Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 70 (1995)

Artikel: Mise en position optimale de tores par rapport à un flot d'Anosov.
Autor: Barbot, Thierry
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-52992

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 19.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici **70** (1995) 113–160

0010-2571/95/010113-48$1.50 + 0.20/0
© 1995 Birkhäuser Verlag, Basel

Mise en position optimale de tores par rapport à un flot d'Anosov

THIERRY BARBOT

Abstract. Let Φ^t be an Anosov flow on a (non atoroidal) 3-manifold M. We say that an incompressible torus T embedded in M admits an optimal position with respect to Φ^t if it is isotopic to a torus transverse to Φ^t outside a finite number of periodic orbits contained in T (there's an additional condition we don't mention here). The first remark is that such an optimal position is quasi unique, i.e., we prove that if two tori in optimal position are homotopics in M, then they are homotopics along the flow. Then we give some sufficient condition for a torus admiting an optimal position. Eventually, we show that if a finite collection of disjoint tori is such that each torus admits an optimal position, then these optimal positions can be chosen disjoints one from each other.

1. Introduction

Soit Φ^t un flot d'Anosov sur une variété fermée M orientée de dimension 3. Sauf indication contraire, nous supposerons toujours que M est orientée et qu'elle n'admet pas de plongement incompressible de la bouteille de Klein. Nous supposerons également que les divers feuilletages forts et faibles associés au flot d'Anosov sont orientés (pour toutes ces notions, voir [1]).

Notre projet à long terme est d'étudier ces flots en utilisant un programme analogue à celui de [18], i.e., découper un flot d'Anosov en parties élémentaires le long de tores incompressibles en bonne position par rapport au flot. Nous ne nous intéressons dans cet article qu'au problème de la mise en bonne position des tores de découpage. Nous devons pour ce faire convenir de ce qu'est un tore en bonne position. La première idée qui vient à l'esprit est convenir qu'un tore est en bonne position dès qu'il est transverse au flot. Cette idée est d'autant plus naturelle que nous montrerons ici:

THÉORÈME A. *Deux tores plongés dans M de manière incompressible et transverse à Φ^t sont homotopes si et seulement si ils sont homotopes le long des orbites de Φ^t.*

Précisons le sens de cet énoncé: deux tores T et T' sont dits homotopes le long des orbites de Φ^t s'il existe une application continue $u : T \to \mathbb{R}$ telle que l'application

$x \mapsto \Phi^{u(x)}(x)$ envoie homéomorphiquement T sur T'. Nous nous posons donc la question:

QUESTION. *A quelle condition T peut-il être isotopé en un tore transverse à Φ^t?*

Une première résponse possible est donnée par le critère de Schwartzman (cf. [16]) selon lequel il suffit que le nombre d'intersection homologique de T avec chaque orbite périodique de Φ^t soit strictement positif. Ce cas de figure à l'inconvénient majeur d'être très particulier: il ne se présente que lorsque Φ^t est (topologiquement équivalent à) la suspension d'un difféomorphisme linéaire hyperbolique du tore. Dans ce cas, il s'avère même que tout tore plongé est isotope à un tore transverse. Nous nous proposons d'établir ici un autre type de résultat de nature complètement différente:

THÉORÈME B. *On suppose l'existence de deux lacets fermés c_1 et c_2 dans T tels que*:

- *c_1 et c_2 ne sont pas homologues dans T,*
- *chaque c_i $(i = 1, 2)$ est librement homotope dans M à une orbite périodique de Φ^t.*

Alors, T est isotope à un tore transverse à Φ^t.

Nous montrerons en fait un peu mieux. Comme le nouveau tore T' isotope à T est transverse à Φ^t, il l'est également avec chacun des deux feuilletages faibles. Ceux-ci induisent donc sur T' deux feuilletages transverses l'un par rapport à l'autre. Il découlera de la preuve du théorème B que ces deux feuilletages sont de type morse-smale, sans composante de Reeb, admettent chacun un nombre pair de feuilles fermées, que les feuilles fermées de l'un sont homologues à c_1 et que celles de l'autre sont homologues à c_2 (étant entendu que ces homologies sont au signe près). Une bonne illustration de ca cas de figure est donnée par l'exemple de ce Bonatti–Langevin (cf. [14]).

Il ne serait guère intéressant de se limiter au seul cas des tores transverses. En effet, nombre de flots d'Anosov sur des variétés non-atoroïdales n'admettent pas de tore transverse. Tel est le cas par exemple des revêtements finis des flots géodésiques des surfaces riemanniennes à courbure négative, et, de manière plus générale, de tous les flots d'Anosov produits sans section globale (voir [3]). Dans le cas des flots géodésiques et de leurs revêtements finis, il est facile de voir que tout tore incompressible est isotope à un tore tangent à un nombre fini d'orbites périodiques, et transverse au flot en dehors de ces orbites périodiques. Un tel tore s'obtient par recollements "d'anneaux de Birkhoff élémentaires" (pour plus de précision, le lecteur peut se reporter à la discussion préliminaire de [12]).

Nous appelons *anneau de Birkhoff* tout anneau plongé dans M, d'intérieur transverse à Φ^t, et dont le bord consiste en deux orbites périodiques de Φ^t. Il s'agit du prototype le plus simple de section de Birkhoff locale au sens de [10] ou de [7]. Un tel anneau est toujours transverse aux deux feuilletages faibles du flot. Ceci le munit naturellement de deux feuilletages de dimension un, transverses l'un par rapport à l'autre à l'intérieur de l'anneau, et tangents au bord. Lorsque ces deux feuilletages sont sans composante de Reeb et ont pour seules feuilles fermées celles que constituent le bord, l'anneau de Birkhoff est dit *élémentaire* (voir figure 1). Cette terminologie est justifiée par le fait que, à homotopie près le long des orbites de Φ^t, tout anneau de Birkhoff s'obtient en perturbant légèrement une union finie d'anneaux de Birkhoff élémentaires (voir corollaire 5.6).

Nous appelons *tore quasi-transverse* tout tore plongé dans M décomposable en une union finie d'anneaux de Birkhoff élémentaires et tel que le flot Φ^t soit alternativement rentrant et sortant sur ces anneaux (De manière plus précise, ceci signifie que si $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont deux anneaux de Birkhoff contenus dans T et adjacents, et que T est muni d'une orientation transverse, alors l'orientation de Φ^t ne peut coïncider simultanément sur $\mathscr{A}_1$ et sur $\mathscr{A}_2$ avec cette orientation transverse). Un tel tore est transverse à Φ^t en dehors d'un nombre fini (pair) d'orbites périodiques, et il est transverse aux deux feuilletages faibles. Comme les anneaux de Birkhoff qui le constituent sont élémentaires, les seules feuilles fermées des traces de feuilletages faibles sont les orbites périodiques, et ces traces n'admettent pas de composante de Reeb. Nous avons là encore:

THÉORÈME A′. *Deux tores plongés dans M de manière incompressible et quasi-transverses à Φ^t sont homotopes si et seulement si ils sont homotopes le long des orbites de Φ^t.*

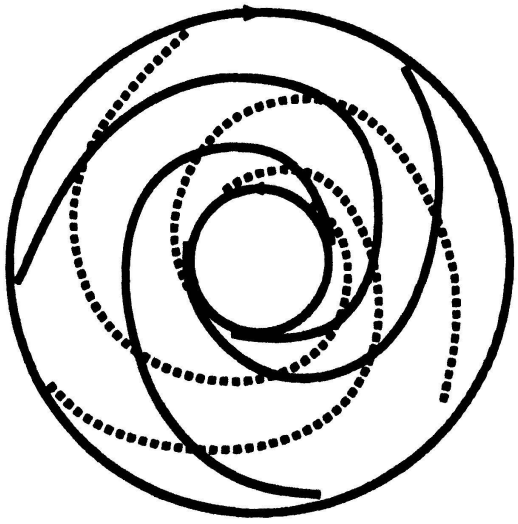


Figure 1. Anneau de Birkhoff élémentaire.

L'abondance de tores quasi-transverses est illustrée par le théorème suivant:

THÉORÈME C'. *Si Φ' est produit et non topologiquement équivalent à une suspension, alors tout tore plongé de manière incompressible dans M est isotope à un tore quasi-transverse. De plus, ce tore quasi-transverse est unique à homotopie le long des orbites de Φ' près.*

Rappelons que l'hypothèse produit signifie que les relèvements dans le revêtement universel de M des feuilletages faibles sont conjugués l'un comme l'autre au feuilletage produit de $\mathbb{R}^3$ par plans horizontaux $\mathbb{R}^2 \times \{*\}$ (cf. [3]). Elle ne constitue pas le point crucial du théorème C'. Celui-ci doit être compris comme un corollaire d'un résultat plus général dont le principe consiste à déceler la présence de tores quasi-transverses à partir d'indices à rechercher dans "l'espace transverse au flot".

Cet "espace transverse" est plus précisément l'espace des orbites tel qu'il est défini dans [3]. Rappelons en brièvement la définition: soit $\tilde{\Phi}'$ le relevé de Φ' dans le revêtement universel $\tilde{M}$ de M. Le quotient de $\tilde{M}$ par la relation d'équivalence "être sur le même orbite de $\tilde{\Phi}'$" est noté Q^{Φ} et appelé *espace des orbites*. L'application passage au quotient est notée $\pi^{\Phi}: \tilde{M} \to Q^{\Phi}$. D'après [3], Q^{Φ} est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$, et π^{Φ} est une fibration (localement) triviale. L'action par automorphismes de revêtement du groupe fondamental Γ de M sur $\tilde{M}$ passe au quotient en une action sur Q^{Φ} pour laquelle π^{Φ} est équivariante. Les relevés dans $\tilde{M}$ des feuilletages faibles se projettent par π^{Φ} en deux feuilletages par droites $\mathcal{G}^s$ et $\mathcal{G}^u$. Le théorème 3.4 de [3] énonce que la donnée à équivalence topologique près de (M, Φ') équivaut à celle de l'action de Γ sur Q^{Φ} à équivariance topologique près.

Si S est une surface plongée dans M, nous appelons *trace transverse* de S toute π^{Φ}-projection dans Q^{Φ} de n'importe quel relevé dans $\tilde{M}$ de S. La trace transverse est unique à l'action de Γ près. En guise d'exemple, la trace transverse d'un tore plongé transverse au flot est un ouvert de Q^{Φ} homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ et invariant par un sous-groupe libre abélien de rang deux de Γ: celui provenant du groupe fondamental du tore[1]. Le fait essentiel sur lequel repose cet article est qu'il est possible de caractériser les traces transverses des anneaux de Birkho$^{\alpha}$ élémentaires: il s'agit des *losanges simples*.

La notion de losange a été introduite par S. Fenley ([8]). Elle se définit de la manière suivante: soient θ_1 et θ_2 deux éléments de Q^{Φ} fixés par le même élément γ de Γ (ils correspondent aux orbites périodiques bordant l'anneau). Soient u_i une des deux composantes connexes de $\mathcal{G}^u(\theta_i)\backslash\theta_i$ et s_i une des deux composantes connexes de $\mathcal{G}^s(\theta_i)\backslash\theta_i$ $(i = 1, 2)$. On suppose que toute feuille de $\mathcal{G}^u$ rencontrant s_1 recontre

[1] D'après [6] tout tore transverse à Φ' est incompressible.

s_2, et que toute feuille de $\mathcal{G}^s$ recontrant u_1 recontre u_2. Alors, l'intersection entre le saturé par $\mathcal{G}^u$ de s_1 et le saturé par $\mathcal{G}^s$ de u_1 coïncide avec celle entre le saturé par $\mathcal{G}^u$ de s_2 et le saturé par $\mathcal{G}^s$ de u_2. Cette intersection, à laquelle on ajoute θ_1 et θ_2, est appelée *γ-losange de sommets θ_1 et θ_2*.

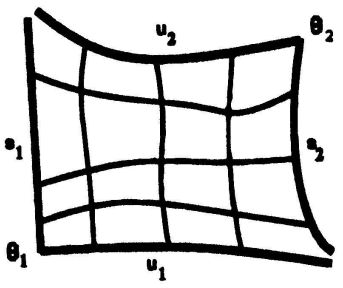


Figure 2. Losange.

Les losanges trace transverse d'anneaux de Birkhoff élémentaires ne sont pas quelconques: le fait que l'anneau soit plongé se traduit par le fait que le losange est *simple* au sens où l'intersection de losange avec la Γ-orbite de ses sommets se réduit à ces sommets. Le résultat essentiel de ce travail est le suivant:

THÉORÈME D. *Tout losange simple de Q^Φ est la trace transverse d'un anneau de Birkhoff élémentaire.*

Dans cette introduction, il est supposé que M ne contient pas de plongement de la bouteille de Klein. Si on supprime cette hypothèse, le théorème D devient (cf. proposition 6.2):

THÉORÈME D'. *Un losange simple de Q^Φ est soit la trace transverse d'un anneau de Birkhoff élémentaire, soit une partie de la trace transverse d'une bouteille de Klein plongée transverse à Φ^t en dehors d'une orbite périodique.*

Une fois les traces transverses des anneaux de Birkhoff caractérisées, il devient aisé de caractériser les traces transverse des tores quasi-transverses: il s'agit des *chapelets de losanges simples.*

Un chapelet de γ-losanges fini est une suite $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ de γ-losanges telle que:

- on peut numéroter θ_i et θ_i' les sommets de chaque losange $\mathcal{L}_i$ de telle sorte que pour chaque indice i entre 1 et $n-1$ les sommets θ_i' et θ_{i+1} sont confondus,
- pour chaque indice i entre 1 et $n-1$ les adhérences de $\mathcal{L}_1$ et de $\mathcal{L}_{i+1}$ ne se rencontrent qu'en $\theta_{i+1} = \theta_i'$.

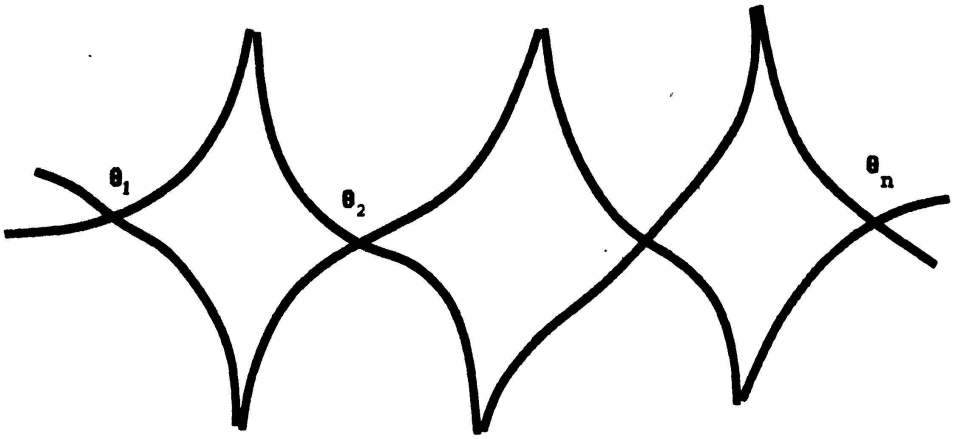


Figure 3. Chapelet de losanges.

Un chapelet de γ-losanges infini est une union croissante de chapelets finis de γ-losanges. Un chapelet de losanges est toujours supposé infini par défaut. Il est dit *simple* si tous les losanges qui le constituent sont simples, et que pour chacun de ses sommets θ_i l'intersection entre le chapelet et la Γ-orbite de θ_i se réduit à certains θ_j. Avec ces définitions nous sommes en mesure de donner la version originale du théorème C':

THÉORÈME C. *Soit Φ^t un flot d'Anosov sur une 3-variété M orientée et n'admettant pas de plongement incompressible de la bouteille de Klein. On suppose que les deux feulletages faibles de Φ^t sont transversalements orientés. Soit $f : T \hookrightarrow M$ un plongement incompressible du tore dans M. Soit H l'image du morphisme injectif $f_* : \pi_1(T) \to \pi_1(M) = \Gamma$: c'est un sous-groupe de Γ bien défini à conjugaison près dans Γ. On suppose enfin que H préserve un chapelet de losanges. Alors ce chapelet de losanges est la trace transverse d'un tore T' plongé isotope à $f(T)$ et quasi-transverse à Φ^t. De plus, tout tore quasi-transverse homotope à $f(T)$ est homotope à T' le long des orbites de Φ^t.*

Grâce aux théorèmes A, A', B et C notre projet d'étude des flots d'Anosov par découpage le long de tores en position optimale est en bonne voie. Il reste un problème important à traiter: celui de la mise en position optimale simultanée de plusieurs tores. Nous montrerons:

THÉORÈME E. *Soit $(T_1, \ldots, T_n)$ une collection fine de tores plongés dans M de manière incompressible. On les suppose deux-à-deux disjoints et non-homotopes. On suppose de plus que chaque tore T_i est isotope dans M à un tore plongé T'_i transverse ou quasi-transverse à Φ^t. Alors, les T'_i peuvent être choisis deux-à-deux disjoints.*

Avant de clore cette introduction, signalons quelques résultats intermédiaires qui, bien que non directement liés au problème de la mise en position optimale des tores plongés, ont leur propre intérêt. Ils s'appliquent à tout flot d'Anosov de dimension trois pour peu que les feuilletages faibles soient transversalement orientés.

THÉORÈME F. *Tout orbite périodique représente un élément γ de Γ d'ordre infini et indivisible* (*i.e., les seuls éléments de Γ admettant γ pour puissance sont γ et γ^{-1}*).

THÉORÈME G. *Si γ est un élément de Γ admettant un losange non-simple, alors aucun γ-losange n'est simple. De plus, l'union des γ-losanges est alors un chapelet de losanges* (*fini, infini ou biinfini*) *et le centralisateur de γ dans Γ est un groupe libre abélien de rang au plus deux.*

Signalons également qu'il apparait fort probable que les théorèmes B et C peuvent être étendus de la manière suivante:

CONJECTURE. *Tout tore plongé incompressible dans M est isotope à un tore plongé transverse à Φ^t en dehors d'un nombre fini d'orbites périodiques.*

Les méthodes employées dans cet article montre en effet qu'un tel plongement est toujours homotope à une *immersion* du tore vérifiant des conditions analogues. Malheureusement, un argument essentiel utilisé dans la preuve de théorème D pour modifier cette immersion en un plongement ne s'applique pas dans ce cadre général (voir remarque 7.8).

Cet article s'organise comme suit: au paragraphe suivant, nous introduisons quelques notations et discutons quelques résultats préliminaires. Aux paragraphes 3 et 4, nous étudions la notion de losanges et de chapelets de losanges. Nous y démontrons les théorèmes F et G. Aux paragraphes 5 et 6, nous montrons que les losanges simples sont exactement les traces transverses des anneaux de Birkhoff élémentaires. Au paragraphe 7, nous montrons l'analogue pour les chapelets de losanges simples et les tores quasi-transverses. Nous y montrons les théorèmes C et C′. Le paragraphe 8 est consacré à la preuve de théorème B. Les théorèmes A et A′ sont traités au paragraphe 9. Enfin, nous consacrons le paragraphe 10 à la preuve de théorème E.

Ce texte a été rédigé à l'occasion d'un séjour à l'IMPA de Rio de Janeiro que je tiens à remercier pour son hospitalité. Le théorème E de [2], travail effectué au Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, est un prototype du théorème B du présent article.

2. Préliminaires

2.1. *Notations*

Φ^t désigne un flot d'Anosov sur une variété M fermée orientée de dimension 3. Il sera toujours supposé, sauf aux remarques 6.2 et 7.14, que M ne contient aucun plongement incompressible de la bouteille de Klein. Les feuilletages faibles stables et instables de Φ^t sont notés $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$. Rappelons que nous les supposons transversalement orientés. Ceci recouvre bien sûr le cas général à un revêtement double ou quadruple près. Le feuilletage de dimension un engendré Φ^t est noté Φ. Le groupe fondamental de M est noté Γ (nous ne nous soucions pas du choix du point base). Le revêtement universel de M est noté $\tilde{M}$.

Nous rappelons dans ce qui suit quelques propriétés plus ou moins connues. Pour toute justification, nous renvoyons le lecteur à [2] ou [3].

Les relevés dans $\tilde{M}$ de Φ^t, Φ, $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont notés respectivement $\tilde{\Phi}^t$, $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et $\tilde{\mathcal{F}}^u$. D'après [3], l'espace quotient $\tilde{M}/\tilde{\Phi}$ de $\tilde{M}$ par la relation "être sur la même feuille de $\tilde{\Phi}$" est Hausdorff et homéomorphe à $\mathbb{R}^2$. Il est noté Q^Φ. Les orientations de M et de Φ^t induisent une orientation de Q^Φ. La projection $\pi^\Phi : \tilde{M} \to Q^\Phi$ est une fibration (localement) triviale. Elle envoie $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et $\tilde{\mathcal{F}}^u$ en deux feuilletages $\mathcal{G}^s$ et $\mathcal{G}^u$ de Q^Φ par droites fermées. Les orientations transverses de $\mathcal{F}^s$ et de $\mathcal{F}^u$ induisent des orientations de $\mathcal{G}^s$ et de $\mathcal{G}^u$ ainsi que des orientations transverses de ces feuilletages. Pour tout élément x de Q^Φ la feuille de $\mathcal{G}^s$ le contenant est notée $s(x)$, et celle de $\mathcal{G}^u$ le contenant est notée $u(x)$. Le complémentaire de x dans $s(x)$ est constitué de deux demi-droites. L'orientation de $\mathcal{G}^s$ induit un ordre sur $s(x)$: la composante connexe de $s(x)\backslash\{x\}$ contenant les éléments supérieurs à x est notée $s^+(x)$. L'autre est notée $s^-(x)$. On définit de manière analogue $u^+(x)$ et $u^-(x)$.

Chaque feuille de $\mathcal{G}^s$ recontre chaque feuille de $\mathcal{G}^u$ en au plus point. Elle sépare Q^Φ en deux composantes connexes. Pour tout élément x de Q^Φ, la composante connexe de $Q^\Phi\backslash s(x)$ contenant $u^+(x)$ est notée $S_+(x)$. Celle contenant $u^-(x)$ est notée $S_-(x)$. On définit de manière analogue $U_+(x)$ et $U_-(x)$ (composantes connexes de $Q^\Phi\backslash u(x)$). D'après le théorème des voisinages produite, $\mathcal{G}^s$ et $\mathcal{G}^u$ vérifient une propriété de trivialisation locale simultanée, i.e., pour tout élément x_0 de Q^Φ, il existe deux intervalles ouverts s_0 et u_0 voisinages de x_0 dans respectivement $s(x_0)$ et $u(x_0)$ tels que l'application de $u_0 \times s_0$ qui à (y, z) associe l'intersection entre $s(y)$ et $u(z)$ est bien définie et un homéomorphisme local. Nous appelons rectangle de Markov l'image d'une telle application.

L'action de Γ sur $\tilde{M}$ par automorphismes de revêtement passe au quotient sur Q^Φ. Cette action préserve les feuilletages $\mathcal{G}^s$ et $\mathcal{G}^u$.

PROPOSITION 2.1. *Un élément de Q^Φ est une feuille de $\tilde{\Phi}$ au-dessus d'une*

orbite périodique de Φ^t si et seulement si son stabilisateur dans Γ est non trivial. Son stabilisateur est alors cyclique. □

Nous appelons périodique un tel élément de Q^Φ à Γ-stabilisateur non trivial.

PROPOSITION 2.2. *Chaque feuille de $\mathcal{G}^s$ (respectivement de $\mathcal{G}^u$) contient au plus un élément périodique de Q^Φ. Si elle en contient un, son stabilisateur dans Γ est exactement le stabilisateur de cet élément périodique: il est donc cyclique. Sinon, son stabilisateur est trivial.* □

Une feuille de $\mathcal{G}^s$ contenant un élément périodique est dite cylindrique. Si un élément γ de Γ fixe un élément x_0 de Q^Φ, la restriction à $s(x_0)$ de son action est soit une contraction, soit une dilatation dont x_0 est l'unique point fixe. Il en est de même pour la restriction de son action sur $u(x_0)$. De plus, si γ contracte $s(x_0)$, il dilate $u(x_0)$. Ces restrictions sont donc linéarisables. On en déduit donc que l'action de γ est linéarisable au voisinage de x_0: il suffit de considérer un rectangle de Markov contenant x_0 (cf. figure 4).

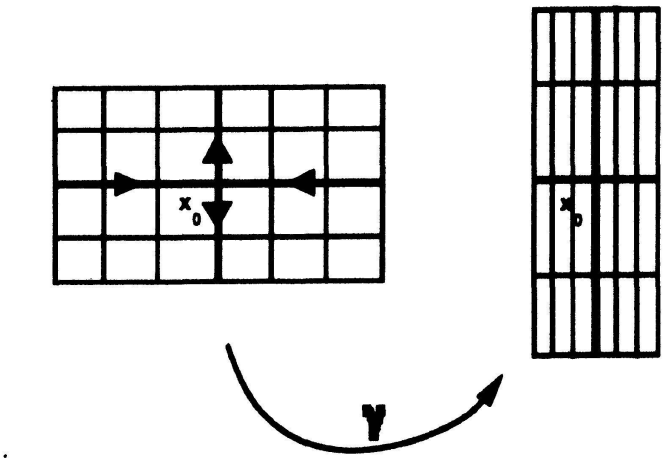


Figure 4. Linéarisation de γ au vosinage d'un point fixe.

En particulier, l'ensemble des points fixes de γ est un fermé discret de Q^Φ.

Nous associons à chaque élément x de Q^Φ les quatres ouverts suivants (l'expression $Sat_{\mathcal{G}^s}(u^+(x))$ désigne le saturé par $\mathcal{G}^s$ de $u^+(x)$):

$$\mathcal{L}^{++}(x) = Sat_{\mathcal{G}^s}(u^+(x)) \cap Sat_{\mathcal{G}^u}(s^+(x))$$

$$\mathcal{L}^{+-}(x) = Sat_{\mathcal{G}^s}(u^+(x)) \cap Sat_{\mathcal{G}^u}(s^-(x))$$

$$\mathcal{L}^{-+}(x) = Sat_{\mathcal{G}^s}(u^-(x)) \cap Sat_{\mathcal{G}^u}(s^+(x))$$

$$\mathcal{L}^{--}(x) = Sat_{\mathcal{G}^s}(u^-(x)) \cap Sat_{\mathcal{G}^u}(s^-(x))$$

2.2. *Quelques remarques à propos des espaces des feuilles*

Les feuilletages $\mathcal{G}^s$ et $\mathcal{G}^u$ sont des feuilletages de $Q^\Phi \simeq \mathbb{R}^2$ par droites fermées. Il est bien connu (voir par exemple [13]) que les quotients de Q^Φ par les relations "être sur la même feuille de $\mathcal{G}^s$ (respectivement de $\mathcal{G}^u$) sont des 1-variétés fermées simplement connexes mais en général non-Hausdorff. Nous les notons respectivement Q^s et Q^u. Nous notons $p^s : Q^\Phi \to Q^s$ et $p^s : Q^\Phi \to Q^u$ les applications de passage au quotient. Si deux éléments s et s' de Q^s ne sont pas séparés par la topologie de Q^s nous convenons d'écrire $s \approx s'$. Deux tels éléments sont appelés *points de branchements.*

L'action de Γ sur Q^Φ passe bien sûr aux quotients. Comme $\mathcal{G}^s$ et $\mathcal{G}^u$ sont transversalement orientés, Q^s et Q^u sont orientés. Pour chaque élément $s = s(x)$ de Q^s nous notons s_+ et s_- les ouverts de Q^s images par p^s des ouverts $S_+(x)$ et $S_-(x)$ de Q^Φ. Ce sont les composantes connexes de $Q^s \backslash \{s\}$. On note de manière analogue u_+ et u_- les composantes connexes du complémentaire d'un élément u de Q^u.

Pour tout couple d'éléments (s, s') de Q^s nous notons $]s, s'[$ l'ensemble des éléments de Q^s qui déconnectent s de s'. Si il existe une immersion de $\mathbb{R}$ dans Q^s dont l'image contient s et s', alors $]s, s'[$ est contenu dans l'image de cette immersion. De manière plus précise, $]s, s'[$ est l'intervalle ouvert $]s, s'[$ délimité par s et s' dans l'image de cette immersion. Cependant, si tel n'est pas le cas, alors $]s, s'[$ n'est pas un ouvert de Q^s. Nous notons $[s, s']$ l'union de $]s, s'[$ et de $\{s, s'\}$. Nous laissons au lecteur le soin de montrer (voir aussi [2]):

LEMME 2.3. *Pour toute paire d'éléments* (s, s') *de* Q^s *l'ensemble* $[s, s']$ *est une union finie d'intervalles* $[s_i, s_i']$ $(i = 0, \ldots, n)$ *où*:

$$s_0 = s, \qquad s_n' = s'$$

$$s_i' \approx s_{i+1}$$

□

Soit Ω un ouvert connexe de Q. Tout élément x de sa frontière sépare Q en deux composantes connexes dont l'une contient Ω. Le complémentaire dans Q de cette composante est notée x^c. Nous laissons une nouvelle fois au lecteur le soin de montrer:

PROPOSITION 2.4. *Lorsque* x *parcourt* $\partial\Omega$, *les ensembles* x^c *sont deux-à-deux disjoints. Ce sont exactement les composantes connexes de* $Q \backslash \Omega$. □

Soit γ un élément de Γ admettant un point fixe dans Q^s. Nous notons Λ_γ^s l'union des images par p^s des feuilles de $\mathcal{G}^u$ globalement préservées par γ.

LEMME 2.5. *Λ^s_γ est un ouvert connexe de Q^s préservé par tous les éléments de Γ commutant avec γ. Tout point de branchement dans Λ^s_γ est un point fixe de γ.*

Preuve. Il est évident que Λ^s_γ est ouvert et préservé par tous les éléments de Γ commutant avec γ. Soient s et s' deux points fixes de γ. Alors $[s, s'] = [s_0 = s, s'_0] \cup \cdots \cup [s_n, s'_n = s']$ est γ-invariant. Il s'en suit que chaque s_i et chaque s'_i est un point fixe de γ. La restriction de γ à chaque intervalle $[s_i, s'_i]$ est facile à étudier: il y admet un nombre fini de points fixes alternativement attractifs et répulsifs. On en déduit aisément que Λ^s_γ contient les intervalles $[s_i, s'_i]$, et donc également $[s, s']$. La connexité de Λ^s_γ en découle.

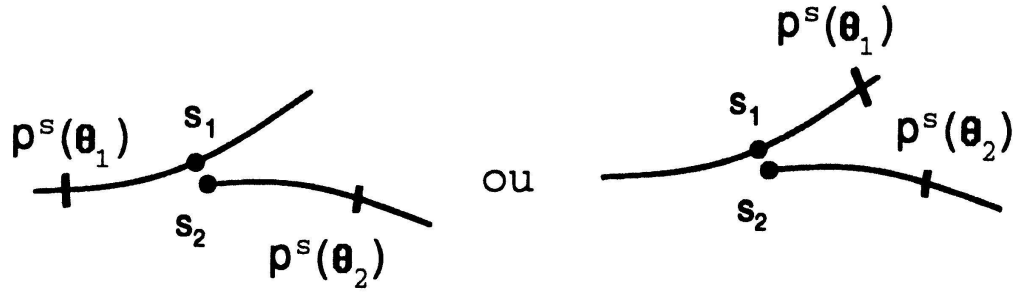
Soient enfin deux éléments s_1 et s_2 de Λ^s_γ non séparés par le topologie. Soient θ_1 et θ_2 deux points fixes de γ dans Q^Φ tels que $p^s(u(\theta_i))$ contient s_i $(i = 1, 2)$ ($p^s(\theta_i)$ peut être égal à s_i).

Notons que θ_1 et θ_2 sont différents puisque deux éléments différents de $p^s(u(\theta_1))$ sont toujours séparés. Donc:

$$[p^s(\theta_1), p^s(\theta_2)] = [p^s(\theta_1), s_1] \cup [s_2, p^s(\theta_2)]$$

Comme $[p^s(\theta_1), p^s(\theta_2)]$ est γ-invariant, s_1 et s_2 sont points fixes de γ. □

On en déduit le corollaire:



Scheme 1.

LEMME 2.6. *Soit γ un élément de Γ admettant au moins un point fixe dans Q^s. Soit s un élément de Q^s vérifiant:*

$$\gamma(s_+) \subset s_+$$

Alors, il existe un point fixe θ de γ dans Q^Φ dont la feuille instable $u(\theta)$ recontre s.

Preuve. Il s'agit de montrer que tout élément s vérifiant les hypothèses de 2.6 appartient à Λ^s_γ. Nous raisonnons par l'absurde: il existe un élément s_0 de $\partial\Lambda^s_\gamma$ tel que s_0^c contient un élément s vérifiant les hypothèses de 2.6 (cf. 2.4). Alors s_0^c

contient soit s_+, soit s_-. Remarquons que $\gamma(s_+) \subset s_+$ implique $\gamma^{-1}(s_-) \subset s_-$. Donc, quitte à inverser γ, on peut éventuellement inverser l'orientation de Q^s et supposer que s_0^c contient en fait s_+. Alors, $(\gamma s_0)^c = \gamma(s_0^c)$ contient $\gamma(s_+)$. Il rencontre donc $s_+ \subset s_0^c$. Il s'en suit que $\gamma(s_0)$ et s_0 sont confondus. Ceci est absurde car $\partial \Lambda_\gamma^s$ ne contient pas de point fixe de γ. □

PROPOSITION 2.7. *Soit γ_0 un élément de Γ, et $C \simeq \mathbb{Z}$ les sous-groupe de Γ qu'il engendre. Soit x un élément de Q^Φ dont la C-orbite n'est pas fermée. Alors, la frontière de $C \cdot x$ est un singleton, l'élément $\bar{x}$ de ce singleton est un point fixe de γ_0, et x appartient à une des feuilles $s(\bar{x})$ ou $u(\bar{x})$.*

Preuve. Soit $\bar{x}$ un élément de la frontière de $C \cdot x$. Soit (p_n) une suite d'entiers différents tels que $\gamma_0^{p_n} x$ converge vers $\bar{x}$. Quitte à extraire une sous-suite et inverser γ_0 on peut supposer cette suite strictement croissante. Quitte à extraire une nouvelle fois une sous suite et à modifier les orientations transverses, on peut supposer que tous les $\gamma_0^{p_n} x$ appartiennent à $\mathscr{L}^{++}(\bar{x})$. Alors, toutes les feuilles $\gamma_0^{p_n} s(x)$ recontrent $u(\bar{x})$. D'après 2.6, si γ_0 admet un point fixe, alors $s(x)$ appartient à chaque $\Lambda^s_{\gamma_0^{p_n}}$, i.e., à $\Lambda^s_{\gamma_0}$. D'où:

$$s(\bar{x}) = \lim_{n \to +\infty} \gamma_0^n s(x)$$

Si γ_0 n'admet pas de point fixe, il en est de même pour toutes ses puissances. Soit I l'intervalle fermé $[\gamma_0^{p_1} s(x), \gamma_0^{p_2} s(x)]$ de Q^s. Soit k l'entier $p_2 - p_1$. Alors, l'union des intervalles $\gamma_0^{kn} I$ lorsque n décrit $\mathbb{Z}$ est un intervalle ouvert I_0 de Q^s préservé par γ_0^k. Soit J un autre intervalle ouvert γ_0^k invariant: d'après le lemme 2.4, s'ils sont disjoints, il existe un élément y de ∂J tel que y^c contient I_0. Ce point y devrait être fixé par γ_0^k, ce qui est absurde. Donc, $J' = J \cap I_0$ est non-vide. Comme Q^s est simplement connexe, J' est connexe. Comme les restrictions à J et I_0 de γ_0^k sont des translations sans points fixes nous avons $J = J' = I_0$. Donc, I_0 est l'unique intervalle de Q^s γ_0^k-invariant. On en déduit qu'il est également préservé par γ_0. D'où:

$$s(\bar{x}) = \lim_{n \to +\infty} \gamma_0^n s(x)$$

En appliquant le même raisonnement dans Q^u, on obtient:

$$u(\bar{x}) = \lim_{n \to +\infty} \gamma_0^n u(x)$$

En considérant un rectangle de Markov au voisinage de $\bar{x}$ on voit que:

$$\bar{x} = \lim_{n \to +\infty} \gamma_0^n x$$

Comme Q^{Φ} est Hausdorff, ceci montre que $\bar{x}$ est point fixe de γ_0. La dynamique locale de γ_0 étant hyperbolique, il est clair que x appartient à $u(\bar{x})$ ou $s(\bar{x})$ ou $s(\bar{x})$. Enfin, comme une feuille de $\mathscr{G}^s$ fixée par γ_0 ne contient qu'une seule orbite périodique, la frontière de $C \cdot x$ est exactement le singleton $\{\bar{x}\}$. □

3. Etude des losanges et quelques applications

Le but essentiel de ce paragraphe est de montrer que l'ensemble des points fixes d'un élément γ de Γ s'organise comme l'ensemble des sommets de γ-losanges. Son contenu est très largement inspiré de [8].

DÉFINITION 3.1. Soit γ un élément de Γ. Un ouvert $\mathscr{L}$ de Q^{Φ} est appelé:

- γ-losange ouvert direct s'il existe deux points fixes x et y de γ tels que:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}^{++}(x) = \mathscr{L}^{--}(y)$$

- γ-losange ouvert indirect s'il existe deux points fixes x et y de γ tels que:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}^{+-}(x) = \mathscr{L}^{-+}(y)$$

Dans les deux cas, les points fixes x et y – qui sont uniques – sont appelés sommets du losange ouvert.

Un γ-losange ouvert est globalement préservé par γ.

DÉFINITION 3.2. Un losange (direct ou indirect) est l'union d'un losange ouvert et de ses sommets.

Le lecteur peut se reporter à la figure 2 de l'introduction.

LEMME 3.3. *L'intérieur d'un losange de sommets x et y est le losange ouvert de sommets x et y. S'il est direct, sa frontière est l'union de* $\{x, y\}$, $s^+(x)$, $u^+(x)$, $s^-(y)$ *et* $u^-(y)$. *S'il est indirect, sa frontière est l'union de* $\{x, y\}$, $s^-(x)$, $u^+(x)$, $s^+(y)$ *et* $u^-(y)$. □

L'adhérence du losange de sommets x et y est appelé *losange fermé de sommets x et y.*

LEMME 3.4. *Si un élément* γ *de* Γ *fixe un sommet d'un losange, il préserve globalement ce losange. En particulier, il fixe l'autre sommet. Son action à l'intérieur*

du losange est topologiquement conjuguée à celle de $(x, y) \to (\frac{1}{2}x, 2y)$ *sur* $\{x > 0, y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

Preuve. Chacun des ouverts $\mathscr{L}^{++}(x)$, $\mathscr{L}^{+-}(x)$, etc. est "intrinsèquement" défini: si γ fixe x, il fixe les quatres ouverts $\mathscr{L}^{++}(x)$, $\mathscr{L}^{+-}(x)$, etc., (rappelons que $\mathscr{F}^s$ et $\mathscr{F}^u$ sont transversalements orientés: γ préserve donc les ordres sur $s(x)$ et $u(x)$). La linéarisation de la restriction de γ au losange s'obtient en linéarisant ses restrictions aux demi-feuilles $s^+(x)$, etc . . . □

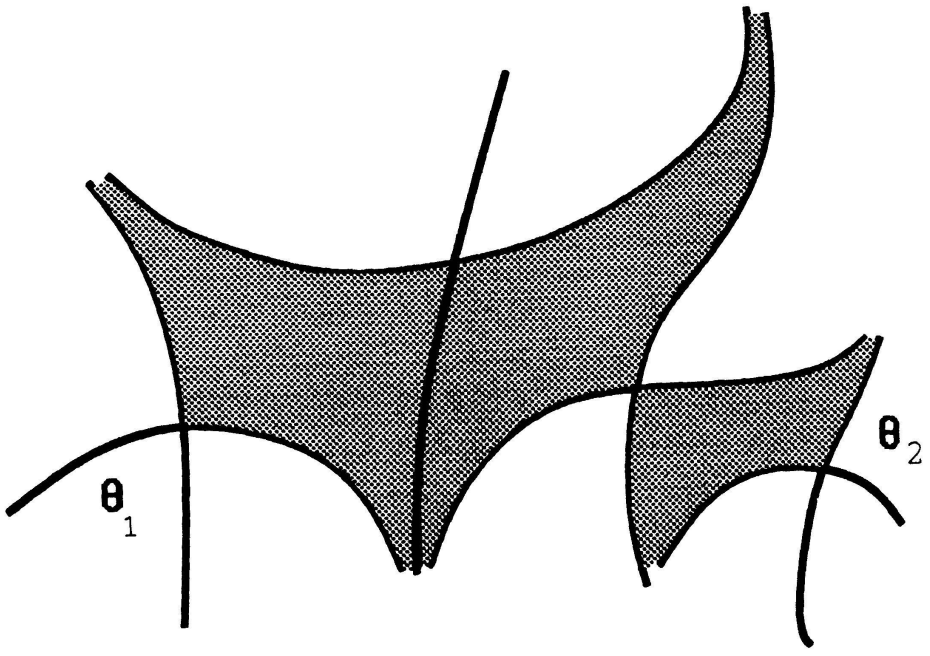
D'après la proposition 3.3 de [8], nous avons:

PROPOSITION 3.5. *Soient* θ_1 *et* θ_2 *deux éléments de* Q^Φ *distincts et fixés par le même élément* γ *de* Γ. *Il existe une suite finie de* γ*-losanges* $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_n$ *de sommets* x_i, x_i' $(i = 1, \ldots, n)$ *tels que*:

$$\theta_1 = x_1 \qquad \theta_2 = x_n$$

$$x_i' = x_{i+1} \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$ □

Soit G_γ le graphe dont les sommets sont les points fixes de γ et tel qu'il existe une arête entre deux sommets x et y si et seulement si il existe un γ-losange de sommets x et y. On peut si on le désire étiqueter les arêtes de ce graphes par les épithètes *direct* et *indirect*.



Scheme 2.

PROPOSITION 3.6. *G_γ ets un arbre connexe. Chacun de ses sommets est de valence au plus quatre.*

Preuve. La connexité découle de la proposition 3.5. La majoration de la valence par quatre est évidente. La simple connexité provient du fait que chaque feuille de $\mathscr{G}^s$ et de $\mathscr{G}^u$ déconnecte Q^Φ. □

PROPOSITION 3.7. *Pour tout élément γ de Γ non trivial et pour tout entier n non nul, les arbres G_γ et G_{γ^n} sont confondus. En d'autres termes, tout point fixe de γ^n est point fixe de γ.*

Preuve. Comme tout point fixe de γ est point fixe de γ^n, G_{γ^n} contient G_γ. Inversement, comme γ commute avec γ^n, il préserve l'ensemble des points fixes de γ^n, ce qui montre qu'il agit sur l'arbre G_{γ^n}. Comme γ préserve les types $++$, $+-$, $-+$ et $--$ des γ^n-losanges, s'il fixe un sommet de G_{γ^n}, il fixe toutes les arêtes adjacentes et donc tout les sommets de G_{γ^n}. Comme il est de torsion, on en déduit qu'il agit trivialement sur G_{γ^n}.

PROPOSITION 3.8. *Même dans le cas où $\mathscr{F}^s$ et $\mathscr{F}^u$ ne sont plus supposés transversalement orientés, si un élément de Γ est sans point fixe dans Q^Φ, aucune de ses puissances non triviales n'admet de points fixes dans Q^Φ.*

Preuve. Nous raisonnons par l'absurde: soit γ un élément de Γ sans point fixe, mais dont une puissance γ^n admet un point fixe. Quitte à remplacer l'entier n par son double, on peut supposer que γ^n préserve les orientations transverses de $\mathscr{G}^s$ et de $\mathscr{G}^u$. Alors, γ agit librement sur l'arbre G_{γ^n}. Comme son action sur cet arbre est de torsion, il doit en fixer un arête tout en échangeant les extrémités de cette arête. En d'autres termes, et quitte à modifier les orientations, il existe dans Q^Φ deux points fixes θ_1 et θ_2 de γ^n échangés par γ et tels que:

$$\mathscr{L}^{++}(\theta_1) = \mathscr{L}^{--}(\theta_2)$$

Alors, γ envoie $u^+(\theta_1)$ sur $u^-(\theta_2)$. Soit I l'intervalle $p^s(u^+(\theta_1)) = p^s(u^-(\theta_2))$. Il est globalement préservé par γ, et γ en renverse l'orientation. On en déduit que γ admet un point fixe dans I: contradiction. □

REMARQUE 3.9. Le stabilisateur dans Γ d'un sommet de G_γ est cyclique. Quitte à remplacer γ par une des ses racines, on peut supposer qu'il engendre l'ensemble des éléments de Γ qui agissent trivialement sur G_γ. Soit Z le centralisateur de γ dans Γ. Il est clair que $L = Z_{/\langle\gamma\rangle}$ agit librement sur G_γ, ce qui montre qu'il est un groupe libre. On en déduit que Z est somme directe de $\langle\gamma\rangle$ et d'un groupe libre.

Pour chaque orbite périodique θ de Φ', soit $\tilde{\theta}$ un de ses relevés dans $\tilde{M}$. Soit $[\theta]$ l'unique élément de Γ engendrant le semi-groupe des éléments de Γ préservant l'orbite orientée $\tilde{\theta}$: il est bien défini à partir de θ à conjugaison près dans Γ. Tout lacet représentant $[\theta]$ est librement homotope au lacet orienté θ. Il découle de la proposition 3.7 qu'il est indivisible dans Γ: telle est la preuve (et le sens) du théorème F énoncé lors de l'introduction. Ce théorème est une légère amélioration du théorème F de [8].

4. Chapelets de losanges et caractérisation des losanges non-simples

DÉFINITION 4.1. Deux losanges sont dits adjacents s'ils sont distincts et qu'ils admettent un sommet en commun. Ce sommet commun est alors unique. Ils sont dits en position directe s'ils sont simultanément directs ou indirects. Sinon, ils sont dits en position indirecte.

DÉFINITION 4.2. Une chaîne de losanges est une suite $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_n$ de losanges différents vérifiant les hypothèses de la proposition 3.5, i.e., telle que deux losanges successifs $\mathscr{L}_i$ et $\mathscr{L}_{i+1}$ soient adjacents.

DÉFINITION 4.3. Un chapelet (fini) de losanges est une chaîne de losanges telle que toute paire de losanges adjacents de cette suite est en position directe.

Il est clair que cette définition équivaut à celle donnée lors de l'introduction. Les chapelets de γ-losanges correspondent aux chemins dans l'arbre G_γ n'empruntant soit que des arêtes directes, soit que des arêtes indirectes.

On peut évidemment étendre ces notions en celles de chaînes ou de chapelets infinis et même biinfinis en permettant aux indices de parcourir $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Lorsque cela n'est pas précisé, il doit toujours être compris que pour nous un chapelet de losanges est biinfini.

Nous définissons enfin la notion de *support d'une chaîne de losanges*: soit $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_n$ une chaîne de losanges de sommets $x_0, \ldots, x_n$. Pour chaque indice i compris entre 1 et $n-1$ on pose $S_i = \{x_i\}$ si $\mathscr{L}_{i-1}$ et $\mathscr{L}_i$ sont en position directe. Sinon, les adhérences de $\mathscr{L}_{i-1}$ et de $\mathscr{L}_i$ n'ont en commun qu'une semi-feuille S_i de $\mathscr{G}^s$ ou de $\mathscr{G}^u$: le "côté" du losange $\mathscr{L}_i$ qui les sépare.

DÉFINITION 4.4. Le support de la chaîne est défini comme étant l'union de $\{x_0, x_n\}$, des S_i et des intérieurs des losanges.

Le support d'un chapelet de losanges est bien sûr l'union des losanges. La définition du support s'étend bien sûr aux chaînes infinies et biinfinies.

Rappelons (voir introduction) la notion de *losange simple*:

DÉFINITION 4.5. Un losange est dit simple si la Γ-orbite de son intérieur est disjointe de la Γ-orbite de ses sommets.

Nous nous proposons de montrer dans la suite de ce paragraphe le théorème G. Montrer la première partie de ce théorème revient à montrer:

PROPOSITION 4.6. *Soit γ un élément de Γ admettant un γ-losange non-simple. Alors aucun γ-losange n'est simple, tous les γ-losanges sont simultanément directs ou indirects, et l'arbre G_γ est un sous-arbre de l'arbre linéaire.*

Par *arbre linéaire* nous entendons l'arbre infini dont tous les sommets sont de valence deux. Comme le groupe des automorphismes sans point fixe d'un sous-arbre de l'arbre linéaire est trivial ou cyclique, la dernière partie du théorème G est un corollaire de la proposition et de la remarque 3.9.

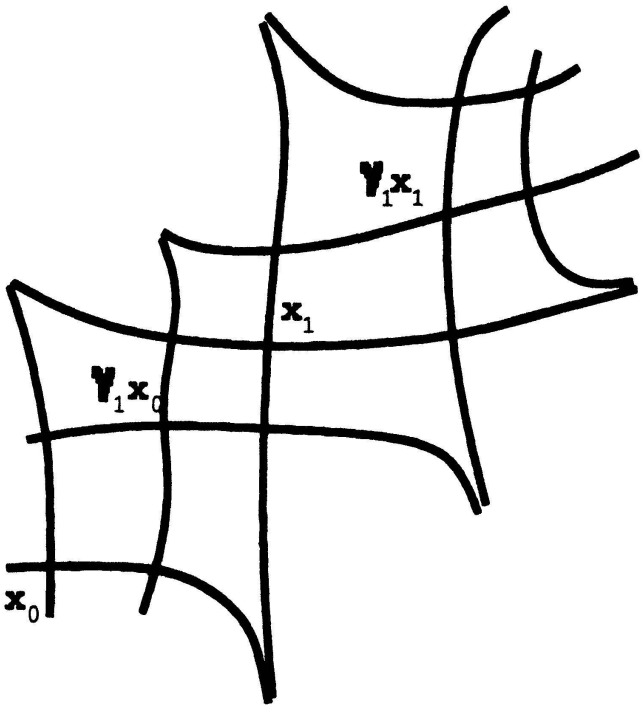
Preuve de 4.6. Soit $\mathscr{L}$ un γ-losange non-simple. Nous notons x_0 et x_1 ses sommets: que $\mathscr{L}$ soit non-simple signifie que l'un de ses sommets, disons x_0, admet un itéré $\gamma_1 \cdot x_0$ à l'intérieur de $\mathscr{L}$. Pour des orientations convenables de $\mathscr{F}^s$ et de $\mathscr{F}^s$ et de $\mathscr{F}^u$ nous avons:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}^{++}(x_0) = \mathscr{L}^{--}(x_1)$$

LEMME 4.7. *Aucun des ouverts $\mathscr{L}^{+-}(x_0)$, $\mathscr{L}^{-+}(x_0)$, $\mathscr{L}^{+-}(x_1)$ et $\mathscr{L}^{-+}(x_1)$ n'est un losange.*

Preuve. Nous allons montrer par l'absurde que $\mathscr{L}^{+-}(x_1)$ n'est pas un losange: les trois autres cas se montrent de la même manière. Nous supposons donc que $\mathscr{L}^{+-}(x_1)$ est un losange. Nous appelons x_0' son second sommet. Par définition même des losanges, $\gamma_1(u^+(x_0)) = u^+(\gamma_1 x_0)$ rencontre $s^+(x_0')$. Comme $\gamma_1(\mathscr{L}) = \mathscr{L}^{++}(\gamma_1 x_0)$ est un losange, de sommets $\gamma_1 x_0$ et $\gamma_1 x_1$, on en déduit que $\gamma_1 x_1$ appartient à $S_+(s(x_0'))$. Or, un argument similaire montre que $\gamma_1 x_1$ appartient également à $U_+(u(x_1))$. C'est absurde, car $S_+(s(x_0'))$ et $U_+(u(x_1))$ sont disjoints. □

Soit $\mathscr{L}'$ un autre γ-losange adjacent à $\mathscr{L}$. Le lemme précédent montre que $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ sont en position directe. On peut supposer que $\mathscr{L}'$ est $\mathscr{L}^{++}(x_1)$: l'autre cas est analogue. Si on affine l'argument du lemme 4.7, on voit aisément que $\gamma_1 x_1$ appartient à l'intérieur de $\mathscr{L}'$.



Scheme 3.

Le losange $\mathscr{L}'$ n'est donc pas simple lui non plus. On conclut grâce à la connexité de G_γ. □

5. Traces transverses des anneaux de Birkhoff

PROPOSITION 5.1. *La trace transverse d'un anneau de Birkhoff est le support d'une chaîne finie de losanges. L'anneau de Birkhoff est élémentaire si et seulement si sa trace transverse est un losange. Ce losange est alors simple.*

Preuve. Soit $\mathscr{A}$ un anneau de Birkhoff plongé dans M: rappelons que cela signifie que son bord est constitué de deux orbites périodiques θ_0 et θ_1 de Φ^t, et qu'il est transverse en son intérieur à Φ^t. Son intérieur est donc également transverse aux deux feuilletages faibles $\mathscr{F}^s$ et $\mathscr{F}^u$. Nous notons respectivement f^s et f^u les traces de ces feuilletages sur $\mathscr{A}$. Ces deux feuilletages admettent θ_0 et θ_1 comme feuilles fermées, et sont transverses en dehors de ces deux feuilles compactes. Par définition même, $\mathscr{A}$ est élémentaire si et seulement si θ_0 et θ_1 sont les seules feuilles fermées de f^s et de f^u.

Nous appelons *composante de* $\mathscr{A}$ tout sous-anneau de $\mathscr{A}$ dont chaque composante de bord est une feuille fermée de f^s ou de f^u et dont l'intérieur ne contient pas de feuille compacte ni de f^s ni de f^u. Comme les feuilles de f^s et de f^u sont à

holonomie hyperbolique, elles sont en nombre fini. $\mathscr{A}$ n'admet donc qu'un nombre fini de composantes. Ces composantes s'organisent en une liste $(\mathscr{A}_0, \ldots, \mathscr{A}_n)$ telle que:

- θ_0 appartient au bord de $\mathscr{A}_0$, θ_1 à celui de $\mathscr{A}_n$,
- $\mathscr{A}$ est l'union des $\mathscr{A}_i$,
- deux anneaux $\mathscr{A}_i$ et $\mathscr{A}_j$ sont disjoints sauf si leurs indices i et j sont successifs, auquel cas elles se rencontrent en leur bord en une feuille compacte de f^s ou de f^u.

Soit $\tilde{\mathscr{A}}$ un relevé de $\mathscr{A}$ dans $\tilde{M}$: il s'agit d'une bande transverse en son intérieur à $\tilde{\Phi}$ et dont le bord consiste en deux orbites $\tilde{\theta}_0$ et $\tilde{\theta}_1$. Soit $\gamma = [\theta_0] = [\theta_0]^{-1}$ l'élément indivible de Γ préservant $\tilde{\mathscr{A}}$. Soient $\tilde{f}^s$ et $\tilde{f}^u$ les traces de $\tilde{\mathscr{F}}^s$ et de $\tilde{\mathscr{F}}^u$ sur $\tilde{\mathscr{A}}$. Chaque composante $\mathscr{A}_i$ se relève en une "composante" $\tilde{\mathscr{A}}_i$ de $\tilde{\mathscr{A}}$. Nous notons g_i et h_i les composantes de bord de $\tilde{\mathscr{A}}_i$. Ces notations sont bien caractérisées si on convient que:

- g_0 est $\tilde{\theta}_0$,
- h_n est $\tilde{\theta}_1$,
- h_i et g_{i+1} sont confondues.

Les droites g_i et h_i sont γ-invariantes. Il existe donc pour chaque indice i deux orbites a_i et b_i de $\tilde{\Phi}^t$ γ-invariantes telles que:

$$\pi^{\Phi}(g_i) \subset s(a_i) \quad \text{ou} \quad \pi^{\Phi}(g_i) \subset u(a_i)$$

$$\pi^{\Phi}(h_i) \subset s(b_i) \quad \text{ou} \quad \pi^{\Phi}(h_i) \subset u(b_i)$$

Nous notons $\tilde{f}_i^s$ et $\tilde{f}_i^u$ les restrictions à l'intérieur de $\tilde{\mathscr{A}}_i$ de $\tilde{f}^s$ et de $\tilde{f}^u$. Comme la trace transverse de $\mathscr{A}$ n'est autre que la réunion de celles de ses composantes, notre but est de caractériser les $\pi^{\Phi}(\tilde{\mathscr{A}}_i)$. Nous allons montrer que $\pi^{\Phi}(\tilde{\mathscr{A}}_i)$ est *grosso modo* un losange de sommet a_i et b_i. Quitte à échanger $\mathscr{F}^s$ et $\mathscr{F}^u$, on peut distinguer quatre types possibles de composante. Nous les décrivons à la figure 5 en indiquant l'allure des triplets $(\tilde{\mathscr{A}}_i, \tilde{f}_i^s, \tilde{f}_i^u)$ correspondants.

Il apparaît que dans tous les cas de figure:

LEMME 5.2. *Chaque feuille de $\tilde{f}_i^s$ recontre chaque feuille de $\tilde{f}_i^u$ en exactement un point. Il existe un chemin $\tilde{c}_i$ transverse aux deux feuilletages $\tilde{f}_i^s$ et $\tilde{f}_i^u$ joignant a_i à b_i et disjoints de tous ses itérés par γ.* □

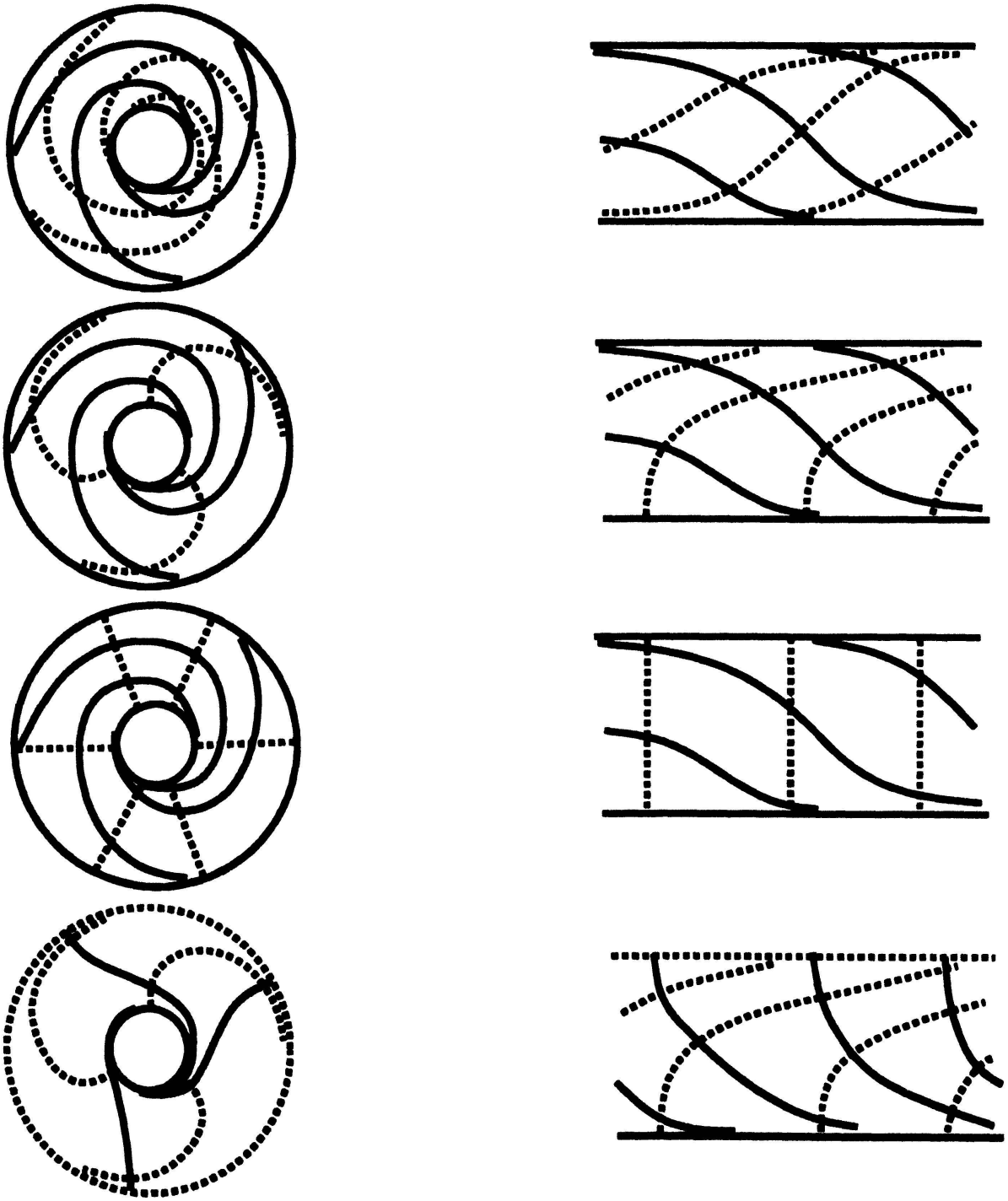


Figure 5. Composantes d'un bifeuilletage de l'anneau.

D'où:

LEMME 5.3. *Chaque feuille de* $\tilde{\mathcal{F}}^s$ (*respectivement de* $\tilde{\mathcal{F}}^u$) *ne rencontre* $\tilde{\mathcal{A}}_i$ *qu'en au plus une feuille de* $\tilde{f}_i^s$ (*respectivement de* $\tilde{f}_i^u$).

Preuve. D'après un argument classique (voir par exemple [13]), toute transver-

sale à $\tilde{\mathscr{F}}^s$ recontre chaque feuille de $\tilde{\mathscr{F}}^s$ en au plus un point. Comme toutes les feuilles de $\tilde{f}_i^s$ recontrent $\tilde{c}_i$, elles appartiennent à des feuilles différentes de $\tilde{\mathscr{F}}^s$. De même, l'intersection d'une feuille de $\tilde{\mathscr{F}}^u$ avec $\tilde{\mathscr{A}}_i$ est connexe. □

COROLLAIRE 5.4. *Chaque orbite de $\tilde{\Phi}^t$ autre que $\tilde{\theta}_0$ et $\tilde{\theta}_1$ recontre $\tilde{\mathscr{A}}_i$ en au plus un point.* □

Soit $\bar{c}_i = \pi^{\Phi}(\tilde{c}_i)$ la projection dans Q^{Φ} de $\tilde{c}_i$. C'est un chemin fermé simple de Q^{Φ}, transverse à $\mathscr{G}^s$ et $\mathscr{G}^u$, disjoint de tous ses itérés par γ sauf peut-être en $\tilde{\theta}_0$ ou $\tilde{\theta}_1$ si ceux-ci appartiennent à $\partial\tilde{\mathscr{A}}_i$.

L'existence de $\bar{c}_i$ montre que a_i et b_i sont différents. D'après 3.5, s'ils ne sont pas sommets d'un même losange, il existe un troisième point fixe $\tilde{\theta}$ de γ différent dont une des feuilles $s(\tilde{\theta})$ ou $u(\tilde{\theta})$ déconnecte a_i et b_i et doit donc recontrer $\bar{c}_i$. Cette feuille, disons $s(\tilde{\theta})$ recontre $\pi^{\Phi}(\tilde{\mathscr{A}}_i)$ en une partie connexe et γ-invariante (cf. 5.3). On en déduit que cette intersection est $s^+(\tilde{\theta})$ ou $s^-(\tilde{\theta})$, et donc que $\mathscr{A}_i$ contient une feuille fermée de f^s en son intérieur: contradiction.

a_i et b_i sont donc sommets d'un même losange. Quitte à modifier les orientations:

$$\mathscr{L}^{++}(a_i) = \mathscr{L}^{--}(b_i)$$

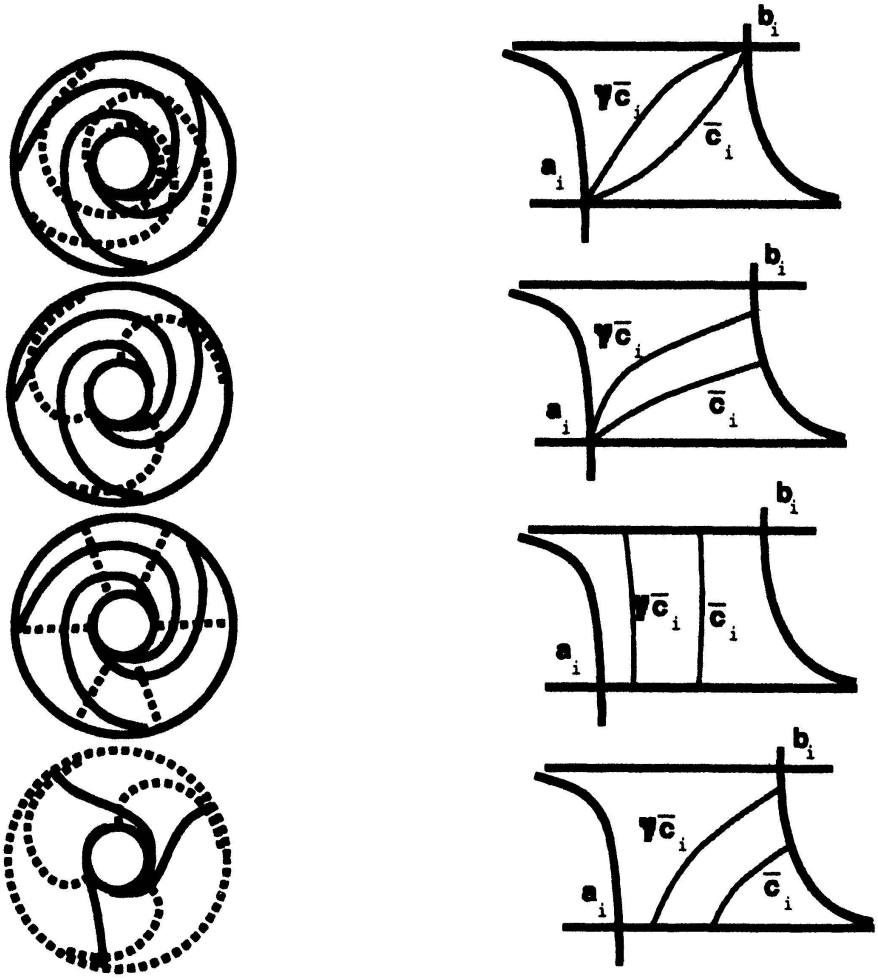
De plus, $\pi^{\Phi}(g_i)$ est soit a_i, soit $u^+(a_i)$ soit $s^+(a_i)$ selon que g_i est $\tilde{\theta}_0$, une feuille de $\tilde{f}^u$ on une feuille de $\tilde{f}^s$. De même, $\pi^{\Phi}(g_i)$ est b_i, $u^-(b_i)$, ou $s^-(b_i)$.

Comme l'intérieur de $\bar{c}_i$ est disjoint de ses γ-itérés, nous sommes dans l'un des cas de figure décrits par le schema 4.

Soit $\mathscr{D}_i$ le domaine délimité dans $\tilde{\mathscr{A}}_i$ par $\tilde{c}_i$, $\gamma\tilde{c}_i$ et les deux segments reliant dans $\tilde{\theta}_0$ et $\tilde{\theta}_1$ les extrémités de $\tilde{c}_i$ à celles de $\gamma\tilde{c}_i$. C'est un domaine fondamental de l'action de γ sur $\tilde{\mathscr{A}}_i$. Sa projection dans Q^{Φ} est le disque bordé par l'image de son bord. On en déduit que $\pi^{\Phi}(\tilde{\mathscr{A}}_i)$ est l'union du losange ouvert de sommets a_i et b_i, de $\pi^{\Phi}(h_i)$ et de $\pi^{\Phi}(g_i)$. On en déduit sans peine la proposition 5.1: il suffit pour celà de voir que les images par π^{Φ} de deux composantes adjacentes $\tilde{\mathscr{A}}_i$ et $\tilde{\mathscr{A}}_{i+1}$ se trouvent de part et d'autre de la semi-feuille $\pi^{\Phi}(h_i) = \pi^{\Phi}(g_{i+1})$. Les deux dernières affirmations de 5.1 sont évidentes. □

REMARQUE 5.5. Nous avons implicitement montré le fait suivant: chaque feuille de $\tilde{\Phi}$ autre que $\tilde{\theta}_0$ et $\tilde{\theta}_1$ rencontre $\tilde{\mathscr{A}}$ en au plus un point.

COROLLAIRE 5.6. *Tout anneau de Birkhoff est homotope le long de Φ^t à une perturbation arbitrairement petite d'une union finie d'anneaux de Birkhoff élémentaires.*



Scheme 4.

Preuve. Soit $\mathscr{A}$ un anneau de Birkhoff et $(\mathscr{L}_0, \ldots, \mathscr{L}_n)$ la chaîne de losanges dont le support est trace transverse de $\mathscr{A}$. Les sommets de $\mathscr{L}_i$ sont des orbites de $\tilde{\Phi}^t$ au-dessus d'orbites périodiques θ_i de Φ^t. D'après le théorème D (que nous montrerons bientôt) chaque $\mathscr{L}_i$ est trace transverse d'un anneau de Birkhoff élémentaire $\mathscr{A}_i$ bordé par θ_i et θ_{i+1}. Pour chaque indice i soit U_i un voisinage de θ_i suffisamment petit. D'après le lemme 3.4 on peut choisir U_i *linéarisant*, i.e., tel que la restriction de Φ^t à U_i est un flot local topologiquement équivalent à la restriction à $\{(x, y, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 / x^2 + y^2 < 1\}$ de la suspension du difféomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^2$ défini par la matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Quitte à isotoper les $\mathscr{A}_i$ le long de Φ^t, on peut choisir les U_i de sorte que:

- les intersections de U_i avec $\mathscr{A}_{i-1}$ et $\mathscr{A}_i$ sont connexes,
- l'union des $\mathscr{A}_i$ coïncide avec $\mathscr{A}$ hors de l'union des U_i.

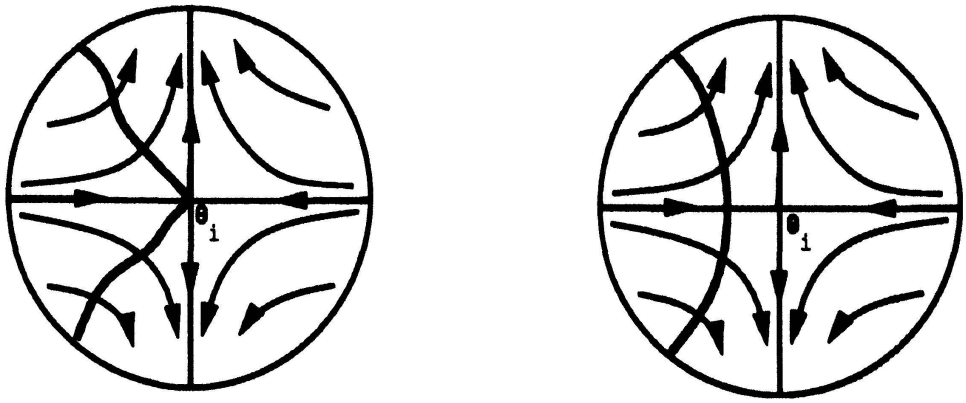


Figure 6. Coulissage de deux anneaux de Birkhoff adjacents.

On peut alors déformer les $\mathscr{A}_i$ dans les U_i de sorte que leur réunion soit un anneau de Birkhoff dont la trace transverse est le support de $(\mathscr{L}_0, \ldots, \mathscr{L}_n)$ (cf. figure 6). Cet anneau est isotope le long de Φ^t à $\mathscr{A}$. □

6. Construction d'anneaux de Birkhoff

Nous montrons ici le théorème D. Soit $\mathscr{L}_0$ un γ_0-losange simple de sommets $\tilde{\theta}_0$ et $\tilde{\theta}_1$. Quitte à remplacer γ_0 par une de ses racines, on peut le supposer indivisible, i.e., qu'il engendre les stabilisateurs des sommets $\tilde{\theta}_0$ et $\tilde{\theta}_1$. D'après le lemme 3.4 il existe dans $\mathscr{L}_0$ un chemin $\bar{c}_0$ d'extrémités $\tilde{\theta}_0$ et $\tilde{\theta}_1$ sans autointersection et disjoint de tous ses itérés par γ_0. Soit $\tilde{c}_0$ un relevé quelconque de $\bar{c}_0$ dans $\tilde{M}$ (rappelons que π^{Φ} est une fibration triviale). Notons x_0 et x_1 les extrémités de ce relevé. Soit $\tilde{c}_1$ l'image de $\tilde{c}_0$ par γ_0, et $y_0 = \gamma_0 x_0$ et $y_1 = \gamma_0 x_1$ les extrémités de $\tilde{c}_1$. Soient enfin I_0 et I_1 les intervalles $[x_0, y_0]$ et $[x_1, y_1]$ dans $\tilde{\theta}_0 \simeq \mathbb{R}$ et $\tilde{\theta}_1 \simeq \mathbb{R}$. Alors, $I_0 \cup \tilde{c}_0 \cup I_1 \cup \tilde{c}_1$ borde un rectangle R plongé dans $\tilde{M}$ transverse à $\tilde{\Phi}^t$ en dehors de I_0 et de I_1. L'intérieur de ce rectangle recontre chaque feuille de $\tilde{\Phi}$ en au plus un point. Notons $\tilde{\mathscr{A}}_0$ l'union des itérés par γ_0 de R: c'est une bande γ_0 invariante, bordée par $\tilde{\theta}_0$ et $\tilde{\theta}_1$, et transverse à $\tilde{\Phi}^t$ en son intérieur.

Soit $\hat{M}$ le quotient $\tilde{M}_{/\langle\gamma_0\rangle}$. Soit $\hat{\pi} : \hat{M} \to M$ l'application de revêtement naturelle. Φ^t se relève en un flot $\hat{\Phi}^t$, et $\tilde{\mathscr{A}}_0$ passe au quotient en un anneau plongé $\hat{\mathscr{A}}_0$ transverse à $\hat{\Phi}^t$ en son intérieur et bordé par deux orbites périodiques $\hat{\theta}_0$ et $\hat{\theta}_1$. Comme γ_0 est indivisible les restrictions de $\hat{\pi}$ à $\hat{\theta}_0$ et $\hat{\theta}_1$ sont injectives. Par ailleurs, si ces deux orbites périodiques ont même image par $\hat{\pi}$ il existe dans M un plongement incompressible de la bouteille de klein, ce qui est écarté dans les hypothèses (voir remarque 6.1). Il existe donc un voisinage $\hat{U}_0$ de $\partial\hat{\mathscr{A}}_0$ dans $\hat{M}$ sur lequel $\hat{\pi}$ se restreint en un plongement. Enfin, comme le losange $\mathscr{L}_0$ est supposé simple, les images par $\hat{\pi}$ de $\partial\hat{\mathscr{A}}_0$ et de $int\hat{\mathscr{A}}_0$ sont disjointes. Quitte à diminuer $\hat{U}_0$,

on peut supposer que $U_0 = \hat{\pi}(\hat{U}_0)$ et $\hat{\pi}(\hat{\mathscr{A}}_0 \setminus \hat{U}_0)$ sont disjoints. La restriction de $\hat{\pi}$ à $\hat{\mathscr{A}}_0$ est une immersion de l'anneau dans M. Notre but est de modifier cette immersion en un plongement injectif. On peut supposer cette immersion en position générale, i.e., que le lieu de non-injectivité consiste en un nombre fini de cercles de points doubles s'intersectant entre eux en des points triples (cf. figure 7, pour un peu plus d'explication voir [10]).

Ce lieu des singularités se situe hors de $\hat{U}_0$. En utilisant les techniques de "cut and paste" on obtient une surface $\mathscr{A}$ plongée dans M, de bord $\theta_0 \cup \theta_1$, transverse à Φ^t en son intérieur et coïncidant avec $\hat{\pi}(\hat{\mathscr{A}}_0)$ dans U_0 (cf. [10]). Cette surface est orientable (car transversalement orientable puisque son intérieur est transverse à Φ^t) et son intérieur est transverse à chacun des feuilletages faibles. Ces feuilletages induisent donc deux feuilletages sans singularités sur $\mathscr{A}$ et tangents au bord. Il s'en suit que $\mathscr{A}$ est nécessairement connexe et qu'elle est un anneau de Birkhoff de bord $\theta_0 \cup \theta_1$. Pour conclure, nous devons juste montrer que la trace de cet anneau est $\mathscr{L}_0$.

Malheureusement cette affirmation telle quelle est fausse, puisqu'en général les opérations de "cut and paste" ne préserve pas les données homotopiques. Nous allons montrer néanmoins qu'un partie de $\mathscr{A}$ peut se modifier en un anneau de Birkhoff de trace transverse $\mathscr{L}_0$.

Soit $\tilde{\mathscr{A}}$ le relevé de $\mathscr{A}$ dans $\tilde{M}$ contenant $\tilde{\theta}_0$. C'est une bande de $\tilde{M}$ globalement préservée par l'action de γ_0. Soit $\tilde{\theta}'_1$ la composante connexe de $\partial\tilde{\mathscr{A}}$ au-dessus de θ_1: c'est un itéré $\gamma \cdot \tilde{\theta}_1$ ($\gamma \in \Gamma$). Soit enfin $\mathscr{L}$ l'image de $\tilde{\mathscr{A}}$ par π^{Φ}. D'après 5.1 $\mathscr{L}$ est le support de la chaîne de losange $\mathscr{C}$ reliant $\tilde{\theta}_0$ à $\tilde{\theta}'_1$. De plus, comme $\tilde{\mathscr{A}}$ et $\tilde{\mathscr{A}}_0$ coïncident sur un voisinage ouvert de $\tilde{\theta}_0$ au-dessus de U_0, le premier losange de cette chaîne, incident à $\tilde{\theta}_0$, n'est autre que $\mathscr{L}_0$. Enfin, la même remarque appliquée au voisinage de θ_1 montre que le dernier losange de $\mathscr{C}$, celui incidant à $\tilde{\theta}'_1 = \gamma\tilde{\theta}_1$, est $\gamma\mathscr{L}_0$. Soit $\mathscr{A}_1$ la composante de $\mathscr{A}$ contenant θ_0 (pour la notion de composante, voir la preuve de 5.1). Quitte à inverser Φ^t, on peut supposer que le bord de $\mathscr{A}_1$ est

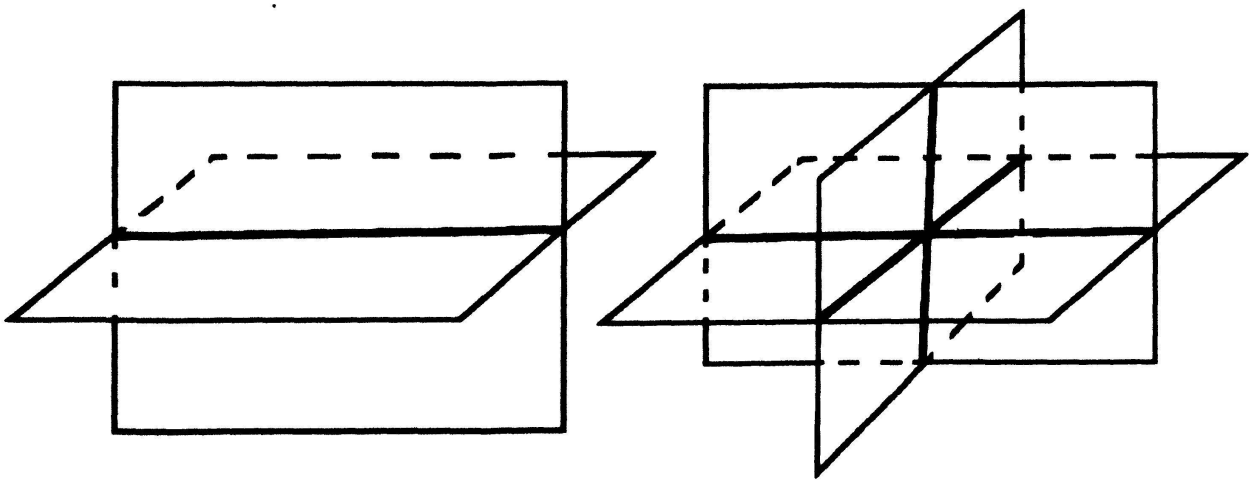


Figure 7. Singularités en position générale.

constituée de θ_0 et d'une feuille fermée g_1 de la trace de $\mathscr{F}^s$ sur $\mathscr{A}$. La trace transverse de $\mathscr{A}_1$ est l'union de l'intérieur de $\mathscr{L}_0$, de $\{\tilde{\theta}_0\}$ et de $s^-(\tilde{\theta}_1)$. Il s'en suit que la feuille F de $\mathscr{F}^s$ contenant g_1 est celle contenant θ_1. Soit $\mathscr{A}_2$ l'anneau bordé dans F par g_1 et θ_1 (comme g_1 est transverse à Φ^t dans F g_1 et θ_1 sont disjoints). Comme $\mathscr{A}_1$ ne contient aucune feuille fermée de f^s autre que θ_0 ou g_1 son intersection avec $\mathscr{A}_2$ se réduit à g_1 (cf. figure 8).

Quitte à pousser $\mathscr{A}_1$ par Φ^t on peut supposer g_1 arbitrairement proche de θ_1. Il s'en suit que $\mathscr{A}_2$ est inclus dans un voisinage linéarisant U_1 de θ_1. En inversant l'argument du corollaire 5.6 on montre que $\mathscr{A}_1$ se déforme dans U_1 en un anneau de Birkhoff élémentaire bordé par θ_0 et θ_1 et de trace transverse $\mathscr{L}_0$.

REMARQUE 6.1. La preuve du théorème D′ est semblable en tout point à celle du théorème D. Les techniques que nous avons utilisées permettent de montrer:

PROPOSITION 6.2. *Soit $\mathscr{L}_0$ un γ_0-losange simple de sommets $\tilde{\theta}_0$ et $\tilde{\theta}_1$. On suppose qu'il existe un élément γ de Γ envoyant $\tilde{\theta}_0$ sur $\tilde{\theta}_1$. Alors, il existe un plongement incompressible de la bouteille de Klein dans M, contenant une orbite périodique de Φ^t et transverse à Φ^t en dehors de cette orbite périodique. De plus, ce plongement peut être choisi de sorte que sa trace transverse soit un chapelet contenant $\mathscr{L}_0$.* □

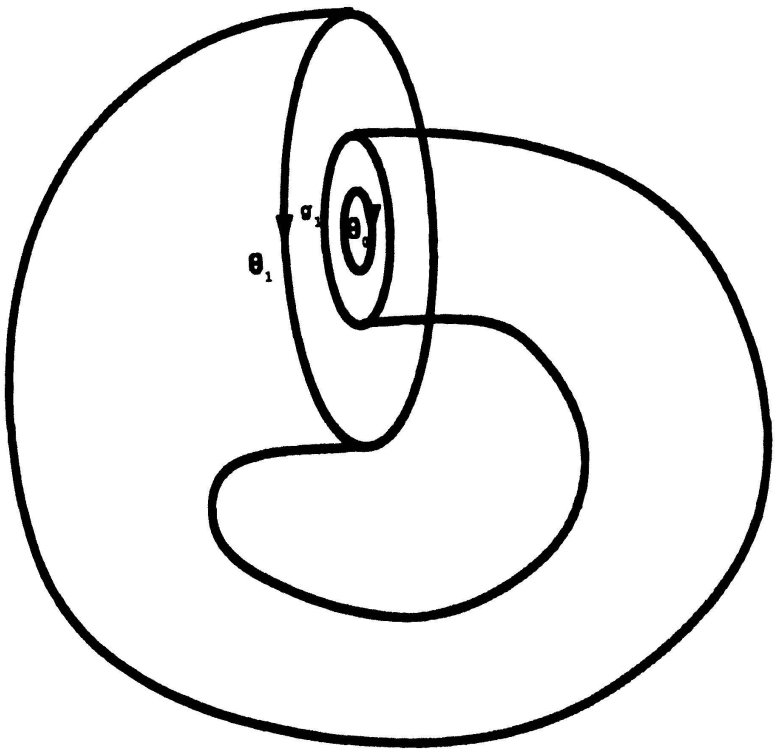


Figure 8. Axe de coulissage de g_1 sur θ_1.

Nous laissons au lecteur la preuve de 6.2. Nous indiquons seulement que le revêtement intermédiaire $\hat{M}$ qu'il convient de considérer ici est celui associé au sous-groupe de Γ engendré par γ et γ_0.

7. Chapelets de losanges et tores quasi-transverses

Nous montrons ici les théorèmes C et C'. Voyons tout d'abord pourquoi le théorème C' découle du théorème C. Il s'agit de montrer:

PROPOSITION 7.1. *Soit (M, Φ^t) un flot d'Anosov non topologiquement équivalent à une suspension. Alors, tout sous-groupe libre abélien de rang deux de Γ préserve un chapelet de losanges.*

Preuve. Rappelons que l'hypothèse produit signifie que l'espace des feuilles Q^s est homéomorphe à $\mathbb{R}$. D'après [3], il existe un homéomorphisme $\tau_s : Q^s \to Q^s$, commutant avec l'action de Γ sur Q^s. De plus, l'espace des orbites Q^Φ s'identifie avec l'ouvert U de $Q^s \times Q^s$ compris entre les graphes de l'identité et de τ_s, et cette identification envoie l'action de Γ sur Q^Φ sur la restriction à U de l'action diagonale de Γ sur $Q^s \times Q^s$. Elle envoie aussi les feuilletages $\mathcal{G}^s$ et $\mathcal{G}^u$ sur les restrictions à U des feuilletages verticaux et horizontaux.

Soit H un sous-groupe de Γ isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

LEMME 7.2. *L'action de H sur Q^s n'est pas libre.*

Preuve. Nous raisonnons par l'absurde. Il est bien connu qu'une action libre de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ sur la droite est toujours semi-conjuguée à une action par translation (cf. par exemple [14]). En d'autres termes, il existe une application continue, croissante et surjective $f : Q^s \to \mathbb{R}$ et un morphisme injectif $\rho : H \to \mathbb{R}$ tels que:

$$\forall x \in Q^s \; \forall h \in H \qquad f(hx) = f(x) + \rho(h)$$

Comme f est surjective il existe au moins un élément x de Q^s pour lequel $\tau_s(x)$ et x n'ont pas la même image par f. On en déduit l'existence de deux intervalles ouverts I_1 et I_2 compris dans un même intervalle du type $]x, \tau_s(x)[$, et tels que les images par f de I_1, $\tau_s I_1$ et I_2 sont disjointes. Alors, $V = I_1 \times I_2$ est un ouvert contenu dans U. Comme Φ^t est topologiquement transitif (cf. théorème 2.6 de [3]) il existe un élément (x_0, y_0) de V fixé par un élément γ de Γ. Il correspond à une orbite périodique de Φ^t. Comme cette orbite périodique est compacte et propre, l'orbite $\Gamma \cdot (x_0, y_0)$ est un fermé discret de $U \simeq Q^\Phi$. Il en est donc de même pour $H \cdot (x_0, y_0) \subset \Gamma \cdot (x_0, y_0)$.

Soit $\bar{x}_0$ la borne inférieure des éléments de $H \cdot x_0$ supérieurs à x_0: il est supérieur à x_0 et il existe une suite (h_n) d'éléments de H telle que les $h_n(x)$ convergent vers $\bar{x}_0$. Alors, les $\rho(h_n)$ convergent vers 0, et les $h_n(y_0)$ convergent eux-aussi vers un élément $\bar{y}_0$. Nous avons:

$$f(\bar{x}_0) = \lim_{n \to +\infty} f(x_0) + \rho(h_n) = f(x_0)$$
$$f(\bar{y}_0) = f(y_0)$$

On en déduit que le couple $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ appartient à $V \subset U$. Ceci contredit le fait que $H \cdot (x_0, y_0)$ est un fermé discret de U.

Soit h un élément de H admettant un point fixe (x_0, y_0) dans U. Alors l'ensemble des points fixes de h est exactement l'ensemble des $(\tau_s^n x_0, \tau_s^n y_0)$ et des $(\tau_s^n y_0, \tau_s^{n+1} x_0)$ où n décrit $\mathbb{Z}$. Les verticales et les horizontales passant par ses points fixes délimitent dans $U \simeq Q^\Phi$ un chapelet de losanges (voir figure 9).

Comme chaque élément de H commute avec h, ce chapelet est H-invariant. □

Nous nous consacrons désormais à la preuve du théorème C. Nous reprenons les notations de son énoncé. Soit $\{\tilde{\theta}_i\}$ l'ensemble des sommets du chapelet $\mathscr{C}$. Soit enfin H' le stabilisateur de $\mathscr{C}$, i.e., l'ensemble des éléments de Γ préservant $\mathscr{C}$.

LEMME 7.3. *H et H' sont confondus.*

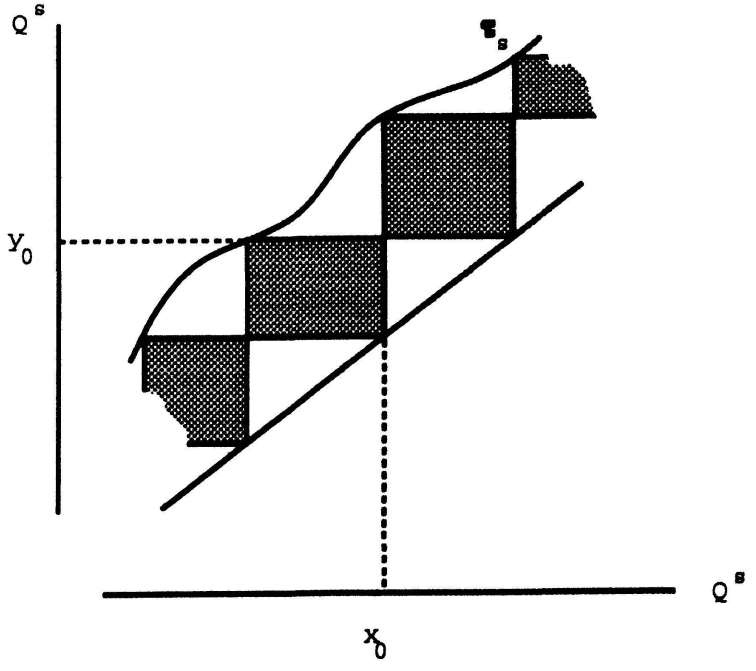


Figure 9. Chapelet de losanges d'un flot d'Anosov produit.

Preuve. Par hypothèse H' contient H. Par ailleurs, en tant que sommets de $\mathscr{C}$, les $\tilde{\theta}_i$ sont naturellement ordonnés et l'action de H' sur $\mathscr{C}$ préserve cet ordre. On en déduit l'existence d'un morphisme $\chi : H' \to \mathbb{Z}$ tel que:

$$\forall h \in H' \qquad \forall i \in \mathbb{Z} \qquad h\tilde{\theta}_i = \tilde{\theta}_{i+\chi(h)}$$

H' est donc soit cyclique, soit isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, soit isomorphe à l'extension de degré deux non triviale de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Le premier cas est impossible car H' contient H. Le troisième cas aussi puisqu'il implique l'existence d'un plongement incompressible de la bouteille de Klein (cf. remarque 7.14). Il ne reste alors que le second cas. Or, comme H correspond à un plongement incompressible du tore, c'est un sous groupe libre abélien de rang deux de Γ *maximal* (cr. [9]). Donc $H = H'$. □

Soit h un générateur du noyau de χ, i.e., du stabilisateur de chaque $\tilde{\theta}_i$. Les méthodes utilisées au début de la preuve du théorème D permettent de contruire un plan $\tilde{T}_0$ plongé dans $\tilde{M}$ tel que:

- $\tilde{T}_0$ est H-invariant,
- $\tilde{T}_0$ contient tous les $\tilde{\theta}_i$,
- $\tilde{T}_0$ est transverse à $\tilde{\Phi}^t$ en dehors des $\tilde{\theta}_i$,
- $\mathscr{C}$ est trace transverse de $\tilde{T}_0$.

Soit $\hat{\pi} : \hat{M} \to M$ le revêtement associé à $H \subset \Gamma$. Soit $\hat{\Phi}^t$ le relèvement dans $\hat{M}$ de Φ^t. Les $\tilde{\theta}_i$ se projettent dans $\hat{M}$ en des orbites périodiques $\hat{\theta}_i$ de $\hat{\Phi}^t$, et $\tilde{T}_0$ se projette en un tore plongé $\hat{T}_0$. L'ensemble des orbites de $\hat{\Phi}^t$ recontrant $\hat{T}_0$ s'identifie au quotient de $\mathscr{C}$ par H. On en déduit:

LEMME 7.4. *Une orbite de $\hat{\Phi}^t$ est soit un des $\hat{\theta}_i$ soit ne rencontre $\hat{T}_0$ qu'en au plus un point.* □

LEMME 7.5. *Chaque orbite de $\hat{\Phi}^t$ rencontrant $\hat{T}_0$ est fermée dans $\hat{M}$.*

Preuve. Les $\hat{\theta}_i$ sont bien sûr fermées. Soit $\tilde{\theta}$ une orbite de $\tilde{\Phi}^t$ recontrant $\tilde{T}_0$ hors des $\tilde{\theta}_i$, i.e., un élément de l'intérieur de $\mathscr{C}$. Il s'agit de montrer que son orbite par H est fermée dans Q^Φ. Nous raisonnons par l'absurde: soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments distincts de H tels que les $h_n\tilde{\theta}$ convergent vers un élément $\bar{\theta}$ de Q^Φ. La limite $\bar{\theta}$ appartient à l'adhérence de $\mathscr{C}$ qui n'est autre que l'union de $\mathscr{C}$ et des $u(\tilde{\theta}_i)$ et des $s(\tilde{\theta}_i)$ (indication: considérer un rectangle de Markov rencontrant la frontière de $\mathscr{C}$). Si $\bar{\theta}$ n'appartient pas à l'intérieur d'un losange de $\mathscr{C}$, on peut supposer quitte à échanger $\mathscr{G}^s$ et $\mathscr{G}^u$ qu'il appartient à un $s(\tilde{\theta}_i)$. A partir d'un certain rang les $h_n\tilde{\theta}$

appartiennent alors au même losange de $\mathscr{C}$, ce qui montre que les h_n ne différent les uns des autres que par des puissances de h. D'après la proposition 2.7 $\bar{\theta}$ est exactement $\tilde{\theta}_i$ et les $h_n\tilde{\theta}$ appartiennent à $s(\tilde{\theta}_i)$ ou $u(\tilde{\theta}_i)$: contradiction. □

LEMME 7.6. *Le chapelet de losanges $\mathscr{C}$ est simple.*

Preuve. Soient $\theta_1, \ldots, \theta_n$ les projetés dans M des $\hat{\theta}_i$. Soit $\hat{\theta}$ un relevé d'un des $\hat{\theta}_i$ dans $\hat{M}$ rencontrant $\hat{T}_0$. On suppose que $\hat{\theta}$ n'est pas $\hat{\theta}_i$. Alors, d'après les lemmes 7.5 et 7.4 $\hat{\theta}$ est une droite fermée de $\hat{M}$ ne rencontrant $\hat{T}_0$ qu'en un seul point. Comme H n'est autre que $f_*\pi_1(T)$, f se relève en un plongement de T dans $\hat{M}$ dont l'image $\hat{T}$ est un relevé de $f(T)$ librement homotope à $\hat{T}_0$. Donc, le nombre d'intersection modulo 2 de $\hat{\theta}$ avec $\hat{T}$ est non-nul. Soit c une courbe fermée simple plongée dans $f(T)$ librement homotope dans M à θ_i. Cette homotopie se relève en une homotopie propre entre $\hat{\theta}$ et une droite Δ. Cette droite Δ doit rencontrer $\hat{T}$ puisque leur nombre d'intersection modulo 2 est non-nul. Comme Δ est un relevé de c, elle doit être contenue dans $\hat{T}$ et doit donc être un cercle. Contradiction.

Donc, les seuls relevés des θ_i rencontrant $\hat{T}_0$ sont les $\hat{\theta}_i$. Relevé dans $\tilde{M}$, ceci signifie exactement que $\mathscr{C}$ est un chapelet de losanges simple (cf. introduction pour la définition de chapelet simple). □

COROLLAIRE 7.7. *La restriction de $\hat{\pi}$ à l'union des $\hat{\theta}_i$ est injective. L'image par $\hat{\pi}$ de $\hat{T}_0$ privé des $\hat{\theta}_i$ est disjointe de l'union des θ_i.*

Preuve. D'après le lemme 7.6 $\hat{\pi}(\hat{T}_0 \setminus \bigcup \hat{\theta}_i)$ ne rencontre aucun des θ_i. Comme h est un élément de Γ indivisible, la restriction de $\hat{\pi}$ à chaque $\hat{\theta}_i$ est injective. Enfin, si un élément de Γ envoie un sommet de $\mathscr{C}$ sur un autre sommet de $\mathscr{C}$ il préserve nécessairement le chapelet lui-même. D'après le lemme 7.3, un tel élément appartient à H, ce qui montre que deux orbites différentes $\hat{\theta}_i$ et $\hat{\theta}_j$ ont des images par $\hat{\pi}$ différentes.

REMARQUE 7.8. Le fait que $\mathscr{C}$ soit un chapelet de losanges et non le support d'une chaîne de h-losanges quelconque, intervient de manière cruciale dans la preuve de 7.7.

D'après le théorème D chacun des losanges $\mathscr{L}^{++}(\hat{\theta}_i)$ est la trace transverse d'un anneau de Birkhoff élémentaire $\mathscr{A}_i$. Il en découle que quitte à isotoper $\hat{T}_0$ le long de $\hat{\Phi}^t$ on peut supposer que la restriction de $\hat{\pi}$ à chaque composante de $\hat{T}_0$ est un plongement injectif (ici, une composante est un anneau transverse à $\hat{\Phi}$ bordé dans $\hat{T}$ par deux orbites $\hat{\theta}_i$ et $\hat{\theta}_{i+1}$). Notons $\hat{\mathscr{A}}_1, \ldots, \hat{\mathscr{A}}_n$ les composantes de $\hat{T}_0$ et $\hat{\mathscr{A}}_1, \ldots, \hat{\mathscr{A}}_n$ leurs images par $\hat{\pi}$. Pour conclure nous devons juste montrer que l'on peut isotoper $\hat{T}_0$ le long de $\hat{\Phi}$ de sorte que les $\mathscr{A}_i$ soient deux-à-deux disjoints.

Quitte à modifier légèrement $\hat{T}_0$ on peut supposer que $\hat{\pi} : \hat{T}_0 \to M$ est une immersion lisse en position générale. Rappelons que ceci signifie que le lieu des singularités $\mathscr{S}$ de cette immersion est stratifié en lignes de points doubles lisses s'intersectant en des points triples. En d'autres termes, il existe dans $\hat{T}_0$ un ensemble fini $\mathscr{T}$ est une sous-variété lisse plongée $\mathscr{D}$ de dimension un tels que:

- $\mathscr{T}$ est l'ensemble des éléments de $\hat{T}_0$ dont l'image par $\hat{\pi}$ admet exactement trois antécédents par $\hat{\pi}$: c'est le *lieu des points triples*,
- $\mathscr{D}$ est l'ensemble des éléments de $\hat{T}_0$ dont l'image par $\hat{\pi}$ admet exactement deux antécédents par $\hat{\pi}$: c'est le *lieu des points doubles*,
- chaque composante connexe de $\mathscr{D}$ est soit un cercle, soit un intervalle ouvert. Dans le second cas, sa frontière est contenue dans $\mathscr{T}$,
- l'union $\mathscr{S} = \mathscr{D} \cup \mathscr{T}$ est le lieu des singularités: la restriction de $\hat{\pi}$ à son complémentaire est un plongement injectif.

D'après le corollaire 7.7 $\mathscr{S}$ est disjoint de l'union des $\hat{\theta}_i$. La restriction de $\hat{\pi}$ à $\mathscr{D}$ est un revêtement double. Il existe donc un homéomorphisme $\sigma : \mathscr{D} \to \mathscr{D}$ d'ordre deux, sans point fixe, et tel que $\hat{\pi} \circ \sigma = \hat{\pi}$. Comme la restriction de $\hat{\pi}$ à chaque $\mathscr{A}_i$ est injective, σ ne préserve aucune composante connexe de $\mathscr{D}$.

Soient s_1, s_2 et s_3 trois éléments de $\mathscr{T}$ ayant même image s par $\hat{\pi}$. Chacun des s_i est extrémité de quatres intervalles I_i^j $(1 \leq j \leq 4)$ composantes connexes de $\mathscr{D}$. Les douzes intervalles ainsi obtenus sont deux-à-deux différents. On peut choisir leur numérotation de sorte que:

$$I_1^1 = \sigma(I_2^2) \qquad I_1^3 = \sigma(I_2^4)$$
$$I_1^2 = \sigma(I_3^2) \qquad I_1^4 = \sigma(I_3^4)$$
$$I_2^1 = \sigma(I_3^1) \qquad I_2^3 = \sigma(I_3^3)$$

Si on convient de cette numérotation, deux intervalles I_i^j et $I_i^{j'}$ sont tangents en leur extrémité commune s_i si les indices j et j' ont même parité (cf. figure 10).

Nous appelons cercle de points doubles la donnée d'une suite $(I_1, \ldots, I_n, I_{n+1} = I_1)$ de composantes connexes de $\mathscr{D}$ et d'une suite $(s_1, \ldots, s_n, s_{n+1} = s_1)$ d'éléments de $\mathscr{T}$ telle que:

- les I_i sont deux-à-deux disjoints,
- pour chaque indice i l'intervalle I_i relie s_i à s_{i+1},
- deux intervalles successifs I_i et I_{i+1} sont tangents en s_{i+1}.

Par abus de notation, nous appellerons aussi cercle de points doubles l'union des I_i et des s_i. En ce sens c'est l'image d'une immersion lisse du cercle dans $\hat{T}_0$.

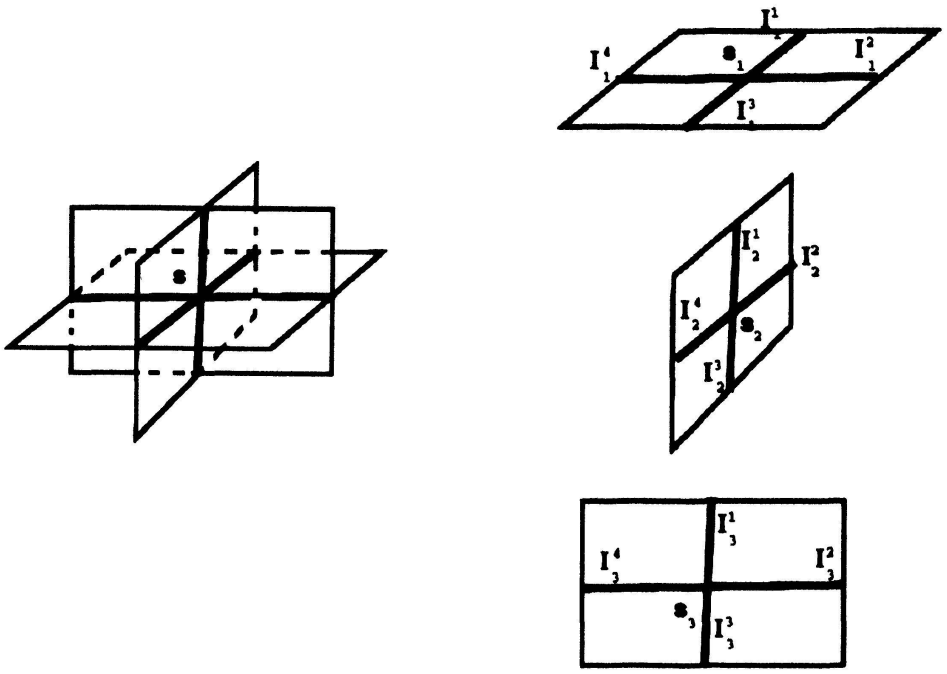


Figure 10. Lieu des singularités au voisinage d'un point triple.

LEMME 7.9. *Les cercles de points doubles sont sans autointersection. La restriction de $\hat{\pi}$ à chacun d'entre eux est injective.*

Preuve. Soit $(I_1, \ldots, I_n)$, $(s_1, \ldots, s_n)$ un cercle de points doubles. Nous le supposons avec autointersection, i.e., qu'il existe un indice $1 < p \leq n$ tel que $s_1 = s_p$. Alors, l'union des $s_1, \ldots, s_p$ et des $I_1, \ldots, I_{p-1}$ est un cercle topologique (mais non différentiablement immergé). De plus, les $\sigma(I_i)$ $(1 \leq i \leq p-1)$ sont des intervalles vérifiant:

- $\sigma(I_i)$ et $\sigma(I_{i+1})$ sont incidents à un même point triple s'_i en lequel ils sont tangents,
- $\sigma(I_1)$ et $\sigma(I_{p-1})$ sont incidents à des sommets s'_1 et s'_p qui ont l'un comme l'autre même image par $\hat{\pi}$ que $s_1 = s_p$.

Les sommets s'_1 et s'_p sont reliés par un chemin dans $\mathscr{S}$. Comme ce dernier est disjoint des $\hat{\theta}_i$, ce chemin est contenu dans un des $\hat{\mathscr{A}}_i$. Comme la restriction de $\hat{\pi}$ à $\hat{\mathscr{A}}_i$ est injective, on en déduit que s'_i et s'_p sont égaux. Il s'en suit que les parties de I_1, I_{p-1}, I_p et I_n proches de $s_1 = s_p$ sont envoyées par σ en quatres intervalles proches du même point triple $s'_1 = s'_p$. Ceci est absurde (cf. figure 10). Les s_i sont donc deux-à-deux disjoints et l'union des I_i et des s_i $(1 \leq i \leq n)$ est l'image C d'un plongement différentiable du cercle. L'application σ définie sur $C \backslash \mathscr{T}$ se prolonge en un homéomorphisme entre C et un autre cercle de points doubles C' tel que:

$$\hat{\pi} \circ \sigma_{|C} = \hat{\pi}$$

C et C' appartiennent à deux composantes $\hat{\mathscr{A}}_i$ et $\hat{\mathscr{A}}_j$ différentes. Ils sont donc disjoints. On en déduit que la restriction de $\hat{\pi}$ à C est un plongement injectif. □

LEMME 7.10. *Chaque cercle de points doubles borde un disque dans* $\hat{T}_0$.

Preuve. Il s'agit de montrer qu'un cercle de points doubles est homotopiquement trivial. Supposons *a contrario* l'existence d'un cercle de points doubles C homotopiquement non trivial. Soit $C' = \sigma(C)$ l'autre cercle de points doubles ayant même image par $\hat{\pi}$ que C. C et C' se relèvent dans $\tilde{M}$ en deux droites fermées $\tilde{C}$ et $\tilde{C}'$, et il existe un élément γ de Γ envoyant $\tilde{C}$ sur $\tilde{C}'$. Comme C et C' sont disjoints des $\hat{\theta}_i$ ils leurs sont librement homotopes dans $\hat{T}_0$. Les relevés $\tilde{C}$ et $\tilde{C}'$ peuvent donc être choisis globalement préservés par $h = [\theta_i]$. Il en découle que $\gamma h \gamma^{-1}$ est égal à $h^{\pm 1}$: γ envoie donc les h-losanges sur des h-losanges. Soit $\mathscr{L}_i$ le h-losange de $\mathscr{C}$ contenant $\pi^{\Phi}(\tilde{C})$ et $\mathscr{L}_i$ celui contenant $\pi^{\Phi}(\tilde{C}')$: le losange $\mathscr{L}_i$ est envoyé par γ sur $\mathscr{L}_j$. Comme $\mathscr{C}$ est un chapelet, il s'en suit que γ préserve $\mathscr{C}$. D'après le lemme 7.3 γ appartient à H. Donc, $C = C' = \sigma(C)$: contradiction. □

Soit C un cercle de points doubles et $\hat{D}$ le disque fermé qu'il borde dans $\hat{T}_0$: ce disque est contenu dans un anneau $\hat{\mathscr{A}}_i$. La restriction de $\hat{\pi}$ à ce disque est donc un plongement. Soit D son image par $\hat{\pi}$. Quitte à changer notre choix de cercle de points doubles, on peut supposer que le nombre de composantes connexes de $\mathscr{D} \cap \hat{D}$ est minimal. Ceci implique que l'intérieur de $\hat{D}$ ne contient pas de cercle de points doubles, i.e., tout cercle de points doubles rencontrant $\hat{D}$ rencontre $C = \partial \hat{D}$. Soit $C' = \sigma(C)$ et $\hat{D}'$ le disque bordé dans $\hat{T}_0$ par C'. On note $D' = \hat{\pi}(\hat{D}')$.

LEMME 7.11. *Les intérieurs de D et de D′ sont disjoints.*

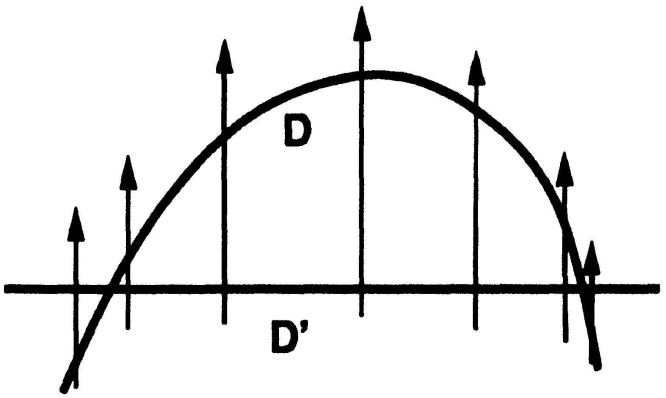
Preuve. D et D' sont transverses l'un à l'autre, et ils sont compacts. Si l'intérieur de D rencontrait D' il contiendrait l'image d'un cercle de points doubles. Nous l'avons exclu par hypothèse. □

L'union $D \cup D'$ est donc un plongement de la "sphère à coin" nulle part tangent à Φ^t. Comme M est irréductible, $D \cup D'$ borde dans M une boule B. Quitte à inverser le flot, on peut supposer que Φ^t est rentrant dans B en D'. Soit D'_0 un disque voisinage de D' dans $\hat{\pi}(\hat{T}_0)$. Pour toute paire d'applications $u : D'_0 \to \mathbb{R}_*^-$ et $v : D'_0 \to \mathbb{R}_*^+$ on note $\Omega_u^v(D'_0)$ l'ouvert de $M \times \mathbb{R}$ constitué des couples (x, t) vérifiant $u(x) \leq t \leq v(x)$. Nous notons enfin φ l'application $(x, t) \mapsto \Phi^t(x)$.

LEMME 7.12. *On peut choisir* D'_0 *et trois applications u, v et w de* D'_0 *dans* $\mathbb{R}$ *de telle sorte que*:

- $u < w < v$
- $u < 0 < v$
- *la restriction de* φ *à* $\Omega_u^v(D_0')$ *est un plongement injectif,*
- φ *envoie* $\{(x, t)/x \in D_0' t = w(x)\}$ *sur un voisinage* D_0 *de* D *dans* $\hat{\pi}(\hat{T}_0)$.

Preuve. Soit x un élément de D'. On suppose que son orbite positive $\{\Phi^t(x)/t \geq 0\}$ ne rencontre pas D. Alors, d'après le *shadow lema* (voir par exemple [5]) il existe dans B une orbite périodique de Φ^t. Or B est simplement connexe, et aucune orbite périodique de Φ^t n'est homotopiquement triviale: contradiction. Donc, pour tout élément x de D', il existe un réel positif $w(x)$ tel que $\Phi^t(x)$ appartient à D, et tel que pour tout réel positif t inférieur à $w(x)$ $\Phi^t(x)$ n'appartient pas à D. On en déduit aisément le lemme 7.12.



Scheme 5.

□

Soit δ une application $D_0' \to \mathbb{R}^+$ comprise entre w et v et nulle au voisinage de $\partial D_0'$. On étend $\delta \circ \hat{\pi}$ en une application $\hat{\delta} : \hat{T}_0 \to \mathbb{R}^+$ en lui imposant de s'annuler hors du disque $\hat{D}_0'$ au-dessus de D_0'. Alors, $f_\delta : x \mapsto \hat{\Phi}^{\delta(x)}(x)$ est une homotopie le long de Φ^t envoyant $\hat{T}_0$ sur un tore $\hat{T}_0^\delta$. Pour un δ générique la restriction de $\hat{\pi}$ à $\hat{T}_0^\delta$ est en position générale: on note alors $\mathscr{S}_\delta, \mathscr{D}_\delta, \mathscr{T}_\delta$ le lieu singulier, le lieu des points doubles et le lieu des points triples.

LEMME 7.13. *Pour un choix convenable de* δ, *le nombre de composantes connexes de* $\mathscr{D}_\delta$ *est strictement inférieur au nombre de composantes connexes de* $\mathscr{D}$.

Preuve. On note:

$$\hat{D}_\delta' = f_\delta(\hat{D}') \qquad \hat{D}_{\delta,0}' = f_\delta(\hat{D}_0')$$

$$\hat{D}_\delta = \hat{D} \qquad \hat{D}_{\delta,0} = \hat{D}_0$$

$$D_\delta' = \hat{\pi}(\hat{D}_\delta') \qquad D_{\delta,0}' = \hat{\pi}(\hat{D}_{\delta,0}')$$

Pour tout espace topologique E nous notons $b_0(E)$ le nombre de ses composantes connexes. Rappelons que nous avons choisi $\hat{D}$ de sorte que $b_0(\hat{D} \cap \mathscr{D})$ soit minimal. En particulier:

$$b_0(\mathscr{D} \cap Int\hat{D}) \leq b_0(\mathscr{D} \cap Int\hat{D}') \tag{1}$$

Nous imposons à $\delta : D'_0 \to \mathbb{R}$ d'être compris entre w et $w + \epsilon$. Les disques D_0 et $D'_{\delta,0}$ sont alors disjoints. Comme $\hat{\pi}(\hat{T}_0)$ est auto-transverse il existe un réel ϵ positif pour lequel φ envoie $\Omega^{w+\epsilon}_{w-\epsilon}(D'_0)$ sur un ouvert voisinage de D_0 dans lequel $\hat{\pi}(\hat{T}_0 \setminus \hat{D}_0)$ est homéomorphe à $[-\epsilon, +\epsilon] \times (\mathscr{S} \cap \hat{D}_0)$. Quitte à diminuer $\hat{D}_0$ on peut supposer en outre que $w + \epsilon$ est positif.

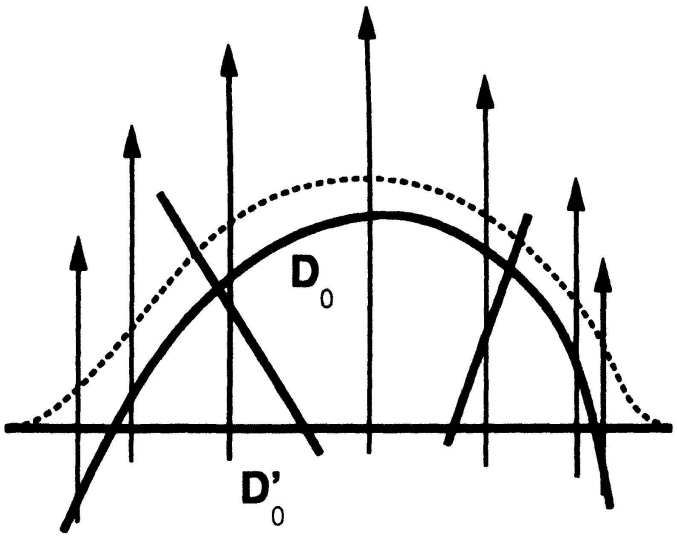


Figure 11.

Pour un choix convenable de δ, $D'_{\delta,0}$ est transverse à $\hat{\pi}(\hat{T}^{\delta}_0 \setminus \hat{D}'_{\delta,0})$ et leur intersection est "analogue" à celle de D_0 avec $\hat{\pi}(\hat{T}_0 \setminus (\hat{D}_0 \cup \hat{D}'_0))$. En d'autres termes, pour un tel choix de δ:

$$b_0(\mathscr{D}_\delta \cap Int\hat{D}'_\delta) = b_0(\mathscr{D}_\delta \cap Int\hat{D}_\delta) = b_0(\mathscr{D} \cap Int\hat{D}) \tag{2}$$

Chaque composante connexe I de $\mathscr{D}$ est de l'un des types suivants:

- soit $\hat{\pi}(I)$ appartient à $\partial D = \partial D'$,
- soit $\hat{\pi}(I)$ appartient à $IntD$,
- soit $\hat{\pi}(I)$ appartient à $IntD'$,
- soit $\hat{\pi}(I)$ n'appartient pas à $D \cup D'$.

Donc:

$$b_0(\mathscr{D}) = b_0(\mathscr{D} \cap (\hat{T}_0 \setminus \hat{\pi}^{-1}(D_0 \cup D_0'))) + b_0(\mathscr{D} \cap \partial \hat{D}) + b_0(\mathscr{D} \cap \partial \hat{D}') + 2b_0(\mathscr{D} \cap Int\hat{D}) + 2b_0(\mathscr{D} \cap Int\hat{D}')$$

D'après (1), et comme $b_0(\mathscr{D} \cap \partial \hat{D}) = b_0(\mathscr{D} \cap \partial \hat{D}')$:

$$b_0(\mathscr{D}) \geq b_0(\mathscr{D} \cap (\hat{T}_0 \setminus \hat{\pi}^{-1}(D_0 \cup D_0'))) + 2b_0(\mathscr{D} \cap \partial \hat{D}) + 4b_0(\mathscr{D} \cap Int\hat{D}) \quad (3)$$

Par ailleurs, il est clair que:

$$b_0(\mathscr{D}_\delta) \leq b_0(\mathscr{D}_\delta \cap (\hat{T}_0^\delta \setminus \hat{\pi}^{-1}(D_\delta \cup D_\delta'))) + 2b_0(\mathscr{D}_\delta \cap Int\hat{D}_\delta) + 2b_0(\mathscr{D}_\delta \cap Int\hat{D}_\delta') \quad (4)$$

Chaque élément de $\mathscr{D} \cap (\hat{T}_0 \setminus \hat{\pi}^{-1}(D_0 \cup D_0'))$ est au-dessus d'une autointersection de $\hat{\pi}(\hat{T}_0 \setminus (\hat{D}_0 \cup \hat{D}_0')) = \hat{\pi}(\hat{T}_0^\delta \setminus (\hat{D}_{\delta,0} \cup \hat{D}_{\delta,0}'))$. Il correspond donc aussi à un élément de $\mathscr{D}_\delta \cap (\hat{T}_0^\delta \setminus \hat{\pi}^{-1}(D_\delta \cup D_\delta'))$. En d'autres termes:

$$\mathscr{D} \cap (\hat{T}_0 \setminus \hat{\pi}^{-1}(D_0 \cup D_0')) = \mathscr{D}_\delta \cap (\hat{T}_0^\delta \setminus \hat{\pi}^{-1}(D_\delta \cup D_\delta'))$$

Avec (2), (3) et (4) ceci montre:

$$b_0(\mathscr{D}) - b_0(\mathscr{D}_\delta) \geq 2b_0(\mathscr{D} \cap \partial \hat{D}) > 0 \qquad \square$$

Tant que $\mathscr{D}$ est non-vide on peut appliquer le lemme 7.13. De proche en proche, on déforme $\hat{T}_0$ le long de $\hat{\Phi}^t$ jusqu'à obtenir un tore sur lequel $\hat{\pi}$ se restreint en un plongement injectif. L'image de ce plongement est alors le tore quasi-transverse homotope à $f(T)$ recherché. Nous avons ainsi montré l'existence. L'unicité découle de théorème A′ que nous démontrerons à suivre. $\square$

REMARQUE 7.14. Lors de la preuve du lemme 7.3 il a été défini un morphisme $\chi : H' \to \mathbb{Z}$ où H' est le stabilisateur du chapelet $\mathscr{C}$. Il y a été affirmé que la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z} \to H' \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z} \to 0$$

n'est pas centrale, alors il existe dans M un plongement incompressible de la bouteille de Klein. Pour justifier cette affirmation il suffit d'appliquer les méthodes précédentes en remplaçant H par H' et le mot "tore" par "bouteille de Klein". En fait, il suffit de construire l'immersion $K \subset \tilde{M}_{/H'} \xrightarrow{\hat{\pi}} M$ où K est une bouteille de

Klein quasi-transverse à $\hat{\Phi}$, puis d'appliquer les techniques de "cut and paste". On obtient ainsi un plongement dans M quasi-transverse à Φ' d'une surface Σ non-orientable et bifeuilletable, donc une bouteille de Klein.

Nous avons même mieux: en s'inspirant de la preuve précédente on peut montrer que la bouteille de Klein quasi-transverse Σ peut être choisie de telle sorte que le plongement initial $f: T \to M$ est homotope au bord d'un voisinage tubulaire régulier de Σ. Nous laissons les détails au lecteur.

8. Mise en position transverse

Nous en venons à la preuve du théorème B. Soit $T^2 \hookrightarrow M$ un plongement incompressible du tore vérifiant les hypothèses du théorème B. Soit H le sous-groupe de Γ correspondant à $\pi_1(T^2) \simeq H_1(T^2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Il est bien défini à conjugaison près dans Γ. Les lacets c_1 et c_2 correspondent à deux éléments différents h_1 et h_2 de H qui admettent l'un comme l'autre des points fixes dans Q^{Φ}. D'après le théorème F h_1 et h_2 sont indivisibles dans Γ. Donc, comme c_1 et c_2 ne sont pas homologues dans T^2 h_1 et h_2 n'admettent aucune puissance commune: aucun point fixe de l'un n'est point fixe de l'autre.

LEMME 8.1. *Quitte à échanger h_1 et h_2 on peut supposer qu'il existe une feuille de $\mathcal{G}^s$ fixée par h_1 rencontrant une feuille de $\mathcal{G}^u$ fixée par h_2.*

Preuve. Soit θ un point fixe de h_1 dans Q^{Φ}. Alors, $h_2\theta \neq \theta$ est lui-aussi point fixe de h_1. Soit $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ la suite de h_1-losanges reliant θ à $h_2\theta$. On suppose θ choisi de sorte que le nombre n de ces losanges soit minimal. Pour des orientations convenables nous avons $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}^{++}(\theta)$. Soit θ_1 l'autre sommet de $\mathcal{L}_1$:

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}^{--}(\theta_1)$$

Comme n est minimal $\mathcal{L}_n$ ne peut être $\mathcal{L}^{++}(h_2\theta)$, sinon $\mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_{n-1}$ relieraient θ_1 à $h_2\theta_1$. On en déduit que θ appartient soit à $U_-(h_2\theta)$ soit à $S_-(h_2\theta)$ (voire aux deux simultanément). En d'autres termes, soit $U_+(h_2\theta)$ soit $S_+(h_2\theta)$ ne contient pas θ. Par ailleurs, comme $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}^{++}(\theta)$, $h_2\theta$ appartient à $U_+(\theta) \cap S_+(\theta)$. On en déduit que $h_2 U_+(\theta)$ est contenu dans $U_+(\theta)$ on que $h_2 S_+(\theta)$ est contenu dans $S_+(\theta)$. D'après le lemme 2.6 dans le premier cas il existe une feuille de $\mathcal{G}^s$ fixée par h_2 rencontrant $u(\theta)$, et dans le second cas il existe une feuille de $\mathcal{G}^u$ fixée par h_2 rencontrant $s(\theta)$. □

Soit x_0 une orbite fixée par h_1 et y_0 une orbite fixée par h_2 telles que

$$s(x_0) \cap u(y_0) \neq \varnothing$$

Notons z l'unique élément de cette intersection. On peut supposer:

$$z \in s^+(x_0) \cap u^+(y_0)$$

Quitte à inverser h_1 et h_2 on peut aussi supposer x_0 et y_0 sont des points fixes attractifs des restrictions à $s(x_0)$ et $u(y_0)$ de h_1 et de h_2. Soient $x' = h_2 x_0$ et $y' = h_1 y_0$: ce sont respectivement des points fixes de h_1 et de h_2 et les restrictions à $u(y')$ et $s(x')$ de h_2 et h_1 sont contractantes. $u^+(y_0)$ et $u^+(y')$ rencontrent $s^+(x')$ et $s^+(x_0)$ en respectivement $h_2 z$ et $h_1 z$, et $u^+(y')$ rencontre $s^+(x')$ en $h_1 h_2 z = h_2 h_1 z$. Ces quatres demi-droites délimitent donc dans Q^Φ un domaine compact. Nous appelons K ce domaine (cf. figure 12). C'est un "rectangle" fermé de côtés α, α', β, β' où:

$$\alpha = \partial K \cap s^+(x_0) \qquad \alpha' = \partial K \cap s^+(x')$$

$$\beta = \partial K \cap u^+(y_0) \qquad \beta' = \partial K \cap u^+(y')$$

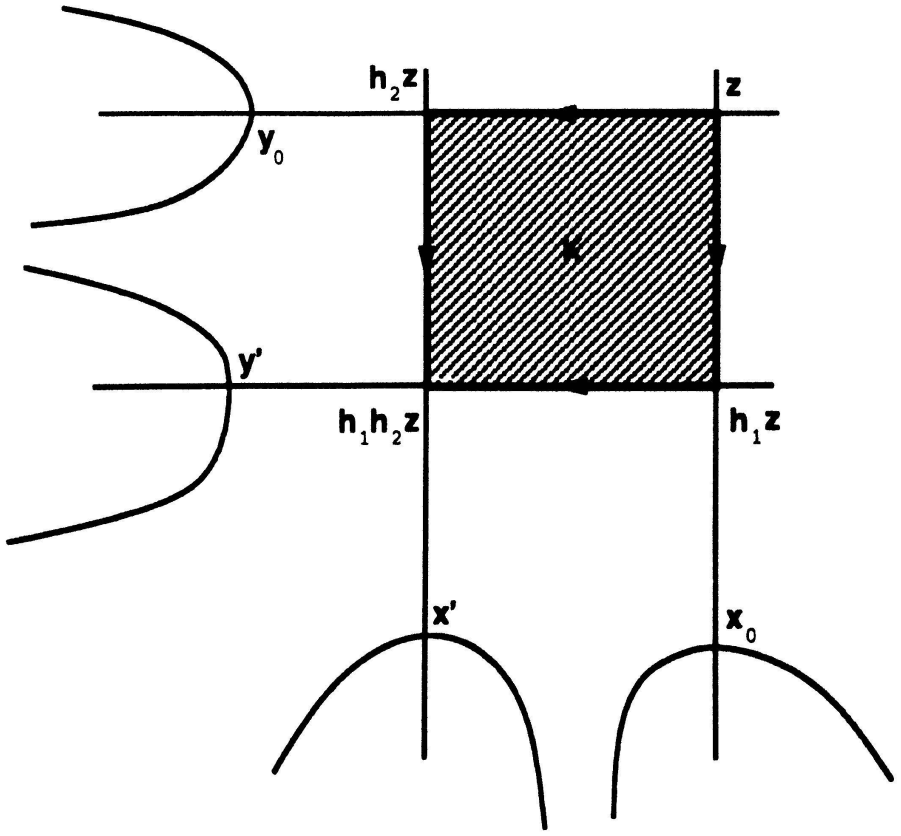
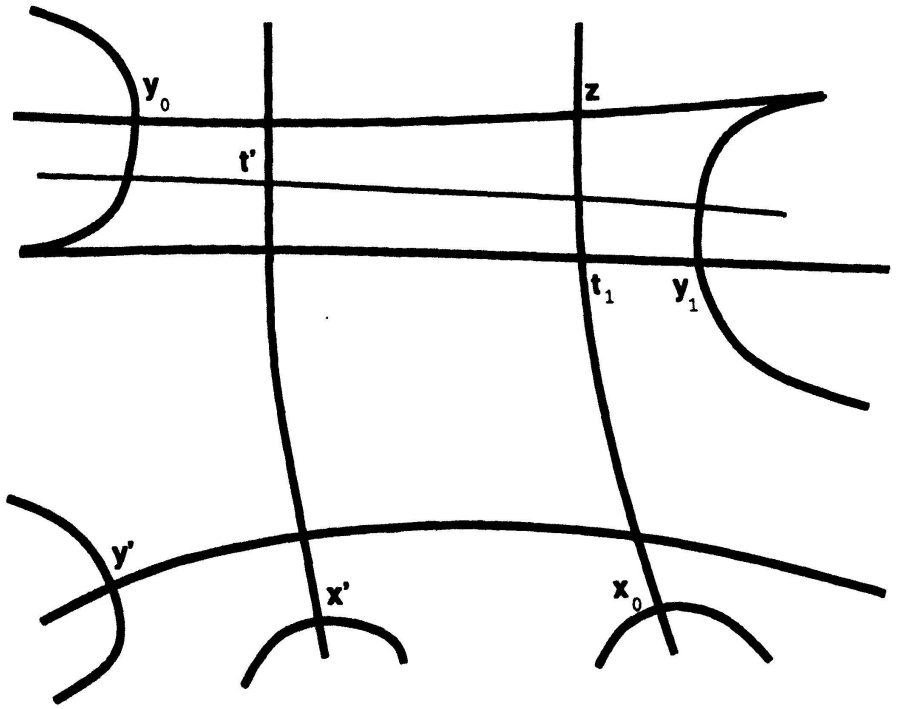


Figure 12.

Soit t' un élément de α'. La demi-droite $u^+(t')$ est fermée dans $Q^\Phi \backslash s(x')$. Comme K est compact, elle doit rencontrer ∂K: elle ne peut le faire qu'en α. De même, toute feuille de $\mathcal{G}^s$ rencontre β si et seulement si elle rencontre β'. On en déduit que K est un rectangle de Markov. Soit $\mathcal{H} : \alpha' \to \alpha$ l'application d'holonomie induit par $\mathcal{G}^u$:

$$\mathcal{H}(t') = u^+(t') \cap \alpha$$

Soit f l'application de α dans lui-même qui à t associe $\mathcal{H}(h_2 t)$. Comme $\mathcal{F}^s$ est à holonomie hyperbolique les points fixes de f sont en nombre fini et alternativement répulsifs et attractifs. Soient $\alpha_0 \subset \alpha$ l'ensemble des éléments t de α pour lesquels $u^-(t)$ recontre $s^-(y_0)$. C'est un ouvert de α f-invariant. Les propriétés topologiques de $Q^\Phi \simeq \mathbb{R}^2$ montrent que α_0 est connexe: c'est donc un intervalle non vide de $s^-(z)$ de la forme $]z, t_1[$. L'extrémité t_1 est un point fixe attractif de f (car z est un point fixe répulsif de f et que f n'admet pas de point fixe dans $]z, t_1[$). La feuille $u(t_1)$ est donc h_2-invariante: elle contient un point fixe y_1 de h_2. Comme certaines feuilles de $\mathcal{G}^u$ proches de $u(t_1)$ rencontrent $s(y)$ et que $s(y)$ est disjoint de $s(y_1)$, il s'en suit que y_1 appartient à $u^+(t_1)$.



Scheme 6.

En inversant le raisonnement, on montre que toute feuille de $\mathcal{G}^u$ rencontrant $s^+(y_1)$ rencontre $s^-(y_0)$. De proche en proche on obtient ainsi une suite finie

$y_0, y_1, \ldots, y_{2k} = y'$ de points fixes de h_2 tels que:

$$\mathscr{L}^{+-}(y_{2i}) = \mathscr{L}^{-+}(y_{2i+1})$$
$$\mathscr{L}^{--}(y_{2i-1}) = \mathscr{L}^{++}(y_{2i})$$

L'union Ω^y de ces h_2-losanges recouvrent K. En raisonnant de même pour β' on obtient une suite $x_0, \ldots, x_{21} = x'$ de points fixes de h_1 tels que:

$$\mathscr{L}^{-+}(x_{2i}) = \mathscr{L}^{+-}(x_{2i+1})$$
$$\mathscr{L}^{--}(x_{2i-1}) = \mathscr{L}^{++}(x_{2i})$$

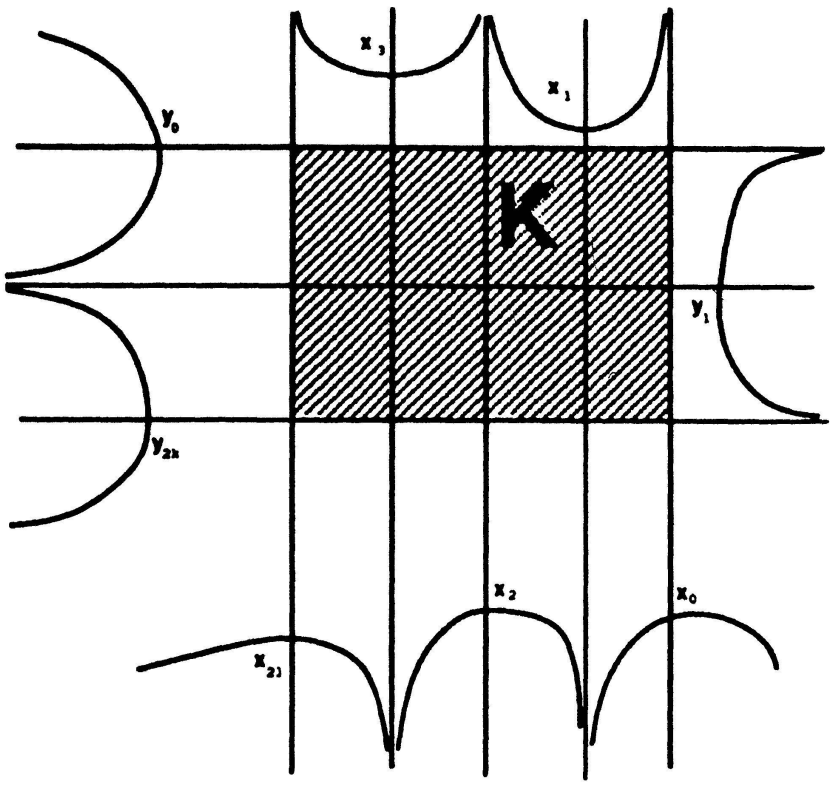
et tels que l'union Ω^x de ces h_2-losanges recouvrent K. Enfin, il est clair que K est un domaine fondamental de l'action de h_2 sur Ω^y et aussi de l'action de h_1 sur Ω^x. Pour tout entier $n = (2k)q + r$ on définit $\mathscr{L}_n = h_1^q \mathscr{L}^{++}(y_r) = \mathscr{L}^{++}(h_1^q y_r)$ si r est pair et $\mathscr{L}_n = h_1^q \mathscr{L}^{-+}(y_r)$ si r est impair. Les $\mathscr{L}_n$ forment une chaîne biinfinie de h_2-losanges de type alternativement $-+$ et $++$. De même pour tout entier $n = (2l)q + r$ on définit $\mathscr{L}'_n = h_2^q \mathscr{L}^{++}(x_r)$ si r est pair et $\mathscr{L}'_n = h_2^q \mathscr{L}^{+-}(x_r)$ si r est impair. Soit $H' \subset H$ le sous-groupe engendré par h_1 et h_2. Soit Ω le support de $(\mathscr{L}_n)$ et Ω' celui de $(\mathscr{L}'_n)$. Ce sont des ouverts H'-invariants, et il est clair que K est un domaine fondamental de (Ω, H') et de (Ω', H'). Donc:

$$\Omega = \Omega' = H' \cdot K$$

Les losanges $\mathscr{L}_n$ correspondent à un chemin géodésique δ dans l'arbre G_{h_2}. Ce chemin n'est autre que l'*axe de translation* de l'action de h_1 sur G_{h_2} (cf. [17]). Par unicité de l'axe de translation, δ est préservé par tous les éléments de γ qui commutent avec h_1 et h_2, et donc en particulier par H. Il en découle que $\Omega = \Omega'$ est H-invariant. Rappelons que h_2 est indivisible. Il existe donc un élément h_3 de H tel que h_2 et h_3 engendrent tout H. Cet élément h_3 agit sur les points fixes y_{2i} en les permutant et en préservant leur ordre. Il existe donc un entier u tel que:

$$h_3 y_i = y_{i+2u}$$

Quitte à inverser u on peut le supposer positif. C'est un diviseur de k et est donc inférieur à k. D'après la proposition 4 tous les losanges $\mathscr{L}_n$ $(0 \leq n \leq 2u - 1)$ sont simples: en effet, l'ensemble des h_2-losanges n'est pas un chapelet car $\mathscr{L}_0$ et $\mathscr{L}_1$ sont en position indirecte. On peut donc construire des anneaux de Birkhoff élémentaires $\mathscr{A}_n$ $(0 \leq n \leq 2u - 1)$ dont les $\mathscr{L}_n$ sont les traces transverses. Deux tels anneaux successifs admettent en commun une orbite périodique dans leur bord. Leur union



Scheme 7.

est l'image d'une immersion "à coins" du tore. En reprenant l'argument du lemme 4.7 on montre aisément qu'aucun des $\mathscr{A}_n$ ne rencontre en son intérieur une composante de bord d'un autre $\mathscr{A}_i$. On peut alors utiliser les méthodes de la section précédente pour montrer qu'à homotopie près le long de Φ^t on peut supposer que les $\mathscr{A}_n$ sont d'intérieurs disjoints. De manière plus précise, pour appliquer avec succès ces méthodes il faut établir l'équivalent du lemme 7.3, i.e.:

LEMME 8.2. *Un élément γ de Γ préserve globalement Ω si et seulement si il appartient à H.*

Preuve. Soit γ un élément de Γ préservant globalement Ω. Il préserve alors la frontière $\partial\Omega$. On en déduit qu'il envoie chaque y_i sur un des $h_1^p y_{i+2s}$, ce qui montre qu'il commute avec h_2. Il agit donc sur G_{h_2} et ceci en préservant l'axe de translation δ. Comme δ est l'axe de translation de h_3, on en déduit que γ commute avec h_3, donc avec tout H. On conclut grâce à la maximalité de H en tant que sous-groupe libre abélien de Γ. □

Après isotopie l'union des $\mathscr{A}_n$ est un plongement topologique injectif du tore dans M, transverse à Φ^t en dehors d'un nombre fini d'orbites périodiques, et dont

la trace transverse est l'union (et non le support) des $\mathscr{L}_n$. En reprenant le raisonnement du corollaire 5.6 on voit qu'on peut coulisser les $\mathscr{A}_n$ au voisinage de leur bord de sorte que l'union des anneaux perturbés forment l'image d'un plongement lisse du tore T_0 transverse à Φ' et dont la trace transverse est $\Omega = \Omega'$. Le groupe fondamental de T_0 s'injecte dans Γ en le groupe $\langle h_2, h_3 \rangle = H$. Il est donc homotope à T^2 dans M. Enfin, les traces de $\mathscr{F}^s$ et de $\mathscr{F}^u$ sur T_0 sont conjuguées aux projections de $\mathscr{G}^s$ et de $\mathscr{G}^u$ sur $\Omega_{/H} = \Omega'_{/H}$. Ceci complète la preuve du théorème B et justifie la description des traces des feuilletages faibles données lors de l'introduction.

9. Unicité de la mise en position optimale d'un tore

9.1. *Preuve du théorème A*

Le contenu de ce paragraphe est très proche de [6], du moins en son esprit. Soient T_1 et T_2 deux tores plongés dans M, transverses à Φ' et homotopes. Rappelons que d'après [6] ou [7] deux tels tores sont incompressibles.

LEMME 9.1. *T_2 est homotope le long des orbites de Φ' à un tore disjoint de T_1.*

Preuve. Nous supposons T_2 en position générale vis-à-vis de T_1, c'est-à-dire transverse à T_1. L'intersection entre les deux tores consiste alors en une union finie $C_1 \cup \cdots \cup C_n$ de cercles plongés dans T_1. Supposons qu'un de ces cercles, disons C_1, soit homotopiquement trivial: il borde alors dans T_1 et T_2 deux disques D_1 et D_2. On se retrouve dans la situation du lemme 7.12 où D_2 joue le rôle du disque D' et D_1 celui du disque D. Il s'en suit qu'en poussant T_2 le long de Φ' au voisinage de D_2, on peut faire disparaître le cercle de points doubles C_1. Après un nombre fini de telles opérations, on se ramène donc au cas où tous les cercles C_i sont homotopiquement non-triviaux. Comme ils sont disjoints, ils délimitent dans T_2 un nombre fini d'anneaux. Comme T_1 et T_2 sont homotopes et que M est irréductible, un argument topologique non trivial mais aisé permet de montrer qu'il existe un anneau $\mathscr{A}_1$ contenu dans T_1 et un anneau $\mathscr{A}_2$ contenu dans T_2 tels que:

- $\mathscr{A}_1$ ne rencontre T_2 qu'en son bord $\partial\mathscr{A}_1$,
- $\mathscr{A}_2$ ne rencontre T_1 qu'en son bord $\partial\mathscr{A}_2$,
- $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ ont même bord et leur union borde dans M un domaine W homéomorphe au tore solide $D^2 \times S^1$.

Quitte à inverser le flot Φ', nous le supposons rentrant dans W en $\mathscr{A}_2$. Nous allons montrer que l'orbite positive de tout élément de $\mathscr{A}_2$ rencontre $\mathscr{A}_1$. Un argument analogue à celui employé précédemment montre alors que T_2 est homotope le long de Φ' à un tore transverse à Φ' ne rencontrant T_1 qu'en $n-2$ cercles

de points doubles. Il suffit alors d'appliquer un nombre fini de telles homotopies pour achever la preuve du lemme.

Supposons donc que tel n'est pas le cas. Il a été montré auparavant que ceci implique l'existence à l'intérieur de W d'une orbite périodique $\bar{\theta}_0$ de Φ^t. Aboutir à une contradiction est cependant un peu plus ardû.

Soit $\hat{\pi} : \hat{M} \to M$ le revêtement associé à $\pi_1(W) \hookrightarrow \Gamma$. Nous notons $\hat{\Phi}^t$, $\hat{\mathscr{F}}^s$, $\hat{\mathscr{F}}^u$ les relevés dans $\hat{M}$ de Φ^t, $\mathscr{F}^s$ et $\mathscr{F}^u$. W se relève dans $\hat{M}$ en un tore solide $\hat{W}$ tel que la restriction à $\hat{W}$ de $\hat{\pi}$ est un homéomorphisme sur son image W. Le bord $\partial\hat{W}$ est union de deux anneaux $\hat{\mathscr{A}}_1$ et $\hat{\mathscr{A}}_2$ au-dessus de $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$.

LEMME 9.2. *L'orbite positive* $\{\hat{\Phi}^t(\hat{x})/t \geq 0\}$ *d'un élément* $\hat{x}$ *de* $\hat{\mathscr{A}}_1$ *ne rencontre pas* $\hat{\mathscr{A}}_2$.

Preuve. Le lemme est évident si $\hat{\Phi}^t$ est rentrant dans $\hat{W}$ en $\hat{\mathscr{A}}_1$ puisqu'alors aucune orbite positive ne peut s'échapper de $\hat{W}$. Nous supposons donc donc $\hat{\Phi}^t$ sortant de $\hat{W}$ en $\hat{\mathscr{A}}_1$. Soit $\hat{T}_1$ le relevé de T_1 dans $\hat{M}$ contenant $\mathscr{A}_1$. C'est un anneau qui déconnecte $\hat{M}$. Soit U^- la composante connexe de $\hat{M}\backslash\hat{T}_1$ contenant l'intérieur de $\hat{W}$ (il convient de remarquer que comme T_1 ne rencontre pas l'intérieur de $\mathscr{A}_2$ il ne rencontre pas l'intérieur de W). Soit U^+ l'autre composante connexe. Comme $\hat{T}_1$ est transverse à $\hat{\Phi}^t$ l'orbite positive de tout point de $\hat{\mathscr{A}}_1$ est entièrement contenue dans une des composantes connexes de $\hat{M}\backslash\hat{T}_1$. Comme $\hat{\Phi}^t$ est sortant en $\hat{\mathscr{A}}_1$ il s'agit de U^+, qui est bien disjoint de $\hat{W}$, et donc de $\hat{\mathscr{A}}_2$. □

LEMME 9.3. *L'ensemble* α*-limite* (*respectivement* ω*-limite*) *d'un élément de* $\hat{M}$ *est vide sauf si cet élément appartient à une feuille de* $\hat{\mathscr{F}}^u$ (*respectivement de* $\hat{\mathscr{F}}^s$) *contenant une orbite périodique de* $\hat{\Phi}^t$, *auquel cas l'ensemble* α*-limite* (*respectivement* ω*-limite*) *est exactement cette orbite périodique. En particulier, si une orbite de* $\hat{\Phi}^t$ *admet un ensemble* α*-limite non vide, et un ensemble* ω*-limite non-vide, c'est alors une orbite périodique.*

Preuve. C'est la traduction dans $\hat{M}$ de la proposition 2.7. □

Soit $\hat{\theta}_0$ l'orbite périodique de $\hat{\Phi}^t$ contenue dans $\hat{W}$ au-dessus de $\bar{\theta}_0$. Soit $\hat{F}$ la feuille de $\hat{\mathscr{F}}^s$ contenant $\hat{\theta}_0$. D'après le lemme 9.2 la feuille $\hat{F}$ ne rencontre pas $\hat{\mathscr{A}}_1$. Soit $\hat{F}_0$ la composante connexe de $\bar{W} \cap \hat{F}$ contenant $\hat{\theta}_0$: sa frontière est contenue dans $\hat{\mathscr{A}}_2$. D'après le lemme 9.3 aucun élément de $\hat{F}_0\backslash\hat{\theta}_0$ n'admet un ensemble α-limite non-vide. Son orbite négative doit donc s'échapper du compact $\hat{W}$. Il s'en suit que $\hat{F}_0$ est un anneau compact découpé dans le cylindre $\hat{F}$ et dont le bord est constitué de deux cercles plongés dans $\hat{\mathscr{A}}_2$. Ces deux cercles délimitent dans $\hat{\mathscr{A}}_2$ un sous-anneau $\hat{\mathscr{A}}'_2$. L'union $\hat{\mathscr{A}}'_2 \cup \hat{F}_0$ est un tore topologique plongé dans $\hat{W}$. Il y borde un tore solide $\hat{W}' \subset \hat{W}$. Le flot $\hat{\Phi}^t$ est tangent à $\partial\hat{W}'$ en $\hat{F}_0$ et rentrant dans

$\hat{W}'$ en $\hat{\mathscr{A}}'_2$. Donc l'orbite positive de tout élément $\hat{x}$ de $\hat{\mathscr{A}}'_2$ est entièrement contenue dans le compact $\hat{W}'$, et l'ensemble ω-limite de $\hat{x}$ est non-vide. D'après le lemme 9.3, ceci implique que toutes les feuilles de $\hat{\mathscr{F}}^s$ recontrant $\hat{\mathscr{A}}'_2$ sont cylindriques. Ceci est absurde puisque $\mathscr{F}^s$ n'a qu'un nombre dénombrable de feuilles cylindriques. □

On peut donc supposer que les tores T_1 et T_2 sont disjoints. Comme ils sont homotopes et que M est irréductible, leur union borde dans M un domaine W homéomorphe au produit du tore par l'intervalle. Notons que ∂W est transverse à Φ^t et donc aussi aux feuilletages faibles. Soit G^s la restriction à W de $\mathscr{F}^s$. Comme $\mathscr{F}^s$ n'admet pas de feuilles compactes, G^s est sans composante de Reeb. De plus, l'argument final utilisé lors de la preuve de lemme 9.1 s'applique ici pour montrer qu'aucune feuille de G^s n'est un anneau compact dont le bord est entièrement contenu dans un des tores T_1 ou T_2. En particulier, G^s n'admet pas de semi-composante de Reeb. Les feuilletages de codimension un de $T^2 \times [0, 1]$ sans composante de Reeb et sans semi-composante de Reeb sont bien connus: à conjugaison topologique près, ce sont tous des produits par l'intervalle [0, 1] d'un feuilletage de dimension un du tore.

Supposons l'existence dans W d'une orbite périodique θ_0 de Φ^t. Soit G_0 la feuille de G^s contenant θ_0: elle est homéomorphe à $g_0 \times [0, 1]$ où g_0 est la trace de G_0 sur T_1. Comme θ_0 est homotopiquement non-trivial g_0 est un cercle. Il s'en suit que G_0 est un anneau compact, découpé dans la feuille cylindrique $\mathscr{F}^s(\theta_0)$ et contenant θ_0 en son intérieur. On en déduit que Φ^t est rentrant dans W aussi bien en T_1 qu'en T_2. Mais en raisonnant de même à partir du feuilletage instable $\mathscr{F}^u$, on montre que Φ^t est sortant de W: contradiction.

Quitte à inverser le flot nous le supposons rentrant dans W en T_1. Nous venons de montrer qu'il n'admet aucune orbite périodique dans W. Donc, toutes les orbites positives partant de T_1 rencontrent T_2. Ceci montre le théorème A.

9.2. *Preuve de théorème* A′

Soient T_1 et T_2 deux tores quasi-transverses librement homotopes. Il s'agit de montrer qu'ils sont homotopes le long de Φ^t. Il est clair que ceci revient à montrer qu'ils ont même trace transverse. Soit H le sous-groupe de Γ correspondant à $\pi_1(T_1) = \pi_1(T_2)$. Soit $\mathscr{C}_1$ la trace de T_1 et $\mathscr{C}_2$ celle de T_2: nous les choisissons H-invariantes. Ce sont des chapelets de losanges. Soit h_1 l'élément de H engendrant le stabilisateur des sommets de $\mathscr{C}_1$, et h_2 celui engendrant le stabilisateur des sommets de $\mathscr{C}_2$. Si h_1 et h_2 sont différents, il exïste d'après le théorème B un tore T_3 transverse à Φ^t et homotope à T_1 et T_2. La trace transverse Ω de T_3 est un ouvert de Q^Φ H-invariant. Cet ouvert est une union de h_1-losanges correspondant dans G_{h_1}

à un axe de translation de h_2. Or, $\mathscr{C}_1$ correspond lui aussi à un axe de translation de h_2 dans G_{h_1}. Par unicité de l'axe de translation nous aurions $\mathscr{C}_1 = \Omega$ ce qui est manifestement absurde.

Donc, h_1 et h_2 sont égaux. Soit h_3 un supplémentaire de $h_1 = h_2$ dans H. $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ correspondent à des axes de translations de h_3 dans G_{h_1}. Ils sont donc égaux.

10. Mise en position optimale simultanée de plusieurs tores

Nous démontrons ici le théorème E. Nous aurons besoin du lemme topologique suivant:

LEMME 10.1. *Soient T_1 et T_2 deux tores plongés dans M de manière incompressible et transverses l'un par rapport à l'autre. Soient $\tilde{T}_1$ et $\tilde{T}_2$ deux relevés dans $\tilde{M}$ de T_1 et T_2. On suppose que l'intersection entre $\tilde{T}_1$ et $\tilde{T}_2$ est une droite fermée Δ. Alors, tout tore plongé dans M homotope à T_1 rencontre T_2.*

Preuve. Soit $H \simeq \pi_1(T_1)$ le sous-groupe de Γ préservant globalement $\tilde{T}_1$. Soit $\hat{\pi} : \hat{M} \to M$ le revêtement associé à H. Le plan $\tilde{T}_1$ se projette dans $\hat{M}$ en un tore $\hat{T}_1$ tel que la retriction de $\hat{\pi}$ à ce tore est un homéomorphisme sur son image T_1. La droite Δ se projette dans $\hat{T}_1$ en un cercle $\hat{\Delta}$ (cette projection est une cercle et non une droite puisque $T_1 \cap T_2$ consiste en un nombre fini de courbes fermées simples). Le plan $\tilde{T}_2$ se projette dans $\hat{M}$ en une surface plongée $\hat{T}_2$ qui est soit un tore, soit un anneau. Comme $\tilde{T}_1 \cap \tilde{T}_2$ se réduit à Δ et que H préserve globalement $\tilde{T}_1$, l'intersection entre $\hat{T}_1$ et $\hat{T}_2$ se réduit à $\hat{\Delta}$. Soit $\bar{\Delta}$ le cercle $\hat{\pi}(\hat{\Delta}) = \pi(\Delta)$. C'est une courbe fermée simple contenue dans T_2. Il existe donc dans T_2 une courbe fermée simple C transverse à $\bar{\Delta}$ et ne rencontrant $\bar{\Delta}$ qu'en un unique point x_0. Soit $\hat{x}_0$ l'unique élément de $\hat{T}_1$ au-dessus de x_0. Soit $\hat{C}$ l'unique relevé de C passant par $\hat{x}_0$: comme C est une courbe fermée simple ne rencontrant $\bar{\Delta}$ qu'en x_0 c'est une droite contenue dans $\hat{T}_2$ ne rencontrant $\hat{\Delta}$ qu'en $\hat{x}_0$ (ceci montre en particulier que $\hat{T}_2$ est un anneau). Il s'en suit que $\hat{C}$ est une droite fermée plongée dans $\hat{M}$ ne rencontrant $\hat{T}_1$ qu'en $\hat{x}_0$. En d'autres termes, le nombre d'intersection entre $\hat{C}$ et $\hat{T}_1$ est non-nul.

Soit T'_1 un tore plongé dans M homotope à T_1. Il se relève dans $\hat{M}$ en un tore $\hat{T}'_1$ homotope à $\hat{T}_1$. Le nombre d'intersection entre $\hat{T}'_1$ et $\hat{C}$ est donc lui aussi non-nul. Donc, T'_1 rencontre $C \subset T_2$. □

Une simple induction sur le nombre de tores permet de ramener le preuve du théorème E à celle de:

PROPOSITION 10.2. *Soit $(T_1, \ldots, T_n)$ une collection finie de tores transverses ou quasi-transverses à Φ^t. On les suppose deux-à-deux non homotopes. On suppose de*

plus que les T_i $(1 \leq i \leq n-1)$ sont deux-à-deux disjoints, et que T_n est homotope à un tore T'_n disjoint de l'union des T_i $(1 \leq i \leq n-1)$. Alors, T'_n peut être choisi homotope à T_n le long de Φ^t. En particulier, T'_n peut être choisi transverse ou quasi-transverse à Φ^t.

Preuve. La preuve est similaire en bien des points à celle du lemme 9.1. Notons T l'union $T_1 \cup \cdots \cup T_{n-1}$. Quitte à modifier légèrement T_n on peut le supposer transverse à T. L'intersection entre T et T_n consiste alors en une union finie de cercles plongés dans T_n. Nous les notons $C_1, \ldots, C_p$. Soient $\theta_1, \ldots, \theta_{2q}$ les orbites périodiques contenues dans $T \cup T_n$: chacune d'entre elles est contenue dans un des tores T_i $(1 \leq i \leq n)$ quasi-transverses à Φ^t.

LEMME 10.3. *Aucune orbite θ_j $(1 \leq j \leq 2q)$ ne rencontre transversalement un tore T_i $(1 \leq i \leq n)$.*

Preuve. Supposons *a contrario* que l'une des orbites θ_j rencontre transversalement un des tores T_i. Alors, θ_j est contenue dans un des tores $T_{i'}$ où l'indice i' est différent de i. Ce tore $T_{i'}$ est quasi-transverse à Φ^t. Nous nous placerons ici dans le cas où $T_i = T_n$. L'autre cas, à savoir celui où $T_{i'} = T_n$ se traite de manière analogue. Si T_n est transverse à Φ^t, son nombre d'intersection avec θ_j est non-nul. Or, T_n est homotope à T'_n qui est disjoint de θ_j: contradiction. Donc, T_n est quasi-transverse à Φ^t. Soit $\hat{\pi} : \hat{M} \to M$ le revêtement associé à $\pi_1(T_n) \hookrightarrow \Gamma$. Les tores T_n et T'_n se relèvent dans $\hat{M}$ en deux tores $\hat{T}_n$ et $\hat{T}'_n$. Soit $\hat{\theta}_j$ un relevé dans $\hat{M}$ de θ_j rencontrant $\hat{T}_n$. D'après les lemmes 7.4 et 7.5 $\hat{\theta}_j$ est une droite fermée dont le nombre d'intersection avec $\hat{T}_n$ est non-nul. Elle doit donc rencontrer $\hat{T}'_n$: ceci est absurde puisque θ_j et T'_n sont disjoints. □

LEMME 10.4. *Les θ_j sont disjoints des C_k.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux indices j et k pour lesquels θ_j et C_k sont d'intersection non-vide. Soit i l'indice compris entre 1 et $n-1$ du tore T_i contenant C_k. D'après le lemme précédent θ_j ne peut être transverse à T_n ni à T_i et est donc entièrement contenu dans T_n et T_i. Il est donc confondu avec C_k. De plus, T_i et T_n sont quasi-transverses à Φ^t. Soit $\tilde{\theta}_j$ un relevé dans $\tilde{M}$ de θ_j. Soient $\tilde{T}_i$ et $\tilde{T}_n$ les relevés de $\tilde{M}$ contenant $\tilde{\theta}_j$. Soient $\mathscr{C}_i = \pi^{\Phi}(\tilde{T}_i)$ et $\mathscr{C}_n = \pi^{\Phi}(\tilde{T}_n)$ les traces transverses de T_i et de T_n. Ce sont des chapelets de $[\theta_j]$-losanges passant par $\tilde{\theta}_j$. Or, tout point de Q^{Φ} est sommet d'au plus deux chapelets de losanges biinfinis, et l'intersection de ces deux chapelets se réduit au sommet commun. Donc, soit $\mathscr{C}_i$ et $\mathscr{C}_n$ sont confondus, soit leur intersection se réduit à $\tilde{\theta}_j$. Le premier cas est impossible d'après le lemme 7.3 car T_i et T_n ne sont pas homotopes. Le second cas aussi puisque T_n est homotope à un tore disjoint de T_i, ce qui montre d'après le lemme 10.1 que $\tilde{T}_i \cap \tilde{T}_n$ ne peut consister en une seule droite fermée. Contradiction. □

Si $C_k \subset T_n \cap T_i$ est homotopiquement trivial, il découle du lemme 10.4 qu'il borde dans T_i et T_n deux disques transverses à Φ^t. On peut alors utiliser comme lors de la preuve du lemme 9.1 le lemme 7.12 pour éliminer le cercle de points doubles C_k. Donc, après un nombre fini et éventuel d'homotopies de T_n le long des orbites de Φ^t, on peut supposer qu'aucun des cercles C_k n'est homotopiquement trivial.

LEMME 10.5. *Il existe un anneau A_n plongé dans T_n est un anneau A_i plongé dans T tels que*:

- *les anneaux A_i et A_n sont d'intérieurs disjoints, mais leurs bords sont confondus,*
- *leur union bord dans M un domaine W homéomorphe à $D^2 \times S^1$,*
- *l'intérieur du domaine W est disjoint de $T \cup T_n$.*

Preuve. Soit T_i un tore rencontrant T_n (s'il n'en existe pas, la proposition est validée). Soient $\tilde{T}_n$ et $\tilde{T}_i$ deux relevés dans $\tilde{M}$ de T_n et de T_i d'intersection non-vide. D'après le lemme 10.1, l'intersection entre $\tilde{T}_n$ et $\tilde{T}_i$ n'est pas connexe. Il existe donc deux bandes $\tilde{A}_n$ et $\tilde{A}_i$ homéomorphes à $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ telles que:

- elles ont même bord,
- elles ne se rencontrent qu'en leur bord,
- $\tilde{A}_n$ est contenue dans $\tilde{T}_n$,
- $\tilde{A}_i$ est contenue dans $\tilde{T}_i$.

Ces bandes $\tilde{A}_n$ et $\tilde{A}_i$ sont au-dessus de deux anneaux A'_n et A'_i plongés dans M, l'un contenu dans T_n, l'autre contenu dans T_i, et homotopes l'un à l'autre dans M. L'union $A'_n \cup A'_i$ est une immersion topologique compressible du tore. Il existe donc deux sous-anneaux A_i et A_n de ce tore immergé, l'un contenu dans A'_i, l'autre dans A'_n, de même bord mais d'intérieurs disjoints. Alors, $A_i \cup A_n$ borde dans M un domaine W homéomorphe au tore solide. En étudiant l'intersection de ce domaine avec T, on voit qu'il contient un sous-domaine analogue et d'intérieur disjoint de $T \cup T_n$. On peut donc choisir les anneaux A_i et A_n de sorte que toutes les conditions voulues au lemme 10.5 soient vérifiées. □

Chacun des anneaux A_n et A_i du lemme 10.5 est d'intérieur transverse à Φ^t *en dehors d'un nombre fini d'orbites périodiques.*

LEMME 10.6. *L'intérieur de A_n est transverse à Φ^t si et seulement si l'intérieur de A_i est transverse à Φ^t.*

Preuve. Supposons *a contrario* que A_n est d'intérieur transverse à Φ^t mais que A_i contient une orbite périodique θ_j (l'autre cas, à savoir A_i transverse à Φ^t mais pas A_n est bien sûr analogue). Nous considérons comme lors de la preuve du lemme 9.1 le revêtement $\hat{\pi} : \hat{M} \to M$ associé à $\pi_1(W) \hookrightarrow \Gamma$. Les données $(A_i, A_n, W, \Phi^t, \theta_j, \mathcal{F}^u, T_i)$ se relèvent dans $\hat{M}$ en $(\hat{A}_i, \hat{A}_n, \hat{W}, \hat{\Phi}^t, \hat{\theta}_j, \hat{\mathcal{F}}^u, \hat{T}_i)$ de sorte que $\hat{\pi}$ se restreint

à $\hat{W}$ en un homéomorphisme sur son image W. Quitte à inverser Φ^t, on peut le supposer rentrant dans W en A_n. Soit $\hat{F}_0$ la feuille de $\hat{\mathscr{F}}^u$ contenant $\hat{\theta}_j$. Soit V_0 un voisinage tubulaire régulier de $\hat{\theta}_j$ dans $\hat{F}_0$. On choisit V_0 suffisament petit pour qu'une des composantes connexes de $V_0 \setminus \hat{\theta}_j$ soit disjointe de $\hat{W}$ et pour que l'autre soit contenue dans $\hat{W}$. Soit $\hat{F}_1$ la composante connexe de $\hat{F}_0 \setminus \hat{\theta}_j$ contenant $V_0 \cap \hat{W}$. On montre comme lors de la preuve du lemme 9.2 que $\hat{F}_1$ ne rencontre pas $\hat{A}_n$. Par ailleurs, comme l'intersection d'une feuille de $\hat{\mathscr{F}}^u$ avec $\hat{T}_i$ est connexe, $\hat{F}_1$ ne rencontre pas non plus $\hat{A}_i$. La semi-feuille $\hat{F}_1$ est donc entièrement contenue dans le compact $\hat{W}$: ceci contradit le lemme 9.3. □

Dans le cas où les anneaux A_n et A_i sont d'intérieurs transverses à Φ^t, on peut exactement comme lors de la preuve du lemme 9.1 homotoper l'un le long de Φ^t pour le rendre disjoint de l'autre. En d'autres termes, une homotopie de T_n le long des orbites de Φ^t supprime les deux cercles de points doubles $\partial A_i = \partial A_n$. De proche en proche, on diminue ainsi le nombre $2q$ de cercles de points doubles. Pour conclure, il ne reste qu'à traiter le cas où ni A_i, ni A_n n'est d'intérieur transverse à Φ^t. Nous allons montrer par l'absurde que ce cas est en fait impossible.

Supposons donc que A_i et A_n contiennent l'un comme l'autre une orbite périodique. Alors, T_i et T_n sont deux tores quasi-transverses à Φ^t, transverses entre eux, et se rencontrant hors des orbites périodiques qu'ils contiennent. Soit C_k une composante connexe de leur intersection. Soit $\tilde{C}_k$ un relevé de C_k dans $\tilde{M}$, et $\tilde{T}_n$, $\tilde{T}_i$ les relevés dans $\tilde{M}$ de T_n, T_i contenant $\tilde{C}_k$. Soient $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_i$ les chapelets de losanges $\pi^\Phi(\tilde{T}_n)$ et $\pi^\Phi(T_i)$. Soit $\mathscr{L}_n$ le losange de $\mathscr{C}_n$ dont l'intérieur contient $\pi^\Phi(\tilde{C}_k)$ et $\mathscr{L}_i$ le losange de $\mathscr{C}_i$ dont l'intérieur contient $\pi^\Phi(\tilde{C}_k)$. D'après le lemme 10.4, le cercle C_k est librement homotope aux orbites périodiques contenues dans T_i ainsi qu'à celles contenues dans T_n. Ceci montre que $\mathscr{L}_i$ et $\mathscr{L}_n$ sont des $[C_k]$-losanges (où $[C_k]$ désigne un élément de Γ fixant globalement $\tilde{C}_k$). Comme leurs intérieurs ne sont pas disjoints, on en déduit que les losanges $\mathscr{L}_i$ et $\mathscr{L}_n$ sont égaux. Il s'en suit que les chapelets $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_i$ sont confondus. D'après le lemme 7.3, les tores T_i et T_n sont librement homotopes. Contradiction. □

REFERENCES

[1] ANOSOV, D. V., *Geodesic flows on closed riemannian manifolds with negative curvature*, Proc. Steklov Inst. Math. AMS Translations (1969).

[2] BARBOT, T., *Géométrie transverse des flots d'Anosov*, Thèse (1992).

[3] BARBOT, T., *Caractérisation des flots d'Anosov en dimension 3 par leurs feuilletages faibles*, à paraître.

[4] BONATTI, C. et LANGEVIN, R., *Un exemple de flot d'Anosov transitif transverse à un tore et non conjugué à une suspension*, Prépublication Université de Bourgogne (1992).

[5] BOWEN, R., *On Axiom A diffeomorphisms*, A.M.S. Providence *35* (1970).

[6] BRUNELLA, M., *Separating the basic sets of a nontransitive Anosov flow*, Bull. London. Math. Soc., *25* (1993), 487–490.

[7] CHRISTY, J. P., *Anosov flows on three-manifolds*, Thèse (1984).
[8] FENLEY, S. R., *Quasigeodesic Anosov flows and homotopic properties of flow lines*, preprint.
[9] FEUSTEL, C. T., *Some applications of Waldhausen's results on irreducible surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. *149* (1970), 575–583.
[10] FRIED, D., *Transitive Anosov flows and pseudo-anosov maps*, Topology *22* (1983), 299–304.
[11] HAEFLIGER, A. et REEB, G., *Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan*, Ens. Math. *3* (1957), 107–125.
[12] HANDEL, M. et THURSTON, W., *Anosov flows on new 3-manifolds*, Inv. Math. *59* (1980), 95–103.
[13] PALMEIRA, C. F. B., *Open manifolds foliated by planes*, Ann. of Math. *107* (1978), 109–131.
[14] PLANTE, J. F., *Solvable groups acting on the line*, Trans. Amer. Math. Soc. *278* (1983), 401–414.
[15] ROUSSARIE, R., *Plongement dans les variétés et classification des feuilletages sans holonomie*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. *43* (1974), 101–142.
[16] SCHWARTZMAN, S., *Asymptotic cycles*, Ann. of Math. *66* (1957), 270–284.
[17] SERRE, J. P., *Arbres, amalgames*, SL_2, Astérisque *46* (1977).
[18] THURSTON, W., *Foliations on 3-manifolds which are circle bundles*, Thèse Berkeley (1972).

Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Rio de Janeiro
Brésil

Received November 11, 1993