

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 67 (1992)

**Artikel:** Immersions tendues de surfaces dans E3.  
**Autor:** Haab, Francois  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-51090>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Immersions tendues de surfaces dans $E^3$

FRANÇOIS HAAB

## 1. Introduction

Une immersion lisse  $f: M \rightarrow E^3$  d'une surface compacte  $M$  sans bord de caractéristique d'Euler  $\chi(M)$  dans l'espace euclidien à 3 dimensions  $E^3$  est tendue (tight) si la courbure totale absolue (normalisée) de  $f$

$$\tau(f) = 1/2\pi \int_M |K| dA \geq 4 - \chi(M)$$

atteint l'infimum  $4 - \chi(M)$  (pris dans l'espace des immersions de  $M$ ).

Une application continue (en particulier une immersion) d'une surface  $M$  dans  $E^n$  est tendue si elle satisfait la TPP propriété de Banchoff exigeant que la préimage  $f^{-1}(H)$  de tout demi-espace  $H$  de  $E^n$  soit connexe.

Nicolaas Kuiper [17, 18] inaugura en 1960 l'étude des immersions tendues dans  $E^3$  établissant:

(1) Toutes les surfaces orientables et les surfaces non orientables de caractéristique d'Euler strictement plus petite que-1 possèdent des immersions tendues dans  $E^3$ .

(2) Le plan projectif  $P^2$  et la bouteille de Klein  $K^2$  font exception en ne se laissant pas immerger différemment de façon tendue dans  $E^3$ .

Dans ce travail nous résoudrons la conjecture de Kuiper pour l'unique surface restante, celle de caractéristique-1 obtenue en attachant une anse d'indice 1 à  $P^2$ .

**THÉORÈME A.** *Le plan projectif avec une anse ne possède pas d'immersion tendue dans l'espace à trois dimensions  $E^3$ .*

La courbure totale absolue  $\tau(f)$  de toute immersion  $f$  du plan projectif avec une anse est donc plus grande que cinq; l'infimum de  $\tau(f)$ , égal à cinq, n'est jamais atteint.

Kuiper a établi [20] qu'il n'existe même pas d'immersion continue tendue de  $P^2$  et  $K^2$  dans  $E^3$ .

La classe des applications localement  $C^\infty$ -stables au sens de Thom est un peu plus grande que celle des immersions. Par exemple une application localement  $C^\infty$ -stable d'une surface dans  $E^3$  est une immersion excepté en un nombre fini de parapluies de Whitney. Toutes les surfaces, en particulier les trois exceptions  $P^2$ ,  $K^2$  et  $P^2 \# K^2$ , possèdent [19] des applications tendues  $C^\infty$ -stables dans  $E^3$ .

Dans cet article nous utiliserons notamment des notions de théorie de Morse, de singularités d'applications stables dans le plan et de "top-cycles" de Kuiper.

Nous étudierons les profils (contours apparents) des immersions tendues. Nous chercherons ensuite des obstructions à la factorisation d'applications stables tendues  $F : M \rightarrow E^2$  par des immersions tendues  $f : M \rightarrow E^3$  suivies de projections orthogonales pour obtenir le théorème A.

Je tiens à remercier Nicolaas Kuiper et Paulo Sad de l'intérêt manifesté à ce travail, en particulier de leurs nombreuses suggestions qui ont permis de clarifier la présentation des résultats. Je remercie également l'IMPA pour son hospitalité durant l'élaboration de parties substantielles de ce travail.

## 2. Définitions et résultats connus

La théorie de la courbure totale absolue ([25], p. 98) fournit l'inégalité  $\tau(f) = (1/2\pi) \int_M |K| dA \geq 4 - \chi(M)$  où  $K$  désigne la *courbure de Gauss de  $f$* . Les immersions pour lesquelles nous avons égalité sont appelées *tendues* (l'infimum est [24] égal à  $\tau(f)$  sur n'importe quelle classe d'homotopie régulière d'immersion  $f : M \rightarrow E^3$ ). Cette définition est la première d'une série de conditions équivalentes. Nous rappelons d'abord en (1) et (2) deux autres définitions de  $\tau(f)$ . Les définitions (4) et (5) formulées sans hypothèse de différentiabilité sont équivalentes dans ce contexte. Pour les surfaces immergées toutes ces définitions sont équivalentes. Le livre [7] est une bonne introduction aux différentes caractérisations des immersions tendues.

(1) Notons que dans le cadre de la théorie des variétés différentiables sans bord immergées dans  $E^n$ , on peut définir  $\tau(f)$  comme suit pour une immersion  $f : M \rightarrow E^3$ . Le fibré en sphère  $E(M)$  des vecteurs unités normaux à  $M$  (localement  $M$  est identifiée à  $f(M)$  car  $f$  est une immersion) n'est rien d'autre que le revêtement orientable à deux feuillets de  $M$ . Rappelons que l'application de Gauss  $G : E(M) \rightarrow S^2$  envoie un point  $\xi \in (T_x M)^\perp$  pour un certain  $x \in M$  sur le vecteur parallèle à  $\xi$  passant par l'origine. La *courbure totale absolue (de Lipchitz-Killing)* est la moitié de l'aire totale sur la sphère  $S^2$  couverte par l'image de l'application de Gauss.

(2) La projection orthogonale  $z^*$  sur la droite parallèle à  $z \in S^2$  induit pour presque tout  $z \in S^2$  une fonction hauteur  $h_z = z^* \circ f : M \rightarrow \mathbf{R}$  non dégénérée. Soit

$\mu_z = \mu(h_z)$  son nombre de points critiques. *La courbure totale absolue* est la valeur moyenne (expectation value  $\varepsilon$ )  $\tau(f) = \varepsilon_z \mu_z$ .

(3) Une immersion  $f: M \rightarrow \mathbf{E}^3$  est *tendue* si, et seulement si, toute fonction hauteur de Morse (obtenue à partir de l'immersion  $f$  par projection) est polaire, i.e possède un seul maximum et un seul minimum. Rappelons que presque toute fonction hauteur est de Morse.

(4) Une application continue  $f: M \rightarrow \mathbf{E}^3$  est *tendue* si, et seulement si, la préimage  $f^{-1}(H)$  de tout demi-espace fermé (ou ouvert)  $H$  de  $\mathbf{E}^3$  est connexe (TPP propriété de Banchoff).

(5) Une application continue  $f: M \rightarrow \mathbf{E}^3$  est *tendue* si, et seulement si, l'homomorphisme induit en homologie de Čech  $\check{H}_*(f^{-1}(H), \mathbb{Z}_2) \rightarrow \check{H}_*(M, \mathbb{Z}_2)$  est injectif pour chaque demi-espace  $H$ .

Un plan  $\pi \subset \mathbf{E}^3$  passant par  $f(x)$  est un *support (global) de  $f(M)$  au point  $x$* , si  $f(M)$  est entièrement contenue dans un des demi-espaces déterminés par  $\pi$ . Un plan  $\pi$  passant par  $f(x)$  est un *support local de  $f(M)$  en  $x$* , s'il existe un voisinage  $U$  de  $x$  tel que  $f(U)$  est contenue dans un des demi-espaces fermés déterminés par  $\pi$  et si  $f(\partial U)$  est à l'intérieur de ce demi-espace.

Enonçons une propriété des immersions tendues équivalente à la définition, ceci dans le cas d'un plongement.

**LEMME 2.1.** *Si une immersion  $f: M \rightarrow \mathbf{E}^3$  est tendue, tout plan support local de  $f(M)$  est un support global de  $f(M)$ .*

Soit  $X \subset \mathbf{E}^3$ , notons  $\mathcal{H}(X)$  le plus petit fermé convexe qui contient  $X$ . Le bord  $\partial\mathcal{H}(X)$  de la fermeture convexe est appelé *enveloppe convexe de  $X$* . Un “*top-set*” est la préimage  $T_z$  de la valeur maximale d'une fonction hauteur  $h_z: M \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $z \in \mathbf{S}^2$ . L'étude des “*top-sets*”  $T_z$ , en particulier ceux dont la fermeture convexe  $\mathcal{H}f(T_z)$  est un disque fermé 2-dimensionnel, est essentielle pour la compréhension des immersions tendues. Rappelons [17] que si  $f$  est tendue et  $\mathcal{H}f(T_z)$  2-dimensionnelle, alors  $\partial\mathcal{H}f(T_z) \subseteq f(T_z)$  et  $f$  restreint à  $\gamma = f^{-1}(\partial\mathcal{H}f(T_z))$  est un plongement. De plus si le disque  $\mathcal{H}f(T_z)$  n'est pas entièrement inclus dans  $f(T_z)$ ,  $\gamma$  ne sépare pas  $M$ . Les courbes  $\gamma$  intéressantes sont exactement celles qui ne séparent pas  $M$ , comme par exemple le cercle inférieur ou supérieur d'un tore de révolution. La courbe  $\gamma$  est appelée un “*top-cycle*” lorsqu'elle ne sépare pas  $M$ . Un “*top-cycle*” n'est donc pas homologue à zéro. En outre son voisinage tubulaire est orientable. Nous pouvons maintenant énoncer un théorème de structure dû à Kuiper [17].

**LEMME 2.2.** *Soit  $f: M \rightarrow \mathbf{E}^3$  une immersion tendue d'une surface compacte connexe sans bord  $M$  non homéomorphe à  $\mathbf{S}^2$ .  $M$  est alors la réunion de deux ouverts non vides disjoints  $M^+$  et  $M^-$  et d'un nombre fini de “*top-cycles*”  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  tel que:*

(a) *f restreint à  $M^+$  est un plongement sur le complément, dans  $\partial\mathcal{H}f(M)$ , d'un nombre fini de disques plans fermés convexes  $D_1, \dots, D_k$  où*

$$\gamma_i = f^{-1}(\partial D_i), \quad i = 1, \dots, k.$$

(b) *La courbure de Gauss  $K$  est non négative sur  $M^+$  et non positive sur  $M^-$ .*

Deux “top-cycles”  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  d'une immersion tendue (différentiable) sont des courbes disjointes car en un éventuel point commun  $x \in \gamma_1 \cap \gamma_2$  l'unique plan tangent en  $f(x)$  devrait coïncider avec les plans distincts qui supportent les images des deux “top-cycles”, les images de “top-cycles” distincts étant toujours supportées par des plans distincts. Kuiper utilise le fait qu'il existerait exactement 1 (resp. 2) “top-cycle” pour réfuter l'existence d'une immersion tendue du plan projectif (resp. de la bouteille de Klein) dans  $E^3$ . Le nombre de “top-cycles” d'une immersion tendue  $f: M \rightarrow E^3$  satisfait certaines restrictions [6].

**THÉORÈME 2.3.** *Le nombre  $\alpha(f)$  de “top-cycles” d'une immersion tendue  $f: M \rightarrow E^3$  d'une surface connexe sans bord satisfait aux inégalités suivantes:*

- (a) *Si  $M$  est orientable de genre  $g \geq 1$ , alors  $2 \leq \alpha(f) \leq 2 - \chi(M) = 2g$ . Toutes ces valeurs de  $\alpha(f)$  peuvent être atteintes.*
- (b) *Si  $M$  est non orientable, alors  $2 \leq \alpha(f) \leq 1 - \chi(M)$ .*

**COROLLAIRE 2.4.** *Une immersion tendue du plan projectif avec une anse possède exactement deux “top-cycles”  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .*

Cecil et Ryan ont montré en outre qu'une immersion tendue d'une surface de caractéristique impaire  $\chi(M) < -1$  possède  $1 - \chi(M)$  “top-cycles”, si et seulement s'il existe une immersion tendue de  $P^2 \# K^2$  dans  $E^3$ . Ainsi admettant le théorème A nous obtenons:

- (b1) *Si  $M$  est non orientable et  $\chi(M)$  impaire; alors  $2 \leq \alpha(f) \leq -\chi(M)$ .*
- (b2) *Si  $M$  est non orientable et  $\chi(M)$  paire; alors  $2 \leq \alpha(f) \leq 1 - \chi(M)$ .  
Toutes ces valeurs de  $\alpha(f)$  peuvent être atteintes.*

### 3. Le contour apparent des surfaces immergées de façon tendue dans $E^3$

Soit  $E^n = \mathbf{R}^n$  l'espace euclidien à  $n$  dimensions muni d'un produit scalaire et de la structure compatible d'espace vectoriel avec une origine  $O$ . Notons  $\pi_z: E^3 \rightarrow E_z$  la

projection orthogonale sur le plan  $E_z$  orthogonal à  $z \in \mathbf{S}^2$  et passant par l'origine  $O$ ,  $y^* : E^n \rightarrow \mathbf{R}$  la projection orthogonale sur la direction parallèle à  $y \in \mathbf{S}^{n-1}$  et  $h_y = y^* \circ f$  la fonction hauteur dans la direction de  $y \in \mathbf{S}^{n-1}$  associée à l'immersion  $f : M \rightarrow \mathbf{E}^n$ . Crit  $(h_y)$  désignera l'ensemble critique de  $h_y$ .

Une application  $F : M \rightarrow \mathbf{E}^2$  est *excellente* (2-générique) si tous ses points critiques sont du type pli ou cusp. L'ensemble critique  $\Sigma(F) \subset M$  est alors une union de cercles plongés.  $F|_{\Sigma(F)}$  est une immersion sur l'ensemble  $\Sigma^{1,0}(F) \subset M$  des points de type pli. L'ensemble  $\Sigma^{1,1}(F)$  des points cuspidaux est fini et les images par  $F$  des points de cusp sont les points de rebroussement de  $F(\Sigma(F))$ .

**DÉFINITION 3.1.** Lorsque  $F : M \rightarrow \mathbf{E}^2$  est 2-générique, l'image du pli  $\Sigma(F) = \{C_i\}_{i \geq 0}$  s'appelle le *contour apparent de  $F$* . Le contour apparent de  $F$  est *monotone* s'il possède une composante  $F(C_0)$  convexe (par rapport à  $F(M)$ ) et si les restrictions  $F|_{C_i}$  ( $i > 0$ ) sont des immersions localement concaves (par rapport à  $F(M)$ ).

**THÉORÈME 3.2.** *Soit une application 2-générique  $F : M \rightarrow \mathbf{E}^2$ , le contour apparent de  $F$  est monotone si et seulement si  $F$  est tendue, i.e satisfait la TPP propriété.*

*Preuve.* **Nécessité:** Supposons par l'absurde que  $F : M \rightarrow \mathbf{E}^2$  n'est pas tendue. Il existe un demi plan  $H = \{y \in E^2 \mid z^*(y) > c\}$  dont la préimage  $F^{-1}(H)$  possède au moins deux composantes connexes  $U_1$  et  $U_2$ . La fonction hauteur  $z^* \circ F$  possède un maximum local dans chacun des  $U_i$ ; ils appartiennent à  $F(\Sigma^{1,0}(F))$ . La courbe  $F(\Sigma^{1,0}(F))$  est localement convexe par rapport à  $F(M)$  au voisinage de la préimage de la valeur maximale de  $z^* \circ F|_{U_i}$  ( $i = 1, 2$ ). La composante  $C_0$  du pli possède donc deux maxima locaux de  $z^* \circ F$ . Ainsi  $F(C_0)$  n'est pas convexe. Contradiction.

**Suffisance:** Tout “top-set”  $T_z$  est connexe (car il satisfait (7.10 [7]) la TPP propriété) et appartient à  $\Sigma^{1,0}(F)$ . Il est donc immergé dans une droite  $(z^*)^{-1}(c)$ , par conséquent plongé sur un ensemble convexe (point ou segment). L'union des “top-sets”,  $F^{-1}(\partial \mathcal{H}F(M))$ , est un cercle plongé sur la courbe convexe  $\partial \mathcal{H}F(M)$ . Ce cercle est une composante, notée  $C_0$ , du pli de  $F$ . Si  $M \neq \mathbf{S}^2$ , considérons un point  $x \in \Sigma^{1,0}(F) \setminus C_0$  et un voisinage connexe  $U_x$  de  $x$  sur lequel  $F$  est équivalent à la forme canonique  $(x, y) \mapsto (x, y^2)$ . Exigeons que  $\Sigma(F) \cap U_x$  soit connexe. Aucun segment de droite  $[y_1, y_2] \subset \mathbf{E}^2$  avec ses extrémités sur  $F(\Sigma(F) \cap U_x)$  ne divise  $F(U_x)$ , car  $F$  satisfait la TPP propriété. L'intersection de  $[y_1, y_2]$  avec  $F(\Sigma(F) \cap U_x)$  se réduit à  $\{y_1 \cup y_2\}$ . Le contour apparent est donc localement convexe. Il est concave relativement à l'intérieur de  $F(U_x)$ ,  $x \in \Sigma^{1,0}(F) \setminus C_0$  vu que  $F$  est tendue.

□

Presque toute projection orthogonale  $\pi_z : \mathbf{E}^3 \rightarrow E_z$  d'une application  $C^\infty$ -stable tendue d'une surface dans  $\mathbf{E}^3$  est 2-générique tendue dans  $E_z$ . Toute surface  $M$

possède ainsi par [19] des applications 2-génériques tendues dans  $E^2$ . Les figures 1, 3, 4 et 5 représentent le contour apparent d'applications tendues de surfaces de caractéristique 1,  $-1$  et  $-3$  dans le plan.

Introduisons quelques notations pour énoncer un résultat de Levine [22] déterminant le genre de la surface  $M$  à partir de l'image du pli de  $F$ .

Soit  $C$  une composante connexe de  $\Sigma(F)$ ,  $F$  2-générique,  $g = F|_C$  est une immersion excepté aux points cuspidaux. La composée de  $h = g'/|g'| : C \setminus \Sigma^{1,1}(F) \rightarrow S^1$  et de l'application de  $S^1$  dans  $S^1$   $e^{i\theta} \mapsto e^{2i\theta}$  s'étend différentiablement en une application  $k_C : C \rightarrow S^1$  pour chaque composante connexe  $C$  de  $\Sigma^1(F)$ . Orientons les courbes  $C_i$  de  $\Sigma^1(F)$  de façon que l'image  $F(M)$  de la surface se trouve à gauche de l'image de la courbe de pli  $F(\Sigma^1(F))$  pour définir le degré  $r(C_i)$  de  $k_{C_i}$ . Notons  $k : \Sigma^1(F) \rightarrow S^1$  l'application égale à  $k_{C_i}$  sur chaque composante  $C_i$  de  $\Sigma^1(F)$ . Le degré de  $k$  est la somme des degrés des  $k_{C_i}$ .

**THÉORÈME 3.3.** *Soit  $F : M \rightarrow E^2$  une application stable (ou simplement 2-générique) d'une surface compacte sans bord dans le plan, le degré de  $k$  égale la caractéristique d'Euler de  $M$ .*

**COROLLAIRE 3.4.** *Si  $M$  est une surface différente de  $S^2$ , le contour apparent d'une application 2-générique tendue  $F : M \rightarrow E^2$  possède de 2 à  $3 - \chi(M)$  composantes connexes. Le degré  $r(C_i)$  de  $k_{C_i}$  est un entier strictement négatif pour toutes les composantes  $C_i$  du pli  $\Sigma^1(F)$ , exceptée celle dénommée  $C_0$  dont l'image  $F(C_0)$  constitue l'enveloppe convexe de  $F(M)$ . Son degré  $r(C_0) = 2$ , en outre  $\sum |r(C_i)| = 4 - \chi(M)$ .*

*Preuve.* Comme le contour apparent de  $F$  est monotone et vu le choix de l'orientation des composantes de pli  $C_i$ , le degré  $r(C_i)$  est strictement négatif si  $i > 0$ . Le degré  $r(C_0)$  de  $k_{C_0}$  est 2 car  $F(C_0)$  est convexe (se rappeler que  $k = h \circ (e^{i\theta} \mapsto e^{2i\theta})$ ). Le pli  $\Sigma(F)$  possède donc vu 3.3 au moins 2 et au plus  $3 - \chi(M)$  composantes connexes. De plus

$$\sum |r(C_i)| = 2 \left( \sum_{r(C_i) > 0} r(C_i) \right) - \sum r(C_i) = 4 - \chi(M).$$

Réservons le mot *profil* pour le contour apparent d'une application 2-générique  $F_z = \pi_z \circ f$  obtenue en composant une immersion  $f : M \rightarrow E^3$  et une projection  $\pi_z : E^3 \rightarrow E_z$ .

Soit  $f : M \rightarrow E^3$  une immersion d'une surface compacte connexe  $M$  sans bord dans  $E^3$ . L'application composée  $F_z = \pi_z \circ f$  est 2-générique pour presque toutes les directions de projections  $z \in S^2$  (Choisir un atlas de  $M$  tel que sur toute carte la restriction de  $f$  soit un plongement et appliquer [23]).

**COROLLAIRE 3.5.** *Si  $f: M \rightarrow \mathbf{E}^3$  est une immersion tendue,  $F_z = \pi_z \circ f$  est nécessairement tendue. Ainsi, pour presque tous les  $z \in \mathbf{S}^2$ ,  $F_z$  est 2-générique tendue. Dans ce cas son profil  $F_z(\Sigma^1(F_z))$  est monotone et satisfait les propriétés de 3.4.*

**COROLLAIRE 3.6.** *Soit  $f: M \rightarrow \mathbf{E}^3$  une immersion tendue;  $y, z \in \mathbf{S}^2$  des points pour lesquels  $F_z = \pi_z \circ f$  et  $F_y = \pi_y \circ f$  sont des applications 2-génériques et  $x = y \wedge z \in \mathbf{S}^2 \cap E_y \cap E_z$ . L'ensemble  $\text{Crit}(h_x) = \Sigma^1(F_y) \cap \Sigma^1(F_z)$  possède alors  $4 - \chi(M)$  composantes connexes homéomorphes soit à un point soit à un intervalle fermé.*

*Preuve.* Par monotonicité du contour apparent de  $F_y$  la somme  $\sum_{C_i \subset \Sigma^1(F_y)} |r(C_i)|$ , qui par 3.4 est égale à  $4 - \chi(M)$ , compte le nombre de composantes connexes de l'ensemble critique de  $h_x$  pour tout  $x \in E_y$ .  $\square$

Soit  $F = F_z = \pi_z \circ f$  2-générique, la normale à la surface en  $f(p) \in f(\Sigma^{1,0}(F))$  et  $z \in \mathbf{S}^2$  déterminent un plan dont l'intersection avec la surface immergée  $f(M)$  est une courbe lisse au voisinage de  $f(p)$ . La courbure de cette courbe en  $f(p)$  est la *courbure transverse*  $k_\theta(p)$ . La courbure du profil en  $F(p) \in F(\Sigma^{1,0}(F))$  est la *courbure radial*  $k_c(p)$ .

**LEMME 3.7** (formule de Koenderink [12]). *Dans la situation décrite ci-dessus*

$$K(p) = k_c(p)k_\theta(p) \quad \text{et} \quad k_\theta(p) \neq 0.$$

**COROLLAIRE 3.8.** *Soit une immersion  $f: M \rightarrow \mathbf{E}^3$ , choisissons  $z \in \mathbf{S}^2$  tel que  $F = F_z = \pi_z \circ f$  soit 2-générique et  $y \in E_z$ . La fonction  $h_y$  est de Morse si et seulement si  $y^* \circ F|_{\Sigma^1(F)}$  est de Morse. Elles possèdent les mêmes points critiques.*

*Preuve:* Rappelons que  $p$  est un point critique non dégénéré de  $h_y$  (resp. de  $y^* \circ F|_{\Sigma^1(F)}$ ) si et seulement si  $K(p)$  (resp.  $k_c(p)$ ) est non nulle. La formule de Koenderink permet alors de conclure.  $\square$

#### 4. Fonctions de Morse et fonctions minimalement dégénérées sur les surfaces à bords

Une fonction réelle  $\varphi$  sur une variété à bord  $(M, \partial M)$  est une *fonction de Morse* possédant la propriété *B* si:

- (1)  $\varphi|_M$  est de Morse.
- (2)  $\varphi$  ne possède pas de points critique sur  $\partial M$ .
- (3)  $\psi = \varphi|_{\partial M}$  est une fonction de Morse sur  $\partial M$ .

Un point critique  $p$  de  $\psi$  est *(+)-critique* (resp. *(-)-critique*) si  $\text{grad}_p \varphi$  entre dans  $M$  (resp. sort de  $M$ ). Le *nombre de Morse augmenté d'indice  $k$* , noté  $\tilde{\mu}_k$ , est la somme du nombre  $\mu_k(\varphi)$  de points critiques d'indice  $k$  de  $\varphi$  dans  $\mathring{M}$  et du nombre  $\mu_k(+(+)\varphi)$  de points *(+)-critiques* de  $\psi$  d'indice  $k$ .

**LEMME 4.1.** *Les inégalités de Morse restent [5] valables pour les nombres de Morse augmentés. En particulier*

$$\chi(M) = \sum (-1)^k \tilde{\mu}_k$$

Soit  $M$  une surface compacte connexe et  $\varphi : M \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de Morse qui possède la propriété B si  $\partial M \neq \emptyset$ . Nous notons  $M_{(-\infty, a]}$  la partie  $\varphi^{-1}(-\infty, a]$  et  $M_a$  le bord de  $M_{(-\infty, a]}$ . Observons que  $M_a$  coïncide avec le niveau  $\varphi^{-1}(a)$  lorsque  $\partial M = \emptyset$  et que  $M_{(-\infty, a]}$  peut être une surface à coins si  $\partial M \neq \emptyset$ . Si  $a$  est une valeur régulière de  $\varphi$ ,  $M_a$  est une sous-variété à coins de dimension 1 de  $M$ .

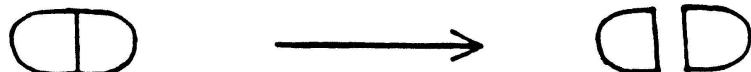
Considérons d'abord  $\varphi$  avec un point critique (ou *(+)-critique*) d'indice 1 dans  $M_{a-\varepsilon}$ . Passer un point critique (ou *(+)-critique*) d'indice 1 de  $M_a$ , c'est effectuer [4] une chirurgie d'indice 1 sur  $M_{a-\varepsilon}$ .

Nous distinguons trois cas:

*Cas 1 → 2:* Deux composantes connexes de  $M_{a-\varepsilon}$  sont connectées par la chirurgie:



*Cas 2 → 1:* Une composante connexe de  $M_{a-\varepsilon}$  est disconnectée par la chirurgie:



*Cas 1 → 1:* Une composante connexe de  $M_{a-\varepsilon}$  est transformée en une composante connexe de  $M_{a+\varepsilon}$ :



Ce dernier cas ne peut se présenter que si  $M$  est non orientable. S'il y a plusieurs points critiques (ou *(+)-critiques*) d'indice 1 dans  $M_a$  nous les passons successivement afin d'établir la classification ci-dessus.

**DÉFINITION 4.2.** Un point critique (ou *(+)-critique*) d'indice 1 d'une fonction de Morse (satisfaisant la condition B au bord) sur une surface est *de type I* si

l'effet de la chirurgie est de modifier le nombre de composantes connexes du bord (cas  $1 \rightarrow 2$  et  $2 \rightarrow 1$ ) et *de type II* sinon (cas  $1 \rightarrow 1$ ).

Notons  $\tilde{\mu}'_1$  (resp.  $\tilde{\mu}''_1$ ) le nombre de points de critiques et (+)-critiques de type I (resp. II).

**PROPOSITION 4.3.** *Soit une surface connexe compacte non orientable de genre  $k$  percée de  $n$  trous ( $\chi(M) = 2 - k - n$ ), et une fonction de Morse  $\varphi : M \rightarrow \mathbf{R}$  (possédant la propriété B).  $\tilde{\mu}''_1$  est congruent à  $k \bmod 2$ .*

*Preuve.* Le nombre de composantes connexes de  $M_{c-\varepsilon}$  et  $M_{c+\varepsilon}$  diffère de  $\pm 1$  lorsque nous passons un point critique ou (+)-critique de  $M_c$  d'indice 0, 2 ou 1 de type I. Ce nombre ne change pas si le point critique est de type II (et d'indice 1). Ainsi

$$\tilde{\mu}_0 + \tilde{\mu}'_1 + \tilde{\mu}_2 \equiv n \bmod 2 \quad (1)$$

D'autre part par (4.1)

$$\tilde{\mu}_0 - \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2 = \chi(M) \quad (2)$$

soustrayant (2) de (1)

$$\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}'_1 \equiv n - \chi(M) \bmod 2$$

d'où

$$\tilde{\mu}''_1 = \tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}'_1 \equiv n - \chi(M) \equiv k \bmod 2. \quad \square$$

**PROPOSITION 4.4.** *Une fonction de Morse  $\varphi : M \rightarrow \mathbf{R}$  satisfaisant la propriété B au bord sur une surface connexe non orientable de genre  $k$  possède au plus  $k$  selles et points (+)-critiques de type II.*

*Preuve.* Supposons que tous les points critiques et (+)-critiques possèdent des valeurs distinctes. L'ensemble  $M_c$  contient un chemin renversant l'orientation de  $M$  lorsque  $c$  est valeur critique d'une selle ou d'un point (+)-critique de type II. Ces  $\tilde{\mu}''_1$  chemins renversants l'orientation peuvent posséder des parties communes dans le bord de  $M$  si  $\partial M \neq \emptyset$ . Modifions si nécessaire ces chemins dans un voisinage Col de  $\partial M$  pour les rendre disjoints. Comme une surface (non orientable) compacte connexe de genre  $k$  possède [14] au plus  $k$  chemins disjoints reversants l'orientation, nous obtenons que  $\tilde{\mu}''_1 \leq k$ .  $\square$

Pour n'importe quelle fonction de Morse non dégénérée avec des points critiques isolés sur une variété compacte, les inégalités de Morse mettent en relation les nombres de Betti de la variété et les nombres de points critiques de chaque indice. Bott [3], puis Kirwan [15] ont étendu la théorie de Morse classique à des classes plus générales de fonctions. Les fonctions non dégénérées au sens de Kirwan sont dites *minimalement dégénérées* ([15], p. 121–137).

**DÉFINITION 4.5.** Une fonction  $h : M \rightarrow \mathbf{R}$   $C^\infty$  sur une variété compacte  $M$  est *minimalement dégénérée* si les conditions suivantes sont satisfaites:

(1) L'ensemble  $\text{Crit}(h)$  des points critiques de  $h$  est la réunion  $\mathbf{C}$  d'une famille finie d'ensembles fermés disjoints, sur lesquels  $h$  est constante. Les éléments  $C \in \mathbf{C}$  sont appelés “*sous-ensembles critiques*” de  $h$ . Pour des fonctions  $h$  raisonnables  $\mathbf{C}$  est l'ensemble des composantes connexes de  $\text{Crit}(h)$ .

(2) Pour tout  $C \in \mathbf{C}$ , il existe une sous-variété localement fermée  $\Sigma_C$  contenant  $C$  et dont le fibré normal dans  $M$  est orienté. De plus

- (a)  $C$  est le sous-ensemble de  $\Sigma_C$  sur lequel  $h$  est minimum.
- (b) En tout point  $x \in C$ , l'espace tangent  $T_x \Sigma_C$  est maximal parmi tous les sous-espaces de  $T_x M$  sur lesquels le hessien  $H_x(h)$  est non défini négatif.

Une sous-variété satisfaisant ces propriétés est appelée *variété minimisante* pour  $h$  le long de  $C$ .

Toutes les définitions et les résultats précédents s'étendent sans modifications aux fonctions minimalement dégénérées. De plus

**LEMME 4.6.** Soit  $f : M \rightarrow \mathbf{E}^3$  une immersion tendue d'une surface  $M$  et  $z \in \mathbf{S}^2$  tel que  $\pi_z \circ f : M \rightarrow E_z$  soit 2-générique. La fonction hauteur  $h_x$  est minimalement dégénérée pour tout  $x \in E_z \cap \mathbf{S}^2$ .

L'ensemble critique d'une telle fonction hauteur  $h_y$ ,  $y \in E_z$  est constitué d'intervalles fermés et de points isolés. Dorénavant appelons également “*points critique*” (resp. “*selles*”) les composantes critiques (resp. composantes critique d'indice 1) de  $h_y$ ,  $y \in E_z$ .

## 5. Compléments sur les projections des immersions tendues et le type de leurs points de pli

**LEMME 5.1.** Soit  $f : M \rightarrow \mathbf{E}^3$  une immersion tendue d'une surface de genre  $> 0$  et  $x \in \mathbf{S}^2$  tel que la fonction hauteur  $h_x$  soit de Morse.  $h_x|_{M^-}$  satisfait la condition B au bord et ne possède pas de points (+)-critiques d'indice 1.

*Preuve.* Soit  $\alpha(f)$  le nombre de “top-cycles” de  $f: M \rightarrow \mathbf{E}^3$  et  $\mu_i(+)[M^+]$  (resp.  $\mu_i(+)[M^-]$ ) le nombre de points (+)-critiques d’indice  $i$  de  $h_x|_{M^+}$  (resp.  $h_x|_{M^-}$ ). Comme  $f$  est tendue,  $h_x$  possède deux extrema dans  $M^+$  et  $2-\chi(M)$  selles dans  $M^-$ . Appliquons 4.1 à  $h_x|_{M^+}$  et  $h_x|_{M^-}$ :

$$\chi(M^+) = 2 + \mu_0(+)[M^+] - \mu_1(+)[M^+], \quad (1)$$

$$\chi(M^-) = (\chi(M) - 2) + \mu_0(+)[M^-] - \mu_1(+)[M^-]. \quad (2)$$

$M^+$  est une sphère percée de  $\alpha(f)$  trous, ainsi

$$\chi(M^+) = 2 - \alpha(f), \quad (3)$$

$$\chi(M^-) = \chi(M) - \chi(M^+) = \alpha(f) + (X(M) - 2). \quad (4)$$

$h_x|_{M^+}$  (resp.  $h_x|_{M^-}$ ) possède au moins  $\alpha(f)$  points (+)-critiques car

$$\mu_1(+)[M^+] - \mu_0(+)[M^+] = \alpha(f) \geq 2; \quad \text{vu (1) et (3)}, \quad (5)$$

$$\mu_0(+)[M^-] - \mu_1(+)[M^-] = \alpha(f) \geq 2; \quad \text{vu (2) et (4)}. \quad (6)$$

D’autre part la restriction de la fonction hauteur  $h_x$  aux  $\alpha(f)$  “top-cycles”, qui constituent  $\partial M^+ = \partial M^-$ , possède exactement  $2\alpha(f)$  points critiques car l’immersion  $f$  plonge chaque “top-cycle” sur une courbe convexe. La somme des nombres de points (+)-critiques de  $h_x|_{M^+}$  et  $h_x|_{M^-}$  est donc égale à  $2\alpha(f)$ . Ainsi  $h_x|_{M^+}$  et  $h_x|_{M^-}$  possèdent exactement  $\alpha(f)$  points (+)-critiques. (5) et (6) établissent maintenant que  $\mu_0(+)[M^+]$  et  $\mu_1(+)[M^-] = 0$ .  $\square$

**DÉFINITION 5.2.** Soit un point  $q$  d’une surface compacte  $M$  et une immersion  $f: M \rightarrow \mathbf{E}^3$ , désignons par  $G^+(q)$  une des deux normales à  $T_{f(q)}f(M)$  et par  $\bar{q}$  la composante connexe de  $\text{Crit}(h_{G^+(q)})$  qui contient  $q$ . Si  $h_{G^+(q)}$  est minimalement dégénérée et si  $\bar{q}$  est une “selle” de  $h_{G^+(q)}$ , le *type de q* est par définition celui du “point critique”  $\bar{q}$  de la fonction hauteur  $h_{G^+(q)}$ . Si  $q$  appartient à une sous-variété à bord, 2-dimensionnelle,  $M_1$  de  $M$  et si  $h_{G^+(q)}|_{M_1}$  est une fonction de Morse (ou minimalement dégénérée) qui satisfait la propriété B au bord, définissons le *type de q relatif à  $M_1$*  considérant  $\bar{q}$  comme point critique de  $h_{G^+(q)}|_{M_1}$ . Le type relatif à  $M$  et celui relatif à  $M_1$  diffèrent en général. Nous noterons  $\text{II}[M_1]$  (resp.  $\text{II}[M_1]$ ) le *type I* (resp. *II*) *relatif à  $M_1$*  dans le cas où il est utile de préciser la surface considérée.

Observons que, lorsque  $f: M \rightarrow \mathbf{E}^3$  est tendue, la notion de type est bien définie non seulement pour les points hyperboliques mais également pour ceux qui sont points de pli d’une application 2-générique  $\pi_z \circ f$ .

Notons  $\Sigma M^-(f)$  l'ouvert des points de  $M^-$  qui pour un certain  $z \in S^2$  sont points de pli de  $\pi_z \circ f$  avec  $\pi_z \circ f$  2-générique. Définissons

$$M_{I[M^-]} = \{p \in \Sigma M^-(f) \mid \bar{p} \text{ est un point de type } I[M^-]\},$$

$$M_{II[M^-]} = \{p \in \Sigma M^-(f) \mid \bar{p} \text{ est un point de type } II[M^-]\}.$$

LEMME 5.3. *Soit  $M$  une surface de genre  $\neq 0$ , il existe alors pour toute immersion tendue  $f: M \rightarrow E^3$  un point  $x$  de  $S^2$  avec  $F_x = \pi_x \circ f$  2-générique et dont le pli  $\Sigma^1(F_x)$  possède des points de type I et  $I[M^-]$ .*

*Preuve.* Choisissons un “top-set”  $T_z$ ,  $z \in S^2$ , contenant un “top-cycle”  $\gamma$ . Comme  $T_z$  est connexe (cf [17]),  $z$  définit un champ  $C^\infty$  de vecteurs unités normaux à  $f(M)$  sur  $T_z$ . L’extension de ce champ de vecteurs à un voisinage  $W$  de  $T_z$  définit une orientation sur  $W$ . Choisissons  $x \in S^2$  presque perpendiculaire à  $z$  tel que  $F_x = \pi_x \circ f$  soit 2-générique. Il existe par ([7], p. 58)  $y \in S^2 \cap E_x$  proche de  $z$  tel que  $h_y$  soit de Morse et  $r \in \mathbf{R}$  tel que

$$\gamma \subset V = h_y^{-1}(r, \infty) \subset \bar{V} = h_y^{-1}[r, \infty) \subset W.$$

Le niveau  $h_y^{-1}(r)$  possède une composante connexe dans  $M^+$  et une dans  $M^-$ . La région  $V \cap M^-$  contient par conséquent une selle  $s'$  de type I de  $h_y$ . Par construction la selle  $s'$  appartient à  $\Sigma^1(F_x)$ .  $s'$  est également de type I relativement à  $M^-$  car  $(h_y|_{M^-})^{-1}(r, \infty) = V \cap M^- \subset W$  est orientable.  $\square$

LEMME 5.4. *Soit  $f: M \rightarrow E^3$  une immersion tendue d’une surface compacte sans bord et  $z \in S^2$  tel que  $F_z = \pi_z \circ f: M \rightarrow E_z$  soit 2-générique. Le type (relatif à  $M$  ou  $M^-$ ) des points de  $\Sigma^1(F_z) \cap M^-$  est constant au voisinage d’une point  $q$  lorsque la tangente au profil  $F_z(\Sigma^1(F_z))$  en  $F(q)$  ne possède pas d’autres points de tangence avec ce profil.*

REMARQUE 5.5. Considérons l’immersion tendue  $f: M \rightarrow E^3$  de la surface  $M$  de caractéristique d’Euler-3 possédant une symétrie d’ordre 3 décrite par Kühnel et Pinkall en [16]. Un examen attentif du procédé d’approximation  $C^\infty$  et de la surface polyédrale tendue (Figure 3-5 [16]), point de départ de la construction de l’immersion  $f: M \rightarrow E^3$  lisse tendue, permet de constater que tout profil de cette surface immergée présente (Figure 1) trois droites de bitangence provoquant un changement de type. Le type des points d’une composante de pli n’est donc en général pas constant si  $\chi(M) \leq -3$ .

Le profil de cette surface tendue de caractéristique-3 possède trois droites tangentes au profil en deux points, l’un projection d’un point de type I l’autre de

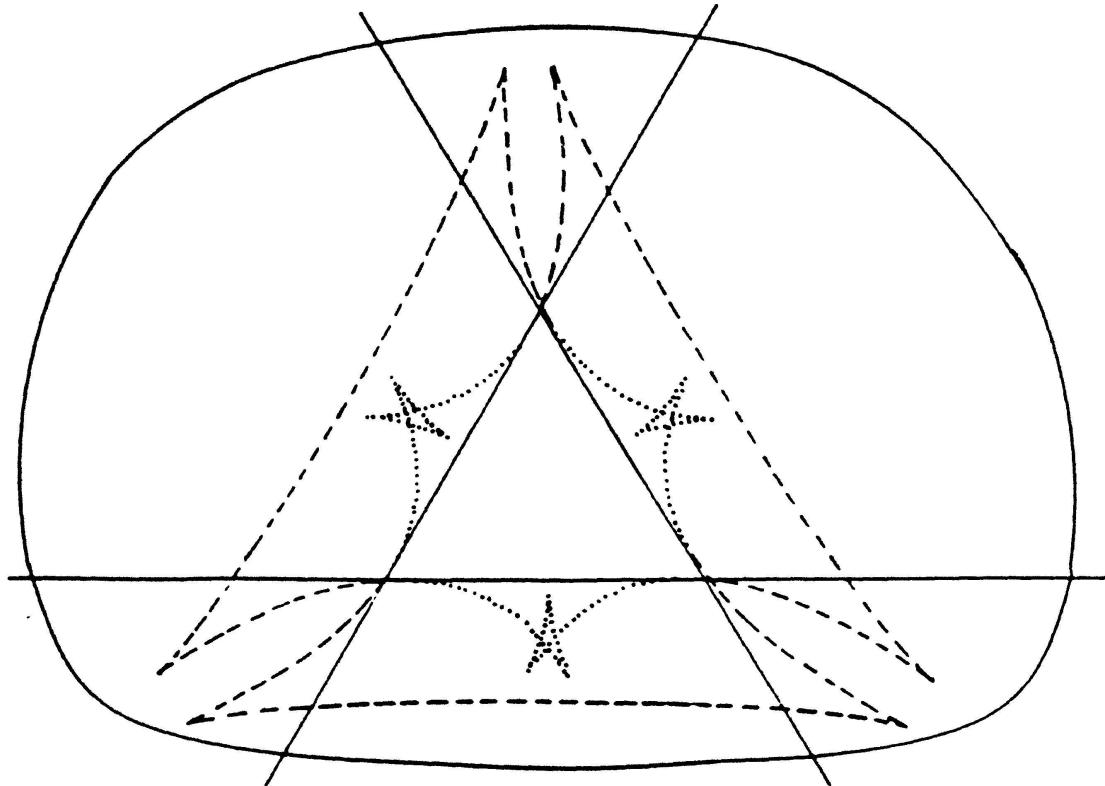


Figure 1

type II. Les traits fins continues indiquent les trois droites de bitangence, la courbe grasse représente la composante du profil projection de la composante de pli appartenant à  $M^+$  et les traits fins pointillés (resp. traitillés) les parties du profil projection des points de type I (resp. II) du pli.

**LEMME 5.6.** *Soit  $f: M \rightarrow \mathbb{E}^3$  une immersion tendue du plan projectif avec une anse, une seule composante connexe  $K$  de l'ensemble critique d'une fonction hauteur  $h_y$ ,  $y \in \mathbb{S}^2$  intersecte  $\bar{M}_{II[M^-]}$ .*

*Preuve.* Procédons par l'absurde et choisissons deux composantes connexes  $K_1$ ,  $K_2$  de  $\text{Crit}(h_y)$  telles que  $K_i \cap \bar{M}_{II[M^-]} \neq \emptyset$  ( $i = 1, 2$ ).  $K_1$  et  $K_2$  appartiennent au même niveau  $h_y^{-1}(c)$  car sinon un niveau séparant  $K_1$  et  $K_2$  diviserait  $M^-$  en deux parties non orientables  $M_1$  et  $M_2$ ; mais ceci est impossible car le plan projectif percé de deux trous  $M^- = M_1 \cup M_2$  contiendrait alors deux chemins distincts renversants l'orientation (l'un dans  $M_1$ , l'autre dans  $M_2$ ).

Considérons deux voisinages  $V_1$ ,  $V_2$  de  $K_1$  et  $K_2$  tels que  $\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 = \emptyset$  obtenus par exemple comme préimage par  $\|\text{grad } h_y\|$  d'un petit voisinage de  $0 \in \mathbb{R}^+$ . Choisissons, comme dans la figure 2, une selle  $s_{y_1}^{II}$  de  $h_{y_1}$  de type  $II[M^-]$  dans  $V_1$  telle que les sphères à droite de  $s_{y_1}^{II}$  appartiennent à  $V_1 \cup h_{y_1}^{-1}[c, \infty)$  et  $r_1 \in \mathbb{R}$  une valeur régulière de  $h_{y_1}$  telle que  $h_{y_1}(h_{y_1}^{-1}(r_1)) > c$ . De même choisissons une selle  $s_{y_2}^{II}$  de type

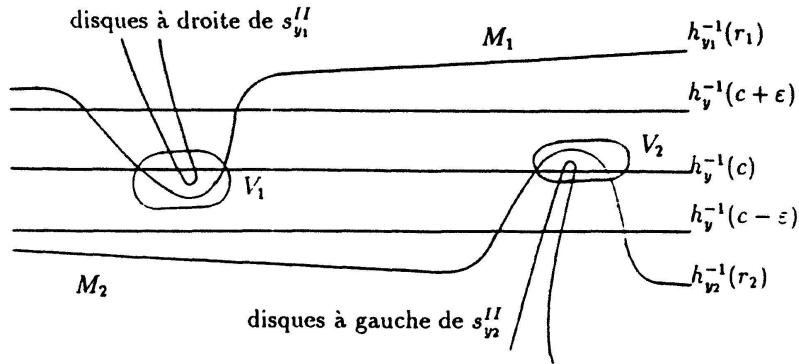


Figure 2

$\text{II}[M^-]$  dans  $V_2$  telle que les sphères à gauche de  $s_{y_2}^{II}$  appartiennent à  $V_2 \cup h_{y_2}^{-1}(-\infty, c]$  et  $r_2 \in \mathbf{R}$  une valeur régulière de  $h_{y_2}$  telle que  $h_{y_2}(h_{y_2}^{-1}(r_2)) < c$ . La surface  $M_i \subset M^-$  ( $i = 1, 2$ ) obtenue en attachant une anse d'indice 1 à  $(h_{y_1}|_{M^-})^{-1}[r_1, \infty)$  (resp.  $(h_{y_2}|_{M^-})^{-1}(-\infty, r_2]$ ) en passant la selle  $s_{y_i}^{II}$  est non orientable. Comme  $M_1$  et  $M_2$  peuvent être choisies disjointes, nous obtenons la même contradiction que précédemment.  $\square$

**COROLLAIRE 5.7.** *Soit  $f: M \rightarrow E^3$  une immersion tendue du plan projectif avec une anse et  $z \in S^2$  tel que  $F_z = \pi_z \circ f: M \rightarrow E_z$  soit 2-générique. Le type relatif à  $M^-$  est constant sur chaque composante connexe du profil  $F_z(\Sigma^1(F_z))$  inclue dans  $M^-$ . (Le profil  $F_z(\Sigma^1(F_z))$  ne possède pas de bitangence provoquant un changement de type relatif à  $M^-$  sur  $\Sigma^1(F_z) \cap M^-$ ).*

**Preuve.** Supposons par l'absurde qu'au voisinage d'un point  $t_1$  du pli  $\Sigma^1(F_z)$  le type n'est pas constant sur le pli. Choisissons un vecteur unitaire  $y \in E_z$  normal au plan tangent à  $f(M)$  en  $f(t_1)$ . La fonction hauteur  $h_y$  (de Morse ou minimalement dégénérée) possède par 5.4 sur le niveau du "point critique"  $t_1$  un autre "point critique"  $t_2$  au voisinage duquel le type n'est pas constant sur le pli  $\Sigma^1(F_z)$  vu 4.3. Contradiction avec 5.6.  $\square$

**COROLLAIRE 5.8.** *Soit  $f: M \rightarrow E^3$  une immersion tendue du plan projectif avec une anse et  $z \in S^2$  tel que  $F_z = \pi_z \circ f: M \rightarrow E_z$  soit 2-générique. Le pli  $\Sigma^1(F_z)$  possède une composante connexe de type  $I[M^-]$ .*

## 6. Le plan projectif avec une anse $M$ ne possède pas d'immersion tendue dans $E^3$

Pour établir le théorème A, procédons par l'absurde et supposons l'existence d'une immersion tendue  $f: M \rightarrow E^3$  du plan projectif avec une anse. La "tension"

étant une propriété projective, supposons les plans contenant les deux “top-cycles” parallèles. Choisissons  $z \in \mathbf{S}^2$  tel que  $F = F_z = \pi_z \circ f : M \rightarrow E_z$  soit 2-générique et de sorte que la composante  $C_0 \subset M^+$  de son pli sépare  $M^+$  en deux parties, chacune d’elles contenant un “top-cycle” de  $f$ . Le noyau de  $\pi_z$  détermine la verticale de  $\mathbf{E}^3$ .

**PROPOSITION 6.1.** *Le pli  $\Sigma^1(F)$  possède 3 composantes connexes.*

*Preuve.* Le pli  $\Sigma^1(F)$  possède par (3.5) 2, 3 ou 4 composantes connexes.

*Cas I:* Supposons que  $\Sigma^1(F)$  possède 4 composantes connexes.  $\Sigma^1(F)$  est constitué de 3 chemins  $C_1, C_2, C_3 \subset M^-$  dont le “nombre d’enroulement”  $r(C_i)$  est  $-1$  et du chemin  $C_0 \subset M^+$ . Les chemins  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) possèdent un nombre impair de points cuspidaux car leur “nombre d’enroulement” est impair. Ils renversent donc l’orientation de  $M$  par [13].  $M^-$  qui est homéomorphe au plan projectif percé de deux trous ne peut contenir 3 chemins disjoints renversants l’orientation. Contradiction.

*Cas II* ( $\Sigma^1(F)$  possède deux composantes connexes): Choisissons  $x \in E_z \cap \mathbf{S}^2$  tel que  $h_x$  soit de Morse.  $h_x|_{M^-}$  satisfait la condition B au bord et possède une selle de type II relatif à  $M^-$  par 4.3. Toutes les selles de  $h_x$  appartiennent à l’unique composante  $C_1$  du pli de  $F$  contenu dans  $M^-$ .  $C_1$  est constitué uniquement de points du type II relatif à  $M^-$  par 5.6.  $h_x|_{M^-}$  possède donc trois selles de type II. Ceci contredit 4.4.  $\square$

Il existe des immersions  $f : M \rightarrow \mathbf{E}^3$  (évidemment non tendues) du plan projectif avec une anse qui factorisent des applications 2-génériques tendues  $F : M \rightarrow \mathbf{E}^2$  dont le contour apparent possède 2, 3 ou 4 composantes connexes.

*Exemple 1* ( $\Sigma^1(F)$  possède deux composantes connexes). Pour construire l’immersion  $f : M \rightarrow \mathbf{E}^3$  voulue, commençons par nous donner une courbe  $\mathcal{C}$  de  $M$  et une application différentiable  $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{E}^2$  telles que  $\rho(\mathcal{C})$  présente un nombre fini de points de rebroussement. Nous choisissons  $\rho(\mathcal{C})$  pour que  $\rho$  se prolonge suivant une application différentiable  $F : M \rightarrow \mathbf{E}^2$  dont  $\mathcal{C}$  est le pli. Il suffit (cf 3.2) pour que  $F$  soit tendue que le contour apparent  $F(\Sigma(F)) = \rho(\mathcal{C})$  donné initialement soit monotone. Le problème d’étendre  $\rho$  en  $F$  2-générique se ramène [11] essentiellement au problème suivant: donner des conditions nécessaires pour qu’une immersion  $\rho_0$  dans le plan du bord  $\mathcal{C}_0$  d’une surface compacte orientée  $M_0$  puisse se prolonger suivant une immersion de  $M_0$ . Un algorithme simple [8] détermine le nombre d’extensions différentes.

Nous décrivons dans la Figure 3 l’image d’un voisinage tubulaire canonique de  $\mathcal{C}$ . La courbe grasse représente  $\rho(\mathcal{C})$ , le trait fin l’image  $\rho_0(\mathcal{C}_0)$  du bord du voisinage

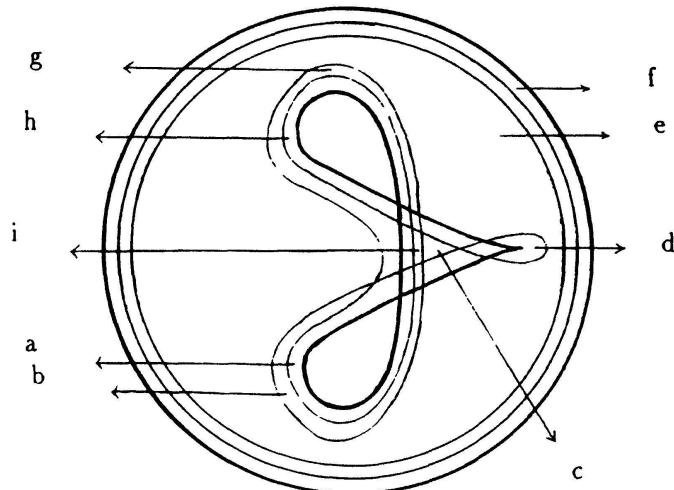


Figure 3

tubulaire canonique de  $\mathcal{C}$ . Le “mot de Blank” associé au “système de rayons” donné est  $\omega(\rho) = \{i^{-1}hdc^{-1}abghia, abcdefghi, abcdeghi\}$ .  $\rho_0$  s’étend (Th. 1 [8]) en une immersion  $F_0$  du disque percé de deux trous (de caractéristique-1) dans le plan.  $F_0$  détermine [11] une application 2-générique tendue  $F : M \rightarrow E^2$ . Elle peut être obtenue (Th. 1 [13]) en considérant d’abord le plan projectif avec une anse immergée dans  $E^3$  et en le projetant ensuite orthogonalement sur  $E^2$ .

*Exemple 2* ( $\Sigma^1(F)$  possède trois composantes connexes). Il suffit d’ajouter une anse de courbure négative à la surface de Boy plate (Figure 4, [10] p. 90) paramétrisée par Apery [1] pour obtenir une telle immersion. D’autres immersions ayant un profil tendu peuvent être construites en ajoutant une anse aux “cendriers à tabac” (Figure 5, [10] p. 115). La surface de Boy plate de la Figure 4 est obtenue en ajoutant trois disques plongés s’intersectant en un point triple.

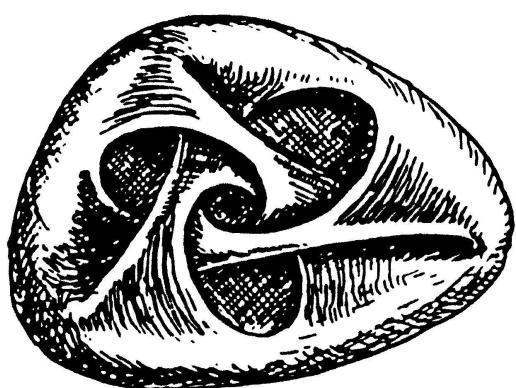


Figure 4

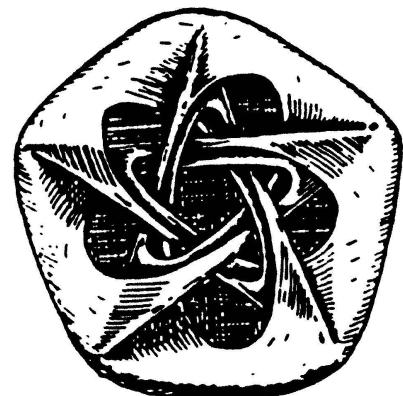


Figure 5

*Exemple 3* ( $\Sigma^1(F)$  possède quatre composantes connexes). Nous construisons à partir de trois exemplaires disjoints de la surface de Boy plate une immersion de  $M = \mathbf{P}^2 \# \mathbf{P}^2 \# \mathbf{P}^2$  possédant le profil suivant:

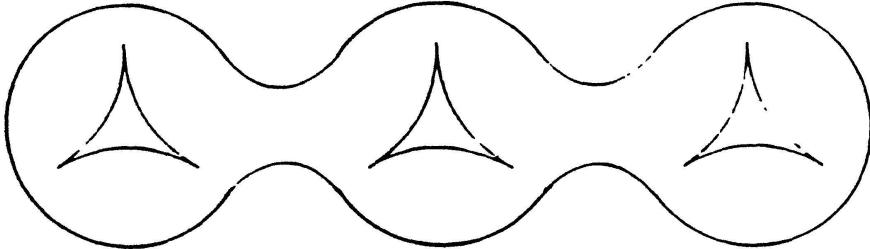


Figure 6

Nous déformons cette immersion au voisinage de  $C_0$  pour rendre  $f(C_0)$  convexe afin que sa composition avec une projection soit 2-générique tendue.

Afin d'établir qu'une immersion  $f: M \rightarrow \mathbf{E}^3$ ,  $\chi(M) = -1$ , dont le profil possède 3 composantes connexes n'est pas tendue, nous allons découper  $M$  le long des lignes de pli pour étudier l'application de Gauss  $G$  sur des parties orientables. Nous exhiberons un point  $z \in \mathbf{S}^2$  dont la préimage  $G^{-1}(z)$  limite un compact  $K$  ( $\neq G^{-1}(z)$ ) de  $M^-$  d'intérieur non vide. Il en résultera une contradiction à l'hypothèse absurde que  $f$  est tendue.

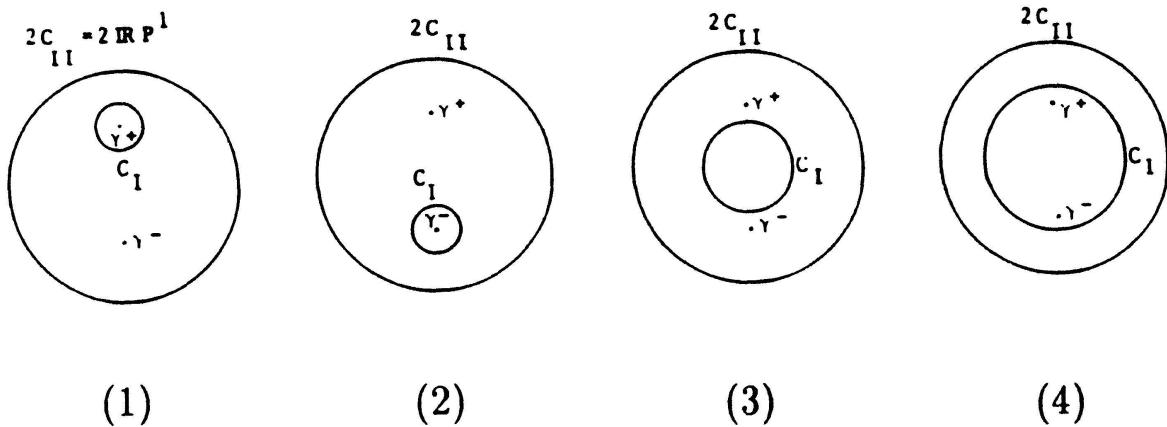
Notons  $G^+$  l'*application de Gauss restreinte à une partie orientée de  $M$* ,  $e_2^+$  et  $e_2^-$  les *hémisphères nord et sud de  $\mathbf{S}^2$* . Appelons  $C_0$  (resp.  $C_I$  et  $C_{II}$ ) la composante du pli de  $F$  de nombre d'enroulement 2 (resp.  $-2$  et  $-1$ ) et  $\gamma^+$  (resp.  $\gamma^-$ ) le “top-cycle” appartenant à la préimage de  $e_2^+$  (resp.  $e_2^-$ ) par  $G^+: \overline{M^+} \rightarrow \mathbf{S}^2$ . Etudions les positions relatives de  $C_0$ ,  $C_I$ ,  $C_{II}$  et des deux “top-cycles”  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$ .

**LEMME 6.2.** *Soit  $z \in \mathbf{S}^2$  tel que  $F_z = \pi_z \circ f$  soit 2-générique. Le pli  $\Sigma^1(F_z)$  possède par 6.1 deux composantes connexes  $C_I^z$  et  $C_{II}^z$  dans la partie  $M^-$  de courbure négative ou nulle de nombre d'enroulement  $-2$  et  $-1$  respectivement. Les “points” de  $C_I^z$  sont de type  $I[M^-]$ , ceux de  $C_{II}^z$  de type  $II[M^-]$ .*

*Preuve.* Soit  $x \in \mathbf{S}^2 \cap E_z$  tel que  $h_x$  soit de Morse. La fonction  $h_x|_{M^-}$  possède un point critique ou (+)-critique de type II relatif à  $M^-$  par 4.3 et 4.4. Ce point est une selle de  $h_x$  car  $h_x|_{M^-}$  ne possède pas par 5.1 de points (+)-critiques d'indice 1. Il appartient à  $C_{II}^z$  car sinon tous les points de  $C_I^z$  seraient de type  $II[M^-]$  et  $h_x|_{M^-}$  posséderait par conséquent deux selles de type  $II[M^-]$  vu que  $r(C_I^z) = -2$ ; contradiction.  $h_x|_{M^-}$  possède donc deux selles de type  $I[M^-]$  sur  $C_I^z$  et une de type  $II[M^-]$  sur  $C_{II}^z$ . Le lemme résulte maintenant de 5.7.  $\square$

**PROPOSITION 6.3.**  $C_I \cup \gamma^+$  ou  $C_I \cup \gamma^-$  bordent (dans  $M$ ) un anneau.

*Preuve.* Par définition  $\overline{M^-}/\gamma^+$  est obtenu identifiant  $\gamma^+$  à un point.  $P = (M^-/\gamma^+)/\gamma^-$  est homéomorphe au plan projectif (et  $M$  à  $P \# \text{tore} = P \# \text{anse} = P \# M^+$ ). Comme le voisinage de la ligne de pli  $C_{II} \in M^-$  est un ruban de Moebius (i.e  $C_{II}$  est un  $\mathbf{RP}^1 \subset \mathbf{RP}^2 = P$ ),  $P \setminus C_{II}$  est un disque. Il contient les points  $\gamma^+/\gamma^+$  et  $\gamma^-/\gamma^-$  appelés  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$ . La ligne de pli  $C_I \in M^-$ , plongée dans  $P$ , ne rencontre pas  $C_{II}$ , droite de  $P$ . Les positions relatives de  $C_I$ ,  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$  sont les suivantes:



Constatons afin de conclure que les cas (3) et (4) ne se présentent pas:

*Cas (3) ( $C_I$  borde un disque  $D$ ):* Choisissons  $x \in S^2$  presque parallèle aux deux plans parallèles contenant les “top-cycles” tel que  $F_x = \pi_x \circ f$  soit 2-générique. Il existe par 5.3  $y \in E_x \cap S^2$  tel que  $h_y$  possède une selle de type I $[M^-]$  dans un petit voisinage de chacun des deux “top-sets” qui contiennent un “top-cycle”.  $h_y$  possède une selle dans l’intérieur de  $D$  car l’application de Gauss  $(D, \partial D) \rightarrow (S^2, S^1)$  recouvre un hémisphère. Cette selle est de type II $[M^-]$  et appartient à la composante  $C_{II}^x$  de  $\Sigma^1(F_x)$  qui renverse l’orientation. Ce chemin  $C_{II}^x$  ne sort pas du disque  $D$  car il ne peut pas couper le bord  $\partial D \subset \Sigma^1(F)$  constitué uniquement de points de type I $[M^-]$ . Contradiction.

*Cas (4) ( $C_I$  borde un ruban de Moebius  $R$ ):* Rappelons que  $C_0$ ,  $C_I$ ,  $C_{II}$  sont les lignes de pli du composé  $F = F_{e_3}$  de l’immersion  $f$  et de la projection sur le plan horizontal. Choisissons  $F_x: M \rightarrow E_x$  et  $h_y: M \rightarrow \mathbf{R}$  comme dans le cas (3). Les deux “selles” de type I $[M^-]$  de  $h_y|_{M^-}$ ,  $v = x \wedge e_3$ , appartiennent à  $C_I^x \subset \Sigma^1(F_x)$  et à  $C_I \subset \Sigma^1(F)$  par 3.6 et 6.2; et constituent l’intersection  $C_I^x \cap C_I$ , car toute composante connexe de  $C_I^x \cap C_I$  est une selle de type I $[M^-]$  de  $h_y|_{M^-}$ . L’application normale de Gauss  $G^+: C_I^x \rightarrow S^2 \cap E_x \approx S^1$  envoie l’intersection  $C_I^x \cap C_I$  sur deux points antipodaux. Ainsi la partie de  $C_I^x$  contenue dans le disque  $D = P \setminus R$  de bord  $C_I$  est envoyé monotonement sur la moitié du grand cercle  $S^2 \cap E_x$ . Les deux “selles” de type

$I[M^-]$ , arbitrairement proches par construction des “top-cycles”  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$ , appartiennent à  $C_I^x \cap \mathbf{D}$  et sont envoyées par  $G^+$  sur des points antipodaux. Contradiction.  $\square$

Supposons dorénavant que  $C_I$  et le “top-cycle”  $\gamma^+$  bordent un anneau qui s'appellera  $B$ .

LEMME 6.4.  $M_{I[M^-]}$  et  $M_{II[M^-]}$  sont connexes par arcs.

*Preuve.* Soit  $p_1, p_2 \in M_{I[M^-]}$  (resp.  $M_{II[M^-]}$ ). Choisissons  $z_i \in \mathbf{S}^2$  ( $i = 1, 2$ ) tel que  $p_i$  appartienne au pli de  $F_{z_i}$ .  $F_{z_i} = \pi_{z_i} \circ f$  est 2-générique ( $i = 1, 2$ ) par définition. La composante de  $\Sigma^1(F_{z_1})$  contenant  $p_1$  intersecte par 3.6 celle de  $\Sigma^1(F_{z_2})$  contenant  $p_2$ , car chaque pli possède par 6.2 une unique composante de chaque type. Ainsi  $(\Sigma^1(F_{z_1}) \cup \Sigma^1(F_{z_2})) \cap M_{I[M^-]}$  (resp.  $\cap M_{II[M^-]}$ ) contient un arc reliant  $p_1$  et  $p_2$ .  $\square$

COROLLAIRE 6.5. *Aucun point de l'intérieur de  $B$  n'est de type  $II[M^-]$ .*

La surface (abstraite)  $A = \overline{M^- \setminus B \setminus C_{II}}$  est une sphère avec trois trous. Son bord est constitué de  $C_I, \gamma^-$  et  $2C_{II}$  ( $C_{II}$  parcouru deux fois). L'application de Gauss  $G^+ : A \rightarrow e_2^-$  envoie monotonialement  $C_I$  et  $2C_{II}$  sur l'équateur  $\partial e_2^-$  et le “top-cycle”  $\gamma^-$  sur un point. Soit le sous-ensemble

$$\overline{\overline{A_{II}}} = \{p \in A \setminus 2C_{II} \mid \bar{p} \cap \bar{M}_{II[M^-]} \neq \emptyset\} \cup 2C_{II}$$

de  $A$  et

$$\overline{\overline{M_{II}}} = \{p \in M \mid \bar{p} \cap \bar{M}_{II[M^-]} \neq \emptyset\}.$$

Rappelons un théorème de Vietoris-Begle [2]:

THÉORÈME 6.6. *Si  $f$  est une application continue surjective d'un espace compact de Hausdorff  $X$  dans  $Y$  telle que l'homologie de Čech de la préimage  $f^{-1}(y)$  de tout point  $y$  de  $Y$  soit trivial, l'homomorphisme induit par  $f$  de  $\check{H}(X, \mathbb{Z}_2)$  dans  $\check{H}(Y, \mathbb{Z}_2)$  est un isomorphisme.*

PROPOSITION 6.7. *A* contient un compact  $K \subset \overline{\overline{M_{II}}}$  qui sépare  $A$  en deux parties et dont l'image  $G^+(K)$  est un point.

*Preuve.* Notons  $G_{II}^+ : \overline{\overline{A_{II}}} \rightarrow e_2^-$  la restriction de  $G^+ : A \rightarrow e_2^-$ .

(1)  $G_{II}^+$  est surjective:

Soit  $G^{pr} : M \rightarrow \mathbf{P}^2$  l'application de Gauss des directions induite par  $G : E(M) \rightarrow \mathbf{S}^2$ . Comme toute fonction hauteur de Morse sur  $M^-$  possède une selle

de type  $II[M^-]$ , nous avons que  $G^{pr}(\overline{\overline{M}}_{II}) = G^{pr}(\overline{M}_{II}) = \overline{G^{pr}(M_{II})} = \mathbf{P}^2$ .  $G_{II}^+$  est surjective car  $G^{pr}(\overline{\overline{M}}_{II}) = G^{pr}(\overline{\overline{A}}_{II})$  vu que tous les points de type  $II[M^-]$  sont dans  $A$ .

(2) Il existe un compact  $K$  de  $\overline{\overline{M}}_{II}$  ne possédant pas l'homologie de Čech d'un point tel que  $G^+(K)$  est un point:

Supposons par l'absurde que l'homologie de Čech à coefficients  $\mathcal{X}_2$  de la préimage  $(G_{II}^+)^{-1}(y)$  de tout point de  $y \in e_2^-$  soit celle d'un point.  $G_{II}^+$  induit par 6.6 un isomorphisme de  $\check{H}_1(\overline{\overline{A}}_{II})$  sur  $\check{H}_1(e_2^-) = 0$ . Le cycle  $[2C_{II}] \in \check{H}_1(\overline{\overline{A}}_{II})$  est donc nul. L'inclusion  $i : \overline{\overline{A}}_{II} \hookrightarrow A$  envoie  $2C_{II}$  sur un bord de la sphère avec trois trous  $A$ , il représente donc un cycle non trivial. Contradiction.

(3)  $K$  est connexe par 5.6.

(4)  $K$  sépare  $A$  en deux parties:

L'affirmation résulte des faits suivants [9, 21]:

- Dans les variétés de dimension  $\leq 2$  un compact est cellulaire si et seulement s'il possède l'homologie (de Čech à coefficient  $\mathcal{X}_2$ ) d'un point.
- Les compacts cellulaires du plan se reconnaissent grâce à la propriété que  $K$  est cellulaire si et seulement si  $K$  et  $N \setminus K$  sont connexes non vides.  $\square$

*Fin de la démonstration du théorème A:*

Comme  $M_{I[M^-]}$  est connexe par 6.4, comme  $C_1 \subset M_{I[M^-]}$  et comme tout voisinage du “top-cycle”  $\gamma^-$  contient des points de type  $I[M^-]$   $K$  ne peut pas séparer (dans  $A$ )  $\gamma^-$  de  $C_1$  car  $K \cap M_{I[M^-]} = \emptyset$  vu que  $K$  n'est pas contractile.  $K$  est donc la frontière d'une région compacte  $R$  de  $M^-$  qui ne contient pas  $\gamma^-$  (en fait  $R = \overline{\overline{M}}_{II}$ ). Soit  $z \in S^2$  normal à  $T_{f(K)}f(M)$ . La fonction hauteur  $h_z$  est constante sur  $K = \partial R$  et possède un extremum local  $x_0 \in R \setminus K \subset M^-$  car  $G^+$  n'est pas constante sur  $R$ . Le plan tangent au point  $x_0$  de  $M^-$  est un support local mais non global de  $f(M)$ . Ceci contredit par 2.1 l'hypothèse que  $f : M \rightarrow E^3$  est tendu.

## RÉFÉRENCES

- [1] APERY, F., *La surface de Boy*, Adv. in Math., (3) 61 (1986), 185–266.
- [2] BEGLE, E. G., *The Vietoris mapping theorem for bicomplete spaces*, Ann. of Math. (3) 51 (1950), 534–543.
- [3] BOTT, R., *Nondegenerate critical manifolds*, Ann. of Math. 60 (1954), 248–261.
- [4] BRAESS, D., *Morse-theorie für berandete Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. 208 (1974), 133–148.
- [5] CAIRNS, S. and MORSE, M., *Critical Point Theory in Global Analysis and Differential Topology*, Academic Press, New-York, 1969.
- [6] CECIL, T. E. and RYAN, P. J., *On the number of top-cycles of a tight surface in 3-space*, J. London Math. Soc. (2) 30 (1984), 335–341.
- [7] CECIL, T. E. and RYAN, P. J., *Tight and taut immersions of manifolds*. Research Notes in Mathematics 107, Boston, London, Melbourne: Pitman Publ. 1985.

- [8] CURLEY, C. and WOLITZER, D., *Branched immersions of surfaces*, Michigan Math. J. 33 (1986), 131–144.
- [9] EDWARDS, R. D., *The topology of manifolds and cell-like maps*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki, 1978.
- [10] FRANCIS, G. K., *A Topological Picturebook*, Springer, New-York, 1987.
- [11] FRANCIS, G. K. and TROYER, S. F., *Excellent maps with given folds and cusps*, Houston J. Math. 3 (1977), 165–194; *Continuation*. Ibid. 8 (1982), 53–59.
- [12] GIBLIN P. and WEISS, R., *Reconstruction of surfaces from profiles*, Proc. 1st Int. Conf. Computer Vision, London UK (1987), 136–144.
- [13] HAEFLIGER, A., *Quelques remarques sur les applications différentiables d'une surface dans le plan*, Ann. Inst. Fourier Grenoble 10 (1960), 47–60.
- [14] HIRSCH, M. W., *Differential Topology*, GTM 33, Springer, New York, 1976.
- [15] KIRWAN, F. C., *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Mathematical Notes 31, Princeton, 1984.
- [16] KÜHNEL, W. and PINKALL, U., *Tight smoothing of some polyedral surfaces*, Global Differential Geometry and Global Analysis, Proceedings Berlin 1984, Lecture Notes in Mathematics 1156, Springer, Berlin, 1985.
- [17] KUIPER, N. H., *On surfaces in Euclidean three space*, Bull. Soc. Math. Belg. 12 (1960), 5–22.
- [18] KUIPER, N. H., *Convex immersions of closed surfaces in  $E^3$* , Comm. Math. Helv. 35 (1961), 85–92.
- [19] KUIPER, N. H., *Stable surfaces in Euclidean three space*, Math. Scand. 36 (1975), 83–96.
- [20] KUIPER, N. H., *There is no tight continuous immersions of the Klein bottle into  $R^3$* , preprint (1983).
- [21] LACHER, R. C., *Cell-like mappings and their generalisations*, Bull. Amer. Math. Soc. (4) 83 (1977), 495–552.
- [22] LEVINE, H., *Mappings of manifolds into the plane*, Am. J. of Math. (2) LXXXVIII (1966), 357–365.
- [23] MATHER, J. N., *Generic projections*, Ann. of Math. 98 (1973), 226–245.
- [24] PINKALL, U., *Tight surfaces and regular homotopy*, Topology (4) 25 (1986), 476–481.
- [25] WILLMORE, T. J., *Total Curvature in Riemannian Geometry*, Ellis Horwood Limited, West Sussex, England, 1982.

*Departamento de Matemática, ICEX, UFMG  
31270 Belo-Horizonte, MG, Brésil*

Received April 5, 1990