t \leq 1/2 - \varepsilon$ et $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_2(2t-1)$ si $t \geq 1/2 + \varepsilon$.*

Preuve du lemme 1.1. Soient F, $F^{'}$ et $F^{''}$ trois points de $M/\mathcal{F}$ tels que $F \leq F^{'}$ et $F^{'} \leq F^{''}$. En appliquant l'assertion précédente à deux courbes $\mathcal{F}$-positives joignant F à $F^{'}$ et $F^{'}$ à $F^{''}$, on obtient une courbe $\mathcal{F}$-positive joignant F à $F^{''}$ et on a $F \leq F^{''}$. Si F et $F^{'}$ sont deux points distincts tels que $F \leq F^{'}$ et $F^{'} \leq F$ il existe, d'après l'assertion précédente, une courbe $\mathcal{F}$-positive coupant deux fois la feuille F. Le feuilletage $\mathcal{F}$ étant de Rolle, on a $F = F^{'}$. La relation $\leq$ est bien une relation d'ordre. Si F est une feuille, il existe une courbe $\mathcal{F}$-positive coupant F. Ainsi il existe des points supérieurs et des points inférieurs à F. □

Notons que deux points non séparés ne sont pas comparables pour $\leq$. Ainsi, cette relation n'est pas, en général un ordre total. D'autre part cet ordre possède une signification géométrique : si γ est une courbe $\mathcal{F}$-positive, sa paramétrisation définit un ordre total sur γ et la restriction de Π à γ est un homéomorphisme de γ sur $\Pi(\gamma)$ respectant l'ordre. On dit que la courbe γ *paramètre* l'ensemble $\Pi(\gamma)$. Réciproquement le lemme suivant montre que tout intervalle de $M/\mathcal{F}$ est paramétré par une courbe transverse à $\mathcal{F}$.

Lemme 1.2. *Tout sous-ensemble ouvert I de $M/\mathcal{F}$ homéomorphe à un intervalle est totalement ordonné. Plus précisément, il existe une courbe $\mathcal{F}$-positive paramétrant I.*

Preuve. Soient F et $F^{'}$ deux points de I. Le segment d'extrémités F et $F^{'}$ est recouvert par une union finie d'ouverts $\Pi(\gamma_i)$, $i = 1, ..., p$ où les γ_i sont des courbes $\mathcal{F}$-positives. En appliquant l'assertion on construit une courbe $\mathcal{F}$-positive joignant les feuilles F et $F^{'}$.

Soient (F_n) et (G_n) deux suites de points de I telles que (F_n) soit strictement croissante, non majorée dans I et (G_n) soit strictement décroissante, non minorée dans I. On construit une suite (γ_n) de courbes $\mathcal{F}$-positives telle que pour tout entier n, γ_n joigne les feuilles F_n et G_n et $\gamma_n \subseteq \gamma_{n+1}$. La réunion γ des courbes γ_n est une courbe $\mathcal{C}^\infty$ transverse à $\mathcal{F}$ telle que $\Pi(\gamma) = I$. □

2. Fonctions tapissantes et séparatrices

L'étude de l'ensemble des points de tangence de $\mathcal{F}$ aux niveaux d'une fonction tapissante bien choisie permet de définir et de caractériser les séparatrices du théorème 1.

2.1. Fonction tapissante

Une fonction définie sur M à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ est dite *tapissante au sens de* Thom si elle est propre et possède seulement un nombre fini de valeurs critiques. C'est le cas des applications $Q_\varepsilon : M \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définies par $Q_\varepsilon(x) = exp((x_1+\varepsilon_1)^2 + ... + (x_n+\varepsilon_n)^2)(P(x))^{-1}$ avec $P = P_1^2 + ... + P_n^2$. En effet pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ fixé, Q_ε est propre, et son lieu singulier étant algébrique, elle n'a qu'un nombre fini de valeurs critiques.

Lemme 2.1. *Il existe un sous-ensemble semi-algébrique S de $\mathbb{R}^n$ de dimension strictement inférieure à n tel que pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^n \backslash S$ les trois propriétés suivantes soient vérifées :*
i) l'ensemble Σ_ε des points de tangence de $\mathcal{F}$ avec les niveaux de Q_ε est une union finie de courbes algébriques lisses disjointes,
ii) l'ensemble T_ε des points de tangence de $\mathcal{F}$ à Σ_ε est une union finie de points et de courbes lisses compactes dans des feuilles de $\mathcal{F}$,
iii) toute feuille F coupe Σ_ε et le nombre de composantes connexes de $\Sigma_\varepsilon \cap F$ est majoré par un entier k_0 dépendant seulement des entiers n et d où d est le maximum des degrés des polynômes $P_1, ..., P_n$.

Preuve. L'ensemble $\tilde{\Sigma} = \{(x,\varepsilon) \in M \times \mathbb{R}^n / \omega \wedge dQ_\varepsilon = 0\}$ est un sous-ensemble algébrique de $M \times \mathbb{R}^n$. Notons θ la projection de $\tilde{\Sigma}$ sur $\mathbb{R}^n$ définie par $\theta(x,\varepsilon) = \varepsilon$ et S l'ensemble de ses valeurs critiques. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $\theta^{-1}(\varepsilon) = \Sigma_\varepsilon$ est l'ensemble des points de tangence de $\mathcal{F}$ aux niveaux de Q_ε. Aussi il suffit de prouver que l'ensemble algébrique $\tilde{\Sigma}$ est lisse et de codimension $n-1$. En effet, d'après le théorème de Bertini-Sard, S est un ensemble semi-algébrique de dimension inférieure ou égale à $n-1$ et pour toute valeur régulière ε de θ, $\theta^{-1}(\varepsilon)$ est lisse et de dimension un. L'ensemble $\tilde{\Sigma}$ est défini par les $n(n-1)/2$ équations

$$E_{k,l}(x,\varepsilon) = P_k(x)\Delta_l(x,\varepsilon) - P_l(x)\Delta_k(x,\varepsilon) = 0, \quad 0 \le k < l \le n$$

où Δ_j est le polynôme $2(x_j + \varepsilon_j)P(x) - \partial P/\partial x_j(x)$ pour $j \in \{1, ..., n\}$. Localement, seules $n-1$ de ces équations sont indépendantes. En effet si $U_k = (M \times \mathbb{R}^n)\backslash P_k^{-1}(0)$ on a $U_k \cap \tilde{\Sigma} = F_k^{-1}(0)$ avec $F_k = (E_{1,k}, ..., E_{k-1,k}, E_{k,k+1}, ..., E_{k,n})$. La différentielle de l'application F_k est de rang $n-1$ en tout point de U_k et ainsi $F_k^{-1}(0)$ est une sous-variété lisse de U_k de codimension $n-1$. Les ouverts $U_1, ..., U_n$ recouvrant $M \times \mathbb{R}^n$, l'ensemble $\tilde{\Sigma}$ est une sous-variété algébrique lisse de codimension $n-1$ de $M \times \mathbb{R}^n$.

Choisissons une valeur régulière ε de θ. L'ensemble T_ε des points où Σ_ε est tangent aux niveaux de Q_ε est un sous-ensemble algébrique de Σ_ε. Il possède un nombre fini de composantes connexes. Chacune d'elles est un point ou une composante connexe de Σ_ε contenue dans l'intersection d'une feuille de $\mathcal{F}$ et d'un niveau de Q_ε. L'ensemble Σ_ε étant lisse, ses composantes connexes contenues dans des niveaux de la fonction Q_ε sont des courbes lisses compactes.

Soit F est une feuille de $\mathcal{F}$. F étant fermée dans M, la restriction de Q_ε à F est propre et atteint son minimum en un point de Σ_ε. Les composantes connexes de $\Sigma_\varepsilon\backslash T_\varepsilon$ sont des courbes transverses à $\mathcal{F}$ et F coupe au plus une fois chacune d'elles. Le nombre de composantes connexes de $F \cap \Sigma_\varepsilon$ est borné par la somme des nombres de composantes connexes de $\Sigma_\varepsilon\backslash T_\varepsilon$ et T_ε. Le degré des équations définissant Σ_ε et T_ε ne dépendant que des entiers n et d, il existe un entier $k_0 = k_0(n, d)$ qui majore ce nombre. □

Il est naturel de se demander si on peut choisir ε tel que l'ensemble T_ε soit un ensemble fini de points. En remplaçant l'exposant -1 dans l'expression de Q_ε par un exposant $-\mu$, $\mu > 0$, on peut raffiner la preuve précédente et prouver que pour un choix convenable de ε et μ, l'ensemble $T_\varepsilon = T_{\varepsilon,\mu}$ est fini.

Dans toute la suite, ε est un point fixé de $\mathbb{R}^n\backslash S$ et on pose $Q = Q_\varepsilon$, $\Sigma = \Sigma_\varepsilon$, $T = T_\varepsilon$. On note O_r l'ouvert $\{x \in M/Q(x) < r\}$ de bord $H_r = \{x \in M/Q(x) = r\}$. La théorie de Morse permet de montrer que la topologie d'une feuille F du feuilletage $\mathcal{F}$ est déterminée par les singularités de la restriction de Q à F. Plus précisément, on a le résultat suivant qui sera utilisé plusieurs fois dans la suite.

Lemme 2.2. *Si F est une feuille de $\mathcal{F}$ et ρ un réel positif tel que F soit transverse à H_r pour tout $r \geq \rho$, alors F est $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe à $F \cap O_\rho$. Pour chaque feuille F, un tel réel ρ existe.*

Preuve. D'après le lemme précédent, $\Sigma \cap F$ étant compact, il existe un réel $\rho > 0$ tel que $\Sigma \cap F$ soit contenu dans l'ouvert O_ρ. Le lemme est un résultat classique de la théorie de Morse ([E], [Mi 2]) : "si g est une application $\mathcal{C}^\infty$, propre, d'une variété V à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, sans singularité dans $g^{-1}([\rho; +\infty[)$, alors V est $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe à $V \cap g^{-1}([0; r[)$ pour $r \geq \rho$", avec $g = Q_{|F}$. □

2.2. Séparatrices

Les propriétés de Σ et T établies dans le lemme 2.1 permettent de définir et de caractériser les feuilles $F_1, ..., F_p$ du théorème 1. L'ensemble T étant inclus dans un nombre fini de niveaux de la fonction Q et le nombre de valeurs critiques de Q étant fini, il existe $r_0 > 0$ tel que $\Sigma \backslash O_{r_0}$ soit une union finie de courbes lisses disjointes $C_1, ..., C_l$ transverses aux hypersurfaces lisses H_r pour tout $r \geq r_0$. Dans toute la suite ce nombre réel r_0 est fixé. Les courbes $C_1, ..., C_l$ sont transverses à $\mathcal{F}$ et nous les paramétrons positivement. Si la fonction $Q \circ C_i(t)$ est croissante, Λ_i désigne la réunion des feuilles se projetant sur les éléments minimaux éventuels de l'ensemble des majorants de $\Pi(C_i)$. De tels éléments sont appelés *bornes supérieures* de $\Pi(C_i)$. L'ensemble Λ_i se caractérise aussi topologiquement. On a

$$\Lambda_i = \bigcap_{n \geq r_0} \overline{sat(C_i \backslash O_n)}$$

et en utilisant la terminologie des dynamiciens, on dit que Λ_i est *l'ensemble ω-limite* de C_i . Si la fonction $Q \circ C_i(t)$ est décroissante, on définit de même Λ_i comme l'ensemble des feuilles se projetant sur les éléments maximaux de l'ensemble des minorants de $\Pi(C_i)$ (*bornes inférieures* de $\Pi(C_i)$). Il possède la même caractérisation topologique que précédemment et est appelé *ensemble α-limite* de C_i. On note Λ la réunion des ensembles α ou ω-limite Λ_i. Une feuille contenue dans Λ est appelée une *séparatrice de $\mathcal{F}$ relativement à la fonction tapissante Q*.

Lemme 2.3. *L'ensemble $\Pi(\Lambda)$ est fini.*

Preuve. D'après le lemme 2.1, toute union infinie de feuilles contient deux feuilles coupant la même composante connexe de $\Sigma \backslash T$. Les composantes connexes de $\Sigma \backslash T$ étant transverses à $\mathcal{F}$, toute union infinie de feuilles contient deux feuilles dont les images par Π sont comparables dans $M/\mathcal{F}$. Deux points de $\Pi(\Lambda_i)$, bornes supérieures (ou inférieures) d'un même ensemble, sont non comparables pour la relation d'ordre $\leq$. L'ensemble $\Pi(\Lambda_i)$ est donc fini. $\square$

L'algébricité des ensembles Σ et T va permettre de majorer explicitement le cardinal de l'ensemble $\Pi(\Lambda)$. D'après Milnor [Mi 1] et Thom [T] on sait que : *si V est un ensemble algébrique dans $\mathbb{R}^n$ d'équations $g_1 = ... = g_p = 0$ où $g_1, ..., g_p$ sont des polynômes de degré $\leq d$, la somme des nombres de Betti de V est majorée par $d(2d-1)^{n-1}$.* Appliquons ce résultat à Σ et T. Les équations définissant Σ étant de degré $\leq 2d+1$, le nombre de composantes connexes de Σ est majoré par $k_\Sigma = (2d+1)(4d+1)^{n-1}$. Les équations définissant T étant de degré $\leq (2n-1)d$, le nombre de composantes connexes de T est majoré par $k_T = (2n-1)d(2(2n-1)d+1)^{n-1}$. Puisque Σ est une union disjointe de courbes lisses, le nombre de composantes connexes de $\Sigma \backslash T$ est majoré par $k_\Sigma + k_T$. L'entier $k_0 = k_\Sigma + 2k_T$ majore le nombre de composantes connexes de l'intersection d'une feuille avec Σ. Pour tout $i \in \{1,...,l\}$, $\sharp\Pi(\Lambda_i)$ est majoré par la somme des nombres de composantes connexes de $\Sigma\backslash T$ et de T, c'est à dire par k_0. L'entier l étant majoré par $2k_\Sigma$ on a finalement $\sharp\Pi(\Lambda) \leq 2k_\Sigma(k_\Sigma + 2k_T)$.

3. Preuve du théorème 1

Dans la suite $\mathbb{R}^n$ est muni de la structure euclidienne usuelle et on note $(. \mid .)$ le produit scalaire euclidien. Nous allons tout d'abord montrer que le théorème est une conséquence des deux lemmes suivants.

Lemme-clé. *Soit γ une courbe $\mathcal{C}^\infty$ transverse à $\mathcal{F}$ dont l'adhérence est compacte et ne rencontre pas Λ. Il existe $\rho > r_0$ tel que toute feuille F incluse dans Sat(γ) soit transverse aux hypersurfaces H_r pour $r \geq \rho$.*

Lemme de fibration. *Soient γ une courbe $\mathcal{F}$-positive et ρ un réel supérieur à r_0 tels que γ soit contenue dans O_ρ et les feuilles de Sat(γ) soient transverses aux hypersurfaces H_r pour $r \geq \rho$. La projection $p_\gamma : \mathrm{Sat}(\gamma) \longrightarrow \gamma$ est une $\mathcal{C}^\infty$-fibration triviale. De plus, Sat($\overline{\tau}$) est fermé dans M pour toute courbe τ telle que $\overline{\tau} \subset \gamma$.*

Preuve du théorème 1. Soient V une composante connexe de $M\backslash\Lambda$ et F une feuille contenue dans V. Appliquons le lemme de fibration à une courbe compacte $\overline{\tau}$ coupant F et satisfaisant aux hypothèses du lemme-clé. L'ensemble $\mathrm{Sat}(\overline{\tau})$ est un voisinage de F, saturé, fermé dans M et $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe à $F \times \overline{\tau}$. Ainsi F n'est pas un point de branchement. L'ensemble $\Pi(V)$ est un ouvert connexe sans point de branchement. L'espace des feuilles étant une variété topologique de dimension un, $\Pi(V)$ est homéomorphe à un intervalle. D'après le lemme 1.2 il existe une courbe $\mathcal{F}$-positive γ paramétrant $\Pi(V)$ et d'après le lemme de fibration la projection p_γ de $\mathrm{Sat}(\gamma) = V$ sur γ est une $\mathcal{C}^\infty$-fibration triviale. □

Preuve du lemme-clé. Il suffit de montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $\Sigma \cap \mathrm{Sat}(\overline{\gamma})$ soit inclus dans O_ρ. Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe une suite $\{x_n\}$ de points de $\Sigma \cap \mathrm{Sat}(\overline{\gamma})$ telle que la suite $\{Q(x_n)\}$ soit croissante et non majorée. Puisque $\Sigma\backslash O_{r_0}$ est une union finie de courbes, on peut supposer que les x_n appartiennent à une même courbe C_i. Pour tout entier n, notons y_n l'intersection de $\overline{\gamma}$ et de la feuille passant par x_n. La courbe $\overline{\gamma}$ étant compacte et $\{Q(x_n)\}$ étant croissante, la suite $\{y_n\}$ converge vers un point y de $\overline{\gamma}$. Le sous-ensemble $\Pi(C_i)$ de $M/\mathcal{F}$ est totalement ordonné et $Q(x_n)$ tend en croissant vers l'infini lorsque n tend vers l'infini. Il en résulte que si $Q \circ C_i(t)$ est une fonction croissante de t, la suite $\{\Pi(x_n)\}$ est croissante et non majorée. Ainsi $\Pi(y)$ est une borne supérieure de $\Pi(C_i)$. De même si $Q \circ C_i(t)$ est une fonction décroissante, $\Pi(y)$ est une borne inférieure de $\Pi(C_i)$. Le point y appartient à $\Lambda_i \cap \overline{\gamma}$. Ceci contredit l'hypothèse du lemme. □

Preuve du lemme de fibration. Soient γ et ρ satisfaisant aux hypothèses du lemme. Nous supposons que γ est paramétrée par $\mathbb{R}$ et nous allons tout d'abord construire un champ de vecteurs X de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathrm{Sat}(\gamma)$, complet et laissant le feuilletage $\mathcal{F}$ invariant.
Soit

$$X_\omega(x) = \sum_{k=1}^{n} P_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

et soit X_1 sa projection orthogonale sur l'espace tangent aux niveaux de Q. Puisque les feuilles coupant γ sont transverses aux hypersurfaces lisses H_r pour $r \geq \rho$, le champ X_1 est bien défini et ne s'annule pas sur $\mathrm{Sat}(\gamma) \backslash O_\rho$. Soit $\phi : [0; +\infty[\longrightarrow [0;1]$ une application $\mathcal{C}^\infty$ constante égale à 1 sur $[0;\rho]$ et nulle sur $[2\rho; +\infty[$. Le champ $\tilde{X} = (\phi \circ Q)X_\omega + (1 - \phi \circ Q)X_1$ est transverse à $\mathcal{F}$ sur $\mathrm{Sat}(\gamma)$. Le champ $X = (1/dp_\gamma(\tilde{X}))\tilde{X}$ est défini sur $\mathrm{Sat}(\gamma)$, est tangent aux hypersurfaces H_r pour $r \geq 2\rho$ et laisse $\mathcal{F}$ invariant. Plus précisément, notons $\Psi : W \longrightarrow M$, $W \subseteq \mathrm{Sat}(\gamma) \times \mathbb{R}$, $\Psi(x,t) = \Psi_x(t)$, $\Psi_x(0) = x$, le flot de X. Il vérifie $p_\gamma(\Psi(x,t)) = p_\gamma(x) + t$. Montrons que :

Soit F une feuille coupant γ, et soient deux réels $r \geq 2\rho$ et $\varepsilon_r > 0$ tels que Ψ soit défini sur $\overline{U_r} = (F \cap \overline{O_r}) \times [-\varepsilon_r; +\varepsilon_r]$. En notant $\overline{\tau_r} = \Psi(\overline{U_r}) \cap \gamma$, on a : $\mathrm{Sat}_r(\overline{\tau_r})$, le saturé de $\overline{\tau_r}$ pour le feuilletage $\mathcal{F}_r$ induit par $\mathcal{F}$ sur $\overline{O_r}$, est fermé dans $\overline{O_r}$ et

$$\Psi(\overline{U_r}) = \mathrm{Sat}_r(\overline{\tau_r}) = \mathrm{Sat}(\overline{\tau_r}) \cap \overline{O_r}.$$

Le champ X étant tangent à H_r et laissant $\mathcal{F}$ invariant, si F_r est une feuille de $\mathcal{F}_r$, $\Psi_t(F_r)$ est aussi une feuille de $\mathcal{F}_r$. L'ensemble $\Psi(\overline{U_r})$ est donc saturé pour le feuilletage $\mathcal{F}_r$: il contient $\mathrm{Sat}_r(\overline{\tau_r})$. D'après le lemme 2.2, l'intersection d'une feuille de $\mathcal{F}$ contenue dans $\mathrm{Sat}(\gamma)$ avec $\overline{O_r}$ est connexe. On a ainsi $\mathrm{Sat}(\overline{\tau_r}) \cap \overline{O_r} \subseteq \mathrm{Sat}_r(\overline{\tau_r})$. De plus, toute feuille de $\mathcal{F}_r$ contenue dans $\mathrm{Sat}(\gamma) \cap \overline{O_r}$ est l'intersection de $\overline{O_r}$ avec une feuille de $\mathcal{F}$ coupant γ. Ainsi $\Psi(\overline{U_r})$ étant inclus dans $\mathrm{Sat}(\gamma)$ et saturé pour $\mathcal{F}_r$, toute feuille de $\mathcal{F}_r$ qui rencontre $\Psi(\overline{U_r})$ coupe $\overline{\tau_r}$. Ceci prouve que $\Psi(\overline{U_r}) \subseteq \mathrm{Sat}(\overline{\tau_r}) \cap \overline{O_r}$.

Si $x \in \mathrm{Sat}(\gamma)$, le champ X étant tangent aux niveaux de Q sur $\mathrm{Sat}(\gamma) \backslash O_{2\rho}$, il existe $r > 0$ tel que la trajectoire de x soit contenue dans O_r. D'après l'affirmation précédente, la trajectoire de x est définie sur l'intervalle de paramétrisation de γ, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$. Le champ X est complet.

Puisque X laisse $\mathcal{F}$ invariant, la trajectoire d'un point de $\mathrm{Sat}(\gamma)$ coupe toutes les feuilles de $\mathrm{Sat}(\gamma)$. La restriction de Ψ à $F \times \mathbb{R}$, où F est une feuille de $\mathcal{F}$ coupant γ, est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme entre $F \times \mathbb{R}$ et $\mathrm{Sat}(\gamma)$. La projection p_γ est une fibration triviale. De plus, si τ est une courbe telle que $\overline{\tau} \subset \gamma$, il existe deux réels a et b tels que $\mathrm{Sat}(\overline{\tau}) = \Psi(F \times [a;b])$. Ainsi $\mathrm{Sat}(\overline{\tau})$ est fermé dans M. □

Remarque 1. On distingue trois types de séparatrices dans l'ensemble Λ.
1. Les séparatrices sont des points de branchement de $M/\mathcal{F}$. Le feuilletage $\mathcal{F}_1$ de

l'exemple 1 donné dans l'introduction possède de telles séparatrices : les droites $\{x = -1\}$ et $\{x = 1\}$.

2. Les séparatrices ne sont pas des points de branchement mais ne possèdent pas de voisinage saturé $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe à un produit. Le feuilletage $\mathcal{F}_2$ de l'exemple 2 donné dans l'introduction possède une telle séparatrice : la feuille $\{u = 1\}$.

3. Les séparatrices possèdent un voisinage saturé $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe à un produit mais ne possèdent pas de voisinage saturé dont toutes les feuilles sont transverses aux niveaux H_r pour r suffisamment grand. L'équation $\omega = 2(1-x^4)dx+x^3dy = 0$ définit un feuilletage sans singularité dont $g(x,y) = y-x^2-1/x^2$ est une intégrale première. L'ensemble $\Sigma^{'}$ des points de tangence de ce feuilletage avec les sphères de centre l'origine a pour équation $2(1-x^4)y-x^4 = 0$. Il en résulte que la feuille $\{x = 0\}$ est contenue dans Λ alors que tout voisinage saturé de cette feuille possède une structure de produit (voir figure 3).

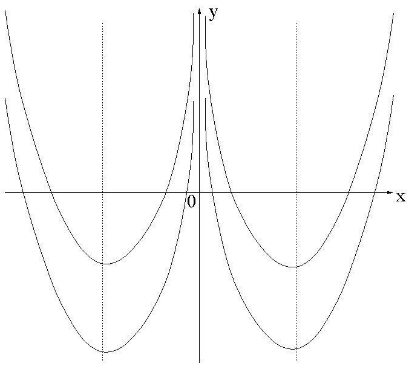

Figure 3

Les deux premiers types de séparatrices ont un sens intrinsèque. Celles du troisième type dépendent du choix de la fonction tapissante Q.

Remarque 2. Soient M un ouvert semi-analytique de $\mathbb{R}^n$ relativement compact et ω une 1-forme différentielle à coefficients analytiques définie sur un voisinage de $\overline{M}$ telle que l'équation $\omega = 0$ définisse un feuilletage de Rolle $\mathcal{F}_M$ sur M. En reprenant des techniques de Moussu, Roche ([Mo-Ro 1], [Mo-Ro 2], [Ro]) et Lion [Li] on peut, sous ces hypothèses, généraliser le théorème 1. La relative compacité de M remplace l'algébricité et permet d'obtenir la finitude du nombre de séparatrices. Ceci fera l'objet d'un travail ultérieur.

Par contre le théorème 1 n'a pas de "version locale" comme le montre l'exemple suivant. L'équation de Pfaff $\omega = (x-2y^2)dx+2xydy = 0$ définit un feuilletage $\mathcal{F}$ de Rolle de $\mathbb{R}^2$, singulier à l'origine et possédant la fonction $g(x,y) = (y^2-x)/x^2$ pour intégrale première. Pour $t < 0$, la feuille $g^{-1}(t)$ est adhérente à l'origine et borde un disque tangent au disque $D_{-1/t}$ de centre l'origine et de rayon $-1/t$. Les deux composantes connexes de $g^{-1}(t) \cap D_{-1/t}$ sont des séparatrices du feuilletage induit par $\mathcal{F}$ sur $D_{-1/t}$.

4. Topologie des feuilles

D'après le lemme 1.1, l'espace des feuilles n'admet pas d'élément maximal ou minimal. Les composantes connexes du complémentaire de $\Pi(\Lambda)$ étant totalement ordonnées, certaines d'entre elles ne sont pas bornées dans $M/\mathcal{F}$ (i.e. ne possèdent pas de majorant ou pas de minorant dans $M/\mathcal{F}$). La topologie des feuilles contenues dans ces composantes se déduit de la topologie des hypersurfaces H_r pour $r \geq r_0$. La fonction Q étant tapissante et non singulière sur $M \backslash O_{r_0}$, ces hypersurfaces sont $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphes à l'hypersurface $H = H_{r_0}$.

Théorème 2'. *Si F est un point d'une composante connexe non bornée de $(M/\mathcal{F}) \backslash \Pi(\Lambda)$, la feuille F est $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe à une composante connexe de H ou au complémentaire d'une sous-variété compacte à bord de H.*

Preuve du théorème 2'. D'après le théorème 1, il suffit de prouver le résultat pour un point F d'une composante connexe I du complémentaire de $\Pi(\Lambda)$ non bornée dans $M/\mathcal{F}$. Supposons I non majorée et montrons tout d'abord que :

($\star$) *Il existe un point F de I tel que $U = \Pi^{-1}(\{F' \in I / F' > F\})$ soit un ouvert de M ne rencontrant pas $\overline{O_{r_0}}$ de bord la feuille F.*

Supposons qu'il existe une suite $\{F_n\}$ dans I croissante non majorée telle que pour tout entier n, l'ensemble $F_n \cap \overline{O_{r_0}}$ soit non vide. Notons x_n un point de cet ensemble. Puisque $\overline{O_{r_0}}$ est compact, $\{x_n\}$ possède une valeur d'adhérence x. La suite $\{F_n\}$ étant croissante, elle converge vers $\Pi(x)$. Ceci contredit le fait qu'elle soit non majorée. Ainsi il existe $F \in I$ tel que $U = \Pi^{-1}(\{F' \in I / F' > F\})$ ne rencontre pas $\overline{O_{r_0}}$. Cet ensemble étant saturé, son bord δU l'est aussi. L'intervalle $\Pi(U)$ étant disjoint de $\Pi(\Lambda)$, totalement ordonné et non majoré dans $M/\mathcal{F}$, une feuille de δU est une borne inférieure de $\Pi(U)$ et ainsi $F = \delta U$.

D'après le lemme 2.2, il existe $r > 0$ tel que la feuille F soit $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe à $F \cap O_r$. Il suffit donc de prouver le théorème pour $F \cap O_r$. Pour cela nous allons construire un champ de vecteurs Z sur un voisinage de $\overline{U}$ transverse à $F \cap O_r$ et $H_r \cap \overline{U}$ et dont le flot "applique" $F \cap O_r$ sur un ouvert de $H_r \cap \overline{U}$.

Les champs X_ω (défini au paragraphe 3) et $Y = \text{grad}Q$ ne s'annulent pas sur $\overline{U}$ et le champ $Z = X_\omega / \parallel X_\omega \parallel + Y / \parallel Y \parallel$ est bien défini sur un voisinage W de $\overline{U} \cap M$ dans M. Montrons que ce champ ne s'annule pas sur W. Il ne peut s'annuler qu'en des points où X_ω et Y sont colinéaires, c'est-à-dire en des points de Σ. Soit $x = C_j(t_0)$ un point de $\overline{U}$. D'après ($\star$), la courbe $\mathcal{F}$-positive $C_j \cap \overline{U}$

paramètre $\Pi(\overline{U})$ et ainsi $(X_\omega(x) \mid C_j'(t_0)) = \omega_x(C_j'(t_0)) > 0$. D'autre part, la fonction $q_i(t) = Q \circ C_j(t)$ est strictement monotone et tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$. Elle est strictement croissante et $q_j'(t_0) = (Y(x) \mid C_j'(t_0)) > 0$. Les vecteurs colinéaires $X_\omega(x)$ et $Y(x)$ sont donc de même sens et $Z(x) \neq 0$. On a sur $\overline{U}$:

$$\omega(X_\omega/\|X_\omega\|) > |\omega(Y/\|Y\|)|\ , \quad dQ(Y/\|Y\|) > |dQ(X_\omega/\|X_\omega\|)|\ .$$

Il en résulte que $\omega(Z) > 0$ et $dQ(Z) > 0$ sur $\overline{U}$. Le champ Z est rentrant dans $\overline{U}$ le long de F et, l'ensemble $\overline{U} \cap \overline{O_r}$ étant compact, toute demi-orbite issue d'un point x de $F \cap \overline{O_r}$ sort de $\overline{U} \cap \overline{O_r}$ et coupe transversalement H_r en un unique point $h(x)$. L'application h ainsi définie réalise un difféomorphisme entre $F \cap O_r$ et un ouvert de H_r de bord $F \cap H_r$. □

5. Feuilletages non singuliers ou définis par les niveaux d'un polynôme

Lorsque le feuilletage $\mathcal{F}$ est défini par une équation non singulière dans $\mathbb{R}^n$ ou par une équation $dP = 0$ avec $P \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$, en modifiant les constructions précédentes, on précise le théorème 2'.

Théorème 2. *Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage non singulier de $\mathbb{R}^n$, et F un point de $M/\mathcal{F}$ contenu dans une composante connexe non bornée du complémentaire de $\Pi(\Lambda)$, la feuille F est $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe à une variété planaire.*

Preuves du théorème 2 et du corollaire 2. Dans les deux cas, avec les arguments du paragraphe 2, on montre que pour un choix convenable de l'origine 0 de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble Σ des points de tangence de $\mathcal{F}$ avec les sphères de centre 0 est une union disjointe finie de courbes algébriques lisses.
Reprenons les constructions précédentes avec $Q(x) = \|x\|^2$:
1. Lorsque $\mathcal{F}$ est non singulier on a $M = \mathbb{R}^n$ et la fonction Q est tapissante. La preuve du théorème dans ce cas est la même que dans le cas général (voir [C]).
2. Lorsque $\mathcal{F}$ est défini par les niveaux d'un polynôme P, la fonction Q n'est pas tapissante. Cependant, l'adhérence d'une feuille F d'un niveau non singulier de P ne rencontrant pas $\mathrm{Sing}(dP)$ et le polynôme P étant une intégrale première de $\mathcal{F}$, on peut reprendre les constructions des paragraphes 2, 3, 4 et prouver le corollaire 2. □

Les feuilles des feuilletages algébriques non singuliers ne sont pas toutes planaires comme le montre le théorème 3. Sa preuve ne permet pas de construire explicitement des feuilletages possédant des feuilles avec une topologie donnée.

Preuve du théorème 3. On note B_r la boule ouverte de rayon r de centre l'origine et S_r^{n-1} son bord. L'application ϕ de $\mathbb{R}^n$ dans B_1 définie par

$$\phi(x) = \frac{x}{\sqrt{\| x \|^2 + 1}} = (\phi_1(x), ..., \phi_n(x))$$

est un difféomorphisme analytique entre $\mathbb{R}^n$ et B_1. Montrons tout d'abord que :

Si $\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$ est une forme algébrique sans singularité dans B_1 telle que tous les monômes de $P_1, ..., P_n$ soient de degré pair, alors l'équation $\phi^*(\omega) = 0$ définit un feuilletage algébrique sans singularité dans $\mathbb{R}^n$.

Notons $2d$ le maximum des degrés des polynômes $P_1, ..., P_n$. On a :

$$\phi^*\omega = \sum_{j=1}^{n} P_j(\phi(x)) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} dx_i.$$

Les polynômes $P_1, ..., P_n$ étant constitués de monômes de degré pair $\leq 2d$, la 1-forme $(1 + \| x \|^2)^{d+\frac{3}{2}} \phi^*\omega$ est à coefficients polynomiaux et non singulière dans $\mathbb{R}^n$.

Soit V une hypersurface $\mathcal{C}^\infty$ compacte de $\mathbb{R}^n$ et $p_1, ..., p_k$ des points de V. On peut supposer que V est plongée dans $B_2 \cap \{x_1 > \frac{1}{2}\}$, transverse à la sphère S_1^{n-1} et que $V \cap B_1$ est difféomorphe à $V \backslash \{p_1, ..., p_k\}$. Nous allons prouver l'existence d'un polynôme P impair, sans singularité dans B_1 tel que l'intersection d'une hypersurface de niveau de P avec B_1 possède une composante connexe $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe à $V \cap B_1$.

Construisons d'abord sur B_2 une application g de classe $\mathcal{C}^\infty$, impaire, non singulière dans $B_{\frac{3}{2}}$, dont l'un des niveaux est V. La variété V étant compacte, il existe une application $\mathcal{C}^\infty$, f de B_2 dans $\mathbb{R}$ possédant les propriétés suivantes : elle est non singulière dans $B_{\frac{3}{2}} \cap \{x_1 \geq \frac{1}{4}\}$, elle s'annule dans $B_2 \cap \{x_1 \leq \frac{1}{8}\}$ et V est l'un de ses niveaux. Soit ψ une application $\mathcal{C}^\infty$ de B_2 dans $\mathbb{R}$, impaire, sans singularité sur $B_{\frac{3}{2}} \cap \{-\frac{1}{8} \leq x_1 \leq \frac{1}{8}\}$, constante sur $B_2 \cap \{x_1 \geq \frac{1}{2}\}$. On peut choisir ψ pour que la fonction $f + \psi$ soit non singulière sur $B_{\frac{3}{2}} \cap \{\frac{1}{8} \leq x_1 \leq \frac{1}{2}\}$. L'application $g : B_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) + \psi(x)$ si $x_1 \geq 0$ et $g(x) = -f(-x) + \psi(x)$ si $x_1 \leq 0$ satisfait aux propriétés voulues.

Il existe une suite $\{P_n\}$ de polynômes impairs qui converge vers g uniformément sur le compact $\overline{B_1}$. Si n est un entier suffisamment grand, le polynôme $P = P_n$ est non singulier dans $\overline{B_1}$ et une composante connexe d'un des niveaux de $P_{|B_1}$ est $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe à $V \cap B_1$. Le feuilletage défini par l'équation $\omega = \phi^*(dP) = 0$ est algébrique, non singulier dans $\mathbb{R}^n$ et possède une feuille difféomorphe à $V \backslash \{p_1, ..., p_k\}$. $\square$

La preuve précédente ne permet pas de majorer le degré du feuilletage en fonction de la topologie de V.

Remarque. La construction précédente se généralise à un nombre fini d'hypersurfaces compactes privées chacune d'un nombre fini (non nul) de points. Ainsi la topologie des feuilles d'un feuilletage algébrique non singulier peut être très variée.

Références bibliographiques

[B-R] R. Benedetti, J. J. Risler, *Real algebraic and semi-algebraic sets*, Actualités Mathématiques, Hermann, Paris 1990.

[B-C-R] J. Bochnak, M. Coste, M-F. Roy, *Géométrie algébrique réelle*, Springer-Verlag, 1987.

[B] S. A. Broughton, On the topology of polynomial hypersurfaces, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **40** (1983), Part 1.

[C] F. Chazal, Un théorème de fibration pour les feuilletages algébriques de codimension un de $\mathbb{R}^n$, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t.321, Série I, p.327–330, 1995.

[E] C. Ehresmann, Sur la théorie des variétés feuilletées, *Rendic. di Mat. e delle sue appl.*, Série V, Vol. X, fasc.1-2, Roma 1951.

[Hae 1] A. Haefliger, Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoides, Thèse, *Comment. Math. Helv.* **32** (1958), 248–329.

[Hae 2] A. Haefliger, Sur les feuilletages des variétés de dimension n par des feuilles fermées de dimension n-1, *Colloque de topologie de Strasbourg* (Juillet 1955).

[Ha-Le] H. V. Ha, D. T. Le, Sur la topologie des polynomes complexes, *Acta Math. Vietnamica* **1** (1984), 21–32.

[Hae-Re] A. Haefliger, G. Reeb, Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan, *Ens. Math. Helv.* **3** (1957), 107–25.

[Ka] W. Kaplan, Regular curve-families filling the plane, I: *Duke Math. J.* **7** (1940), 154–155. II: *Duke Math. J.* vol. **8** (1941), 11–46.

[Li] J. M. Lion, Etude des hypersurfaces pfaffiennes, Thèse, Université de bourgogne (1991).

[Mi 1] J. Milnor, On the Betti numbers of real varieties, *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964), 275–280.

[Mi 2] J. Milnor, *Morse theory*, Princeton University Press, 1963.

[Mo-Ro 1] R. Moussu, C. A. Roche, Théorie de Hovanskii et problème de Dulac, **Invent. Math.** **105** (1991), 431–441.

[Mo-Ro 2] R. Moussu, C. A. Roche, Théorèmes de finitude pour les variétés pfaffiennes, *Ann. Inst. Fourier* **42**(1–2) (1992), 393–420.

[Mu] M. P. Muller, Quelques propriétés des feuilletages polynomiaux du plan, *Bol. Soc. Mexicana* 1976, No 21, 6–14.

[N] S. P. Novikov, Topology of foliations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1965, 268–304.

[Ro] C. A. Roche, Habilitation à diriger des recherches, Université de Bourgogne (1993).

[S-S] S. Schecter, M.F. Singer, Planar polynomial foliations, *Proceedings of the A.M.S.* vol **79**, Number 4, August 1980.

[T] R. Thom, Sur l'homologie des variétés algébriques réelles, *Differential and Combinatorial Topology*, Princeton University Press 1965, 255–265.

Frédéric Chazal
Laboratoire de Topologie
U.M.R 5584, Université de Bourgogne
B.P.400, F-21011 Dijon Cedex, France
e-mail: fchazal@u-bourgogne.fr

(Received: June 22, 1996)