

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 71 (1996)

Artikel: Représentations relativement équivalentes et variétés riemanniennes isospectrales.
Autor: Pesce, Hubert
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-53844>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 20.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Représentations relativement équivalentes et variétés riemanniennes isospectrales

HUBERT PESCE

Introduction

Soient (X, \mathbf{m}) une variété riemannienne fermée (i.e. sans bord, connexe et compacte) et Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami opérant sur $C^\infty(X)$. Cet opérateur possède un spectre discret qui s'appelle le spectre de la variété. Une question naturelle est de savoir dans quelle mesure le spectre détermine la géométrie de la variété. En particulier, deux variétés isospectrales sont-elles isométriques? Depuis l'exemple de Milnor, on sait que la réponse à cette question est négative. Ensuite d'autres exemples de caractère sporadique ont été construits (voir [Bé1] pour un historique du problème).

La situation a radicalement changé avec l'introduction par Sunada d'une méthode systématique pour construire des variétés isospectrales [S]. Il se place dans le cadre suivant: (X, \mathbf{m}) est une variété riemannienne et Γ_1 et Γ_2 sont deux sous-groupes discrets d'un groupe G d'isométries de (X, \mathbf{m}) qui opèrent librement sur X et qui sont tels que les variétés $\Gamma_1 \backslash X$ et $\Gamma_2 \backslash X$ sont compactes. On construit par induction à l'aide de Γ_i une représentation de G qui s'appelle quasi-régulière et qui l'on note $\pi_{\Gamma_i}^G$. Le théorème de Sunada affirme que si les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont équivalentes, alors les quotients riemanniens $\Gamma_1 \backslash X$ et $\Gamma_2 \backslash X$ sont isospectraux pour le laplacien opérant sur les fonctions et, plus généralement, pour tout opérateur différentiel naturel. En utilisant ce théorème, on peut construire de nombreux exemples de variétés isospectrales et non isométriques. Il est alors naturel de se demander si, lorsque l'on est dans la même situation, la condition du théorème de Sunada est nécessaire. Les exemples d'Ikeda d'espaces lenticulaires isospectraux sur les fonctions mais pas sur les formes [I] fournissent une réponse négative à cette question. Il est donc raisonnable de penser que l'on peut obtenir des quotients isospectraux en imposant une condition moins restrictive.

Le but de cet article est d'obtenir une condition moins forte que celle du théorème Sunda qui assure l'isospectralité des variétés considérées. La condition obtenue s'exprime encore en terme d'équivalence de représentations. L'idée est d'utiliser l'existence d'un sous-groupe K de G qui est, à conjugaison près, contenu

dans le stabilisateur pour l'action de G de tout point de X et d'associer à K une sous-représentation $(\pi_{\Gamma_i}^G)_K$ de $\pi_{\Gamma_i}^G$. On montre ensuite que si les représentations $(\pi_{\Gamma_1}^G)_K$ et $(\pi_{\Gamma_2}^G)_K$ sont équivalentes, alors les quotients riemanniens $\Gamma_1 \backslash X$ et $\Gamma_2 \backslash X$ sont isospectraux. Cette condition est, à priori, plus faible que celle de Sunada et n'assure pas l'isospectralité des quotients pour d'autres opérateurs. Si l'on veut une condition qui assure l'isospectralité pour un opérateur différentiel opérant sur les sections d'un fibré (par exemple, le laplacien de Hodge-De Rham opérant sur les formes différentielles), il faut alors considérer une autre sous-représentation de $\pi_{\Gamma_i}^G$ qui prend en compte la géométrie du fibré.

La première partie est consacrée à la théorie des représentations. On introduit une notion d'équivalence relative entre deux représentations d'un groupe de Lie et on cherche à savoir comment cette équivalence relative se lit sur le caractère de ces représentations. On rappelle aussi la formule des traces de Selberg.

La deuxième partie est consacrée à la généralisation du théorème de Sunada. On donne trois preuves de ce résultat. La première utilise la méthode de transplantation, la deuxième la formule des traces de Selberg et la troisième le théorème de réciprocity de Frobenius.

Dans la troisième partie, on montre que, dans certains cas (espaces localement symétriques de rang 1, variétés plates...), la condition obtenue est en fait une condition nécessaire et suffisante pour que deux variétés localement isométriques soient isospectrales. On utilise les résultats obtenus pour interpréter les exemples de Urakawa et d'Ikeda et pour construire de nouveaux exemples de variétés isospectrales.

Dans l'appendice, on montre comment on peut généraliser à n'importe quel opérateur différentiel naturel les résultats qui ont été obtenus dans les parties précédentes et qui concernaient le laplacien opérant sur les fonctions.

1. Représentations relativement équivalentes

Dans ce chapitre, on étudie quelques propriétés concernant la théorie des représentations qui seront utilisées plus tard pour étudier les problèmes d'isospectralité.

Par la suite, G désignera un groupe de Lie unimodulaire et K un sous-groupe compact de G . Toutes les représentations que l'on considérera seront supposées unitaires, complexes et continues. Si ρ est une représentation de G dans un espace de Hilbert V et si τ est une représentation de K , on va définir à l'aide de τ une sous-représentation de ρ que l'on notera ρ_τ . Tout d'abord, si τ est irréductible, on définit V^τ comme étant la somme des sous-espaces de V sur lesquels la restriction de ρ à K est isomorphe à τ et V_τ comme étant le plus petit sous-espace fermé de V ,

contenant V^τ , et invariant par G . Dans le cas général, on définit V_τ comme étant l'adhérence de la somme des V_μ quand μ parcourt l'ensemble des composantes irréductibles de τ . Le sous-espace V_τ étant invariant, on obtient ainsi une sous-représentation de ρ que l'on note ρ_τ .

Il est clair que si ρ et σ sont deux représentations équivalentes de G et si τ est une représentation de K , alors ρ_τ et σ_τ sont aussi équivalentes, la réciproque étant évidemment fausse. Nous verrons plus loin que de tels exemples apparaissent naturellement dans les problèmes d'isospectralité. Par la suite, on dira que deux représentations ρ et σ sont équivalentes relativement à τ si les représentations ρ_τ et σ_τ sont équivalentes et qu'elles sont K -équivalentes si, en notant 1_K la représentation triviale de K , elles sont équivalentes relativement à 1_K . Pour alléger les notations, si ρ est une représentation de G dans un espace de Hilbert V , on notera V^K (resp. V_K) le sous-espace V^{1_K} (resp. V_{1_K}) et ρ_K la sous-représentation correspondant à V_K . Remarquons que V_K est l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les $V^{gKg^{-1}}$ quand g parcourt G .

Dans la suite de cette partie, on va se concentrer sur le dernier cas évoqué et essayer de comprendre à quelle condition deux représentations sont K -équivalentes. On notera \hat{G} le dual de G , c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires et irréductibles de G , et \hat{G}_K l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles qui admettent des vecteurs non nuls invariants par K . Autrement dit, une représentation irréductible ρ dans un espace V est dans \hat{G}_K si V_K n'est pas réduit à $\{0\}$. Remarquons que dans ce cas, $V = V_K$ et $\rho = \rho_K$. Par contre, si une représentation irréductible ρ dans un espace V n'est pas dans \hat{G}_K , alors $V^K = \{0\}$. On en déduit que si α et β sont deux représentations de G complètement réductibles telles que toute représentation irréductible de G ait une multiplicité finie dans α et dans β , alors α et β sont K -équivalentes si et seulement si tout élément de \hat{G}_K a même multiplicité dans α et dans β .

Le critère que l'on vient d'énoncer est simple mais n'a d'intérêt que dans le cas où l'on connaît explicitement à la fois \hat{G} et la décomposition en composantes irréductibles des représentations qui interviennent. On va voir maintenant une condition nécessaire et suffisante pour que deux représentations soient K -équivalentes qui fait intervenir les caractères de ces représentations.

Avant d'énoncer le résultat, on va rappeler quelques résultats classiques. Tout d'abord, si π est une représentation de G , φ est dans $C_0^\infty(G)$, l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact, et μ_G désigne une mesure de Haar bi-invariante fixée une fois pour toutes, alors l'opérateur $\pi(\varphi) = \int_G \varphi(g)\pi(g) d\mu_G(g)$ est bien défini. On dit qu'une représentation est à trace si pour toute fonction φ dans $C_0^\infty(G)$, l'opérateur $\pi(\varphi)$ est à trace. On peut alors montrer que l'application $\varphi \mapsto \text{trace}(\pi(\varphi))$ est une distribution. De plus, une représentation à trace est complètement réductible et le nombre de composantes irréductibles isomorphes à

une représentation irréductible donnée est fini ([G-G-P], p. 23). En adaptant la preuve que l'on trouve dans ([J-L], p. 495) où le cas traité est celui où K est trivial, on obtient le résultat suivant:

1. PROPOSITION. *Soient G un groupe de Lie unimodulaire, K un sous-groupe compact et π_1 et π_2 deux représentations à trace de G . Alors π_1 et π_2 sont K -équivalentes si et seulement si pour toute fonction φ dans $C_0^\infty(G)$ invariante à gauche par K , $\pi_1(\varphi)$ et $\pi_2(\varphi)$ ont même trace.*

Preuve de la Proposition. Nous allons tout d'abord prouver que l'égalité des traces est une condition nécessaire. Soient π une représentation de G dans un espace de Hilbert V et φ une fonction dans $C_0^\infty(G)$ invariante à gauche par K , on a pour tout k dans K on a:

$$\pi(\varphi) = \int_G \varphi(k^{-1}g)\pi(g) d\mu_G(g) = \int_G \varphi(g)\pi(kg) d\mu_G(g) = \pi(k)\pi(\varphi).$$

Comme $\pi(\varphi)$ laisse stable tout sous-espace de V invariant par π , $\pi(\varphi)$ laisse stable V_K et la restriction de $\pi(\varphi)$ à l'orthogonal de V_K est nulle. On en déduit que si deux représentations π_1 et π_2 sont K -équivalentes et si φ est une fonction dans $C_0^\infty(G)$ invariante à gauche par K , alors la restriction de $\pi_1(\varphi)$ à $(V_1)_K$ et la restriction de $\pi_2(\varphi)$ à $(V_2)_K$ sont conjuguées. Il en résulte que $\pi_1(\varphi)$ et $\pi_2(\varphi)$ ont même trace.

Avant de commencer la preuve de la réciproque, on va rappeler quelques notions classiques d'analyse harmonique. Tout d'abord, $C_0^\infty(G)$, muni du produit de convolution, est une algèbre (rappelons que le produit de convolution est défini par $\varphi * \psi(x) = \int_G \varphi(xy^{-1})\psi(y) d\mu_G(y)$). Par la suite, si x et y sont dans G , on notera $C_{x,y}$ l'espace vectoriel constitué des fonctions de $C_0^\infty(G)$ invariantes à gauche par xKx^{-1} et invariantes à droite par yKy^{-1} et $C_0^\infty(G)_K$ l'espace vectoriel engendré par les $C_{x,y}$ quand x et y parcourent G . On vérifie facilement les propriétés suivantes:

- (a) Si φ est dans $C_{x,y}$ et ψ est dans $C_{z,t}$ alors $\varphi * \psi$ est dans $C_{x,t}$.
- (b) Si φ est dans $C_{x,y}$ et z dans G et si L_z et R_z désignent les translations à gauche et à droite par z , alors $\varphi \circ L_z$ est dans $C_{z^{-1}x,y}$ et $\varphi \circ R_z$ est dans $C_{x,yz^{-1}}$.
- (c) Si φ est dans $C_{x,y}$ et si l'on pose $\varphi^*(x) = \overline{\varphi(x^{-1})}$, alors φ^* est dans $C_{y,x}$.

Une conséquence de la propriété (a) est que $C_0^\infty(G)_K$ est une algèbre pour le produit de convolution. Les propriétés (b) et (c) nous seront utiles par la suite. On va maintenant pouvoir prouver un premier résultat:

2. LEMME. Soient σ une représentation irréductible de G dans un espace de Hilbert V qui appartient à \hat{G}_K et v dans $V - \{0\}$, alors il existe φ dans $C_0^\infty(G)_K$ tel $\sigma(\varphi)(v)$ soit non nul.

Preuve du Lemme. Soit W l'intersection des noyaux de $\sigma(\varphi)$ quand φ parcourt $C_0^\infty(G)_K$. Il est clair que W est un sous-espace fermé de V . De plus, si φ est dans $C_0^\infty(G)_K$ et g est dans G , on vérifie facilement que $\sigma(\varphi)\sigma(g) = \sigma(\varphi \circ R_{g^{-1}})$. On en déduit, en utilisant la propriété b) que W est un sous-espace invariant. Comme σ est une représentation irréductible, $W = V$ ou $W = \{0\}$. Pour prouver le Lemme, il suffit de trouver un élément non nul de V qui n'appartient pas à W . Or, si v dans $V^K - \{0\}$, l'application $g \mapsto \operatorname{Re}(\langle \sigma(g)(v) | v \rangle)$ est continue et est égale à $\|v\|^2$ sur K . Il existe donc un voisinage ouvert U de K tel que si g est dans U , alors $\operatorname{Re}(\langle \sigma(g)(v) | v \rangle) \geq \|v\|^2/2$. Munissons G d'une distance d invariante à gauche (par exemple, une distance associée à une métrique riemannienne invariante à gauche). Comme l'application $g \mapsto d(K, gK)$ est propre, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\{g \in G \mid d(K, gK) < \epsilon\}$ soit contenu dans U . Donc, si ρ est une fonction C^∞ et positive sur $[0, +\infty[$, égale à 1 sur $[0, \epsilon/2]$ et égale à 0 sur $[\epsilon, +\infty[$, alors la fonction φ définie par $\varphi(g) = \rho(d(K, gK))$ appartient à $C_0^\infty(G)_K$ et $\operatorname{Re}(\langle \sigma(\varphi)(v) | v \rangle) = \int_G \varphi(g) \operatorname{Re}(\langle \sigma(g)(v) | v \rangle) d\mu_G(g) \geq \mu_G(\{g \in G \mid d(K, gK) < \epsilon/2\}) \|v\|^2/2 > 0$. On en déduit donc que si v est dans $V^K - \{0\}$, alors v n'est pas dans W . Le Lemme est donc démontré. \square

On va maintenant pouvoir démontrer le résultat suivant qui joue un rôle important dans la preuve de la Proposition:

3. LEMME. Soient σ une représentation irréductible de G dans un espace de Hilbert V qui appartient à \hat{G}_K et A un ensemble. On suppose donnée, pour chaque α dans A , une représentation irréductible σ_α dans un espace de Hilbert V_α qui n'est pas isomorphe à σ . Soient v_α dans V_α et v dans $V - \{0\}$ tels que pour tout φ dans $C_0^\infty(G)_K$, la somme $\sum_{\alpha \in A} \|\sigma_\alpha(\varphi)(v_\alpha)\|^2$ est finie, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe φ dans $C_0^\infty(G)_K$ tel que $\sum_{\alpha \in A} \|\sigma_\alpha(\varphi)(v_\alpha)\|^2 < \epsilon \|\sigma(\varphi)(v)\|^2$.

Preuve du Lemme. Raisonnons par l'absurde et supposons que pour tout φ dans $C_0^\infty(G)_K$ on ait, $\sum_{\alpha \in A} \|\sigma_\alpha(\varphi)(v_\alpha)\|^2 \geq \epsilon \|\sigma(\varphi)(v)\|^2$. Notons U la somme hilbertienne $U = \bigoplus_{\alpha \in A} V_\alpha$ et W l'adhérence dans U de $W_0 = \{\bigoplus_{\alpha \in A} \sigma_\alpha(\varphi)(v_\alpha) \mid \varphi \in C_0^\infty(G)_K\}$. Comme $\sigma_\alpha(g)\sigma_\alpha(\varphi)(v_\alpha) = \sigma_\alpha(\varphi \circ L_{g^{-1}})(v_\alpha)$, il est clair que W est un sous-espace de U invariant par G pour la représentation $\bigoplus_{\alpha \in A} \sigma_\alpha$. On peut donc définir une application linéaire L_0 de W_0 dans V en posant $L_0(\bigoplus_{\alpha \in A} \sigma_\alpha(\varphi)(v_\alpha)) = \sigma(\varphi)(v)$. Cette application linéaire est, d'après l'hypothèse que l'on a faite, bien définie et continue et se prolonge donc en une application linéaire de W dans V . Si on note L l'unique application linéaire continue de U dans V qui est nulle sur l'orthogonal de W et qui

est égale à L_0 sur W_0 , alors L entrelace $\bigoplus_{\alpha \in A} \sigma_\alpha$ et σ . Il en est donc de même pour la restriction L_α de L à V_α . Comme, par hypothèse, σ_α et σ ne sont pas isomorphes, on trouve que pour tout L_α est nulle et ce pour tout α , donc L est nulle. On en déduit que pour tout φ dans $C_0^\infty(G)_K$ on a $\sigma(\varphi)(v) = 0$, ce qui constitue une contradiction avec le Lemme précédent. La preuve du Lemme est donc terminée. \square

Fin de la Preuve. On va montrer que si π_1 et π_2 sont deux représentations à trace de G telles que pour toute fonction φ dans $C_0^\infty(G)_K$, les opérateurs $\pi_1(\varphi)$ et $\pi_2(\varphi)$ ont même trace, alors π_1 et π_2 sont K -équivalentes. Notons V_i l'espace de la représentation π_i et W_i un sous-espace invariant de $(V_i)_K$, les sous-espaces W_i étant tels que les restrictions de π_1 et π_2 à W_1 et W_2 sont équivalentes et le couple constitué de W_1 et W_2 est maximal pour cette propriété. Le but est de montrer que $W_i = (V_i)_K$, et ce pour $i = 1, 2$. Supposons que ce n'est pas vrai et notons U_i l'orthogonal de W_i dans V_i .

Supposons qu'il existe σ dans \hat{G}_K qui apparaît dans la décomposition en irréductibles de la restriction de π_1 à U_1 et qui n'apparaît pas dans la décomposition en irréductibles de la restriction de π_2 à U_2 . Notons $U_{1,\sigma}$ un sous-espace de U_1 sur lequel π_1 est isomorphe à σ . D'après le Lemme 2, il existe φ_0 dans $C_0^\infty(G)_K$ tel que $\sigma(\varphi_0) \neq 0$. Posons $\varphi = \varphi_0^* * \varphi_0$, alors $\pi_1(\varphi)$ est un opérateur symétrique et positif et, quitte à multiplier φ par un nombre réel positif, on peut supposer que $\sup \|\pi_1(\varphi)(v)\| = 1$ quand v parcourt les éléments de $U_{1,\sigma}$ tels que $\|v\| = 1$. Or $\text{trace}(\pi_1(\varphi)) = \text{trace}(\pi_2(\varphi)) \neq 0$, donc $\pi_2(\varphi)$ est non nul et notons $\lambda = \sup \|\pi_2(\varphi)(v)\|$ quand v parcourt les éléments de U_2 tels que $\|v\| = 1$. Considérons maintenant une décomposition $U_2 = \bigoplus_{\beta \in B} U_{2,\beta}$ de U_2 en sous-espaces irréductibles et, pour chaque $\beta \in B$, choisissons une base orthonormée $\{v_{\beta,\delta}\}_{\delta \in A_\beta}$ de $U_{2,\beta}$ formée de vecteurs propres de $\pi_2(\varphi)$. Alors, pour tout ψ dans $C_0^\infty(G)_K$, on a: $\text{trace}(\pi_2(\psi^* * \psi)) = \sum_{\beta,\delta} \|\pi_2(\psi)(v_{\beta,\delta})\|^2 < \infty$. On peut donc appliquer le Lemme précédent avec un vecteur v de $U_{1,\sigma}$ tel que $\|v\| = 1$ et $\pi_1(\varphi)(v) = v$. D'après ce que l'on a vu, il existe φ_1 dans $C_0^\infty(G)_K$ tel que l'on ait: $\sum_{\beta,\delta} \|\pi_2(\varphi_1)(v_{\beta,\delta})\|^2 < \lambda^{-2} \|\pi_1(\varphi_1)(v)\|^2/2$. Nous allons voir que ceci implique une contradiction. En effet:

$$(a) \text{ trace}(\pi_1((\varphi_1 * \varphi)^* * (\varphi_1 * \varphi))) \geq \|\pi_1(\varphi_1 * \varphi)(v)\|^2 = \|\pi_1(\varphi_1)(v)\|^2.$$

$$(b) \text{ trace}(\pi_2((\varphi_1 * \varphi)^* * (\varphi_1 * \varphi))) = \sum_{\beta,\delta} \|\pi_2(\varphi_1)\pi_2(\varphi)(v_{\beta,\delta})\|^2 \\ \leq \lambda^2 \sum_{\beta,\delta} \|\pi_2(\varphi)(v_{\beta,\delta})\|^2 \leq \|\pi_1(\varphi_1)(v)\|^2/2.$$

Donc, d'après ces inégalités, $\pi_1((\varphi_1 * \varphi)^* * (\varphi_1 * \varphi))$ et $\pi_2((\varphi_1 * \varphi)^* * (\varphi_1 * \varphi))$ ne peuvent avoir la même trace, ce qui constitue la contradiction désirée. On en déduit que si un élément σ de \hat{G}_K apparaît dans la décomposition en irréductibles de la restriction de π_1 à U_1 , alors il apparaît dans la décomposition en irréductibles de la

restriction de π_2 à U_2 , ce qui contredit la maximalité du couple constitué de W_1 et de W_2 . La démonstration est maintenant terminée. En effet, on a montré que si pour toute fonction φ dans $C_0^\infty(G)_K$, les opérateurs $\pi_1(\varphi)$ et $\pi_2(\varphi)$ ont même trace, alors les représentations π_1 et π_2 sont K -équivalentes. Or, si φ est dans $C_{x,y}$ alors $\psi = \varphi \circ L_{x^{-1}} \circ R_x$ est invariante à gauche par K et les opérateurs $\pi_i(\varphi)$ et $\pi_i(\psi)$ sont conjugués, et ce pour $i = 1, 2$. Donc, si l'on impose l'égalité des traces des opérateurs $\pi_1(\varphi)$ et $\pi_2(\varphi)$ quand φ parcourt l'ensemble des fonctions de $C_0^\infty(G)$ qui sont invariantes à gauche par K , on a forcément l'égalité des traces des opérateurs $\pi_1(\varphi)$ et $\pi_2(\varphi)$ quand φ parcourt $C_0^\infty(G)_K$. La Proposition est donc démontrée. \square

4. Remarque

α) La proposition précédente est encore vraie si l'on considère des fonctions φ dans $C_0^\infty(G)$ invariantes à droite par K . Ceci est une conséquence directe du fait que φ est invariante à droite par K si et seulement si φ^* est invariante à gauche par K et que $\pi(\varphi^*)$ est l'adjoint de $\pi(\varphi)$.

β) On peut se demander comment le fait que deux représentations de G soient équivalentes relativement à une représentation non triviale de K peut se lire sur leur caractère. Pour cela, on introduit la représentation régulière ρ de G dans $L_c^2(G)$ définie par $(\rho(g)\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x)$ pour x et g dans G et φ dans $L_c^2(G)$ et si τ est une représentation irréductible de K , on peut considérer le sous-espace $L_c^2(G)^\tau$ de $L_c^2(G)$. En adaptant la preuve de la proposition précédente, on obtient facilement le résultat suivant: soient τ une représentation irréductible de K et π_1 et π_2 deux représentations à trace de G , alors π_1 et π_2 sont τ -équivalentes si et seulement si $\pi_1(\varphi)$ et $\pi_2(\varphi)$ ont même trace pour toute fonction φ dans $C_0^\infty(G) \cap L_c^2(G)^\tau$. On vérifie facilement que la condition imposée à φ est équivalente au fait que pour tout x dans G on ait:

$$\varphi(x) = \dim(\tau) \int_K \overline{\chi_\tau(k)} \varphi(k^{-1}x) d\mu_K(k)$$

où μ_K désigne la mesure de Haar sur K normalisée par $\mu_K(K) = 1$ et χ_τ le caractère de τ .

Comme conséquence de cette Proposition, on a le résultat suivant:

5. COROLLAIRE. Soient G un groupe discret, K un sous-groupe fini de G et π_1 et π_2 deux représentations de G de dimension finie. Alors, en notant χ_1 et χ_2 leur caractère respectif, π_1 et π_2 sont K -équivalentes si et seulement si pour tout g dans G on a:

$$\sum_{k \in K} \chi_1(kg) = \sum_{k \in K} \chi_2(kg).$$

Preuve. Ceci est une conséquence directe de la Proposition précédente et du fait que si G est un groupe discret, alors une fonction est dans $C_0^\infty(G)$ si et seulement si elle est à support fini. On conclut en remarquant que les fonctions caractéristiques des ensembles de la forme Kg quand g parcourt G forment une base de l'espace vectoriel des fonctions à support fini invariantes à gauche par K . La preuve est terminée. \square

On va maintenant s'intéresser aux représentations qui apparaissent naturellement dans les problèmes d'isospectralité, à savoir les représentations induites. Le cadre est le suivant: G est un groupe de Lie et Γ est un sous-groupe discret de G tel que le quotient $\Gamma \backslash G$ soit compact. On vérifie facilement que si un tel sous-groupe existe, alors G est unimodulaire et il existe une unique mesure $\mu_{\Gamma \backslash G}$ sur $\Gamma \backslash G$ invariante par l'action de G sur $\Gamma \backslash G$ telle que pour toute fonction φ continue sur G et à support compact, on ait:

$$\int_G \varphi(g) d\mu_G(g) = \int_{\Gamma \backslash G} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(\gamma g) \right) d\mu_{\Gamma \backslash G}(g).$$

On définit alors une représentation de G unitaire et continue, que l'on note π_Γ^G , dans l'espace $L_c^2(\Gamma \backslash G)$ en posant $(\pi_\Gamma^G(g)\varphi)(x) = \varphi(xg)$ si $\varphi \in L_c^2(\Gamma \backslash G)$, $g \in G$ et $x \in \Gamma \backslash G$. Il est connu que cette représentation est à trace et le but de la formule des traces de Selberg est de calculer la trace des opérateurs $\pi_\Gamma^G(\varphi)$ quand φ parcourt $C_0^\infty(G)$. Avant d'énoncer la formule des traces de Selberg on a besoin de fixer quelques notations. Tout d'abord, si g (resp. γ) est dans G (resp. Γ), on note $[g]_G$ (resp. $[\gamma]_\Gamma$) sa classe de conjugaison dans G (resp. Γ) et G_g (resp. Γ_γ) son centralisateur dans G (resp. Γ). Il est facile de vérifier que si $\Gamma \backslash G$ est compact, alors $\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma$ l'est aussi. Si g est conjugué à un élément de Γ , on normalise la mesure de Haar sur G_g comme suit: on fixe dans $[g]_G$ un élément g_0 et une mesure de Haar $\rho^{(g_0)}$ sur G_{g_0} et on choisit comme mesure de Haar sur $G_{xg_0x^{-1}}$ la mesure $\rho^{(xg_0x^{-1})}$ qui est l'image directe de $\rho^{(g_0)}$ par l'automorphisme intérieur I_x défini par $I_x(g) = xgx^{-1}$ pour $g \in G$. De plus, il existe une mesure $\mu_{G_g \backslash G}$ sur $G_g \backslash G$ invariante par l'action de G qui est unique si l'on demande que pour toute fonction φ continue sur G et à support compact, on ait:

$$\int_G \varphi(g) d\mu_G(g) = \int_{G_g \backslash G} \int_{G_g} \varphi(xy) d\rho^{(g)}(x) d\mu_{G_g \backslash G}(y).$$

Maintenant, si γ est dans Γ , la mesure $\mu_{G_\gamma \backslash G}$ étant fixée, il existe une unique mesure sur $\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma$, que l'on notera $\mu^{(\gamma)}$, invariante par l'action de G_γ et vérifiant la

même condition de normalisation que $\mu_{\Gamma \backslash G}$. Comme $\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma$ est compact, $\mu^{(\gamma)}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma)$ est fini et, comme on le vérifie facilement, ne dépend que de $[\gamma]_\Gamma$. Finalement, on définit une fonction centrale r_Γ sur G en posant $r_\Gamma(g) = \sum_{[\gamma]_\Gamma \in [g]_G} \mu^{(\gamma)}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma)$ si $[g]_G$ rencontre Γ et $r_\Gamma(g) = 0$ sinon. On peut maintenant énoncer la formule des traces de Selberg ([G-G-P], p. 30):

6. PROPOSITION. *Soient G un groupe de Lie et Γ un sous-groupe de G discret tel que $\Gamma \backslash G$ soit compact. Alors la représentation π_Γ^G est à trace et si φ est dans $C_0^\infty(G)$, on a l'égalité suivante:*

$$\text{trace}(\pi_\Gamma^G(\varphi)) = \sum_{[g]_G} r_\Gamma(g) \int_{G_g \backslash G} \varphi(u^{-1}gu) d\mu_{G_g/G}(u).$$

Il est clair, d'après la formule des traces, que l'application $\varphi \mapsto \text{trace}(\pi_\Gamma^G(\varphi))$ est une distribution qui s'étend en une mesure sur G que l'on va noter θ_Γ^G . Si l'on note $\theta_{\Gamma, [g]_G}$ la mesure sur G dont le support est $[g]_G$ et qui, si on identifie $[g]_G$ et $G_g \backslash G$, est égale à $r_\Gamma(g)\mu_{G_g/G}$, alors $\theta_{\Gamma, [g]_G}$ est bien définie (i.e. elle ne dépend pas du choix de $\rho^{(g)}$) et la formule des traces de Selberg s'écrit:

$$\theta_\Gamma^G = \sum_{[g]_G} \theta_{\Gamma, [g]_G}.$$

On peut alors exprimer le fait que deux représentations du type que l'on vient de considérer sont K -équivalentes par l'égalité de deux mesures. Avant d'énoncer le résultat, rappelons que la convolée $\mu * \nu$ de deux mesures μ et ν sur G est l'image directe de la mesure $\mu \otimes \nu$ par l'application $(x, y) \mapsto xy$. D'autre part, on notera ν_K l'unique mesure de Haar sur K telle que $\nu_K(K) = 1$ et i l'injection de K dans G . Ceci dit, on a le résultat suivant:

7. PROPOSITION. *Soient G un groupe de Lie, K un sous-groupe compact et Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes discrets et co-compacts de G . Les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont K -équivalentes si et seulement si, en notant $i_* \nu_K$ l'image directe de ν_K par i , les mesures $(i_* \nu_K) * \theta_{\Gamma_1}^G$ et $(i_* \nu_K) * \theta_{\Gamma_2}^G$ sont égales.*

Preuve. On remarque que si l'on note $C_0(G)$ l'ensemble des fonctions continues sur G à support compact et $C_0(G)^K$ l'ensemble des fonctions de $C_0(G)$ invariantes à gauche par K , alors l'application:

$$C_0(G) \rightarrow C_0(G)^K$$

$$\varphi \mapsto \left(g \mapsto \int_G \varphi(kg) d\nu_K(k) \right)$$

est surjective. En combinant les Propositions 3 et 5, on obtient que les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont K -équivalentes si et seulement si pour toute fonction φ dans $C_0(G)$, on a :

$$\int_K \int_G \varphi(kg) dv_K(k) d\theta_{\Gamma_1}^G(g) = \int_K \int_G \varphi(kg) dv_K(k) d\theta_{\Gamma_2}^G(g).$$

La Proposition découle alors de la définition du produit de convolution. □

8. REMARQUE. Si K est trivial, alors $i_* \nu_K$ est la masse de Dirac en l'élément neutre et $(i_* \nu_K) * \theta_{\Gamma}^G = \theta_{\Gamma}^G$. Donc $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont équivalentes si et seulement si les mesures $\theta_{\Gamma_1}^G$ et $\theta_{\Gamma_2}^G$ sont égales, ce qui est équivalent au fait que pour toute classe de conjugaison $[g]_G$, on ait $\theta_{\Gamma_1, [g]_G} = \theta_{\Gamma_2, [g]_G}$. Compte-tenu de l'expression de ces mesures, ceci est vrai si et seulement si $r_{\Gamma_1} = r_{\Gamma_2}$ et on retrouve ainsi le résultat prouvé par P. Bérard dans [Bé3].

On va terminer cette partie par un résultat d'hérédité sur l'équivalence relative que l'on interprètera plus tard dans un cadre géométrique.

9. LEMME. Soient G un groupe de Lie unimodulaire, L un sous-groupe fermé et unimodulaire et K un sous-groupes compact tels que l'on ait la propriété suivante: pour tout g dans G , il existe l dans L tel que $gKg^{-1} \cap L \supseteq l(K \cap L)l^{-1}$. Si σ_1 et σ_2 sont deux représentations de L qui sont $(K \cap L)$ -équivalentes, alors les représentations π_1 et π_2 induites par σ_1 et σ_2 sont deux représentations de G qui sont K -équivalentes.

Preuve. Notons V_i l'espace de σ_i et $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit hermitien de V_i pour $i = 1, 2$. Rappelons tout d'abord la définition des représentations π_i . On considère l'ensemble W_i^0 des fonctions φ continues à support compact sur G et à valeurs dans V_i telles que pour tout g dans G et l dans L , on ait $\varphi(lg) = \sigma_i(l)\varphi(g)$. On munit W_i^0 du produit hermitien

$$(\varphi | \psi) = \int_{L \backslash G} \langle \varphi(g), \psi(g) \rangle d\mu_{L \backslash G}(g)$$

($\mu_{L \backslash G}$ désigne une mesure sur $L \backslash G$ invariante pour l'action de G). L'espace W_i obtenu en complétant W_i^0 à l'aide de $(\cdot | \cdot)$ est l'espace de la représentation induite π_i qui est définie comme suit: $(\pi_i(g)(\varphi))(x) = \varphi(xg)$ si φ est dans W_i et x, g sont dans G .

Soit φ dans $W_i^{gKg^{-1}}$. Nous allons montrer que pour presque tout x dans G , $\varphi(x)$ est dans $(V_i)_{K \cap L}$. Fixons un élément x dans G puis un élément k dans $K \cap L$. Alors,

d'après la propriété demandée, il existe k' dans K et l dans L tels que $(xg)k'(xg)^{-1} = lkl^{-1}$. On en déduit que, puisque φ est dans $W_i^{gKg^{-1}}$, on a :

$$\varphi(x) = \varphi(xgk'g^{-1}) = \varphi(lkl^{-1}x) = \sigma_i(lkl^{-1})\varphi(x).$$

On a donc montré que $\varphi(x)$ est dans $(V_i)^{(K \cap L)^{l^{-1}}}$ et donc, à fortiori, dans $(V_i)_{K \cap L}$, ce qui constitue le résultat annoncé. Comme $(W_i)_K$ est l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les $W_i^{gKg^{-1}}$ quand g parcourt G , le Lemme est bien démontré. \square

Dans la dernière partie, on donnera des exemples de groupes G qui admettent des sous-groupes Γ_1 et Γ_2 tels que les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ soient K -équivalentes, pour un certain sous-groupes compact K , mais non équivalentes.

2. Une généralisation du théorème de Sunada

On va utiliser les résultats sur les représentations obtenus dans la première partie pour étudier les problèmes d'isospectralité. On se place dans le cadre suivant: (X, \mathbf{m}) est une variété riemannienne, G est un sous-groupe fermé du groupe des isométries de (X, \mathbf{m}) et Γ_1 et Γ_2 sont deux sous-groupes discrets de G qui opèrent librement sur X et tels que les variétés $\Gamma_1 \backslash X$ et $\Gamma_2 \backslash X$ soient compactes (on vérifie facilement que cette condition implique que les quotients $\Gamma_1 \backslash G$ et $\Gamma_2 \backslash G$ sont compacts). Comme Γ_1 et Γ_2 sont des groupes d'isométries de (X, \mathbf{m}) , la métrique \mathbf{m} induit une métrique \mathbf{m}_i sur $\Gamma_i \backslash X$ de sorte que la projection de X sur $\Gamma_i \backslash X$ soit un revêtement riemannien (on gardera cette notation par la suite). On cherche alors une condition d'ordre algébrique pour que les variétés $(\Gamma_1 \backslash X, \mathbf{m}_1)$ et $(\Gamma_2 \backslash X, \mathbf{m}_2)$ soient isospectrales. Une telle condition est donnée par le théorème de Sunada [S]: si les représentations quasi-régulières $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont équivalentes, alors les quotients riemanniens $(\Gamma_1 \backslash X, \mathbf{m}_1)$ et $(\Gamma_2 \backslash X, \mathbf{m}_2)$ sont isospectraux pour tout opérateur différentiel naturel: laplacien opérant sur les fonctions, laplacien de Hodge-De Rham opérant sur les formes différentielles. . .

La condition du théorème de Sunada est très forte et ne peut être une condition nécessaire pour que deux variétés localement isométriques soient isospectrales. En effet, Ikeda a construit des exemples d'espaces lenticulaires (i.e. des quotients de la sphère canonique par un groupe cyclique) isospectraux pour le laplacien opérant sur les fonctions mais pas pour le laplacien opérant sur les 1-formes (on reviendra plus tard sur ces exemples). Si l'on veut obtenir une condition nécessaire et suffisante pour que deux variétés localement isométriques soient isospectrales, il faut donc trouver une condition qui assure l'isospectralité des variétés considérées qui soit plus faible que celle du théorème de Sunada.

Avant d'énoncer la condition obtenue, on a besoin de rappeler un résultat relatif aux actions de groupes sur les variétés. Si G est un groupe de Lie qui opère sur une variété X , on notera G_x le stabilisateur d'un point x de X , c'est-à-dire l'ensemble des $g \in G$ tels que $g \cdot x = x$. Si l'action de G est propre et C^∞ , alors G_x est un sous-groupe compact de G et on peut montrer ([Bo], p. 96) qu'il existe un sous-groupe compact K de G , que l'on appelle stabilisateur générique, jouissant des deux propriétés suivantes:

- a) Pour tout $x \in X$, K est conjugué à un sous-groupe de G_x .
- b) Il existe un ouvert dense U tel que si $x \in U$, alors K et G_x sont conjugués.

1. **EXEMPLES.** Si (X, \mathbf{m}) est une variété riemannienne et G est un sous-groupe fermé du groupe des isométries de (X, \mathbf{m}) , alors l'action de G est propre et on peut regarder les cas particuliers suivants:

a) (X, \mathbf{m}) est homogène sous l'action de G . On peut alors écrire $X = G/K$ où K est le stabilisateur d'un point fixé une fois pour toutes. Il est clair que K est le stabilisateur générique de l'action de G sur X .

b) G est un groupe dénombrable d'isométries d'une variété (X, \mathbf{m}) complète. Comme l'ensemble des points fixes d'une isométrie différente de l'identité est un fermé d'intérieur vide, la réunion des points fixes des éléments de G différents de l'identité ne peut pas être égale à X puisque, d'après le théorème de Baire, elle est d'intérieur vide. On en déduit que le stabilisateur générique de l'action de G est trivial.

On peut maintenant énoncer la généralisation du théorème de Sunada:

2. **PROPOSITION.** Soient (X, \mathbf{m}) une variété riemannienne, G un sous-groupe fermé du groupe des isométries de (X, \mathbf{m}) , K le stabilisateur générique de l'action de G sur X et Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes discrets de G tels que les quotients $\Gamma_1 \backslash X$ et $\Gamma_2 \backslash X$ soient des variétés compactes. Si les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont K -équivalentes, alors les quotients riemanniens $(\Gamma_1 \backslash X, \mathbf{m}_1)$ et $(\Gamma_2 \backslash X, \mathbf{m}_2)$ sont isospectraux.

Il existe trois preuves de résultats, dont une n'est valable que dans le cas où X est compacte. Chacune de ces preuves a, comme nous allons le voir, des avantages.

Preuve par la méthode de transplantation. La méthode de transplantation est due à P. Bérard qui l'a introduite pour redémontrer et interpréter le théorème de Sunada [Bé2]. On va tout d'abord en rappeler le principe. On considère un sous-groupe fermé G du groupe des isométries de (X, \mathbf{m}) et Γ un sous-groupe discret de G tel que $\Gamma \backslash X$ soit une variété compacte. Tout d'abord, si H est un sous-groupe fermé de G , on note ρ_H l'unique mesure sur $H \backslash X$ telle que pour toute fonction φ continue et à support compact sur X on ait, si $v_{\mathbf{m}}$ désigne la mesure riemannienne de (X, \mathbf{m}) ,

$$\int_X \varphi(x) dv_{\mathbf{m}}(x) = \int_{H \backslash X} \left(\int_H \varphi(h \cdot x) d\mu_H(h) \right) d\rho_H(x).$$

On définit alors un espace de Hilbert comme suit: on considère tout d'abord l'espace vectoriel des fonctions φ continues sur X à valeurs dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma \backslash G)$ qui sont telles que pour x dans X et g dans G on ait la relation $\varphi(g \cdot x) = \pi^G_{\Gamma}(g)\varphi(x)$. Si on munit cet espace du produit hermitien suivant:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{G \backslash X} (\varphi(x) | \psi(x)) d\rho_G(x)$$

(on a noté $(\cdot | \cdot)$ le produit hermitien de $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma \backslash G)$) et si on le complète par rapport à ce produit hermitien, on obtient un espace de Hilbert que l'on note $L^2(G \backslash X; \pi^G_{\Gamma})$. On définit alors une application linéaire T_{Γ} de $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma \backslash X)$ dans $L^2(G \backslash X; \pi^G_{\Gamma})$ en posant $(T_{\Gamma}\varphi)(x)(g) = \varphi(g \cdot x)$ pour φ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma \backslash X)$, x dans X et g dans G (on a identifié x et g avec leur image respective dans $\Gamma \backslash X$ et $\Gamma \backslash G$). La première étape consiste à montrer que T_{Γ} est une isométrie. Si on considère maintenant deux sous-groupes Γ_1 et Γ_2 tels que les représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$ soient équivalentes et si l'on note U une isométrie de $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma_1 \backslash G)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma_2 \backslash G)$ qui entrelace ces deux représentations, alors U induit une isométrie, que l'on note encore U , entre $L^2(G \backslash X; \pi^G_{\Gamma_1})$ et $L^2(G \backslash X; \pi^G_{\Gamma_2})$. On obtient ainsi une isométrie $T_{\Gamma_1, \Gamma_2} = T_{\Gamma_2}^{-1} \circ U \circ T_{\Gamma_1}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma_1 \backslash X)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma_2 \backslash X)$. La deuxième étape consiste à montrer que T_{Γ_1, Γ_2} induit une isométrie entre les espaces de Sobolev $H^1_{\mathbb{C}}(\Gamma_1 \backslash X)$ et $H^1_{\mathbb{C}}(\Gamma_2 \backslash X)$. On en déduit, en utilisant la caractérisation variationnelle des valeurs propres, que les quotients riemanniens $(\Gamma_1 \backslash X, \mathbf{m}_1)$ et $(\Gamma_2 \backslash X, \mathbf{m}_2)$ sont isospectraux.

La preuve de la proposition est basée sur la remarque suivante: si K est le stabilisateur générique de l'action de G et si Γ a les mêmes propriétés que précédemment, alors $L^2(X; \pi^G_{\Gamma}) = L^2(X; (\pi^G_{\Gamma})_K)$. En effet, si x est dans X , alors K est conjugué à un sous-groupe de G_x , le stabilisateur de x . Il existe donc g dans G tel que gKg^{-1} soit inclu dans G_x . Si maintenant φ est dans $L^2(X; \pi^G_{\Gamma})$ et l dans G_x , alors $\varphi(x) = \varphi(l \cdot x) = \pi^G_{\Gamma}(l)\varphi(x)$. On en déduit que pour tout x dans X , on a:

$$\varphi(x) \in L^2(X; \pi^G_{\Gamma})^{G_x} \subseteq L^2(x; \pi^G_{\Gamma})^{gKg^{-1}} \subseteq L^2(X; \pi^G_{\Gamma})_K.$$

Il est maintenant clair, d'après la preuve par transplantation, que si les représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$ sont K -équivalentes, alors les quotients riemanniens $(\Gamma_1 \backslash X, \mathbf{m}_1)$ et $(\Gamma_2 \backslash X, \mathbf{m}_2)$ sont isospectraux. \square

3. REMARQUE. La preuve par transplantation met en avant l'aspect combinatoire du théorème de Sunada. En particulier, elle est encore valable si les groupes

n'opèrent pas librement (on obtient ainsi des orbifolds) ou si les variétés considérées sont à bord.

Preuve par la formule des traces de Selberg. On va utiliser les résultats de la première partie. Tout d'abord, on sait, d'après Donnelly [Do1], que si une variété riemannienne (X, \mathbf{m}) admet un quotient compact, alors il existe une solution fondamentale de l'équation de la chaleur. Notons $p(t, x, y)$ le noyau de la chaleur de (X, \mathbf{m}) où $t > 0$ et x, y sont dans X . Pour chaque couple (x, t) , définissons une fonction $\varphi_{x,t}$ sur G par la formule $\varphi_{x,t}(g) = p(t, x, g \cdot x)$. Il est clair que $\varphi_{x,t}$ est une fonction invariante à gauche par G_x . Or il existe l dans G tel que lKl^{-1} soit inclus dans G_x , donc $\varphi_{x,t}$ est une fonction invariante à gauche par lKl^{-1} . Si on suppose maintenant que Γ_1 et Γ_2 sont tels que les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ soient K -équivalentes, comme cette notion ne dépend que de la classe de conjugaison de K dans G , en utilisant les résultats de la première partie, on obtient que $\text{trace}(\pi_{\Gamma_1}^G(\varphi_{x,t})) = \text{trace}(\pi_{\Gamma_2}^G(\varphi_{x,t}))$. Notons que ceci est justifié puisque l'application $\varphi \mapsto \text{trace}(\pi_{\Gamma}^G(\varphi))$ est une mesure sur G et que $\varphi_{x,t}$ est une fonction positive. En appliquant la formule des traces de Selberg à $\varphi_{x,t}$ on obtient:

$$\text{trace}(\pi_{\Gamma_i}^G(\varphi_{x,t})) = \sum_{[g]_G} r_{\Gamma_i}(g) \int_{G_g \backslash G} p(t, u \cdot x, gu \cdot x) d\mu_{G_g \backslash G}(u).$$

On pose maintenant $\hat{\varphi}_t(x) = \int_{G_g \backslash G} p(t, u \cdot x, gu \cdot x) d\mu_{G_g \backslash G}(u)$. Comme la mesure $\mu_{G_g \backslash G}$ est invariante par l'action naturelle de G sur $G_g \backslash G$ et le noyau de la chaleur est lui aussi invariant par G (i.e. si g est une isométrie, alors $p(t, x, y) = p(t, g \cdot x, g \cdot y)$), on obtient que pour tout g dans G et x dans X , on a $\hat{\varphi}_t(g \cdot x) = \hat{\varphi}_t(x)$. Donc $\hat{\varphi}_t$ définit une fonction sur $G \backslash X$ et en intégrant cette fonction par rapport à la mesure ρ_G introduite au début de la preuve par transplantation on obtient:

$$\begin{aligned} & \int_{G \backslash X} \text{trace}(\pi_{\Gamma}^G(\varphi_{x,t})) d\rho_G(x) \\ &= \sum_{[g]_G} r_{\Gamma}(g) \int_{G \backslash X} \int_{G_g \backslash G} p(t, u \cdot x, gu \cdot x) d\mu_{G_g \backslash G}(u) d\rho_G(x). \end{aligned}$$

Or, on vérifie facilement que:

$$\int_{G \backslash X} \int_{G_g \backslash G} p(t, u \cdot x, gu \cdot x) d\mu_{G_g \backslash G}(u) d\rho_G(x) = \int_{G_g \backslash X} p(t, x, gx) d\rho_{G_g}(x).$$

Maintenant, il est bien connu que si l'on note $\Delta_{\mathbf{m}_i}$ le laplacien de $(\Gamma_i \backslash X, \mathbf{m}_i)$ et si t est un réel positif, alors l'opérateur $e^{-t\Delta_{\mathbf{m}_i}}$ est à trace. De plus, si l'on note $Z_{\Gamma_i}(t)$ cette trace, D. DeTurck et C. Gordon ont démontré l'identité suivante [DT-G]:

$$Z_{\Gamma_i}(t) = \sum_{[g]_G} r_{\Gamma_i}(g) \int_{G_g \backslash X} p(t, x, g \cdot x) d\rho_{G_g}(x).$$

On en déduit que si les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont K -équivalentes, alors les fonctions Z_{Γ_1} et Z_{Γ_2} sont égales, ce qui est équivalent à l'isospectralité des quotients riemanniens $(\Gamma_1 \backslash X, \mathbf{m}_1)$ et $(\Gamma_2 \backslash X, \mathbf{m}_2)$. \square

Preuve par le théorème de réciprocité de Frobenius. Dans cette partie, on suppose que la variété X est compacte. Comme le groupe G que l'on considère est un sous-groupe fermé du groupe des isométries de (X, \mathbf{m}) qui est alors un groupe compact, G est aussi compact. On va donc pouvoir utiliser le théorème de réciprocité de Frobenius que nous allons rappeler.

On considère un sous-groupe fermé H d'un groupe compact G . Si τ est une représentation de G , on notera $\text{Res}_H^G(\tau)$ la représentation de H obtenue en considérant la restriction de τ à H . Si ρ est une représentation de H , on notera $\text{Ind}_H^G(\rho)$ la représentation de G induite par ρ (voir la preuve du lemme 9 de la première partie pour la définition d'une représentation induite). Finalement, si τ est une représentation irréductible et ρ une représentation complètement réductible, on notera $[\tau : \rho]$ la multiplicité de τ dans ρ . On peut maintenant énoncer ([War], p. 430):

THÉORÈME DE RÉCIPROCITÉ DE FROBENIUS. *Soient G un groupe compact et H un sous-groupe fermé de G . Si τ est une représentation irréductible de G et ρ une représentation irréductible de H , alors:*

$$[\rho : \text{Res}_H^G(\tau)] = [\tau : \text{Ind}_H^G(\rho)].$$

Revenons au problème initial. Comme la variété (X, \mathbf{m}) est compacte, son laplacien $\Delta_{\mathbf{m}}$ admet un spectre discret. On va noter $S_{\mathbf{m}}$ l'ensemble des valeurs propres de $\Delta_{\mathbf{m}}$ comptées sans multiplicité et si λ est dans $S_{\mathbf{m}}$, on notera V_{λ} l'espace propre complexe correspondant (la multiplicité de λ dans le spectre de (X, \mathbf{m}) est donc égale à $\dim_{\mathbb{C}} V_{\lambda}$). Si H est un sous-groupe fermé du groupe des isométries, on obtient une représentation de H dans V_{λ} en posant $\pi_{\lambda}^H(h)(\varphi) = \varphi \circ h^{-1}$ pour φ dans V_{λ} et h dans H . Maintenant, si G est un groupe compact d'isométries et si Γ_1 et Γ_2 sont deux sous-groupes finis de G opérant librement sur X , comme les fonctions propres de $(\Gamma_i \backslash X, \mathbf{m}_i)$ correspondant à une valeur propre μ sont les fonctions de V_{μ} invariantes par l'action de Γ_i , les quotients riemanniens $(\Gamma_1 \backslash X, \mathbf{m}_1)$ et $(\Gamma_2 \backslash X, \mathbf{m}_2)$

sont isospectraux si et seulement si, en notant 1_{Γ_i} la représentation triviale de Γ_i , pour toute valeur propre λ de S_m , on a $[1_{\Gamma_1} : \pi_\lambda^{\Gamma_1}] = [1_{\Gamma_2} : \pi_\lambda^{\Gamma_2}]$. On va maintenant essayer d'obtenir une expression de $[1_{\Gamma_i} : \pi_\lambda^{\Gamma_i}]$ faisant intervenir G .

$$\begin{aligned} [1_{\Gamma_i} : \pi_\lambda^{\Gamma_i}] &= [1_{\Gamma_i} : \text{Res}_{\Gamma_i}^G(\pi_\lambda^G)] \\ &= \left[1_{\Gamma_i} : \text{Res}_{\Gamma_i}^G \left(\sum_{\rho \in G} [\rho : \pi_\lambda^G] \rho \right) \right] \\ &= \sum_{\rho \in G} [1_{\Gamma_i} : \text{Res}_{\Gamma_i}^G(\rho)] [\rho : \pi_\lambda^G] \\ &= \sum_{\rho \in G} [\rho : \pi_{\Gamma_i}^G] [\rho : \pi_\lambda^G]. \end{aligned}$$

Or, d'après Donnelly [Do2], une représentation irréductible ρ de G est une sous-représentation de l'une des représentations π_λ^G si et seulement si elle appartient à \hat{G}_K . On en déduit que pour tout λ dans S_m , on a la formule suivante:

$$[1_{\Gamma_i} : \pi_\lambda^{\Gamma_i}] = \sum_{\rho \in \hat{G}_K} [\rho : \pi_{\Gamma_i}^G] [\rho : \pi_\lambda^G].$$

Il est maintenant clair que si les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont K -équivalentes, alors les quotients riemanniens $(\Gamma_1 \backslash X, \mathbf{m}_1)$ et $(\Gamma_2 \backslash X, \mathbf{m}_2)$ sont isospectraux. \square

4. REMARQUE. Cette preuve a deux avantages. Le premier est que, comme celle par transplantation, elle est encore valable si l'action des groupes Γ_i n'est pas libre. Le deuxième avantage est que l'on va pouvoir obtenir, dans les bons cas, la réciproque de cette proposition, c'est à dire une condition nécessaire et suffisante pour que deux variétés localement isométriques soient isospectrales.

3. Etude de quelques cas particuliers

Le fait que la condition imposée dans la Proposition 1 soit moins restrictive que la condition du théorème de Sunada va nous permettre d'obtenir, dans certains cas, une condition nécessaire et suffisante pour que deux variétés localement isométriques soient isospectrales. Tout d'abord, faisons la remarque suivante: le problème de départ est de savoir à quelle condition les quotients riemanniens $(\Gamma_1 \backslash X, \mathbf{m}_1)$ et $(\Gamma_2 \backslash X, \mathbf{m}_2)$ sont isospectraux. La condition que l'on a trouvée dans la partie précédente fait intervenir un groupe G quelconque à qui on impose juste de

contenir Γ_1 et Γ_2 . Si on veut espérer obtenir une condition nécessaire et suffisante que deux telles variétés soient isospectrales, il faut savoir pour quel groupe G la condition imposée est la plus faible. Le résultat est le suivant:

1. LEMME. Soient (X, \mathbf{m}) une variété riemannienne, G le groupe des isométries de (X, \mathbf{m}) , K le stabilisateur générique de l'action de G sur X , L un sous-groupe fermé de G et Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes discrets de L tels que les quotients $\Gamma_1 \backslash X$ et $\Gamma_2 \backslash X$ soient des variétés compactes. Si les représentations $\pi_{\Gamma_1}^L$ et $\pi_{\Gamma_2}^L$ sont $K \cap L$ -équivalentes, alors les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont K -équivalentes.

Preuve. On va tout d'abord montrer que le stabilisateur générique de l'action de L sur X est $K \cap L$. Notons H le stabilisateur générique de l'action de L sur X . Alors il existe un ouvert dense U (resp. V) tel que si x est dans U (resp. V), alors le stabilisateur L_x (resp. G_x) de x est conjugué à H (resp. K) dans L (resp. G). On choisit maintenant un élément x de $U \cap V$, alors $L_x = G_x \cap L$, ce qui montre bien que l'on peut supposer que $H = K \cap L$. Maintenant, si g est dans G , alors $G_{g \cdot x} = gKg^{-1}$ et $L_{g \cdot x} = G_{g \cdot x} \cap L$. On en déduit qu'il existe l dans L tel que $gKg^{-1} \cap L \supseteq l(K \cap L)l^{-1}$. On peut donc appliquer le lemme 9 de la première partie et on conclut en remarquant que les représentations $\pi_{\Gamma_i}^G$ et $\text{Ind}_L^G(\pi_{\Gamma_i}^L)$ sont équivalentes. \square

La condition la plus faible est donc celle que l'on impose quand G est le groupe des isométries. On peut maintenant énoncer le résultat obtenu:

2. PROPOSITION. Soient (X, \mathbf{m}) une variété riemannienne, G le groupe des isométries de (X, \mathbf{m}) , K le stabilisateur générique de l'action de G sur X et Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes discrets de G tels que les quotients $\Gamma_1 \backslash X$ et $\Gamma_2 \backslash X$ soient des variétés compactes. On suppose que l'une des trois conditions suivantes est vérifiée:

- (a) X est compacte et les espaces propres réels de (X, \mathbf{m}) sont irréductibles.
- (b) (X, \mathbf{m}) est un espace symétrique de rang 1 de type non compact.
- (c) (x, \mathbf{m}) est \mathbb{R}^n muni de sa métrique usuelle.

Alors les quotients riemanniens $(\Gamma_1 \backslash X, \mathbf{m}_1)$ et $(\Gamma_2 \backslash X, \mathbf{m}_2)$ sont isospectraux si et seulement si les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont K -équivalentes.

Les techniques utilisées suivant les cas sont différentes.

Preuve dans le cas (a). Rappelons tout d'abord que si τ est une représentation réelle irréductible, alors il n'y a que trois possibilités pour sa complexifiée:

- (1) $\tau_{\mathbb{C}}$ est irréductible. On dit que τ est de type réel.
- (2) $\tau_{\mathbb{C}} = \rho \oplus \rho^*$ où ρ est irréductible et ρ^* est la représentation contragrédiente. On dit que τ est de type complexe.
- (3) $\tau_{\mathbb{C}} = \rho \oplus \rho$ où ρ est irréductible. On dit que τ est de type quaternionien.

Revenons maintenant à la preuve. Soient (X, \mathbf{m}) une variété riemannienne compacte dont les espaces propres réels sont irréductibles, Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes finis de G tels que les quotients riemanniens $(\Gamma_1 \backslash X, \mathbf{m}_1)$ et $(\Gamma_2 \backslash X, \mathbf{m}_2)$ soient isospectraux et ρ dans \hat{G}_K . D'après Donnelly [D2], il existe une valeur propre λ de (X, \mathbf{m}) telle que ρ soit une sous-représentation de π_λ^G . De plus, la preuve de la généralisation du théorème de Sunada utilisant le théorème de réciprocity de Frobenius, montre que l'isospectralité des variétés considérées implique que $[1_{\Gamma_1} : \pi_\lambda^{G_1}] = [1_{\Gamma_2} : \pi_\lambda^{G_2}]$, ce qui est équivalent à :

$$\sum_{\sigma \in \hat{G}_K} [\sigma : \pi_{\Gamma_1}^G][\sigma : \pi_\lambda^G] = \sum_{\sigma \in \hat{G}_K} [\sigma : \pi_{\Gamma_2}^G][\sigma : \pi_\lambda^G].$$

Si la représentation $\pi_{\lambda, \mathbb{R}}^G$ est de type réel, alors $\pi_\lambda^G = \rho$ et on obtient $[\rho : \pi_{\Gamma_1}^G] = [\rho : \pi_{\Gamma_2}^G]$. Si $\pi_{\lambda, \mathbb{R}}^G$ est de type quaternionien, alors $\pi_\lambda^G = \rho \oplus \rho$ et on obtient encore $[\rho : \pi_{\Gamma_1}^G] = [\rho : \pi_{\Gamma_2}^G]$. Finalement, si $\pi_{\lambda, \mathbb{R}}^G$ est de type complexe, alors $\pi_\lambda^G = \rho \oplus \rho^*$ et on obtient :

$$[\rho : \pi_{\Gamma_1}^G][\rho : \pi_\lambda^G] + [\rho^* : \pi_{\Gamma_1}^G][\rho^* : \pi_\lambda^G] = [\rho : \pi_{\Gamma_2}^G][\rho : \pi_\lambda^G] + [\rho^* : \pi_{\Gamma_2}^G][\rho^* : \pi_\lambda^G].$$

On remarque maintenant qu'une fonction φ appartient à un sous-espace de V_λ (resp. $L_c^2(\Gamma_1 \backslash G)$) isomorphe à ρ si et seulement si $\bar{\varphi}$ appartient à un sous-espace isomorphe à ρ^* et on en déduit que $[\rho : \pi_{\Gamma_1}^G] = [\rho^* : \pi_{\Gamma_1}^G]$ et $[\rho : \pi_\lambda^G] = [\rho^* : \pi_\lambda^G]$. Dans tous les cas, on obtient donc l'égalité $[\rho : \pi_{\Gamma_1}^G] = [\rho : \pi_{\Gamma_2}^G]$. Comme celle-ci est vérifiée pour toute représentation ρ dans \hat{G}_K , on a montré que les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont K -équivalentes. \square

3. EXEMPLES. Il est connu que si G/K est un espace symétrique de type compact de rang 1, alors les espaces propres de X sont irréductibles pour G . En particulier, si X est la sphère S^n , alors $G = O(n+1)$ et $K = O(n)$ et il existe des exemples de sous-groupes finis Γ_1 et Γ_2 de G non conjugués dans G et tels que les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ soient K -équivalentes. En utilisant la proposition précédente, on va pouvoir donner de tels exemples.

a) *Les exemples d'Urakawa.* Ce sont des sous-groupes Γ_i de $O(n+1)$ engendrés par des réflexions ($n \geq 3$). En utilisant les calculs de série de Poincaré faits dans [Bé-B], Urakawa donne des exemples de groupes de Coxeter Γ_1 et Γ_2 tels que, si C_1 et C_2 sont les chambres de Weyl correspondantes, alors $C_1 \cap S^n$ et $C_2 \cap S^n$ sont isospectraux pour le problème de Neumann et le problème de Dirichlet. Comme les fonctions propres de $C_i \cap S^n$ pour le problème de Neumann sont les fonctions propres de S^n invariantes par Γ_i , les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont K -équivalentes. Les premiers exemples non triviaux apparaissent lorsque $n = 3$. Dans ce cas on peut

prendre Γ_1 correspondant au système de racines $A_3 \times A_1$ et Γ_2 correspondant au système de racines $A_2 \times B_2$. On peut trouver de nombreux exemples aux pages 450 et 451 de [U]. C'est en utilisant les exemples d'Urakawa et la proposition précédente que C. Gordon et D. Webb ont construit des domaines convexes isospectraux et non isométriques [G-W].

b) *Les exemples d'Ikeda* — Ce sont des exemples d'espaces lenticulaires, c'est-à-dire de quotient de sphères par des groupes cycliques. Plus précisément, on considère $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ et on note Γ_α le groupe cyclique engendré par l'élément γ_α de $O(2n+2)$ défini par $\gamma_\alpha(z_1, \dots, z_{n+1}) = (\exp(2i\pi\alpha_1)z_1, \dots, \exp(2i\pi\alpha_{n+1})z_{n+1})$ où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$. Si tous les α_i sont rationnels, on obtient un groupe fini qui opère librement sur S^{2n+1} . A chaque groupe Γ_α , Ikeda associe une fraction rationnelle, qui ne dépend que du spectre de $\Gamma_\alpha \backslash S^{2n+1}$, et en travaillant avec cette fraction rationnelle, arrive à construire des exemples d'espaces lenticulaires isospectraux et non isométriques. Ikeda s'est aussi intéressé au problème de l'isospectralité des espaces lenticulaires pour le laplacien de Hodge-De Rham opérant sur les formes différentielles et a construit pour chaque $p \in \{0, \dots, n\}$ des groupes tels que les quotients $\Gamma_\alpha \backslash S^{2n+1}$ et $\Gamma_\beta \backslash S^{2n+1}$ soient isospectraux pour les i -formes pour tout $i \leq p$ mais pas isospectraux pour les $p+1$ -formes. Il est clair que les représentations $\pi_{\Gamma_\alpha}^G$ et $\pi_{\Gamma_\beta}^G$ sont K -équivalentes et ne peuvent pas être équivalentes. Par exemple, si on prend $n = 3$, $\alpha = (3/11, 4/11, 5/11)$ et $\beta = (1/11, 2/11, 3/11)$, alors les quotients $\Gamma_\alpha \backslash S^5$ et $\Gamma_\beta \backslash S^5$ sont isospectraux pour le laplacien opérant sur les fonctions mais ne sont pas isospectraux pour le laplacien opérant sur les 1-formes [I]. Ce sont d'ailleurs les seuls exemples connus de groupes induisant des représentations K -équivalentes et non équivalentes.

c) *Une modification des exemples d'Ikeda* — On peut montrer très simplement que les exemples d'Ikeda fournissent des quotients isospectraux de l'espace projectif complexe muni de sa métrique symétrique usuelle (les objets obtenus sont alors des orbifolds). Pour cela, on remarque que le stabilisateur générique de l'action $SO(2n)$ sur $SU(2n)/SU(2n-1)$ est $SO(2n-1) = SU(2n-1) \cap SO(2n)$, ce qui est équivalent au fait que pour tout g dans $SU(2n)$, il existe l dans $SO(2n)$ tel que $gSU(2n-1)g^{-1} \cap SO(2n) \supseteq l(SO(2n) \cap SU(2n-1))l^{-1}$. Donc, si Γ_1 et Γ_2 sont deux sous-groupes finis de $SO(2n)$ tels que les représentations $\pi_{\Gamma_1}^{SO(2n)}$ et $\pi_{\Gamma_2}^{SO(2n)}$ soient $SO(2n-1)$ -équivalentes, on peut, d'après ce que l'on vient de voir, appliquer le lemme 9 de la première partie et on obtient que les représentations $\pi_{\Gamma_1}^{SU(2n)}$ et $\pi_{\Gamma_2}^{SU(2n)}$ sont $SU(2n-1)$ -équivalentes et, a fortiori, $S(U(1) \times U(2n-1))$ -équivalentes, puisque $SU(2n-1)$ est inclus dans $S(U(1) \times U(2n-1))$. On peut donc appliquer la généralisation du théorème de Sunada et on obtient que les orbifolds $\Gamma_1 \backslash \mathbb{C}P^{2n-1}$ et $\Gamma_2 \backslash \mathbb{C}P^{2n-1}$ sont isospectrales. En utilisant la même technique, on peut construire des quotients isospectraux d'espaces projectifs quaternionniens.

4. REMARQUE.

α) S. Zelditch a montré que si un groupe fini G opère sur un variété X telle que pour toute représentation réelle et irréductible ρ de G on ait $\dim \rho \leq \dim X$, alors l'ensemble des métriques \mathbf{m} invariantes par G pour lesquelles tous les espaces propres réels de (X, \mathbf{m}) sont irréductibles pour G contient un ensemble résiduel $[Z]$. En utilisant ce résultat, on peut montrer que, sous les mêmes hypothèses de dimension, pour un ouvert dense de métriques invariantes par G , la réciproque du théorème de Sunada est vraie [P1] (rappelons que si G est fini, alors K est trivial).

β) On peut généraliser la proposition précédente aux espaces symétriques de rang quelconque de la manière suivante. Soient $X = G/K$ un espace symétrique de type compact où G est semi-simple et simplement connexe et D dans l'algèbre $\mathbf{D}(G/K)$ des opérateurs différentiels sur X invariants par G , alors si Γ_1 et Γ_2 sont deux sous-groupes finis de G opérant librement sur X et tels que les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ soient K -équivalentes, D induit des opérateurs D_{Γ_1} et D_{Γ_2} sur $\Gamma_1 \backslash X$ et $\Gamma_2 \backslash X$ qui sont isospectraux (voir l'appendice). La généralisation de la proposition précédente peut s'énoncer comme suit: si pour tout D dans $\mathbf{D}(G/K)$, les opérateurs induits D_{Γ_1} et D_{Γ_2} sont isospectraux, alors les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont K -équivalentes. Pour cela, on utilise le fait que si ρ est dans \hat{G}_K , alors il existe un unique sous-espace V de $L^2_{\mathbb{C}}(X)$ sur lequel π_K^G est équivalente à ρ et un homomorphisme c_ρ de $\mathbf{D}(G/K)$ dans \mathbb{C} tel que pour tout φ dans V et D dans $\mathbf{D}(G/K)$ on ait $D(\varphi) = c_\rho(D)(\varphi)$. De plus, $c_\rho \neq c_\tau$ si $\rho \neq \tau$ ([H], p. 538). Le raisonnement est alors le même que dans la proposition précédente.

Preuve dans le cas b). On considère $X = G/K$ un espace symétrique de rang un de type non compact. On peut alors décrire explicitement \hat{G}_K . Pour cela, on considère une décomposition d'Iwasawa $G = KAN$ avec $\dim A = 1$ et on note M le centralisateur de A dans K . Pour chaque s dans \mathbb{C} , on note χ_s la représentation de $P = MAN$ dans \mathbb{C} définie par $\chi_s(me'n) = e^{-s't}$ et π_s la représentation de G induite par χ_s . Remarquons que les représentations considérées ne sont pas toutes unitaires. On peut cependant montrer [K] que toute représentation unitaire et irréductible de G appartenant à \hat{G}_K est équivalente à l'une des représentations π_s où s parcourt l'ensemble Ω défini par:

- $\Omega = i\mathbb{R} \cup \{s \in \mathbb{R} \text{ tels que } -\rho \leq s \leq \rho\}$ si $G = SO(n, 1)$ ou $SU(n, 1)$.
- $\Omega = i\mathbb{R} \cup \{s \in \mathbb{R} \text{ tels que } -m_\alpha/2 - 1 \leq s \leq m_\alpha/2 + 1\} \cup \{\pm \rho\}$ si $G = Sp(n, 1)$

ou $\mathbb{F}_{4(-20)}$.

On a noté ρ la demi-somme des racines positives et m_α la multiplicité de la racine simple. De plus deux telles représentations π_s et $\pi_{s'}$ sont équivalentes si et seulement si $s' = \pm s$.

Considérons maintenant un sous-espace irréductible V de $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma \backslash G)_K$ où Γ est un sous-groupe discret et cocompact de G . On peut montrer que $\dim V^K = 1$ et que si φ dans V^K , alors φ descend en une fonction sur $\Gamma \backslash X = \Gamma \backslash G/K$ qui est une fonction propre pour le laplacien associé à la métrique localement symétrique [H]. De plus, si la restriction de π^G_{Γ} à V est équivalente à π_s , alors φ est une fonction propre associée à la valeur propre $\rho^2 - s^2$. Réciproquement, si φ est une fonction propre de $\Gamma \backslash X$ pour une valeur propre λ , on peut voir φ comme un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma \backslash G)^K \subset L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma \backslash G)_K$ et chaque projection non nulle de φ sur sous-espace irréductible sera encore une fonction propre correspondant à la valeur propre λ . On en déduit que la multiplicité d'une valeur propre λ dans le spectre de $\Gamma \backslash X$ est égale au nombre de classes d'équivalence de représentations π_s quand s parcourt Ω qui apparaissent dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma \backslash G)_K$ et qui sont telles que $\rho^2 - s^2 = \lambda$. Or, si s et s' sont dans Ω et $s^2 = s'^2$, alors $s' = \pm s$ et $\pi_{s'}$ et π_s , sont équivalentes. Donc la multiplicité d'une valeur propre λ est égale à la multiplicité de l'unique classe d'équivalence qui contient un élément π_s avec $\rho^2 - s^2 = \lambda$. La preuve est donc terminée. \square

5. REMARQUE.

α) Dans le cas où X est le plan hyperbolique \mathbf{H}^2 , alors $G = PSL(2, \mathbb{R})$ et $K = SO(2)$ et on peut montrer en utilisant la formule des traces de Selberg que les surfaces de Riemann $\Gamma_1 \backslash X$ et $\Gamma_2 \backslash X$ sont isospectrales si et seulement si les représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$ sont équivalentes [P2]. On peut retrouver ce résultat en utilisant la description de \hat{G} . Les représentations irréductibles de G qui ne sont pas dans \hat{G}_K s'appellent classiquement les représentations de la série discrète et sont naturellement paramétrées comme $\{\omega_n$ avec $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$. Avec ces notations, on peut montrer que la multiplicité de ω_n dans π^G_{Γ} est égale à $|n|(g-1)$ si $|n| \geq 2$ et à g si $n = \pm 1$ où g désigne le genre de la surface $\Gamma \backslash X$ [Wal]. Comme, en dimension 2, le genre est un invariant spectral, la multiplicité dans π^G_{Γ} de n'importe quelle représentation irréductible ne dépend que du spectre de la surface $\Gamma \backslash X$ et on retrouve le résultat précédemment cité.

β) On peut généraliser la proposition précédente aux espaces symétriques de rang quelconque de la manière suivante. Si $X = G/K$ est un espace symétrique de type non compact de rang l , alors l'algèbre $\mathbf{D}(G/K)$ des opérateurs différentiels sur X invariants par G est un anneau de polynômes en l variables algébriquement indépendantes. Maintenant, si D est dans $\mathbf{D}(G \backslash K)$ et si Γ_1 et Γ_2 sont deux sous-groupes discrets de G tels que les quotients $\Gamma_1 \backslash X$ et $\Gamma_2 \backslash X$ soient des variétés compactes et tels que les représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$ soient K -équivalentes, alors D induit des opérateurs D_{Γ_1} et D_{Γ_2} sur $\Gamma_1 \backslash X$ et $\Gamma_2 \backslash X$ qui sont isospectraux (voir l'appendice). La généralisation de la proposition précédente peut s'énoncer comme suit: si pour tout D dans $\mathbf{D}(G/K)$ les opérateurs induits D_{Γ_1} et D_{Γ_2} sont isospec-

traux, alors les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont K -équivalentes. Pour montrer ce résultat, on utilise les résultats suivants d'analyse harmonique sur les espaces symétriques [H]. Tout d'abord, si on fixe une décomposition d'Iwasawa $G = KAN$ et si \mathfrak{a} désigne l'algèbre de Lie de A , alors il y a une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence de représentations (non nécessairement unitaires) de G admettant des vecteurs invariants par K et les orbites du groupe de Weyl sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^* = \text{hom}_\mathbb{R}(\mathfrak{a}, \mathbb{C})$. La deuxième assertion utilisée est le fait que si V est un sous-espace irréductible de $L_\mathbb{C}^2(\Gamma \backslash G)_K$, alors V contient une unique, à constante multiplicative près, fonction invariante par K qui, en fait, est une fonction propre pour chaque D_Γ quand D parcourt $\mathbf{D}(G/K)$. De plus, si la restriction de π_Γ^G à V correspond à un paramètre $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ et si l'on note $\Gamma(D)(\lambda)$ la valeur propre correspondante, alors Γ est un isomorphisme de $\mathbf{D}(G/K)$ sur l'algèbre des polynômes définis sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ et invariants par le groupe de Weyl.

Preuve dans le cas c) — Le principe de la preuve est le même que pour les espaces symétriques de rang un de type non compact. On considère \mathbb{R}^n comme l'espace homogène G/K où G est le groupe des isométries $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ et $K = O(n)$. Rappelons que la loi de groupe sur G est donnée par $(x, A)(y, B) = (x + Ay, AB)$ si x, y sont dans \mathbb{R}^n et A, B dans $O(n)$. On peut donc appliquer la théorie de Mackey, théorie qui permet facilement de classer les représentations irréductibles du produit semi-direct d'un groupe abélien par un groupe compact [M]. On trouve que toute représentation irréductible de G qui est dans \hat{G}_K est équivalente à l'une des représentations ρ_α que l'on va définir. Si α est dans le dual $(\mathbb{R}^n)^*$ de \mathbb{R}^n , on note $K_\alpha = \{A \in K \text{ tels que } \alpha \circ A = \alpha\}$. On définit alors une représentation dont l'espace est $L_\mathbb{C}^2(K_\alpha \backslash K)$ en posant $(\rho_\alpha(x, A)\varphi)(B) = \exp(2i\pi\alpha(Bx))\varphi(BA)$ si φ est dans $L_\mathbb{C}^2(K_\alpha \backslash K)$. De plus, deux telles représentations ρ_α et ρ_β sont équivalentes si et seulement si $\|\alpha\| = \|\beta\|$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme associée au produit scalaire sur $(\mathbb{R}^n)^*$ induit par le produit scalaire de \mathbb{R}^n .

Considérons maintenant un sous-espace irréductible V de $L_\mathbb{C}^2(\Gamma \backslash G)_K$ où Γ est un sous-groupe discret et cocompact de G opérant librement sur \mathbb{R}^n . On vérifie que $\dim V^K = 1$ et que si φ dans V^K , alors φ descend en une fonction sur $\Gamma \backslash X = \Gamma \backslash G/K$ qui est une fonction propre pour la laplacien associé à la métrique plate ([H], p. 410). De plus, si la restriction de π_Γ^G à V est équivalente à ρ_α , alors φ est une fonction propre associée à la valeur propre $4\pi^2 \|\alpha\|^2$. Réciproquement, si φ est une fonction propre de $\Gamma \backslash X$ pour une valeur propre λ , on peut voir φ comme un élément de $L_\mathbb{C}^2(\Gamma \backslash G)^K \subset L_\mathbb{C}^2(\Gamma \backslash G)_K$ et chaque projection non nulle de φ sur sous-espace irréductible sera encore une fonction propre correspondant à la valeur propre λ . On en déduit que la multiplicité d'une valeur propre λ dans le spectre de $\Gamma \backslash X$ est égale au nombre de classes d'équivalence de représentations ρ_α quand α parcourt $(\mathbb{R}^n)^*$ qui apparaissent dans $L_\mathbb{C}^2(\Gamma \backslash G)_K$ et qui sont telles que $4\pi^2 \|\alpha\|^2 = \lambda$. Or, si α

et β sont dans $(\mathbb{R}^n)^*$ et sont tels que $\|\alpha\| = \|\beta\|$, alors ρ_α et ρ_β sont équivalentes. Donc la multiplicité d'une valeur propre λ est égale à la multiplicité de l'unique classe d'équivalence qui contient un élément ρ_α avec $4\pi^2\|\alpha\|^2 = \lambda$. La preuve est donc terminée. \square

Appendice

Le but de cet appendice est de donner un analogue de la généralisation du théorème de Sunada pour une classe plus large d'opérateurs différentiels naturels.

On se place dans le cadre suivant: on considère une variété riemannienne (X, \mathbf{m}) et E un fibré naturel pour \mathbf{m} au dessus de X ; c'est-à-dire un fibré hermitien tel que si g est une isométrie de (X, \mathbf{m}) , alors g opère sur E de sorte que g induise une isométrie de E_x sur $E_{g \cdot x}$. Dans ces conditions, le groupe des isométries opère sur l'ensemble $S(E)$ des sections C^∞ de E de la manière suivante: si g est une isométrie et s une section de E , alors $(g \cdot s)(x) = g \cdot s(g^{-1} \cdot x)$. Remarquons que si Γ est un groupe discret d'isométries de (X, \mathbf{m}) opérant librement sur X , alors il opère aussi librement sur E et le fibré quotient E_Γ est un fibré naturel au dessus de $\Gamma \backslash X$ pour la métrique induite par \mathbf{m} dont les sections sont les sections de E invariantes par Γ . On considère maintenant un opérateur différentiel naturel D , c'est-à-dire un opérateur différentiel opérant sur les sections de E et commutant avec l'action sur les sections des isométries de (X, \mathbf{m}) . Si Γ est comme avant, alors D induit un opérateur différentiel naturel D_Γ opérant sur les sections de E_Γ .

1. EXEMPLES.

a) Si X est une variété quelconque, alors $\bigwedge^p(T^*X)_\mathbb{C}$ est naturel pour toute métrique riemannienne \mathbf{m} sur X et l'opérateur de Hodge-De Rham $\Delta_\mathbf{m}^p$ est un opérateur naturel pour \mathbf{m} . On peut généraliser cette exemple en considérant le laplacien de Lichnérowicz opérant sur les tenseurs.

b) Si $X = G/K$ est un espace symétrique et si τ est une représentation de K dans un espace V de dimension finie, on construit un fibré homogène E_τ sur X en quotientant $G \times V$ par l'action suivante de $K: k \cdot (g, v) = (gk^{-1}, \tau(k)v)$. Le fibré ainsi obtenu est naturel pour la métrique symétrique de X et l'opérateur de Casimir est un opérateur naturel pour cette même métrique.

On peut maintenant énoncer la généralisation du théorème de Sunada:

2. PROPOSITION. Soient E fibré naturel au dessus d'une variété riemannienne (X, \mathbf{m}) et D un opérateur différentiel naturel elliptique et auto-adjoint. Soient G un groupe d'isométries, K le stabilisateur générique de l'action de G sur X et τ la

représentation de K dans la fibre E_x au dessus d'un point X dont le stabilisateur est K . Soient Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes discrets de G tels que les quotients $\Gamma_1 \backslash X$ et $\Gamma_2 \backslash X$ soient des variétés compactes. Si les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont équivalentes relativement à τ , alors les opérateurs D_{Γ_1} et D_{Γ_2} sont isospectraux.

Preuve. Le plus simple est d'adapter le preuve par transplantation. Pour cela on considère le fibré au dessus de X dont la fibre au point x est l'espace $L^2(\Gamma \backslash G; E_x)$ des fonctions L^2 définies sur $\Gamma \backslash G$ à valeurs dans E_x . Notons que ce fibré s'identifie au produit tensoriel du fibré trivial $X \times L_c^2(\Gamma \backslash G)$ par E . On peut définir une action de G sur ce fibré comme suit: si φ est dans $L^2(\Gamma \backslash G; E_x)$ et g dans G , alors $g \cdot \varphi$ est l'élément de $L^2(\Gamma \backslash G; E_{g \cdot x})$ défini par $g \cdot \varphi = g \cdot (\pi_{\Gamma}^G(g)\varphi)$. On va noter $L^2(G \backslash X; \pi_{\Gamma}^G; E)$ l'ensemble des sections L^2 du fibré obtenu en quotientant $(X \times L_c^2(\Gamma \backslash G)) \otimes E$ par G . Autrement dit, un élément φ de $L^2(G \backslash X; \pi_{\Gamma}^G; E)$ est la donnée pour tout x dans X d'un élément $\varphi(x)$ de $L^2(\Gamma \backslash G; E_x)$ tel que si g est dans G et h dans $\Gamma \backslash G$, alors $\varphi(g \cdot x)(h) = g \cdot ((\pi_{\Gamma}^G(g)\varphi(x))(h))$. On considère maintenant l'application T_{Γ} définie sur $L^2(E_{\Gamma})$ à valeurs dans $L^2(G \backslash X; \pi_{\Gamma}^G; E)$ par la formule $(T_{\Gamma}s)(x)(g) = (g^{-1} \cdot s)(x)$ si x est dans X et g dans $\Gamma \backslash G$. On vérifie facilement que T_{Γ} est une isométrie.

On fait maintenant la remarque suivante: si x est dans X , quitte à changer K en gKg^{-1} , on peut supposer que K est contenu dans G_x et si φ est dans $L^2(G \backslash X; \pi_{\Gamma}^G; E)$, alors pour tout g dans $\Gamma \backslash G$ et pour tout k dans K on a $\varphi(x)(gk) = \tau(k^{-1})\varphi(x)(g)$ où τ désigne la représentation de K dans E_x . On choisit maintenant une base orthonormée $\{e_i\}_{1 \leq i \leq r}$ de E_x et, si φ est dans $L^2(G \backslash X; \pi_{\Gamma}^G; E)$, on note $\{\varphi_i(x)\}_{1 \leq i \leq r}$ les composantes de $\varphi(x)$ dans la base $\{e_i\}_{1 \leq i \leq r}$. On vérifie facilement que les fonctions φ_i engendrent un sous-espace de $L_c^2(\Gamma \backslash G)$ sur lequel la restriction à K de π_{Γ}^G est isomorphe à la représentation τ^* contragrédiente de la représentation τ . On en déduit que les fonctions φ_i appartiennent à $L_c^2(\Gamma \backslash G)_{\tau^*}$. Maintenant, si Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes discrets de G tels que les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ soient équivalentes relativement à τ , alors elles sont équivalentes relativement à τ^* (comme $\varphi \in L_c^2(\Gamma \backslash G)_{\tau^*}$ si et seulement si $\bar{\varphi} \in L_c^2(\Gamma \backslash G)_{\tau}$, ces deux conditions sont en fait équivalentes) et si U est une isométrie de $L_c^2(\Gamma_1 \backslash G)_{\tau^*}$ dans $L_c^2(\Gamma_2 \backslash G)_{\tau^*}$ qui entrelace ces deux représentations, on obtient une isométrie de $L^2(G \backslash X; \pi_{\Gamma_1}^G; E)$ dans $L^2(G \backslash X; \pi_{\Gamma_2}^G; E)$ que l'on note encore U et qui est définie par $(U\varphi)(x) = \sum_{i=1}^r (U\varphi_i)(x)e_i$ (on vérifie facilement que U est indépendante du choix de la base $\{e_i\}_{1 \leq i \leq r}$).

La fin de la preuve consiste à montrer que $T_{\Gamma_1, \Gamma_2} = T_{\Gamma_2}^{-1} \circ U \circ T_{\Gamma_1}$ est une isométrie de $L^2(E_{\Gamma_1})$ sur $L^2(E_{\Gamma_2})$ qui induit une isométrie entre les espaces de Sobolev $H^1(E_{\Gamma_1})$ et $H^1(E_{\Gamma_2})$. On en déduit que les opérateurs D_{Γ_1} et D_{Γ_2} sont isospectraux en utilisant la caractérisation variationnelle des valeurs propres. \square

3. REMARQUE. On peut aussi, dans le cas où X est compacte, donner une preuve de la proposition précédente qui utilise le théorème de réciprocity de Frobenius. Il faut pour cela adapter le résultat de Donnelly (i.e. prouver qu'une représentation irréductible ρ de G apparaît dans l'un des espaces propres si et seulement si $\text{Res}_K^G(\rho)$ a une de ses composantes irréductibles isomorphe à τ). Si les espaces propres de D sont irréductibles pour G , la condition de la proposition est une condition nécessaire et suffisante. Or, cette condition d'irréductibilité est vérifiée lorsque X est la sphère S^n munie de sa métrique canonique, E le fibré $\bigwedge^p(T^*X)_\mathbb{C}$ et D le laplacien de Hodge-De Rham et les espaces lenticulaires construits par Ikeda qui sont isospectraux sur les j -formes pour $j \leq p$ et qui ne sont pas isospectraux sur les $(p+1)$ -formes donnent des exemples de groupes Γ_1 et Γ_2 qui sont tels que, si l'on note τ^j la représentation naturelle de $K = O(n)$ dans $\bigwedge^j \mathbb{C}^n$, alors les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont équivalentes relativement à τ^j pour $j \leq p$ mais ne sont pas équivalentes relativement à $\tau^{(p+1)}$.

REFERENCES

- [Bé1] BÉRARD P. *Variétés riemanniennes isospectrales non isométriques*, Astérisque, 177–178 (1989), 127–154.
- [Bé2] BÉRARD P. *Transplantation et isospectralité I*, Math. Ann., 292 (1992), 547–559.
- [Bé3] BÉRARD P. *Transplantation et isospectralité II*, J. London Math. Soc., 48 (1993), 565–576.
- [Bé-B] BÉRARD P. & BESSON G. *Spectres et groupes cristallographiques II: domaines sphériques*. Ann. Inst. Fourier, 30 (1980), 237–248.
- [Bo] BOURBAKI N. *Elements de mathématique: groupes et algèbre de Lie, Chapitre 9*, Masson, Paris, 1982.
- [DT-G] DETURCK D. & GORDON C. *Isospectral deformations II. Trace Formulas, metrics and potentials*, Comm. Pure Appl. Math., 42 (1989), 1067–1095.
- [D1] DONNELLY H. *Asymptotic expansions for compact quotients of properly discontinuous group actions*, Illinois J. Math., 23 (1979), 485–496.
- [D2] DONNELLY H. *G-spaces, the asymptotic Splitting of $L^2(M)$ into irreducibles*, Math. Ann., 237 (1978), 23–40.
- [G-G-P] GELFAND I.M. & GRAEV M. I. & PIATECKI-SHAPIRO I. I. *Generalized functions, vol. 6: Group representations and automorphic functions*, Moskwa, Nauka, 1966.
- [G-W] GORDON C. & WEBB D. *Isospectral Convex Domains in Euclidean Space*, Math. Res. Lett., 1 (1994), 539–545.
- [H] HELGASON S. *Groups and geometric analysis: integral geometry, invariant differential operators and spherical functions*, Acad. Press, N.Y., 1984.
- [I] IKEDA A. *Riemannian manifolds p -isospectral but not $(p+1)$ -isospectral*, in *Geometry of Manifolds (Matsumoto)*, Perspect. Math., 8 (1988), 383–417.
- [J-L] JACQUET H. & LANGLANDS R. *Automorphic forms on $GL(2)$* , Lectures Notes in Mathematics 114 (Springer), 1970.
- [K] KOORNWINDER T. H. *Jacobi functions and analysis on non compact semi-simple Lie groups*, in *Special functions: group theoretical aspects and applications 1–85*, Reidel, Dordrecht-Boston, 1984.
- [M] MACKEY G. *Induced representations of Groups and Quantum Mechanics*, W. A. Benjamin, N.Y., 1968.

- [P1] PESCE H. *Représentations de groupes et variétés isospectrales*, Contemp. Math., 173 (1994), 231–240.
- [P2] PESCE H. *Variétés hyperboliques et elliptiques fortement isospectrales*, à paraître dans J. Funct. Anal.
- [S] SUNADA T. *Riemannian coverings and isospectral manifolds*. Ann. of Math., 121 (1985), 169–186.
- [U] URAKAWA H. *Bounded domains which are isospectral but non isométric*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 15 (1982), 441–456.
- [Wal] WALLACH N. *On the Selberg trace formula in the case of compact quotient*, Bull. Amer. Math. Soc., 82 (1976), 171–195.
- [War] WARNER G. *Harmonic Analysis on semi-simple Lie groups*, Springer, 1972.
- [Z] ZELDITCH S. *On the generic spectrum of a Riemannian covering*, Ann. Inst. Fourier, 40 (1990), 407–442.

Université Joseph Fourier

URA 188 du CNRS

UFR de Mathématiques

B.P. 74

F-38402 Saint-Martin-d'Hères, Cédex

Received November 14, 1994