

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 69 (1994)

Artikel: Réseaux électrique planaires I.
Autor: Colin de Verdière, Yves de
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-52266>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 08.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Réseaux électriques planaires I

YVES COLIN DE VERDIÈRE

Cet article est le premier d'une série de 2: le second [CV-G-V] *Planar electric networks II* est cosigné avec Dirk Vertigan et Isidoro Gitler. Des résultats voisins de ceux obtenus dans [CV-G-V] sont montrés par des méthodes plus algébriques dans [C-I-M].

Un réseau électrique (Γ, ρ) est la donnée

(1) d'un graphe fini $\Gamma = (V, V_o, E)$, le *réseau*, dont V est l'ensemble des sommets, $V_o \subset V$ l'ensemble des sommets *terminaux* ou *bornes* et E l'ensemble des arêtes. Γ n'est pas orienté. Γ peut avoir des boucles et des arêtes multiples. Il n'est pas nécessairement connexe. N désignera le cardinal de V_o et on supposera que l'on a indexé les sommets de V_o par les entiers de 1 à N .

(2) d'une famille de *conductances* (en électricité les conductances sont les inverses des résistances) $\rho = (\rho_{i,j}) \in]0, +\infty[^E$. On a toujours $\rho_{i,j} = \rho_{j,i}$.

On associe à ρ la forme quadratique *énergie électrique*

$$q_\rho(x) = \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \in E} \rho_{i,j} (x_i - x_j)^2$$

sur \mathbf{R}^V . Il faut remarquer que l'application $\psi = \psi_\Gamma : \rho \rightarrow q_\rho$ n'est pas injective s'il y a des boucles ou des arêtes multiples. On note \mathcal{R}_Γ le cône des q_ρ , sa dimension est le nombre d'arêtes du complexe simplicial de dimension 1 Γ' obtenu de Γ en supprimant les boucles et en identifiant toutes les arêtes joignant le même couple de sommets.

Un réseau électrique (Γ, ρ) étant donné, on considère l'application linéaire (*réponse du réseau*)

$$L = L_{\Gamma, \rho} : \mathbf{R}^{V_o} \rightarrow \mathbf{R}^{V_o}$$

qui, à tout potentiel électrique $x = (x_i)$ donné sur les bornes, associe le courant électrique $I = (I_i)$ sortant par les bornes lorsque le régime stationnaire est établi dans le circuit. On verra au §1 que L est en fait symétrique. Il sera clair également que $L_{\Gamma, \rho}$ ne dépend de ρ que par l'intermédiaire de q_ρ .

On s'intéresse maintenant à l'application (non-linéaire)

$$\Phi_\Gamma : \mathcal{R}_\Gamma \rightarrow \text{Sym}(\mathbf{R}^{V_o})$$

qui à q_ρ associe la réponse $L_{\Gamma,\rho}$. Le but de ces 2 articles est l'étude de Φ_Γ lorsque le graphe Γ est *planaire*. On entend par là que Γ se plonge comme espace topologique de dimension 1 dans le disque unité du plan de façon que les sommets de V_o soient sur le bord de ce disque.

Les résultats obtenus sont des généralisations de résultats obtenus précédemment par Curtis, Mooers et Morrow dans le cas de graphes particuliers: les graphes rectangulaires et les graphes circulaires ([C-M], [C-M-M]).

Les motivations pour étudier ce problème sont nombreuses: la mienne provient d'une connection possible avec les problèmes de spectres de graphes ([CV1], [CV2], [B-CV]); il est également intéressant de considérer les graphes planaires en relation avec le problème continu analogue qui vient d'être résolu en dimension 2 ([NA]), alors qu'il l'est depuis plus longtemps en dimension plus grande ([S-U]).

Décrivons les résultats obtenus:

(1) Soient A, B 2 sous-ensembles disjoints de V_o de même cardinal k . Nous dirons que la paire (A, B) est Γ -connectée s'il existe des chemins $\gamma_1, \dots, \gamma_l, \dots, \gamma_k$ de Γ 2 à 2 disjoints tels que $\gamma_l(0) \in A$, $\gamma_l(1) \in B$ et $\gamma_l([0, 1]) \cap V_o = \emptyset$.

Soit $L_{A,B}$ la sous-matrice de $L = L_{\Gamma,\rho}$ qui décrit les courants sortant par B lorsqu'on applique un potentiel nul hors de A . Alors on a:

si (A, B) n'est pas Γ -connecté, $\det(L_{A,B}) = 0$.

La réciproque n'est pas vraie en général, mais l'est si Γ est planaire et (A, B) *non-entrelacé*, ce qui signifie qu'on peut couper le bord du disque en 2 arcs disjoints dont l'un contient A et l'autre B . Dans ce cas, si (A, B) est Γ -connecté et non-entrelacé, $\det(L_{A,B}) > 0$. Le signe du déterminant a ici un sens, car les Γ -connections possibles entre A et B établissent une unique bijection entre A et B .

Soit maintenant Σ_N l'espace des matrices symétriques $N \times N$ dont la somme des éléments de chaque ligne est nulle. C'est un espace vectoriel de dimension $N(N-1)/2$. On définit un ouvert $\Omega_N \subset \Sigma_N$ par les inéquations

$$\Omega_N = \{L \in \Sigma_N \mid \forall (A, B) \text{ non entrelacés, } \det(L_{A,B}) > 0\}.$$

On dira que Γ (planaire) est *bien connecté* si toute paire (A, B) non entrelacée est Γ -connectée. Dans ce cas, l'image de Φ_Γ est contenue dans Ω_N .

(2) Nous introduisons alors une notion de minimalité: un réseau planaire bien connecté sera dit *N-critique* s'il n'est plus bien connecté dès qu'on enlève une arête ou que l'on identifie 2 sommets (non tous deux des bornes) joints par une arête.

Un des résultats principaux de cet article est le suivant: si Γ est N-critique, l'application Φ_Γ est *propre* de \mathcal{R}_Γ dans Ω_N .

Ce résultat utilise des compactifications de \mathcal{R}_Γ et de Ω_N qui sont d'un intérêt indépendant: les compactifications *lagrangiennes*. Décrivons-les brièvement: pour compactifier l'espace des formes quadratiques sur un espace vectoriel réel de dimension finie X , on plonge celui-ci dans la grassmannienne lagrangienne de $X \oplus X^*$ munie de la forme symplectique canonique en associant à une forme quadratique le graphe de l'application linéaire de X dans X^* qui lui est associée. La compactification de \mathcal{R}_Γ ainsi obtenue admet une stratification naturelle dont les strates sont les $\mathcal{R}_{\Gamma'}$, où Γ' parcourt les *mineurs* de Γ . Cette stratification a une bonne structure différentiable, ce qui permet de simplifier les preuves de certains résultats obtenus précédemment sur l'invariant $\mu(\Gamma)$ ([CV1], [CV2], [B-CV]). Un point important est que cette compactification s'identifie à celle obtenue en prenant les limites simples de formes quadratiques (vues comme fonction à valeurs dans $[0, \infty]$). Cela est dû aux propriétés de la structure d'ordre sur \mathcal{R}_Γ .

On montre en fait que Φ_Γ s'étend à cette compactification, à condition de compactifier Ω_N de la même façon; du point de vue symplectique, il s'agit d'un bel exemple de réduction symplectique: la variété co-isotrope est donnée par les lois de Kirchoff aux sommets intérieurs.

(3) Nous donnons enfin une caractérisation des réseaux Γ (non-planaires) pour lesquels il existe un ordre cyclique sur V_o tel que l'image de Φ_Γ soit contenue dans Ω_N : ils sont équivalents à un réseau planaire par des transformations simples.

(4) Nous montrons aussi comment l'étude des réseaux résistifs *non-linéaires* se déduit facilement du cas linéaire.

(5) Enfin, annonçons brièvement quelques résultats de [CV-G-V]. La notion nouvelle introduite est celle de *transformation électrique*: ces transformations élémentaires $(\Gamma, \rho) \rightarrow (\Gamma', \rho')$ sont bien connues pour ne pas modifier la matrice L : il s'agit des suivants: ôter un sommet isolé, ôter une boucle ou une arête pendante, remplacer 2 conducteurs en série ou en parallèle par un seul et enfin la transformation étoile-triangle. Le résultat principal de [CV-G-V] est que 2 réseaux planaires bien connectés (avec le même N) sont équivalents par transformation électrique. On en déduit la solution du problème inverse: 2 réseaux électriques planaires avec le même N donnent la même réponse L si et seulement s'ils sont équivalents par transformation électrique.

Plan

1. Réseaux généraux; connections.
2. Compactifications lagrangiennes.
3. Compactification de \mathcal{R}_Γ et mineurs.

4. Cas planaire: bonne connection.
5. L'ouvert Ω_N .
6. Cas des graphes N-critiques.
7. Réseaux ayant toujours une réponse de réseaux planaires.
8. L'invariant $\mu(\Gamma)$ revisité.
9. Problèmes.
10. Références.

Je remercie François Jaeger de m'avoir indiqué la référence [TH] et pour son soutien constant dans ce travail. J'adresse aussi mes remerciements les plus vifs au referee qui, par sa lecture attentive de 2 versions successives de ce travail, a grandement contribué à son amélioration.

1. Réseaux généraux; connections

Comment obtient-on la réponse d'un réseau électrique (Γ, ρ) arbitraire? Si $x \in \mathbf{R}^{V_o}$, on pose

$$Q_\rho(x) = \inf q_\rho(y),$$

où le inf porte sur les $y \in \mathbf{R}^V$ tels que $y|_{V_o} = x$ (on lit les x, y comme des fonctions numériques sur V, V_o).

Si $V = V_1 \cup V_2$, où V_2 est l'ensemble des sommets qui ne sont pas connectés à V_o et $V_1 = V \setminus V_2$, le inf est atteint pour un y constant sur chaque composante connexe de V_2 , on peut donc supposer $V_2 = \emptyset$ et le inf est alors atteint pour l'unique fonction valant x sur V_o et harmonique à l'intérieur de V_1 au sens suivant:

$$\forall j \in V \setminus V_o, \quad \sum_{k \sim j} \rho_{j,k} (y_j - y_k) = 0.$$

L'unicité est une conséquence du principe du maximum et l'existence vient de la propriété de la fonctionnelle q_ρ restreint à l'espace affine des y valant x sur V_o . Il faut remarquer que la condition d'harmonicité se réinterprète en termes de courants électriques: la somme des courants électriques sortants d'un sommet intérieur j est nulle: c'est une des lois de Kirchoff.

Notons donc $y_j(x)$ cette solution (potentiel d'équilibre) qui est une fonction C^∞ de x . On a ainsi:

$$Q_\rho(x) = q_\rho(x_i, y_j(x)).$$

Calculons les dérivées partielles de Q_ρ , il vient:

$$\frac{\partial Q_\rho}{\partial x_i} = \frac{\partial q_\rho}{\partial x_i} + \sum_{j \in V \setminus V_o} \frac{\partial q_\rho}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i},$$

et ces derniers termes sont donc nuls; on a ainsi:

$$\frac{\partial Q_\rho}{\partial x_i} = \sum_{j \sim i} \rho_{i,j}(x_i - y_j(x))$$

qui est le courant entrant dans le réseau par la borne i . Ainsi les courants sortants sont donnés par les dérivées partielles de $-Q_\rho(x)$; cela montre que la matrice $L = L_{\Gamma, \rho}$ est symétrique.

Il est clair que les vecteurs constants sont dans le noyau de L . Donc la somme des éléments de chaque ligne de L est nulle. On note Σ_N l'espace vectoriel des matrices symétriques $N \times N$ ayant cette propriété. Sa dimension est $N(N-1)/2$.

Etudions quelques propriétés générales de L .

DÉFINITION 1. Deux parties disjointes A et B de V_o seront dites Γ -connectées si elles ont le même nombre d'éléments $k = \#A = \#B$ et s'il existe k chemins disjoints $\gamma_1, \dots, \gamma_l, \dots, \gamma_k$ de Γ qui vérifient:

(i) $\forall l, \gamma_l(0) \in A, \gamma_l(1) \in B$,

(ii) $\forall l, \gamma_l([0, 1]) \cap V_o = \emptyset$. Une Γ -connection de (A, B) est alors la donnée d'une telle famille de chemins, elle induit une bijection de A sur B .

Désignons alors par $L_{A,B}$ la sous-matrice carrée de L dont les indices de colonnes sont dans A et ceux de lignes dans B . Cette matrice exprime les courants sortants par B lorsqu'on applique aux bornes un potentiel à support dans A .

On a la:

PROPOSITION 1. Si (A, B) n'est pas Γ -connectée, la matrice $L_{A,B}$ est singulière.

Preuve. Le cas où $k = \#A = \#B = 1$ sera traité indépendamment dans la proposition 2.

On applique le théorème de Whitney-Menger ([BE], p. 199) aux sommets a et b du graphe obtenu à partir de Γ en ajoutant un sommet a joint à tous les sommets de A , un sommet b joint à tous ceux de B et en ôtant les sommets de $V_o \setminus (A \cup B)$. Si Γ ne connecte pas A et B , on montre ainsi qu'il existe un choix de $q < k$ sommets de Γ privé des sommets de $V_o \setminus \{A \cup B\}$, qui, si on les ôte, déconnecte A de B (certains de ces sommets peuvent être dans A ou B).

Il est alors clair que la matrice $L_{A,B}$ se factorise par une application dans \mathbf{R}^q et donc est singulière: en effet on peut commencer par déterminer le potentiel d'équilibre sur ces q sommets, puis à partir de cette seule donnée déterminer les courants sortants par B . \square

Etudions quelques cas particuliers:

(1) si $k = 1, 2$ sommets a, b distincts de V_o sont Γ -connectés, s'il y a un chemin γ de Γ qui les joint sans rencontrer d'autres sommets de V_o .

On a alors:

PROPOSITION 2. $l_{a,b} \geq 0$ et $l_{a,b} > 0$ si et seulement si (a, b) est Γ -connectée.

Preuve. Supposons que $x_a = 1$ et $\forall i \in V_o \setminus a, x_i = 0$, alors le potentiel d'équilibre est partout ≥ 0 (principe du maximum) et donc il n'y a que des courants sortants ≥ 0 . Supposons que le courant sortant par b soit nul et soit γ un chemin joignant a et b , soit α le sommet de γ le plus éloigné de b tel que le potentiel d'équilibre soit nul sur la partie de γ située entre b et α . Alors, il y a une arête au moins (α, β) telle que le potentiel d'équilibre est < 0 en β , ce qui contredit le principe du maximum. \square

(2) Si $k = 2$, on a la.

PROPOSITION 3. Si $A = \{a_1, a_2\}$ et $B = \{b_1, b_2\}$, si $L_{A,B}$ est singulière, ou bien (A, B) n'est pas Γ -connectée, ou bien il existe $2 \cup \Gamma$ -connections γ_1, γ_2 et γ'_1, γ'_2 n'induisant pas la même bijection de A sur B . Réciproquement, s'il existe 2 telles Γ -connections, on peut choisir ρ pour que $L_{A,B}$ soit singulière.

Preuve (Fig. 1).

(1) Supposons que $L_{A,B}$ soit singulière et (A, B) soit Γ -connectés. Soit γ_1 joignant a_1 à b_1 et γ_2 joignant a_2 à b_2 . Soit $x = (x_1, x_2)$ un potentiel non nul à support dans A donnant lieu à un courant nul sortant par B . D'après ce qui précède, il est clair qu'on peut se ramener au cas où $x_1 > 0$ et $x_2 < 0$. On introduit alors des sommets α_1 et α_2 comme plus haut sur γ_1 et γ_2 . Issues de chacun de ces sommets, il y a 2 arcs γ_1^\pm et γ_2^\pm le long desquels le potentiel est strictement croissant (resp. strictement décroissant), les arcs γ_i^+ aboutissent donc en a_1 et les autres en a_2 . De plus, les arcs $+$ et les arcs $-$ ne se recontrent pas. On en déduit le résultat.

(2) Réciproquement, il suffit de prendre ρ proche de 0 sur les arêtes n'appartenant pas à la Γ -connection pour fabriquer une matrice $L_{A,B}$ ayant tous ses coefficients petits à l'exception de ceux qui correspondent à des paires de sommets Γ -connectés qui ont des limites > 0 . Le signe relatif des déterminants est alors donné par la signature de la permutation de A obtenue en composant les 2

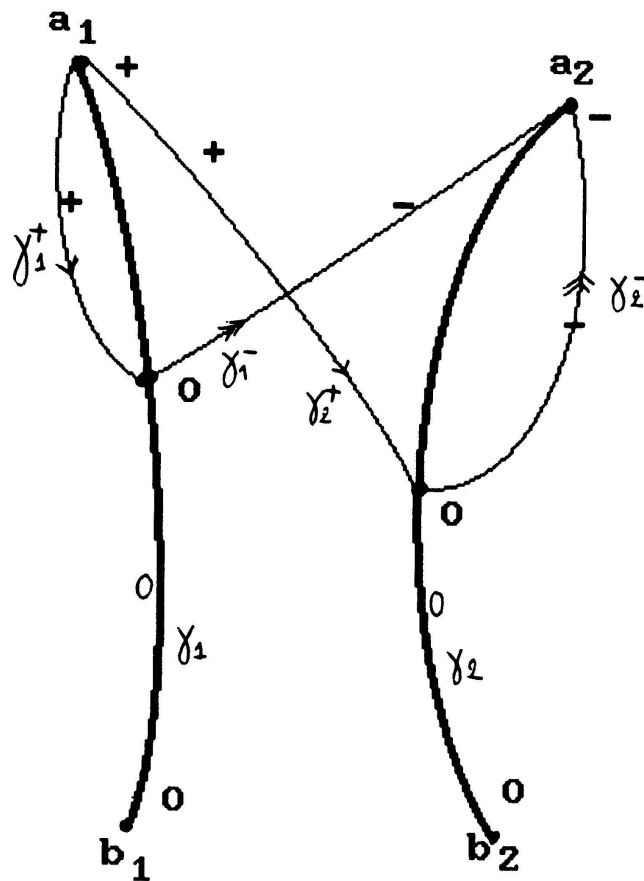


Figure 1

Γ -connections. Par connexité de \mathcal{R}_Γ , on obtient l'existence de ρ tel que $L_{A,B}$ soit singulière.

Dans [C-I-M], le résultat 1) est étendu à $k > 2$ (remarque suivant le lemme 4.1).

□

2. Compactifications lagrangiennes

2.1. La topologie des graphes

Il s'agit d'une adaptation de la théorie dite de la Γ -convergence en calcul des variations [DM]. Le but de cette section est de mettre en place un cadre général pour les problèmes de limites singulières en théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints et pour les problèmes de type Dirichlet. Comme applications simples, on décrira dans le §3 les dégénérescences de graphes connues sous le nom de mineurs: on obtient ainsi des démonstrations simples de la propriété de monotonie de l'invariant $\mu(\Gamma)$ introduit dans [CV1] (voir aussi [CV2]) ainsi que des propriétés de propriété de Φ_Γ lorsque Γ est N-critique.

Dans la suite X est un espace vectoriel réel de dimension finit n . En fait tout s'étend au cas complexe et une partie à la dimension infinie. Dans les applications aux réseaux électriques, X sera \mathbf{R}^V ou \mathbf{R}^{V_0} .

On note $Z = T^*(X) = X \oplus X^*$ le cotangent de X , muni de la structure symplectique canonique

$$\omega((x, \xi), (x', \xi')) = \xi(x') - \xi'(x).$$

On désigne par \mathcal{L}_X (ou \mathcal{L} si aucune ambiguïté sur X n'existe) la grassmannienne des sous-espaces lagrangiens de Z . Rappelons qu'un sous-espace lagrangien de Z est un sous-espace maximal sur lequel ω s'annule: ils sont tous de dimension n . \mathcal{L}_X est une variété analytique réelle compacte de dimension $n(n+1)/2$.

On désigne par Q_X l'espace des formes quadratiques sur X ; toute forme quadratique s'identifie à une application linéaire de X dans X^* et on définit ainsi une application injective d'image dense $j: Q_X \rightarrow \mathcal{L}_X$ en associant à une forme quadratique le graphe de cette application linéaire qui lui est associée.

D'autre part, si $\rho = (F, q)$ est une forme quadratique de domaine $F \subset X$ où $q \in Q_F$, on peut aussi lui associer un espace lagrangien.

$$j(\rho) = \{(x, \xi) \mid x \in F \text{ et } \forall y \in F, C_q(x, y) = \xi(y)\},$$

où C_q est la forme bilinéaire associée à q . Autrement dit si $B_q: F \rightarrow F^*$ est l'application linéaire associée à q

$$j(\rho) = \{(x, \xi) \in F \times X^* \mid \xi|_F = B_q x\}.$$

Réciproquement, si Λ est lagrangien, on lui associe une forme quadratique $\rho = (F, q)$ dont le domaine F est la projection de Λ sur X et $\forall x, y \in F, C_q(x, y) = \xi(y)$ où $(x, \xi) \in \Lambda$. Le fait que $\xi(y)$ ne dépende pas du choix de $(x, \xi) \in \Lambda$ provient du fait que Λ est lagrangienne: si (x, ξ) et (x, ξ') sont dans Λ ,

$$0 = \omega((x, \xi), (x, \xi')) = \xi(x) - \xi'(x).$$

On obtient ainsi une bijection de \mathcal{L} avec les formes quadratiques non partout définies sur X et par suite une compactification de Q_X puisque \mathcal{L} est compact. La topologie ainsi définie sur les formes quadratiques sera nommée plus bas *topologie lagrangienne*.

2.2. La convergence simple

Désignons dans la suite par $I =]0, +\infty[\subset J = [0, +\infty]$.

Soit $Z_+ = \{(x, \xi) \in Z \mid \xi(x) \geq 0\}$, et $\mathcal{L}_+ = \{A \in \mathcal{L} \mid A \subset Z_+\}$. Les éléments de \mathcal{L}_+ sont les formes quadratiques positives sur leur domaine de définition. On peut voir une telle forme $\rho = (F, q)$ comme une fonction semi-continue inférieurement sur X à valeurs dans $[0, +\infty]$ en étendant $q(x)$ par $+\infty$ hors de F . \mathcal{L}_+ est visiblement fermé dans \mathcal{L} car Z_+ l'est. On voit aussi facilement que \mathcal{L}_+ est fermé pour la topologie de la convergence simple; cependant ces 2 topologies ne coïncident pas bien qu'elles rendent \mathcal{L}_+ compact.

EXEMPLE. Si $X = \mathbf{R}^2$ et $q_\epsilon(x, y) = \frac{1}{2}(x - y/\epsilon)^2$, $\epsilon > 0$, il est facile de vérifier que si F est l'espace $y = 0$, alors q_ϵ converge vers $(F, \frac{1}{2}x^2)$ pour la convergence simple et vers $(F, 0)$ pour la topologie lagrangienne lorsque ϵ tend vers 0.

Cependant, si Q_X^+ est le cône de Q_X formé des formes quadratiques ≥ 0 et que l'on introduit la

DÉFINITION 2. Un cône C de Q_X^+ sera dit simplicial s'il existe des formes quadratiques q_1, \dots, q_m de Q_X^+ linéairement indépendantes et telles que C soit l'ensemble des $\sum_i t_i q_i$ où les t_i sont ≥ 0 ,

on a le

THÉORÈME 4. Si C est un cône simplicial de Q_X^+ , sur l'adhérence \bar{C} de C dans \mathcal{L} , la topologie de la convergence simple coïncide avec la topologie lagrangienne. De plus, l'application $\psi : [0, +\infty[^m \rightarrow \mathcal{L}_X$ qui à $t = (t_i)$ associe la forme $\sum_i t_i q_i$ se prolonge naturellement et continûment en une application $\Psi : J^m \rightarrow \mathcal{L}_X$; Ψ n'est pas injective en général.

On a besoin de 2 lemmes:

LEMME 1. Soit $\rho = (F, q) \in \mathcal{L}_+$, K un compact de X et x un point intérieur de K , alors $\rho - 2\xi$ (vue comme fonction sci de K à valeurs dans J) atteint un minimum fini en x si et seulement si $(x, \xi) \in \Lambda_\rho$, la variété lagrangienne associée à ρ .

Preuve. Il suffit en effet d'écrire que la dérivée de la restriction de $\rho - 2\xi$ au domaine F de ρ est nulle. \square

LEMME 2. Soit K un compact et f_n une suite de fonctions sci définies sur K et à valeurs dans $[0, +\infty]$ telles que f_n converge simplement vers une fonction f_o et qu'il existe des fonctions sci sur K , $g_n \leq f_n$ telles que la suite g_n soit croissante et ait même limite simple que la suite f_n . Alors si m_n (resp m_o) = $\inf_{x \in K} f_n(x)$ (resp = $\inf_{x \in K} f_o(x)$), $m_o = \lim m_n$ et, si $f_n(x_n) = m_n$ et x_n tend vers x_o , alors $f_o(x_o) = m_o$.

Preuve. (du lemme 2)

(1) f_o est sci comme limite croissante de fonctions sci et donc il existe $x_o \in K$ tel que $f_o(x_o) = m_o$. On a évidemment $\limsup m_n \leq m_o$. Supposons donc que $\liminf m_n = m_o - \alpha$, $\alpha > 0$; Soit $K_n = \{x \in K \mid g_n(x) \leq m_o - \alpha/2\}$, il est clair que la suite des compacts K_n est décroissante et d'intersection vide. Donc, il existe $K_{n_o} = \emptyset$ et donc $g_n(x) > m_o - \alpha/2$ pour $n \geq n_o$ et $x \in K$. On a ainsi une contradiction car $f_n \geq g_n$.

(2) Si $f_{n_k}(x_{n_k}) = m_{n_k}$ et $x_{n_k} \rightarrow a$, supposons $f_o(a) = m_o + \beta$ avec $\beta > 0$. Soit U un voisinage compact de a où $f_o \geq m_o + \beta/2$ et pour k grand, $x_{n_k} \in U$ et $\lim f_{n_k}(x_{n_k}) = m_o$ d'après le (1) et on a aussi $\lim(\inf_U f_{n_k}) = \inf_U f_o$ (d'après le (1)) et $\geq m_o + \beta/2$; d'où contradiction. \square

Preuve. (du théorème)

(1) Construction de Ψ :

soit $t_i \in J$, il est facile de définir la forme quadratique avec domaine $\sum t_i q_i$ en prenant comme domaine les points de X où cette somme est finie. Cela définit l'application Ψ .

(2) Continuité de Ψ pour les 2 topologies:

il est évident que Ψ est continue si on munit \mathcal{L}_+ de la topologie de la convergence simple.

Pour la topologie lagrangienne, cela résulte des 2 lemmes. En effet, si t_n tend vers t_o dans J^m muni de la topologie produit et $\rho_n = \Psi(t_n)$, soit $(x_n, \xi_n) \in \Lambda_n (= \Lambda_{\rho_n})$ convergent vers (x_o, ξ_o) . Alors, on peut appliquer le lemme 2 avec K un voisinage compact de x_o , $f_n = \rho_n - 2\xi_n$ et $g_n = \Psi(\inf_{k \geq n} t_k) - 2\xi_o - \epsilon_n$, où ϵ_n tend vers 0 en décroissant et $\|\xi_n - \xi_o\|_{L^\infty(K)} \leq \epsilon_n$. On déduit alors du lemme 1 que $(x_o, \xi_o) \in \Lambda_{\Psi(t_o)}$.

(3) Conclusion:

il est facile de conclure de ce qui précède que les 2 topologies sur \bar{C} coïncident. \square

3. Compactification de \mathcal{R}_Γ et mineurs

Soit Γ un graphe fini dont V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes.

L'ensemble des conductances est I^E et on associe à un élément $\rho = (\rho_{i,j})$ de I^E une forme quadratique $q_\rho = \psi_\Gamma(\rho)$ sur $X = \mathbf{R}^V$ par la formule:

$$q_\rho(x) = \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \in E} \rho_{i,j} (x_i - x_j)^2.$$

Comme plus haut, on identifie l'ensemble des q_ρ à \mathcal{R}_Γ . On désigne par \mathcal{S}_Γ l'adhérence dans \mathcal{L}_X de l'ensemble \mathcal{R}_Γ .

Alors on va montrer qu'on peut identifier cette compactification de \mathcal{R}_Γ à la réunion des $\mathcal{R}_{\Gamma'}$ où Γ' parcourt l'ensemble des mineurs de Γ . De plus ceci définit une bonne stratification de \mathcal{S}_Γ .

Un mineur Γ' de Γ est un graphe dont les sommets sont les ensembles A_i d'une partition de V en ensembles connexes (pour Γ) et non vides. Si $E(\Gamma')$ est l'ensemble des arêtes de Γ' on demande que, si $\{A_i, A_j\} \in E(\Gamma')$, il existe $v \in A_i, w \in A_j$ tels que $\{v, w\} \in E(\Gamma)$. L'interprétation géométrique est que Γ' s'obtient de Γ en contractant des arêtes et en effaçant.

Soit maintenant $q_\rho \in \mathcal{R}_{\Gamma'}$ où Γ' est un mineur de Γ , on lui associe une forme quadratique $r_\rho = (F_{\Gamma'}, q_\rho)$ et donc une variété lagrangienne:

$F_{\Gamma'}$ est l'espace des $x = (x_1, \dots, x_n)$ tels que $\forall i, \forall j, k \in A_i, x_j = x_k$. Si X_i est la valeur commune de x_j sur A_i , on définit ainsi, pour $x \in F_{\Gamma'}, q_\rho(x) = 1/2 \sum p_{i,j} (X_i - X_j)^2$.

Interprétation des ξ_α : la somme des ξ_α pour $\alpha \in A_i$ est le courant sortant du sommet A_i pour le potentiel X . Seules ces sommes sont bien déterminées, pas les ξ_α .

Il est clair que l'application $\varphi_{\Gamma'} : \mathcal{R}_{\Gamma'} \rightarrow \mathcal{L}$ ainsi définie est un plongement dont l'image est une sous-variété $Z_{\Gamma'}$ de \mathcal{L} . Ces variétés sont 2 à 2 disjointes: en effet le domaine de la forme quadratique définit Γ' et la forme q_ρ détermine alors ρ . On identifiera donc $\mathcal{R}_{\Gamma'}$ et $Z_{\Gamma'}$.

Nous allons prouver que les $\mathcal{R}_{\Gamma'}$ forment une stratification de \mathcal{S}_Γ .

THÉORÈME 5. \mathcal{S}_Γ est la réunion disjointe des $\mathcal{R}_{\Gamma'}$ où Γ' décrit les mineurs de Γ . $\mathcal{R}_{\Gamma''}$ est contenu dans l'adhérence de $\mathcal{R}_{\Gamma'}$ si et seulement si Γ'' est un mineur de Γ' . Cette stratification satisfait la condition (a) de Whitney: si $\Lambda_n \in \mathcal{R}_{\Gamma'}$ converge vers $\Lambda_0 \in \mathcal{R}_{\Gamma''}$ et $V \in T_{\Lambda_0}(\mathcal{R}_{\Gamma''})$, il existe $V_n \in T_{\Lambda_n}(\mathcal{R}_{\Gamma'})$ tels que V_n tend vers V . De plus, sur \mathcal{S}_Γ , la topologie de la convergence simple et la topologie lagrangienne coïncident.

Preuve. Le cône \mathcal{R}_Γ est simplicial. Soit $(\rho_{i,j}) \in J^E$, on lui associe le mineur Γ' de Γ obtenu en contractant les arêtes $\{i, j\}$ où $\rho_{i,j} = \infty$ et en effaçant celles où $\rho_{i,j} = 0$. L'application Ψ vue au §2 peut ainsi se lire comme un passage d'une définition des mineurs par contractions et éliminations d'arêtes à la définition globale qu'on vient de donner. On en déduit acilement la première partie du théorème.

Il reste à prouver la condition (a) de Whitney.

Soit $q \in \mathcal{Q}_X$, on lui associe un champ de vecteurs sur \mathcal{L}_X de la façon suivante. Pour $A = (F, r) \in \mathcal{L}_X$, on pose

$$A + tq = \{(x, \xi + tB_q(x)) \mid (x, \xi) \in A\},$$

qui est associée à la forme quadratique avec domaine $(F, r + tq|_F)$. Et on définit le

champ de vecteurs χ_q comme l'ensemble des vecteurs vitesses en $t = 0$ des courbes $A + tq$.

Soient $i, j \in V$ 2 sommets distincts de Γ , on leur associe ainsi le champ de vecteurs $\chi_{i,j} = \chi_{q_{i,j}}$ sur \mathcal{L} avec $q_{i,j}(x) = (x_i - x_j)^2$.

Maintenant, il est clair que le champ de vecteurs $\chi_{i,j}$ est tangent à $\mathcal{R}_{\Gamma'}$ si i et j n'appartiennent pas au même sommet de Γ' et si, lorsque $i \in A_\alpha$ et $j \in A_\beta$, $\{A_\alpha, A_\beta\}$ est une arête de Γ' . Les champs de vecteurs ainsi énumérés engendrent en chaque point l'espace tangent à $\mathcal{R}_{\Gamma'}$ et sont aussi tangents aux $\mathcal{R}_{\Gamma''}$ si Γ' est un mineur de Γ'' ; la condition (a) de Whitney en résulte, en effet la construction précédente permet de prolonger tout vecteur tangent à $\mathcal{R}_{\Gamma'}$ en un champ de vecteur sur \mathcal{L} qui est tangent aux $\mathcal{R}_{\Gamma''}$ si Γ' est mineur de Γ'' . \square

4. Cas planaire: bonne connection

DÉFINITION 3. Un réseau $\Gamma = (V, V_o, E)$ sera dit planaire si on peut le plonger (continûment comme espace topologie de dimension 1) dans le disque unité D du plan de façon que les sommets de V_o soient sur le bord de ce disque et le reste de Γ à l'intérieur.

Pour un réseau planaire, on supposera toujours le plongement donné et la numérotation de V_o compatible avec l'ordre cyclique sur ∂D .

DÉFINITION 4. 2 parties A, B de V_o seront dites non entrelacées, s'il existe 2 points α et β de ∂D tels que A et B soient chacun contenu dans une composante connexe différente de $\partial D \setminus \{\alpha, \beta\}$.

Lorsque 2 parties A et B de V_o sont Γ -connectées et non entrelacées, la bijection donnée par une Γ -connection est unique et déterminée par l'ordre cyclique. On désignera par \mathcal{Z} l'ensemble des paires (A, B) de même cardinal et non entrelacées. On peut alors parler sans ambiguïté du déterminant de $L_{A,B}$ et on a:

THÉORÈME 6. Si Γ est planaire et (A, B) est Γ -connectée et non entrelacée, on a pour tout choix de ρ :

$$\det(L_{A,B}) > 0.$$

Ce résultat a été obtenu dans [C-M] et [C-M-M] pour des réseaux particuliers. Notre preuve est essentiellement la même.

Preuve. Il suffit de prouver que $\det(L_{A,B})$ est non nul; en effet, si on prend ρ nul sur les arêtes non situées sur les chemins de la Γ connection, la matrice $L_{A,B}$ est

diagonale avec des entrées >0 . La continuité de Φ_r et la connexité de l'ensemble des conductances assure que ce signe est alors constant.

Supposons donc que $L_{A,B}$ soit singulière et soit $x \in \mathbb{R}^A \setminus 0$ tel que $L_{A,B}(x) = 0$. Il existe alors (quitte à changer x en $-x$) une partition ordonnée $A = \bigcup_{k=1}^p A_k$ vérifiant:

(i) $A_1 < A_2 < \dots < A_p$

(ii) $(-1)^k x|_{A_k} \geq 0$ et x non identiquement nul sur A_k .

($p-1$ est le nombre de changements de signe de x sur A ordonné par l'ordre cyclique).

Choisissons $a_k \in A_k$ avec $x_{a_k} \neq 0$, $b_k \in B$ tels qu'il existe des chemins disjoints γ_k de Γ formant une Γ -connection de (a_1, \dots, a_p) à (b_1, \dots, b_p) . Supposons $\gamma_k(0) = b_k$ et $\gamma_k(1) = a_k$. L'hypothèse est que les courants sortant par les b_k sont nuls ainsi que les potentiels. Soit $0 \leq t_k < 1$ le sup des t tels que le potentiel d'équilibre y soit nul sur $\gamma_k([0, t])$ et $c_k = \gamma_k(t_k)$ le sommet de V correspondant. Il existe alors, pour chaque k , 2 chemins δ_k^\pm d'origine c_k et d'extrémités dans A , ne

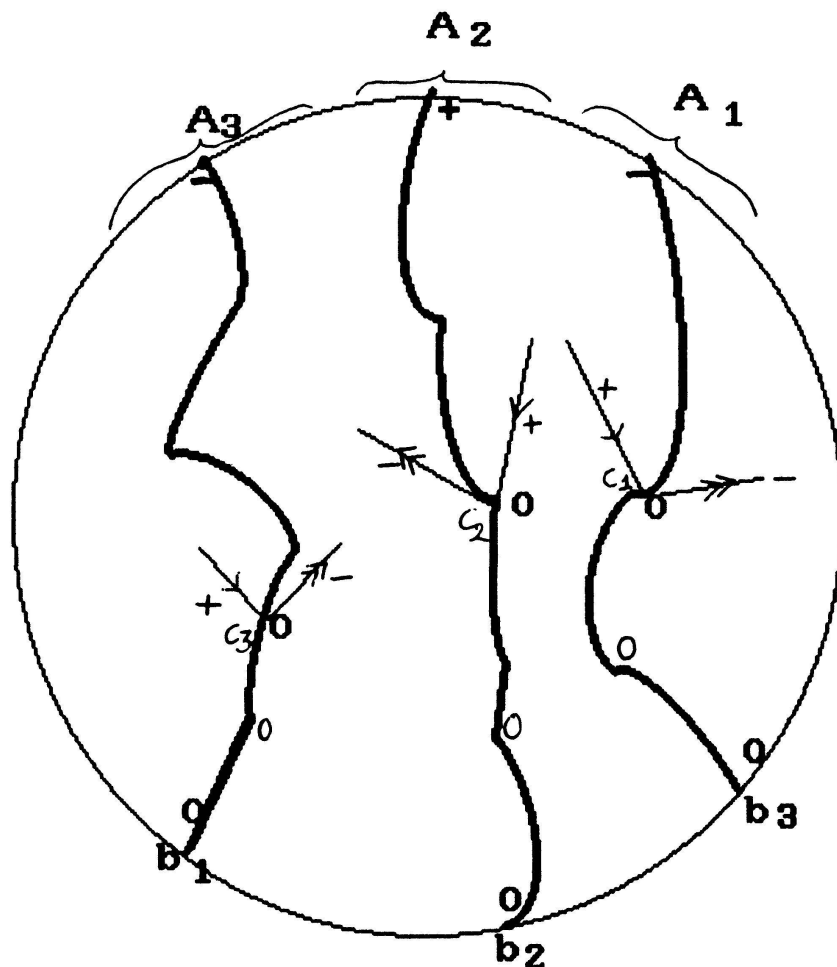


Figure 2

rencontrant pas V_o ailleurs qu'en leurs extrémités et tels que le potentiel y soit >0 sur $\delta_k^+ \setminus c_k$ et <0 sur $\delta_k^- \setminus c_k$. En particulier, les $\delta_k^+(1)$ sont dans A_{pair} et les $\delta_k^-(1)$ dans A_{impair} . Tenant compte du fait que les δ_k^\pm ne coupent pas $\gamma_l([0, t_l[)$, on en déduit une contradiction avec le théorème de Jordan. Il suffit de vérifier qu'il est impossible que 3 δ_k^+ finissent dans le même A_j ou que 2 δ_k^- finissent dans A_1 (et même chose en permutant $+$ et $-$). Par exemple dans le premier cas, on a impossibilité pour le δ_k^- du milieu de rejoindre A (Fig. 2). \square

DÉFINITION 5. Γ planaire sera dit bien connecté si toutes les paires (A, B) de \mathcal{Z} sont Γ connectées.

Pour chaque N , il existe de tels graphes: prendre par exemple le graphe dont l'image dans le disque unité est formé de toutes les cordes rectilignes ayant pour extrémités 2 sommets de V_o . On décrira complètement ces graphes dans [CV-G-V]. En particulier, on montrera qu'ils ont tous au moins $N(N-1)/2$ arêtes et qu'ils sont tous équivalents par transformation électrique.

5. L'ouvert Ω_N

On définit maintenant un ouvert Ω_N de Σ_N par:

$$\Omega_N = \{L \in \Sigma_N \mid \forall (A, B) \in \mathcal{Z}, \quad \det(L_{A,B}) > 0\}.$$

Remarquons que Ω_N est défini comme ouvert d'un espace de formes quadratiques sur \mathbf{R}^N et ne dépend que de l'ordre cyclique sur les coordonnées. La planarité de Γ n'intervient donc pas dans la définition autrement que pour imposer l'ordre cyclique sur V_o .

On vient donc de voir que, si Γ est planaire bien connecté, $L_{\Gamma,\rho}$ est dans Ω_N . Montrons la:

PROPOSITION 7. Ω_N est homéomorphe à $\mathbf{R}^{N(N-1)/2}$.

En fait, on verra dans [CV-G-V] que Φ_Γ est un difféomorphisme de \mathcal{R}_Γ sur Ω_N si Γ est planaire bien connecté et critique. Il suffirait pour la suite de savoir que Ω_N est connexe, mais ce n'est pas plus facile!!

Preuve. L'idée est simplement d'ordonner les inégalités $\det(L_{A,B}) > 0$ de façon à pouvoir appliquer le:

LEMME 3. Soit $U_m \subset \dots \subset U_1 \subset U_0 = \mathbf{R}^m$ des sous-ensembles ouverts de \mathbf{R}^m définis, pour $l \geq 1$ par les inégalités $U_l = \{x \in U_{l-1} \mid x_l \geq \Phi_l(x_1, \dots, x_l)\}$ où $\Phi_l : U_{l-1} \rightarrow \mathbf{R}$ est continue et ne dépend que des $l-1$ premières variables, alors U_m est homéomorphe à \mathbf{R}^m .

$$\text{Ici } m = \frac{N(N-1)}{2}.$$

On choisit d'abord un ordre total sur l'ensemble \mathcal{Z} des parties à 2 éléments de V_o qui satisfasse, si d la distance combinatoire sur V_o vu comme graphe cyclique:

$$d(i, j) > d(i', j') \Rightarrow \{i, j\} < \{i', j'\}.$$

Soit maintenant W l'ensemble des paires (non-ordonnées) $\{A, B\}$ de parties de V_o de même cardinal et non entrelacées. L'ensemble des inéquations définissant Ω_N est donc paramétré par W .

On définit une application $\phi : W \rightarrow \mathcal{Z}$ en associant à $\{A, B\}$ le plus grand couple $\{i, j\}$ de \mathcal{Z} tel que $i \in A$ et $j \in B$. Si $A = \{i_1, \dots, i_k\}$ et $B = \{j_1, \dots, j_k\}$ avec $i_1 < \dots < i_k < j_k < \dots < j_1$ pour l'ordre cyclique, il est clair qu'on a: $\phi(\{A, B\}) = \{i_1, j_1\}$ ou $\{i_k, j_k\}$, car toutes les autres paires sont à une distance d plus grande. En particulier, si $\pi_o = \{i, j\}$ est le premier élément de \mathcal{Z} , on n'a $\phi(\{A, B\}) = \pi_o$ que si $\{A, B\} = \pi_o$. On note $\phi(\{A, B\}) = \{i_o, j_o\}$, et $A' = A \setminus i_o$, $B' = B \setminus j_o$.

On a ainsi

$$\det(L_{A,B}) = l_{i_o, j_o} \det(L_{A', B'}) - \Psi_{A,B}(l_{\alpha, \beta}),$$

où les couples $\{\alpha, \beta\} < \{i_o, j_o\}$, ainsi que ceux qui figurent dans $\det(L_{A', B'})$. Pour π_o , on a seulement $l_{\pi_o} > 0$. On peut alors appliquer le lemme avec

$$\Phi_{\{i_o, j_o\}} = \sup_{\phi(\{A, B\}) = \{i_o, j_o\}} \frac{\Psi_{A,B}}{\det(L_{A', B'})}, \quad \text{ave } \Psi_{i_o, j_o} = 0.$$

En effet, si

$$U_{\{i, j\}} = \{L \mid l_{i, j} > \Phi_{\{i, j\}}(L)\},$$

il est clair que $\det(L_{A', B'})$ est continue et > 0 sur $U_{\{i', j'\}}$ où $\{i', j'\}$ est le prédécesseur de $\{i, j\}$. \square

6. Cas des graphes N-critiques

6.1. Extension de Φ_Γ à \mathcal{S}_Γ

Donnons d'abord une interprétation symplectique de l'application $\Phi_\Gamma : q_\rho \rightarrow Q_\rho$ qui, à la forme quadratique q_ρ définie sur \mathbf{R}^V associe la forme quadratique Q_ρ , associée à la réponse. Q_ρ est un élément de $\mathcal{R}_{K_{V_o}}$, où, pour un ensemble fini D , K_D est le graphe complet dont les sommets sont les éléments de l'ensemble D . L'idée est de voir le dual des espaces des potentiels \mathbf{R}^V ou \mathbf{R}^{V_o} comme des espaces de courants sortants par les sommets. Le graphe lagrangien associé à q_ρ est l'ensemble des couples $(x_i, \partial q_\rho / \partial x_i)$ et ces dérivées sont les sommes des courants partant du sommet i . La loi de Kirchoff exprime que le potentiel d'équilibre s'obtient en considérant les couples (potentiels, courants) tels que les courants partant des sommets intérieurs sont nuls. Noton W cette variété co-isotrope de $\mathbf{R}^V \oplus (\mathbf{R}^V)^*$. Oublier ensuite les sommets intérieurs revient à faire le quotient par l'orthogonal de W : cette opération R_W est donc au niveau des espaces lagrangiens l'opération de réduction symplectique. C'est-à-dire que $R_W(A) = A \cap W / W^\circ$ qui est un lagrangien de l'espace symplectique W / W° .

On a le:

THÉORÈME 8. *L'opération R_W est l'extension continue de Φ_Γ de \mathcal{S}_Γ à $\mathcal{S}_{K_{V_o}}$. Elle s'obtient en recollant les $\Phi_{\Gamma'}$ pour tous les mineurs Γ' de Γ .*

Remarque. la réduction symplectique n'est pas partout continue. . .

Preuve.

(1) Identification de R_W à la collection des $\Phi_{\Gamma'}$:

Cela résulte de l'interprétation de A_ρ : l'intersection de A_ρ et de W donne les potentiels d'équilibre pour le mineur Γ' de Γ associé à ρ et prendre le quotient par W° revient à ne considérer que les sommets terminaux.

(2) Continuité:

Soit $\Psi : J^E \rightarrow \mathcal{S}_\Gamma$ l'application continue qui à $\rho = (\rho_{i,j}) \in J^E$ associe la forme quadratique $q_\rho(y) = \frac{1}{2} \sum \rho_{i,j} (y_i - y_j)^2$ et $\Phi : \mathcal{S}_\Gamma \rightarrow Q_{\mathbf{R}^V}^+$ l'application qui à q_ρ associe $Q_\rho(x) = \inf_{y \in B_x} q_\rho(y)$ où le B_x est le compact formé par les y dont la restriction à V_o vaut x et qui vérifient $\inf x_i \leq y_j \leq \sup x_i$.

Φ s'identifie aisément à la collection des $\Phi_{\Gamma'}$ où Γ' décrit les mineurs de Γ .

De plus $\Phi \circ \Psi$ est continue pour la convergence simple d'après le lemme 2 du §2. On en déduit que l'image de Φ est contenue dans $\mathcal{S}_{K_{V_o}}$ et que Φ elle-même est continue (par un raisonnement simple de compacité). \square

6.2. Propreté

On dira que Γ planaire bien connecté est *N-critique* si aucun mineur strict de Γ n'est bien connecté. On a alors:

THÉORÈME 9. *Si Γ est planaire, bien connecté et N-critique, l'application $\Phi_\Gamma : \mathcal{R}_\Gamma \rightarrow \Omega_N$ est propre.*

Preuve. On vient de voir que Φ_Γ se prolonge continûment en Φ . Comme le bord de \mathcal{R}_Γ s'identifie à la réunion des $\mathcal{R}_{\Gamma'}$ pour les mineurs stricts de Γ et que ceux-ci ne sont pas bien-connectés, l'image par Φ de ce bord n'est pas contenu dans Ω_N . \square

6.3. Réseaux planaires généraux

Tout réseau planaire est mineur d'un réseau bien connecté. On déduit de ce qui précède la

PROPOSITION 10. *Si Γ est planaire, l'image de Φ_Γ est contenue dans l'adhérence F_N de Ω_N .*

7. Réseaux ayant toujours une réponse de réseaux planaires

On considère maintenant un graphe Γ tel que pour tout $\rho \in \mathcal{R}_\Gamma$, L_ρ est dans F_N , adhérence de Ω_N . Cette expression est un peu ambiguë; elle doit se lire *il existe un ordre cyclique sur V_o tel que, pour tout $\rho \in \mathcal{R}_\Gamma$, L_ρ soit dans F_N défini au moyen de cet ordre cyclique*. En fait cet ordre cyclique est bien déterminé (à orientation près) par la donnée d'une seule matrice $L_\rho \in \Omega_N$, car les 2 déterminants 2×2 associés à la donnée de 4 sommets de S_o permettent de lire l'ordre cyclique de ces 4 sommets.

On va montrer que ces graphes sont *essentiellement planaires*, ce qui signifie qu'ils le deviennent si on effectue une contraction du type suivant qui ne change pas l'ensemble des L_ρ (Fig. 3).

remplacer un sous-graphe de Γ que l'on peut déconnecter de V_o en otant un ensemble \mathcal{Z} de $n \leq 3$ sommets par

rien si $n = 0, 1$,

par l'arête ab si $\mathcal{Z} = (a, b)$,

par le triangle abc si $\mathcal{Z} = (a, b, c)$.

THÉORÈME 11. *Γ est essentiellement planaire si et seulement si L_ρ appartient à F_N , pour tout $\rho \in \mathcal{R}_\Gamma$.*

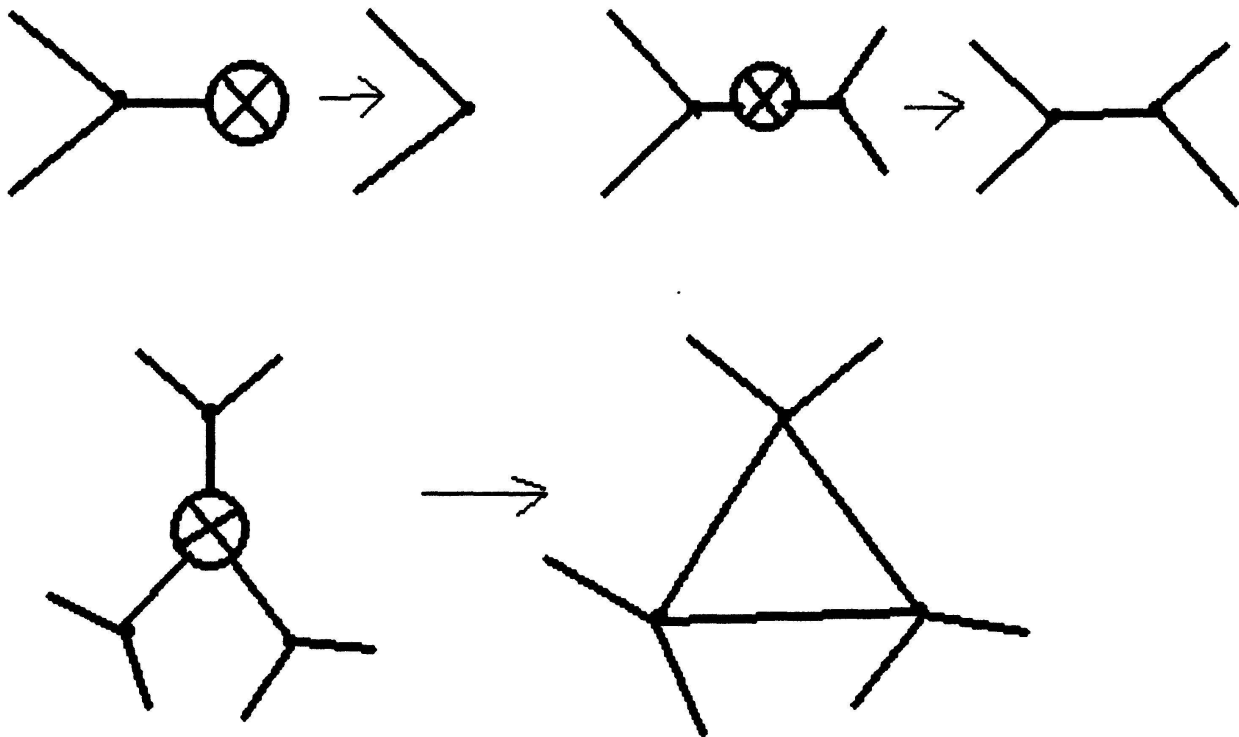


Figure 3. Contractions autorisées.

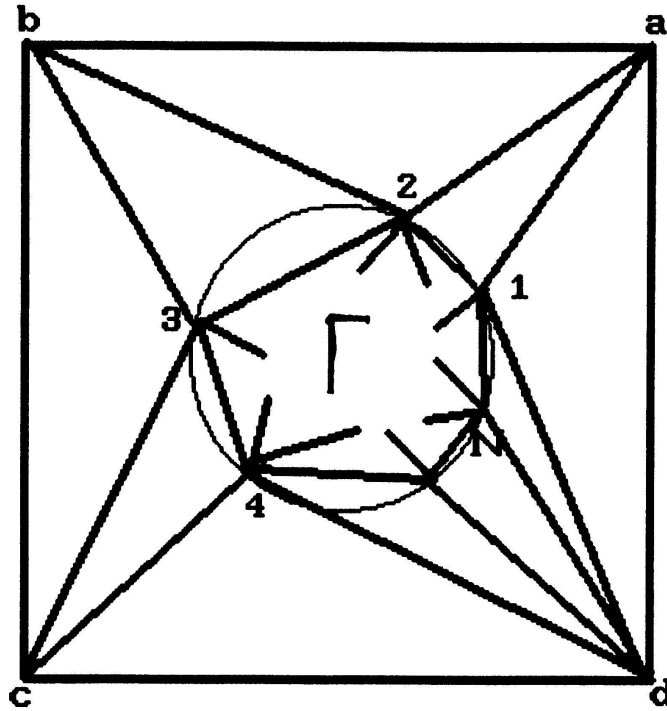
Preuve. On a déjà vu que si Γ est planaire et donc aussi s'il est essentiellement planaire, L_p appartient à F_N .

La preuve de la partie directe consiste à appliquer le théorème 1 de [TH] à un graphe G convenable obtenu à partir de Γ . Le théorème en question qui provient en fait du célèbre critère de planarité de Kuratowski, a pour corollaire immédiat le théorème suivant qui utilise la:

DÉFINITION 6. 4 sommets a, b, c, d distinct d'un graphe G admettent un lien croisé s'il existe 2 chemins disjoints γ_1 et γ_2 de G tels que γ_1 joint a à c et γ_2 joint b à d .

THÉORÈME 12. Soit G un graphe fini et a, b, c, d 4 sommets de G qui n'admettent pas dans G de lien croisé. Alors G peut s'obtenir de la façon suivante: on part d'une triangulation \mathcal{T} de l'intérieur du carré $abcd$ (ici triangulation signifie homéomorphisme avec un complexe simplicial de dimension 2), et G s'obtient en attachant à chaque face de \mathcal{T} un sous-graphe connecté à G seulement par des sommets de cette face; en particulier les sommets de \mathcal{T} sont des sommets de G .

On applique le théorème précédent au graphe G obtenu à partir de Γ par adjonction de 4 sommets a, b, c, d , d'arêtes $a_1, a_2, b_2, b_3, c_3, c_4, d_4, d_5, \dots, d_N, d_1$ et d'arêtes $i(i+1), N_1$ si elles n'y figurent pas déjà (Fig. 4).

Figure 4. Le graphe G .

Il faut d'abord se convaincre que a, b, c, d n'ont pas de lien croisé dans G . Si c'était le cas, il y aurait 4 sommets de V_o qui aurait un lien croisé dans Γ n'utilisant pas les sommets de V_o . Il suffit alors de choisir $\rho = 0$ sur les arêtes n'appartenant pas à ces chemins pour obtenir une matrice L_ρ qui n'est pas dans F_N .

Il est clair que les opérations de contractions autorisées sur Γ en font un sous-graphe de la triangulation \mathcal{T} décrite dans le théorème (elle contient d'une part les triangles de G ayant a, b, c, d pour au moins 1 de leurs sommets, d'autre part d'autres triangles directement liés à Γ). Ce sous-graphe de \mathcal{T} est donc planaire. \square

8. L'invariant $\mu(\Gamma)$ revisité

8.1. Spectres

On suppose X muni d'une structure euclidienne qui permet d'identifier X et X^* . Soit $A \in \mathcal{L}$, on définit le spectre de A comme celui de la forme quadratique q sur son domaine de définition $F \subset X$ muni de la structure euclidienne induite par X . Soit $B : F \rightarrow F$ l'application linéaire symétrique associée à q , on définit, pour λ non valeur propre de B , la résolvante $R(\lambda) : X \rightarrow X$ par

$$R(\lambda) = j \circ (\lambda - B)^{-1} \circ P,$$

où j est l'injection de F dans X et P la projection orthogonale de X sur F .

Si $\lambda \in \mathbf{C}$ et $\Lambda \in \mathcal{L}$, on définit $\Lambda_\lambda \in \mathcal{L}_{\mathbf{C}}$ (complexifié de \mathcal{L} formé des sous-espaces lagrangiens complexes de $(X \oplus X^*) \otimes \mathbf{C}$) comme

$$\Lambda_\lambda = \{(x, \lambda x - \xi) \mid (x, \xi) \in \Lambda\}.$$

C'est un espace lagrangien dépendant analytiquement de Λ et λ .

$\lambda \in \mathbf{C}$ est valeur propre de $\rho = (F, q)$ de variété lagrangienne Λ si et seulement si Λ_λ ne rencontre pas $X \oplus 0$ transversalement. La multiplicité de λ est la dimension de cette intersection et l'espace propre est cette intersection. Si λ n'est pas valeur propre, Λ_λ est le graphe d'une application linéaire de $0 \oplus X^*$ (que l'on identifie à X) dans $X \oplus 0$ dont l'image est contenue dans F : cette application $R(\lambda) : X \rightarrow X$ qui est définie lorsque λ n'est pas valeur propre est la résolvante. Elle dépend analytiquement de Λ et λ .

Il en est donc de même des projecteurs spectraux définis de la façon habituelle

$$\Pi_I = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\lambda) d\lambda,$$

où I est un intervalle de \mathbf{R} dont les extrémités ne rencontrent pas le spectre et γ un cercle de diamètre I dans \mathbf{C} .

On peut ainsi définir des variétés $W_{\mu, m}$ dans \mathcal{L} qui sont formées des Λ qui admettent μ comme valeur propre de multiplicité m . Si $D_\lambda = \{(x, \lambda x) \mid x \in X\}$, on a

$$W_{\mu, m} = \{\Lambda \in \mathcal{L} \mid \dim(\Lambda \cap D_\lambda) = m\}$$

que est une variété de codimension $m(m+1)/2$ de \mathcal{L} .

On voit ainsi que les notions usuelles liées au spectre des matrices symétriques s'étendent sans difficultés aux éléments de \mathcal{L} .

8.2. Opérateurs de Schrödinger sur les graphes

On définit maintenant un nouvel ensemble de formes quadratiques associées à un graphe Γ , le cône \mathcal{O}_Γ : si $c \in \mathcal{R}_\Gamma$ et $W \in \mathbf{R}^V$, on définit une forme quadratique

$$q_{c, W}(x) = \frac{1}{2} \sum_{\{i, j\} \in E} c_{i, j} (x_i - x_j)^2 + \sum_{i \in V} W_i x_i^2.$$

\mathcal{O}_Γ est l'ensemble des formes quadratiques $q_{c, W}$, on identifie ces formes quadratiques aux espaces lagrangiens de $X \oplus X^*$ associés comme plus haut.

Alors, on peut aussi identifier \mathcal{O}_Γ à la réunion des translatés de \mathcal{R}_Γ par les formes diagonales ΣWix_i^2 .

On identifie comme au §3, $\mathcal{O}_{\Gamma'}$, pour Γ' mineur de Γ , à une sous-variété notée encore $\mathcal{O}_{\Gamma'}$ de \mathcal{L} .

Il est clair à cause de la remarque précédente que les $\mathcal{O}_{\Gamma'}$ pour Γ' mineur de Γ forment une stratification d'une partie de l'adhérence $\Sigma_\Gamma := \bar{\mathcal{O}}_\Gamma$ qui vérifie la condition (a) de Whitney.

Par contre, il n'est plus vrai que $\Sigma_\Gamma = \bigcup \mathcal{O}_{\Gamma'}$. Par exemple, on peut considérer, pour $V = (0, 1, \dots, N)$, la suite

$$q_\epsilon(x) = \sum_{(0,i) \in E(\Gamma)} c_{i,0} \left(x_i - \frac{x_0}{\epsilon} \right)^2 + \sum_{\{i,j\} \in E(\Gamma), i \neq 0, j \neq 0} c_{i,j} (x_i - x_j)^2,$$

d'éléments de \mathcal{O}_Γ .

Lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$, cette suite converge vers une forme quadratique qui n'est dans aucun $\mathcal{O}_{\Gamma'}$ pour un mineur de Γ sauf si 0 est un sommet de degré ≤ 2 de Γ .

Décrivons cette limite qui, dans le cas où 0 est de degré 3, est associée à une transformation étoile-triangle de Γ (voir à ce sujet [B-C]). Il n'est pas difficile de voir que la limite des q_ϵ lorsque ϵ tend vers 0, est la forme quadratique q_o de domaine $x_0 = 0$ définie par:

$$q_o(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i \sim 0} c_{i,0} (x_i - L(x))^2 + \sum_{i,j \neq 0} c_{i,j} (x_i - x_j)^2,$$

où

$$L(x) = \frac{1}{\sum_{i \sim 0} c_{i,0}} \sum_{i \sim 0} c_{i,0} x_i.$$

Cette forme quadratique est un élément de \mathcal{O}_{Γ_o} , où Γ_o est le graphe obtenu en complétant Γ privé du sommet 0 par l'ensemble des arêtes (k, l) où k, l sont 2 voisins arbitraires de 0. En général \mathcal{O}_{Γ_o} n'est pas entièrement contenu dans l'adhérence de \mathcal{O}_Γ , mais c'est cependant le cas si le degré de 0 est 2 (Γ_o est alors un mineur de Γ) ou 3 (Γ_o s'obtient alors de Γ par une transformation étoile-triangle [B-C]).

On peut se restreindre au sous-ensemble de \mathcal{O}_Γ obtenu en demandant que la première valeur propre soit 0.

8.3. L'invariant μ

On définit $\mu(\Gamma)$ comme le sup des multiplicités m de la seconde valeur propre λ_2 de $q_{c,w} \in \mathcal{O}_\Gamma$ telles que Z_Γ coupe $W_{\lambda_2, m}$ transversalement. Le théorème de [CV1]

affirmant que $\mu(\Gamma') \leq \mu(\Gamma)$ si Γ' est un mineur de Γ résulte simplement des considérations précédentes et en particulier de la condition (a) de Whitney

9. Problèmes

Soit $I_1 < I_2 < \dots < I_N$ une suite de N intervalles fermés disjoints de ∂D . On suppose D muni d'une métrique riemannienne g . On associe à la donnée de g et des I_j , une forme quadratique Q de Σ_N définie par:

$$Q(x_i) = \inf \int_D \|df\|_g^2 v_g,$$

où le inf porte sur les fonctions f lisses sur D telles que $f|_{I_l} = x_l$, et v_g est la mesure riemannienne associée à g .

Il est clair que l'application est en fait à valeurs dans Ω_N .

Q ne dépend que de la classe conforme des données (g, I_l) . L'espace de Teichmüller associé est de dimension $2N - 3$ et est strictement inférieure à $N(N - 1)/2$ dès que $N > 3$.

On peut donc se demander quelle est l'image et si on a ainsi un plongement de Teichmüller dans $\text{Sym}_o(N)$.

Il conviendrait en particulier d'obtenir un résultat de propreté et d'étudier la situation dégénérée (arbres?).

On peut essayer d'obtenir Ω_N en utilisant des ouverts de genre ≥ 1 .

10. Une extension aux réseaux non-linéaires

Montrons que tout ce qui précède s'étend aux réseaux résistifs non-linéaires.

Tout d'abord un conducteur (i, j) non-linéaire, *orienté* de i vers j , est donné par un réponse $v = x_i - x_j \rightarrow I = \varphi(v)$, où I est le courant algébrique traversant le conducteur orienté. On supposera que φ est C^1 , de dérivée partout > 0 , et qu'il existe v_o , pas nécessairement égal à 0, mais unique, tel que $\varphi(v_o) = 0$. On définit alors l'énergie $e_{i,j}(v)$ du conducteur soumis à la différence de potentiel v par:

$$e_{i,j}(v) = \int_{v_o}^v \varphi(w) dw.$$

Dans le cas linéaire, $\varphi(v) = \rho_{i,j}v$, $e_{i,j}(v) = \frac{1}{2}\rho_{i,j}v^2$. Ici, on voit que $e_{i,j}$ est C^2 et que sa dérivée seconde est > 0 (Fig. 5).

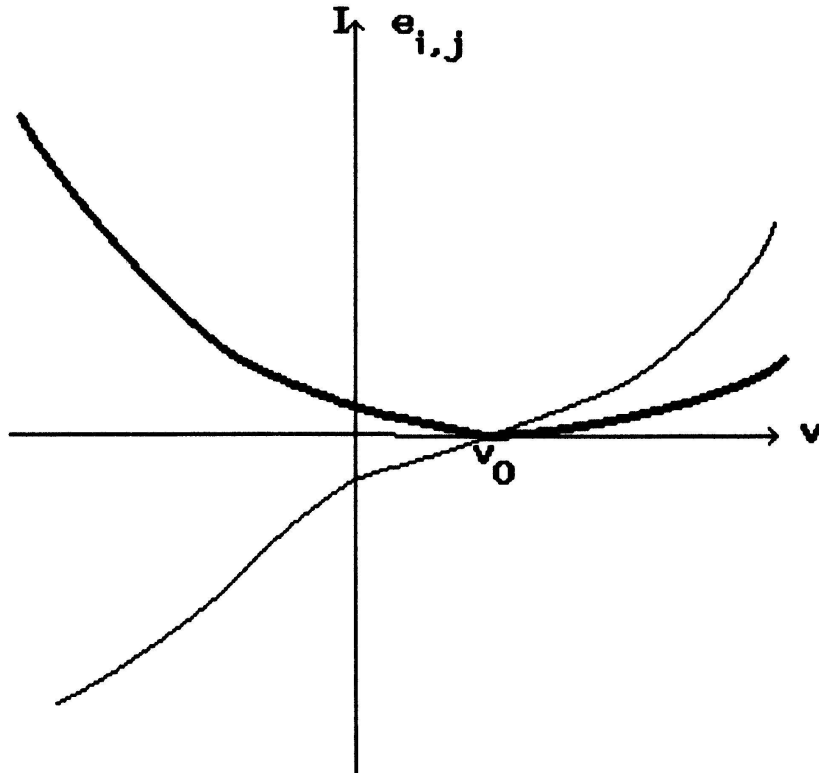


Figure 5

On définit alors un réseau électrique comme la donnée d'un graphe (V, V_o, E) , où cette fois les arêtes sont supposées orientées une fois pour toutes, et, pour chaque arête orientée (i, j) , la donnée d'une réponse $\varphi_{i,j}$ et donc de l'énergie $e_{i,j}(v)$.

On définit maintenant un potentiel d'équilibre comme un potentiel $y \in \mathbf{R}^V$ tel que les courants associés vérifient les lois de Kirchoff aux sommets intérieurs.

On a le:

THÉORÈME. *Si $x \in \mathbf{R}^{V_o}$ est donné, il existe un potentiel d'équilibre unique, celui qui minimise l'énergie totale à x fixé. La réponse $R : \mathbf{R}^{V_o} \rightarrow \mathbf{R}^{V_o}$ qui, au potentiel x , associe les courants sortants par les sommets terminaux est une variété lagrangienne C^1 de $\mathbf{R}^{V_o} \oplus \mathbf{R}^{V_o}$, muni de la structure symplectique canonique*

Preuve. Il suffit d'introduire l'énergie électrique totale

$$q(y) = \sum_{(i,j) \in E} e_{i,j}(y_i - y_j)$$

et de constater que cette fonction est strictement convexe sur l'espace affine donné par la condition que y vaille x sur V_o . Cela résulte du fait que la seule direction de non stricte convexité est la diagonale de \mathbf{R}^V qui n'est pas contenue dans l'espace affine considéré.

Maintenant, si $Q(x) = \inf_{y|v_o=x} q(y)$, le inf est atteint pour un $y(x)$ unique qui dépend de façon C^1 de x par les fonctions implicites. \square

Comment maintenant passer du cas linéaire au cas non linéaire? Simplement en remarquant que la différentielle en un point $x_o \in \mathbf{R}^{V_o}$ de la réponse R est la réponse du réseau résistif linéaire dont les conductances sont les dérivées des $\varphi_{i,j}$ au point $y_i - y_j$ où y est le potentiel d'équilibre pour x_o .

A toute propriété des réponses de réseaux linéaires est ainsi associée la propriété non-linéaire correspondante de la dérivée de R .

En particulier, si Γ est planaire bien connecté, $R'(x)$ est dans Ω_N pour tout x . On verra dans [CV-G-V] comment reconstruire un réseau non-linéaire à partir de sa réponse R .

REFERENCES

- [BE] C. BERGE, *Théorie des graphes et applications*, Dunod (Paris), 1967.
- [B-CV] R. BACHER, Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Multiplicités des valeurs propres et transformations étoile-triangle des graphes*, Preprint, (1994).
- [CH] G. CHOQUET, *Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes*. Séminaire Bourbaki, 139 (1956), 1–15.
- [C-I-M] E. CURTIS, D. INGERMAN, J. MORROW, *Circular planar graphs and resistor networks*, preprint, Univ. de Washington (Seattle), 1994.
- [C-M] E. CURTIS, J. MORROW, *Determining the resistors in a network*, SIAM J. of applied math, 50 (1990), 918–930
- [C-M-M] E. CURTIS, E. MOOERS, J. MORROW, *Finding the conductors in circular networks from boundary measurements*, Preprint (University of Washington), (1991), 1–31.
- [CV1] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité*, Journal of Comb Theory B, 50 (1990), 11–21
- [CV2] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Multiplicités des valeurs propres: laplaciens discrets et laplaciens continus*. Rendiconti Matematica, 13 (1993), 433–460.
- [CV-G-V] Y. COLIN DE VERDIÈRE, I. GITLER, D. VERTIGAN, *Planar electric networks II*, En préparation, (1994).
- [DM] G. DAL MASO, *An introduction to Γ -convergence*, Birkhäuser, 1993
- [NA] A. NACHMAN, *Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem*, Preprint de l'université de Rochester, (1993), 1–49
- [S-U] J. SYLVESTER, G. UHLMANN, *A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*, Ann. of Math., 125 (1987), 153–169
- [TH] C. THOMASSEN, *2-linked graphs*, Europ. J. Combinatorics, 1 (1980), 371–378

Université de Grenoble I
 Institut Fourier
 Laboratoire de Mathématiques
 associé au CNRS
 BP 74, F-38402-Saint Martin d'Hères Cedex
 tél:(33) 76 51 49 65; e-mail:ycolver@fourier-grenet.fr

Received February 4, 1993; April 7, 1994