

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 67 (1992)

**Artikel:** Inégalités isosystoliques conformes.  
**Autor:** Bavard, Christophe  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-51088>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.05.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Inégalités isosystoliques conformes

CHRISTOPHE BAVARD

### 0. Introduction

Soit  $M^n$  une variété compacte non simplement connexe de dimension  $n$ . On appelle *systole* d'une métrique riemannienne sur  $M^n$  la longueur minimale d'une courbe non contractile. Une inégalité isosystolique, relative à un ensemble donné  $\mathcal{C}$  de métriques sur  $M^n$ , est une minoration du volume par la systole:

$$\text{Volume } g \geq \text{Constante} \cdot (\text{Systole } g)^n \quad (0)$$

valable pour toutes les métriques  $g$  de  $\mathcal{C}$ . Dans le présent travail, l'ensemble  $\mathcal{C}$  sera une classe conforme, et nous nous intéresserons à des inégalités *optimales*. Une métrique de  $\mathcal{C}$  qui réalise l'égalité dans (0) sera appelée *minimale*, puisqu'elle minimise le volume à systole fixée. Le résultat principal de cet article est une caractérisation des métriques minimales dans une classe conforme donnée.

Mais plaçons-nous d'abord dans un cadre plus général. Soit  $g_0$  une métrique fixée. La borne supérieure du rapport  $\text{Systole}/(\text{Volume})^{1/n}$  sur la classe conforme de  $g_0$  est un invariant conforme, associé à  $g_0$  et à la famille des courbes non contractiles. Un invariant analogue peut être défini à partir d'une classe quelconque de courbes. Si  $n = 2$ , il s'agit de la *longueur conforme*, notion classique dans la théorie des applications conformes (voir [Je]): étant donné une famille  $\Gamma$  de courbes rectifiables d'une surface riemannienne  $(\Sigma, g_0)$ , on pose

$$\text{Long Conf } \Gamma = \sup_g \{ \text{Long}^g \Gamma / (\text{Aire } g)^{1/2} \},$$

borne supérieure sur les métriques  $g$  conformes à  $g_0$ , où  $\text{Long}^g \Gamma = \inf_{\gamma \in \Gamma} \{ \text{Long}^g \gamma \}$ .

Etablir une inégalité isosystolique dans une classe conforme n'est donc qu'un cas particulier d'un problème plus général: majorer la longueur conforme. Or, la méthode dite "méthode des longueurs extrémales" fournit justement une telle estimation. La formulation qu'en donne M. Gromov dans [Gr, 5.5] est le point de départ de ce travail; décrivons-la en détail. Soit  $\mu$  une mesure positive de masse finie

$m$  sur  $\Gamma$ . Une fonction numérique continue sur  $\Sigma$  peut s'intégrer sur chaque courbe de  $\Gamma$  par rapport à la mesure de longueur, et en intégrant le résultat par rapport à  $\mu$  on définit une mesure  $^*\mu$  sur  $\Sigma$ . Supposons que  $^*\mu$  ait une densité  $f$  par rapport à la mesure d'aire  $dg_0$  de  $g_0$ ; alors

$$\text{Long Conf } \Gamma \leq m^{-1} \left( \int_{\Sigma} f^2 dg_0 \right)^{1/2}.$$

En effet, pour  $g = \varphi^2 g_0$  ( $\varphi$  continue  $> 0$  sur  $\Sigma$ ) on a

$$m \cdot \text{Long}^g \Gamma \leq \int_{\Gamma} \text{Long}^g \gamma d\mu(\gamma) = \int_{\Sigma} f \cdot \varphi dg_0 \leq \left[ \text{Aire } g \int_{\Sigma} f^2 dg_0 \right]^{1/2}.$$

Appelons encore *minimale* toute métrique  $g_0$  qui vérifie  $\text{Long Conf } \Gamma = \text{Long}^{g_0} \Gamma$  pour  $\Gamma$  donnée. Un examen rapide de la preuve ci-dessus montre que  $g_0$  est minimale dès que  $\mu$  satisfait les deux propriétés suivantes:

- (1) toute courbe  $\gamma$  du support de  $\mu$  est de  $g_0$ -longueur minimale:  
 $\text{Long}^{g_0} \gamma = \text{Long}^{g_0} \Gamma$ ;
- (2) la densité  $f$  de  $^*\mu$  est constante.

Inversement, il se trouve que l'existence d'une telle mesure est une condition *nécessaire* à la minimalité. Dans l'énoncé qui suit, on se donne une variété riemannienne compacte  $(M^n, g_0)$ , une famille  $\Gamma$  de courbes de  $M^n$  vérifiant des hypothèses techniques mineures (précisées au § 1), et on note  $S$  l'ensemble des courbes (non paramétrées) de  $g_0$ -longueur minimale dans  $\Gamma$ .

**THÉORÈME.** *La métrique  $g_0$  est minimale dans sa classe conforme si et seulement si il existe une mesure  $\mu$  sur  $S$  telle que  $^*\mu$  soit la mesure volume de  $g_0$ .*

En fait, ce critère ne fait intervenir que les *structures de longueur* et les propriétés de  $dg_0$  comme mesure. On aura donc un énoncé général valable pour les espaces de longueur compacts, avec une notion générale de "volume" (Th. 3.2).

Nous établirons aussi qu'une classe conforme donnée contient *au plus* une métrique minimale si  $n \geq 2$  (Prop. 1.5). Cette unicité reflète une propriété élémentaire de convexité; elle a cependant des conséquences intéressantes. Par exemple, on en déduira une preuve simple du théorème classique de  $L. Green$  concernant les métriques à géodésiques toutes fermées sur le plan projectif (voir [Be] et 4.5).

Voici le plan de cet article. Les paragraphes 1 et 2 contiennent les préliminaires techniques (“classe conforme”, “ $\alpha$ -volume” . . . ) nécessaires à l’énoncé du critère de minimalité pour les espaces de longueur. Celui-ci est démontré au § 3. Le § 4 décrit des exemples; enfin, on examine au § 5 le cas des graphes.

Je remercie M. Gromov pour ses conseils durant la préparation de ce travail, effectué en grande partie en 1987.

## 1. Classes conformes d’espaces de longueur

On considère dans tout ce qui suit un espace métrique  $X = (X, d)$ , tel que la distance entre deux points quelconques de  $X$  est égale à la borne inférieure des longueurs des courbes rectifiables joignant ces deux points:  $X$  est un espace de longueur (voir [GLP]). On supposera que  $X$  est *compact*.

1.1. Soit  $\varphi$  une fonction continue de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  à valeurs strictement positives. Si  $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow X$  est une courbe rectifiable, on note  $\hat{\gamma}$  la courbe obtenue en reparamétrant  $\gamma$  par sa longueur d’arc  $\sigma$ , et on pose

$$\ell^\varphi(\gamma) = \int \varphi \circ \hat{\gamma}(\sigma) d\sigma.$$

Ceci définit une nouvelle structure de longueur sur  $X$ , avec sa distance de longueur  $d^\varphi$  associée. On vérifie que la longueur est donnée par

$$\ell^\varphi(\gamma) = \sup_{t_0=0 < \dots < t_n=1} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \min_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \varphi \circ \gamma(t) \cdot d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \right] \quad (1)$$

d’où l’on voit que  $\ell^\varphi$  est semi-continue inférieurement (s.c.i.) pour la topologie de la convergence uniforme de  $C(I, X)$ ; par suite  $\ell^\varphi$  est précisément la longueur de  $d^\varphi$  ([GLP], p. 3).

Noter que toutes les distances  $d^\varphi$  induisent la même topologie sur  $X$ .

1.2. La *classe conforme* de  $X$  est par définition l’ensemble  $\mathcal{C}$  des espaces métriques  $X^\varphi = (X, d^\varphi)$ ,  $X$  étant égal à  $X^1$ . Un raisonnement par l’absurde (en supposant que  $X$  n’est pas réduit à un point) montre que si  $d^\varphi = d^\psi$ , alors  $\varphi = \psi$ . L’ensemble  $\mathcal{C}$  sera donc muni de la topologie de la convergence uniforme sur les  $\varphi$ : il s’identifie à un cône ouvert convexe de  $C(X, \mathbb{R})$ .

### 1.3. $\alpha$ -volume

Soit  $\mathcal{C}$  la classe conforme de  $X$  et  $\alpha$  un réel  $\geq 1$ . On appellera  $\alpha$ -volume sur  $\mathcal{C}$  la donnée d'une famille  $(v^\varphi)_{\varphi \in \mathcal{C}}$  de mesures de Radon positives sur  $X$  telles que:

$$v^\varphi = \varphi^\alpha v^1 \quad \text{et} \quad v^\varphi(X) \neq 0.$$

L'application "volume"  $X^\varphi \rightarrow v^\varphi(X)$  est alors continue sur  $\mathcal{C}$ .

1.4. Dans toute la suite,  $\Lambda$  désignera une famille de courbes rectifiables de  $C(I, X)$  ou  $C(S^1, X)$  ( $S^1$  est le cercle), possédant les deux propriétés suivantes:

- (i)  $\Lambda$  est invariante par les reparamétrages;
- (ii)  $\Lambda$  est fermée pour la topologie uniforme.

Par définition, la  $\Lambda$ -systole de  $X^\varphi$  sera

$$s(X^\varphi) = \inf_{\gamma \in \Lambda} \ell^\varphi(\gamma).$$

Cette terminologie est évidemment motivée par l'exemple suivant:

*Exemple.*  $\Lambda$  est l'ensemble des courbes fermées non contractiles d'un espace non simplement connexe et  $s$  la systole classique. Afin de satisfaire l'hypothèse (ii), on suppose de plus que  $s(X) > 0$ : cela implique que les classes d'homotopie de courbes ainsi que  $\Lambda$  sont fermées.

Revenons au cas général. La fonction  $s$  est concave sur l'ouvert  $\mathcal{C}$  de  $C(X, \mathbb{R})$ , et minorée par 0: elle est donc *continue*.

*Remarque.* Le même raisonnement montre que la systole est continue dans l'espace des métriques riemanniennes d'une variété (compacte ou non), muni de la topologie  $C^0$ -forte.

Une courbe  $\gamma$  de  $\Lambda$  est  $\Lambda$ -systolique pour  $X^\varphi$  si sa longueur est minimale:  $S(X^\varphi) = \ell^\varphi(\gamma)$ ; l'existence de telles courbes est assurée par le théorème d'Ascoli.

Toute inégalité de la forme

$$v(X^\varphi)/\{s(X^\varphi)\}^\alpha \geq C \quad (X^\varphi \in \mathcal{C}) \tag{2}$$

où  $v$  est un  $\alpha$ -volume sur la classe  $\mathcal{C}$  et  $C$  une constante  $> 0$ , est dite *isosystolique*. Un espace  $X^\varphi$  réalisant l'égalité est appelé *minimal*.

### 1.5. Unicité

**PROPOSITION 1.5.** *Si  $\alpha > 1$  et si le support de  $v^1$  est  $X$ , alors il existe au plus une métrique minimale dans  $\mathcal{C}$  (à homothétie près).*

*Preuve.* Le volume  $v$  est ici strictement convexe, donc admet au plus un minimum sur le convexe  $\{s \geq 1\}$ .

#### Remarques

- (1) Il n'y a pas unicité si  $\alpha = 1$ : voir 5.
- (2) On trouvera dans [Je], p. 15, une démonstration algébrique de l'unicité pour  $\alpha = 2$ .
- (3) L'argument ne s'applique pas au volume riemannien défini sur l'espace des métriques riemanniennes d'une variété de dimension  $n$ , qui est seulement convexe dans chaque classe conforme (linéaire si  $n = 2$ ) et globalement concave si  $n = 2$ .

### 1.6. Symétries

Considérons la classe conforme  $\mathcal{C}$  de  $X$ , et fixons une famille  $\mathcal{A}$  de courbes comme en 1.4 ainsi qu'un  $\alpha$ -volume  $(v^\varphi)_{\varphi \in \mathcal{C}}$  sur  $\mathcal{C}$ . Une *isométrie* de  $X^\varphi$  (pour  $\varphi$  donnée) est par définition un homéomorphisme de  $X$  préservant la famille  $\mathcal{A}$ , la distance de  $X^\varphi$  et la mesure de volume  $v^\varphi$ .

Dans les conditions d'unicité de 1.5, une métrique minimale doit posséder toutes les symétries de toutes les métriques de sa classe conforme:

**PROPOSITION 1.6.** *Supposons que la classe conforme de  $X$  est munie d'un  $\alpha$ -volume de support  $X$  avec  $\alpha > 1$ . Si  $X$  est minimal, alors le groupe d'isométries de  $X$  contient celui de  $X^\varphi$  pour tout  $X^\varphi$  de  $\mathcal{C}$ .*

*Preuve.* Soit  $f$  une isométrie d'un certain  $X^\varphi$ , que l'on prend comme métrique de référence dans la classe  $\mathcal{C}$ ; on note  $Y = X^\varphi$ , de sorte que  $X = Y^\psi$  où  $\psi = 1/\varphi$ . Considérons l'espace  $Y^{\psi \circ f}$ . Comme  $f$  est une isométrie métrique de  $Y$ , on a clairement, d'après la relation (1):

$$\ell^{\psi \circ f}(\gamma) = \ell^\psi(f \circ \gamma) \quad (\gamma \in \mathcal{A}). \quad (3)$$

D'où  $s(Y^{\psi \circ f}) = s(Y^\psi)$ . On a aussi  $v(Y^{\psi \circ f}) = v(Y^\psi)$  puisque  $f$  conserve la mesure volume  $v_Y$  de  $Y$ . L'unicité de  $X = Y^\psi$  entraîne alors l'égalité  $\psi \circ f = \psi$ . Par suite  $f$  est une isométrie métrique de  $X$  d'après (3), et  $f$  conserve la mesure volume de  $X$ :

$$f_*(\psi^\alpha v_Y) = (\psi \circ f^{-1})^\alpha v_Y = \psi^\alpha v_Y.$$

## 2. Espaces des $\Lambda$ -courbes géométriques

2.1. Soit  $L \geq s(X)$ . Dans l'espace  $\Lambda^L = \{\gamma \in \Lambda; \text{long } \gamma \leq L\}$  muni de la distance uniforme  $d$ , considérons la relation:

$$\gamma \sim \delta \quad \text{si} \quad \inf_{h \in H} d(\gamma, \delta \circ h) = 0$$

où  $H$  désigne l'ensemble des homéomorphismes de  $\mathbb{S}^1$  ou de  $I$ . Une variante consiste à prendre uniquement des homéomorphismes directs, afin de conserver l'orientation des courbes. Notons  $\tilde{\gamma}$  la classe de  $\gamma$ . Le quotient  $\Gamma^L = \Lambda^L / \sim$  (muni de sa topologie quotient) sera appelé *espace des  $\Lambda$ -courbes géométriques* de longueur  $\leq L$ . Il est métrisable par

$$\tilde{d}(\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}) = \inf_{h \in H} d(\gamma, \delta \circ h).$$

On observe ensuite que  $\Gamma^L$  est compact comme image de l'ensemble des courbes  $L$ -lipschitziennes de  $\Lambda^L$ , lui-même compact d'après le théorème d'Ascoli. De plus, si  $L \leq L'$ , alors  $\Gamma^L$  est un compact de  $\Gamma^{L'}$ .

Il est intéressant de remarquer que l'espace  $\Gamma^L$  est muni d'une longueur s.c.i. induite par celle de  $\Lambda^L$ .

Pour  $L = s(X)$ , on notera  $S = \Gamma^L$ : c'est l'espace des courbes  $\Lambda$ -systoliques de  $X$ . Dans le cas où  $s$  est la systole classique, chaque élément de  $S$  s'identifie à un sous-ensemble de  $X$  et la topologie associée à  $\tilde{d}$  coïncide avec la topologie de Hausdorff des compacts de  $X$ .

2.2 LEMME. Soit  $\varphi$  une fonction continue  $> 0$  sur  $X$ . Alors l'application

$$\bar{\varphi} : \gamma \rightarrow \int \varphi \circ \hat{\gamma}(\sigma) d\sigma$$

induit une application s.c.i. sur  $\Gamma^L$ .

En effet les métriques  $d$  et  $d^\varphi$  sont équivalentes, donc définissent la même topologie sur les courbes et la même relation  $\sim$ : on peut voir  $\Gamma^L(X)$  comme sous-espace de  $\Gamma^{L'}(X^\varphi)$ , avec  $L' = L \cdot \text{Max}_X \varphi$ . Pour conclure, noter que  $\gamma \rightarrow \bar{\varphi}(\gamma)$  est la longueur de  $X^\varphi$  (1.1).

## 3. Le critère de minimalité

3.1. Soit  $L \geq s(X)$  et  $\Gamma^L = \Gamma^L(X)$  l'espace des  $\Lambda$ -courbes géométriques de  $X$  de longueur  $\leq L$  (voir 2.1). On commence par décrire un procédé naturel qui à toute

mesure de Radon  $\mu$  sur  $\Gamma^L$  associe une mesure  $*\mu$  sur  $X$ . En intégrant une fonction  $\psi \in C(X, \mathbb{R})$  sur les courbes on obtient une fonction  $\bar{\psi}$  sur  $\Gamma^L$ :

$$\bar{\psi}(\gamma) = \int \psi \circ \hat{\gamma}(\sigma) d\sigma \quad (\gamma \in \Gamma^L).$$

La donnée d'une mesure  $\mu$  sur  $\Gamma^L$  définit alors une mesure  $*\mu$  sur  $X$  par:

$$\langle *\mu, \psi \rangle = \int_{\Gamma^L} \int \psi \circ \hat{\gamma}(\sigma) d\sigma d\mu(\gamma) = \langle \mu, \bar{\psi} \rangle \quad (\psi \in C(X, \mathbb{R})).$$

Il convient de noter que  $\bar{\psi}$  est  $\mu$ -intégrable comme différence de fonctions s.c.i. bornées (écrire  $\psi = f - g$ , où  $f$  et  $g$  sont continues  $>0$ , et appliquer le Lemme 2.2).

3.2. On peut maintenant énoncer le critère de minimalité qui caractérise l'égalité dans (2).

**THÉORÈME.** *Soit  $X$  un espace de longueur compact,  $\Lambda$  une famille de courbes rectifiables de  $X$  (comme en 1.4) et  $v$  un  $\alpha$ -volume ( $\alpha$  réel  $\geq 1$ ) sur la classe conforme  $\mathcal{C}$  de  $X$ . On pose  $s_0 = s(X)$ ,  $v_0 = v^1(X)$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- (i)  $X$  est minimal dans  $\mathcal{C}$ ;
- (ii)  $X$  est localement minimal dans  $\mathcal{C}$ ;
- (iii) il existe une mesure de probabilité  $\mu$  sur l'espace  $S$  des courbes  $\Lambda$ -systoliques de  $X$  telle que

$$*\mu = \frac{s_0}{v_0} v^1.$$

*Démonstration.*

(iii)  $\Rightarrow$  (i). C'est une application directe de l'inégalité de Hölder; en effet si  $\mu$  existe alors pour tout  $X^\varphi \in \mathcal{C}$ :

$$s(X^\varphi) \leq \langle \mu, \bar{\varphi} \rangle = \frac{s_0}{v_0} \int_X \varphi(x) dv^1(x) \leq \frac{s_0}{v_0} (v(X^\varphi))^{1/\alpha} v_0^{1-1/\alpha},$$

d'où  $v_0/s_0^\alpha \leq v(X^\varphi)/s(X^\varphi)^\alpha$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Tous les ensembles de mesures considérés seront munis de la *topologie vague*. Fixons  $L > s(X)$  et notons  $K$  l'ensemble des mesures de probabilité sur  $\Gamma^L$ ,  $*K$  son image par  $*$ .

*Affirmation 1.* La mesure  $(s_0/v_0)v^1$  est dans l'adhérence  $\overline{*K}$  de  $*K$ .

Supposons le contraire. On peut alors séparer le convexe compact  $\overline{*K}$  et  $(s_0/v_0)v^1$  par une forme linéaire continue, i.e. il existe un fonction  $\psi$  continue sur  $X$  et un réel  $a > 0$  tels que:

$$a + \frac{s_0}{v_0} \int \psi dv^1 < \inf_{v \in \overline{*K}} \langle v, \psi \rangle = \inf_{\mu \in K} \langle * \mu, \psi \rangle.$$

D'où, pour tout  $\varepsilon > 0$ :

$$\frac{s_0}{v_0} \int (1 + \varepsilon \psi) dv^1 + a\varepsilon < s_0 + \inf_{\mu \in K} \langle * \mu, \varepsilon \psi \rangle \leq \inf_{\mu \in K} \langle * \mu, 1 + \varepsilon \psi \rangle. \quad (4)$$

Supposons que  $1 + \varepsilon \psi$ , notée  $\varphi$ , soit strictement positive; alors pour tout  $\mu \in K$ :

$$\langle * \mu, 1 + \varepsilon \psi \rangle \geq s(X^\varphi).$$

Mais si  $\varepsilon$  est petit, il existe une courbe  $\gamma$   $\Lambda$ -systolique pour  $X^\varphi$  et appartenant à  $\Gamma^L$ ; en effet  $s = s(X^\varphi)$  est voisin de  $s_0$  par continuité de la  $\Lambda$ -systole, et la fonction longueur  $\ell$  de  $X$  est majorée par  $\ell^\varphi + \varepsilon \ell \|\psi\|$ , où  $\|\psi\|$  désigne le maximum de  $\psi$  sur  $X$ . En prenant pour  $\mu$  la masse de Dirac en  $\gamma$ , on obtient:

$$\inf_{\mu \in K} \langle * \mu, 1 + \varepsilon \psi \rangle = s. \quad (5)$$

D'autre part on a les inégalités

$$0 \leq s_0 \left( \frac{1}{v_0} \int \varphi^\alpha dv^1 \right)^{1/\alpha} - \frac{s_0}{v_0} \int \varphi dv^1 \leq b\varepsilon^2$$

où  $b$  est indépendant de  $\varepsilon$ . Avec (4) et (5) on en déduit que

$$(v(X^\varphi)/v_0)^{1/\alpha} s_0 < s + b\varepsilon^2 - a\varepsilon < s$$

pour  $\varepsilon$  assez petit. Ce qui contredit la minimalité locale de  $X$ .

*Affirmation 2.* Il existe  $\mu \in K$  telle que  $*\mu = (s_0/v_0)v^1$ .

Nous savons déjà qu'il existe une suite  $(\mu_n)$  d'éléments de  $K$ , que l'on peut supposer convergente vers une certaine mesure  $\mu$  de  $K$  (compacité), telle que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle * \mu_n, \varphi \rangle = \frac{s_0}{v_0} \langle v^1, \varphi \rangle \quad (\forall \varphi \in C(X, \mathbb{R})).$$

Soit  $\varphi > 0$ ; comme  $\bar{\varphi}$  est semi-continue inférieurement sur  $\Gamma^L$  (Lemme 2.2), on a

$$\langle \mu_n, \bar{\varphi} \rangle = \text{Sup} \{ \langle \mu_n, g \rangle; g \text{ continue, } g \leq \bar{\varphi} \}$$

(idem pour  $\mu$ ), d'où il résulte que

$$\langle * \mu, \varphi \rangle \leq \frac{s_0}{v_0} \langle v^1, \varphi \rangle. \quad (6)$$

En fait (6) est une égalité pour  $0 < \varphi < 1$  car

$$s_0 \leq \langle * \mu, 1 \rangle = \langle * \mu, \varphi \rangle + \langle * \mu, 1 - \varphi \rangle \leq s_0.$$

On en déduit finalement que (6) est une égalité pour toute fonction  $\varphi$ .

*Affirmation 3.* Le support de  $\mu$  est inclus dans  $S$ .

Soit  $\ell : \Gamma^L \rightarrow \mathbb{R}_+$  la longueur; noter que

$$\langle \mu, \ell - s_0 \rangle = \langle * \mu, 1 \rangle - s_0 = 0.$$

Considérons maintenant une fonction continue  $\psi$  à support  $F$  inclus dans  $\Gamma^L - S$ , et notons  $m$  le minimum sur  $F$  de la fonction s.c.i.  $\ell - s_0$ . La majoration évidente

$$|\psi| \leq \frac{1}{m} (\ell - s_0) \text{Max } |\psi|$$

montre que  $\langle \mu, \psi \rangle = 0$ . D'où l'Affirmation 3.

On vérifie ensuite que la mesure de  $\Gamma^L - S$  est nulle, puis que pour toute fonction  $\mu$ -intégrable  $f$

$$\langle \mu, f \rangle = \langle \mu|_S, f|_S \rangle,$$

où  $|$  est la restriction. Par conséquent la mesure  $\mu|_S$  sur  $S$ , désormais notée  $\mu$ , répond à la question.

3.3 *Remarque.* La condition suffisante (iii)  $\Rightarrow$  (i) est aussi valable si l'on remplace les courbes par des objets "de dimension supérieure à 1", i.e. qui portent un  $\beta$ -volume pour  $1 \leq \beta \leq \alpha$  (c'est encore l'inégalité de Hölder). Par exemple, en considérant des sous-variétés dans une classe d'homotopie fixée, on peut obtenir comme en 4.1 des inégalités "isosystoliques" conformes pour les tores.

## 4. Exemples

Les exemples ci-dessous (à l'exception de 4.5) concernent le problème isosystolique classique pour les variétés riemanniennes non simplement connexes.

### 4.1. L'inégalité de Loewner

Considérons le tore plat, noté  $T_\lambda$ , quotient de  $\mathbb{R}^2$  par  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\lambda$ , où  $\lambda$  appartient à l'ensemble  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq a \leq 1/2, a^2 + b^2 \geq 1\}$ . Soit  $\gamma_y$  la droite horizontale d'ordonnée  $y$ ; la mesure  $\mu = dy$  sur la famille  $\{\gamma_y\}_{0 \leq y \leq b}$  satisfait clairement la condition (iii) du théorème (à une constante près). Ainsi  $T_\lambda$  est minimal dans sa classe d'équivalence conforme: c'est l'inégalité de Loewner.

### 4.2. Des métriques minimales à courbure 1 sur la bouteille de Klein (voir [Ba]<sub>1</sub>)

Soit  $K_\beta$  la bouteille de Klein plate définie comme quotient du rectangle euclidien  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq \pi/2, |y| \leq \beta\}$ , où l'on identifie les côtés horizontaux (resp. verticaux) par translation (resp. symétrie-translation).

Pour les petites valeurs de  $\beta$  ( $0 < \beta \leq \pi/2$ ), on voit que  $K_\beta$  est minimale en prenant les courbes verticales  $(\alpha_x)_{|x| \leq \pi/2}$  et la mesure  $\mu = dx$ . Mais quand  $\beta > \pi/2$ , l'inégalité obtenue par cette méthode n'est plus optimale car les  $\alpha_x$  ne sont plus systoliques.

Voici des exemples de métriques minimales (singulières) à courbure 1 sur la bouteille de Klein. Notons  $\mathbb{S}^2$  la sphère unité de l'espace Euclidien  $\mathbb{R}^3$ ; pour  $b$  réel compris entre  $\pi/4$  et  $\pi/3$ ,  $U^b$  désignera l'ensemble des points de  $\mathbb{S}^2$  dont la distance (sur  $\mathbb{S}^2$ ) à l'équateur est inférieure ou égale à  $b$ . Le quotient de  $U^b$  par l'antipodie est un ruban de Möbius  $M^b$ . Nous allons établir que son double  $K^b$  est minimal. Notons  $\gamma^0$  l'équateur de  $\mathbb{S}^2$  paramétré par un réel  $\theta$  dans  $[0, 2\pi]$ , et considérons les courbes systoliques (i.e. de longueur  $\pi$ ) de  $K^b$  définies comme suit. Soit  $\gamma_\theta^a$  l'image dans  $M^b$  du grand cercle passant par  $\gamma^0(\theta)$  et faisant en ce point un angle  $a$  avec  $\gamma^0$  ( $0 \leq a \leq b$ , voir Figure 1). L'ensemble des courbes  $\gamma_\theta^a$ , pour  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  et  $0 \leq a \leq b$ ,

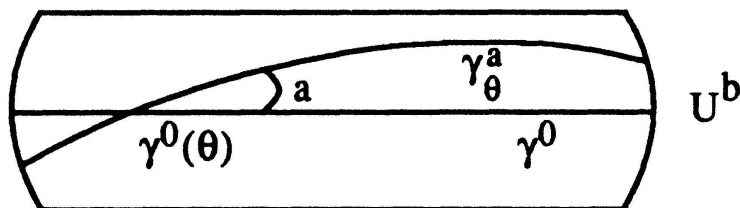


Figure 1

s'identifie (vu sur  $S^2$ ) à la boule de  $S^2$  de rayon  $b$  et centrée au pôle nord. Posons alors

$$\mu = \frac{\sin 2a}{2\pi} (\sin^2 b - \sin^2 a)^{-1/2} da d\theta,$$

mesure sur les  $\gamma_\theta^a$  dont on vérifie que  $*\mu$  est la mesure d'aire de  $M^b$ . Il en résulte que  $K^b$  est minimale. Le paramètre  $\beta$ , qui repère la classe d'équivalence conforme de  $K^b$ , varie de  $\beta_1 = 2 \log(1 + \sqrt{2})$  à  $\beta_2 = 2 \log(2 + \sqrt{3})$  quand  $b$  varie de  $\pi/4$  à  $\pi/3$ .

Les valeurs de  $\beta$  appartenant à  $]\pi/2, \beta_1[ \cup ]\beta_2, \infty[$  échappent à la description ci-dessus. En fait, la classe conforme de chaque  $K_\beta$  correspondant admet une métrique minimale, dont la géométrie, en partie plate et en partie sphérique, est un mélange des deux exemples précédents (voir [Ba]<sub>1</sub>).

4.3. On trouvera dans [Ba]<sub>2</sub> la description complète des inégalités isosystoliques conformes pour 15 des 17 groupes crystallographiques du plan.

#### 4.4. Des métriques minimales sur les surfaces

Dans [Gr] 5.6.B', M. Gromov construit des surfaces isosystoliques comme suit. On se donne un graphe métrique compact  $G$ . A chaque arête  $a$  de  $G$  est associé le cylindre plat  $C_a = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times a$ ; en chaque sommet de  $G$  on numérote arbitrairement les arêtes  $a_1, \dots, a_k$  ( $k \geq 3$ ) qui le contiennent, et on associe à ce choix un graphe formé de deux sommets joints par  $k$  arêtes  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  de longueur  $1/2$ . Puis on recolle les cylindres  $C_a$  en identifiant isométriquement, pour chaque sommet  $p$  de  $a$ , le bord  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{p\}$  avec  $\alpha_i \cup \alpha_{i+1}$ , où  $i$  est le numéro (modulo  $k$ ) de l'arête  $a$  en  $p$  (voir Figure 2). Le résultat est une surface plate singulière  $\Sigma_G$ , ayant deux singularités d'angle  $k\pi$  pour chaque sommet de  $G$  de valence  $k$ . Le genre de  $\Sigma_G$  est égal au nombre de cycles indépendants de  $G$ .

Si la systole de  $G$  est supérieure ou égale à 1, la surface  $\Sigma_G$  est minimale. En effet, les sections des cylindres  $C_a$  sont systoliques, paramétrées par  $G$ , et le critère de minimalité est vérifié pour la mesure de longueur de  $G$ .

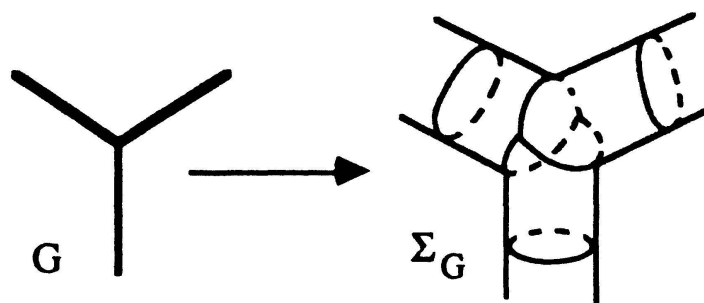


Figure 2

#### 4.5. Les variétés à géodésiques fermées simples

Considérons une variété riemannienne  $M$  (de classe  $C^\infty$ ) dont toutes les géodésiques sont fermées, simples, et de même longueur. Alors l'espace de ces géodésiques porte une mesure  $\mu$  telle que  $*\mu$  soit la mesure de volume (à une constante près). En effet, la mesure de Liouville sur le fibré unitaire tangent  $p : T^1M \rightarrow M$  est invariante par le flot géodésique (théorème de Liouville); elle induit donc une mesure  $\mu$  sur l'espace des géodésiques. Cette mesure convient car l'intégrale d'une fonction continue  $\varphi$  sur  $M$  est égale, à une constante près, à l'intégrale de  $\varphi \circ p$  pour la mesure de Liouville. L'existence de  $\mu$  et la Proposition d'unicité 1.5 impliquent le résultat suivant:

**PROPOSITION 4.5.** *Soit  $V^n$  une variété différentiable compacte non simplement connexe. Alors chaque classe d'équivalence conforme de métriques  $C^\infty$  sur  $V^n$  admet (à isométrie et homothétie près) au plus une métrique dont toutes les géodésiques sont fermées, simples, et de même longueur.*

Quand  $V^2$  est le plan projectif réel, on retrouve le théorème classique de L. Green concernant la conjecture de Blaschke en dimension 2 (voir [Bes]).

*Preuve de la proposition.* Soit  $M$  une variété riemannienne comme plus haut, c'est-à-dire telle que les orbites de son flot géodésique sur  $T^1M$  soient toutes fermées de même période. Il est clair que les projections sur  $M$  de ces orbites sont toutes librement homotopes (et par hypothèse simples fermées); si  $M$  n'est pas simplement connexe, l'une de ces courbes doit être systolique: elles le sont donc toutes. L'existence de  $\mu$  (voir ci-dessus) montre alors que  $M$  est minimale pour volume/(systole) $^n$ . On conclut la preuve en appliquant la Proposition d'unicité 1.5.

#### 4.6. L'aire des sphères métriques

Etant donné une variété riemannienne compacte  $M^n$  dont le rayon d'injectivité est supérieur ou égal à  $\pi$ , on note  $S_x(\pi/2)$  la sphère de rayon  $\pi/2$  centrée en  $x$  point de  $M^n$ , et  $\text{Aire } S_x(\pi/2)$  son volume  $(n-1)$ -dimensionnel. Dans [Ber]<sub>3</sub>, M. Berger démontre que la moyenne de  $\text{Aire } S_x(\pi/2)$  est minimale pour la sphère  $S^n$  à courbure 1, et demande si l'inégalité

$$\text{Aire } S_x(\pi/2) \geq \text{vol}(S^{n-1})$$

a lieu en tout point  $x$  de  $M^n$  (comme c'est le cas en dimension 2: [Ber]<sub>1</sub>). Pour  $n \geq 3$ , C. Croke donne une réponse affirmative partielle à cette question dans le cas particulier où la métrique de la boule  $B_x(\pi/2)$  s'écrit  $dr^2 + h^2(r, \sigma) d\sigma^2$  en coordonnées polaires  $(r, \sigma) \in [0, \pi/2] \times S^{n-1}$  (voir [Cr]<sub>2</sub>). En fait, C. Croke établit une minoration analogue pour les boules métriques, et le résultat sur les sphères s'en déduit par une inégalité isopérimétrique ([Cr]<sub>1</sub>). On propose ici de retrouver directement cette estimation de  $\text{Aire } S_x(\pi/2)$ , à partir d'une hypothèse un peu plus faible.

Soit  $B$  une boule riemannienne dont la métrique est donnée en coordonnées polaires par

$$dr^2 + g_r(\sigma) \quad (r, \sigma) \in [0, \pi/2] \times S^{n-1}.$$

On suppose seulement que la métrique  $g = g_{\pi/2}$  induite sur le bord  $S$  de  $B$  est conforme à la métrique usuelle  $d\sigma^2$  de la sphère unité  $S^{n-1}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Naturellement, on fait aussi l'hypothèse que la plus petite distance sur  $S$  entre deux points diamétralement opposés est supérieure ou égale à  $\pi$ ; on note  $j(g)$  cette plus petite distance (voir [Ber]<sub>2</sub>). Il reste à établir l'inégalité

$$\text{vol}(g)/j^{n-1}(g) \geq \text{vol}(S^{n-1})/\pi^{n-1} \quad (7)$$

sachant que  $g$  est conforme à  $d\sigma^2$ . Pour cela on utilise le critère de minimalité. Les courbes de longueur minimale pour  $d\sigma^2$  entre les couples de points antipodaux sont les demi-grands cercles orientés de  $S^{n-1}$ , dont l'ensemble s'identifie au fibré unitaire tangent de  $S^{n-1}$ . La mesure de Liouville  $m$  définit alors une mesure  $*m$  sur  $S^{n-1}$  qui est proportionnelle au volume de  $S^{n-1}$  (voir 4.5). D'où l'inégalité (7).

#### 4.7. Produit avec un facteur minimal

**PROPOSITION 4.7.** *Un produit riemannien  $M \times N$  est minimal dès que  $M$  est minimale et  $\text{Systole}(M) \leq \text{Systole}(N)$ .*

Ceci s'applique par exemple quand  $M$  est un cercle et  $N$  simplement connexe (Systole  $(N) = \infty$ ).

*Preuve.* L'ensemble  $S_M$  des courbes systoliques de  $M$  porte une mesure  $\mu_M$  qui satisfait la condition (iii) du Théorème 3.2. Si  $v_N$  désigne la mesure volume de  $N$ , on pose

$$\mu = \mu_M \otimes v_N / \text{vol}(N).$$

Cette mesure sur  $S_M \times N$  vérifie clairement (iii).

*Remarque.* Le résultat d'unicité 1.5 montre que, sous les hypothèses de la proposition, deux produits  $M \times N$  et  $M \times N'$  sont conformément équivalents seulement s'ils sont isométriques.

## 5. Inégalités isosystoliques pour les graphes

5.1. Le cas des graphes est particulièrement agréable, car deux graphes métriques (compacts) homéomorphes sont conformes à une isométrie près; la minimalité dans une classe conforme équivaut donc à la minimalité topologique: on dira simplement *minimal*.

Tous les graphes considérés ici seront compacts et connexes. Leurs sommets seront de valence supérieure ou égale à 3, sauf dans le cas du cercle. Le type d'homotopie d'un graphe donné  $G$  est caractérisé par le nombre  $b(G)$  de cycles indépendants, ou premier nombre de Betti de  $G$ . Soit  $\alpha(G)$  (resp.  $\tau(G)$ ) le nombre d'arêtes (resp. de sommets) de  $G$ . L'entier  $b(G)$  est donné par:

$$b(G) = \alpha(G) - \tau(G) + 1.$$

Noter aussi les inégalités

$$3\tau(G) \leq 2\alpha(G), \quad \alpha(G) \leq 3(b(G) - 1) \quad \text{et} \quad \tau(G) \leq 2(b(G) - 1)$$

si  $G$  n'est pas le cercle.

La lettre  $X$  désignera toujours un graphe métrique compact. Le "volume" d'un tel graphe, noté  $\text{Long } X$ , est la somme des longueurs des arêtes. Etant donné un graphe topologique  $G$ , on pose

$$C(G) = \text{Inf} \{ \text{Long } X / \text{Syst } X; X \text{ homéomorphe à } G \}.$$

On s'intéressera aussi à la borne inférieure  $C_b$  de ces constantes à type d'homotopie fixé:

$$C_b = \text{Inf} \{C(G); b(G) = b\} \quad (b \in \mathbb{N}^*).$$

Voici quelques propriétés générales.

### PROPOSITION 5.1

(1) *Pour tout graphe topologique  $G$ , il existe un graphe métrique  $X$  tel que*

$$\text{Long } X / \text{Syst } X = C(G) \quad \text{et} \quad b(X) = b(G).$$

*De plus  $X$  est minimal.*

(2) *Pour tout entier naturel  $b \geq 1$ , il existe un graphe  $b$ -minimal ( $\text{Long} / \text{Syst} = C_b$ ).*

(3) *Les constantes isosystoliques  $C(G)$  sont rationnelles; en particulier  $C_b$  est rationnel ( $b \geq 1$ ).*

*Preuve.* (1) On cherche à minimiser la longueur d'un graphe  $Y$  homéomorphe à  $G$  vérifiant  $\text{Syst } Y \geq 1$ . Cette dernière condition concerne uniquement les cycles simples de  $G$  qui sont en nombre fini. Notons  $(\ell_i)_{i=1, \dots, \alpha} \in \mathbb{R}^\alpha$  les longueurs des arêtes de  $Y$  que l'on peut supposer bornées; elles satisfont des relations du type  $\ell_{i_1} + \dots + \ell_{i_k} \geq 1$ . Il s'agit donc de minimiser  $\ell_1 + \dots + \ell_\alpha$  sur un convexe compact de  $\mathbb{R}^\alpha$ : la solution est un ensemble convexe compact non vide  $\mathcal{M}$  de longueurs qui réalisent le minimum. Evidemment, certaines de ces longueurs peuvent être nulles, de sorte que les graphes  $X$  obtenus ont seulement le même type d'homotopie que  $G$ .

Considérons maintenant un graphe  $G$ -minimal  $X$  non homéomorphe à  $G$ . Par adjonction d'arêtes arbitrairement petites, on transforme tout graphe homéomorphe à  $X$  en un graphe voisin homéomorphe à  $G$ . Cela prouve la minimalité de  $X$ .

(2) Cette assertion résulte de (1) et du fait que les graphes  $G$  avec  $b(G) = b$  sont en nombre fini à homéomorphisme près.

(3) Reprenons la preuve de (1). Le minimum de  $\ell_1 + \dots + \ell_\alpha$  est atteint en au moins un point extrémal de  $\mathcal{M}$ , qui est rationnel comme unique solution d'un système linéaire à coefficients entiers.

*Remarque.* Le groupe d'homéomorphismes de  $G$  agit sur  $\mathcal{M}$  par permutation des arêtes, et le quotient est l'espace des graphes  $G$ -minimaux modulo isométrie et homothétie. En général, il n'y a pas unicité d'un graphe  $G$ -minimal. Par exemple soit  $G$  le graphe complet à 4 sommets. On vérifie que les arêtes "opposées" d'un graphe  $G$ -minimal ont la même longueur (voir Figure 4); le convexe  $\mathcal{M}$  est le 2-simplexe de

$\mathbb{R}^3$  décrit par les relations

$$x + y + z = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

et (8)

$$x + y \geq 1/2, \quad y + z \geq 1/2, \quad z + x \geq 1/2.$$

5.2. *Le critère de minimalité pour les graphes*

Le Théorème général 3.2 a une traduction très simple pour un graphe  $X$ . Soit  $A$  l'ensemble des arêtes de  $X$  et  $S$  l'ensemble fini des cycles systoliques de  $X$ ; pour  $\gamma$  élément de  $S$ , on note  $\varepsilon_\gamma$  la masse de Dirac en  $\gamma$ . L'existence d'une probabilité  $\mu = \sum_{\gamma \in S} \lambda_\gamma \varepsilon_\gamma$  sur  $S$  telle que

$$\langle * \mu, \varphi \rangle = \frac{1}{C} \int_X \varphi \quad (\forall \varphi \in C(X, \mathbb{R}))$$

équivalent à celle de réels positifs ou nuls  $(\lambda_\gamma)_{\gamma \in S}$  vérifiant les égalités

$$\sum_{\gamma \in S} \lambda_\gamma = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{a \subset \gamma} \lambda_\gamma = 1/C \quad (\forall a \in A).$$

*Exemples.* Voici trois exemples de graphes minimaux (Figure 3).

(a) Le graphe  $D$  (Figure 3-a) est le graphe biparti complet  $(K_{3,3})$  avec toutes les arêtes de longueur 1. On dénombre 9 cycles minimaux de longueur 4 et on pose  $\lambda_\gamma = 1/9$  pour chacun d'eux. Noter que  $C(K_{3,3}) = 9/4$ .

(b) Soit le graphe  $E$  de la Figure 3. L'ensemble des cycles minimaux comprend 4 cycles de 4 arêtes et 8 cycles de 5 arêtes. On prend  $\mu = \sum \lambda_\gamma \varepsilon_\gamma$  où  $\lambda_\gamma = 1/8$  (resp.  $1/16$ ) si  $\gamma$  a 4 (resp. 5) arêtes; ce qui donne  $C = 8/3$ .

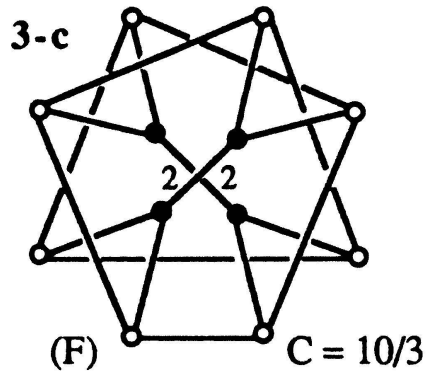
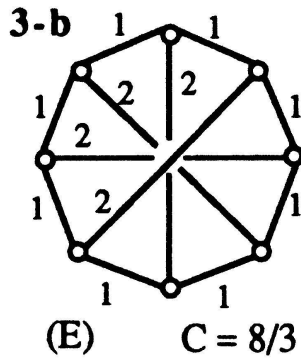
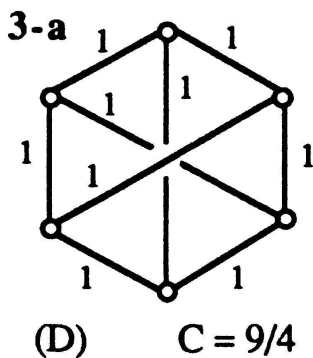


Figure 3

(c) Dans le graphe  $F$  (Figure 3-c) on distingue 3 types d'arêtes, notés NN, BB, NB, définis par la couleur des sommets (N = noir, B = blanc). Les 2 arêtes NN sont de longueur 2 et toutes les autres de longueur 1. Les 20 cycles minimaux de  $F$  se répartissent en 3 classes  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ , dont les éléments sont respectivement de la forme:

$$\gamma_1 = (\text{NN}, \text{NB}, \text{BB}, \text{BB}, \text{BN}) \quad \text{card } S_1 = 8,$$

$$\gamma_2 = (\text{BN}, \text{NB}, \text{BB}, \text{BN}, \text{NB}, \text{BB}) \quad \text{card } S_2 = 4,$$

$$\gamma_3 = (\text{NB}, \text{BB}, \text{BB}, \text{BB}, \text{BB}, \text{BN}) \quad \text{card } S_3 = 8.$$

On pose alors  $\lambda_\gamma = 3/40$  (resp.  $1/20$ ,  $1/40$ ) si  $\gamma \in S_1$  (resp.  $S_2$ ,  $S_3$ ). D'où  $C = 10/3$ .

### 5.3. Détermination des constantes $C_b$ pour $b \leq 6$ et $b = 8$

Remarquons d'abord que les constantes  $C_b$  satisfont une propriété de sous-additivité:

$$C_{b+b'-1} \leq C_b + C_{b'} - 1 \quad (b, b' \in \mathbb{N}^*).$$

Ceci se voit en recollant un graphe  $b$ -minimal avec un graphe  $b'$ -minimal le long d'un cycle minimal. Comme  $C_2 = 3/2$  (voir ci-dessous), on a en particulier

$$C_{b+1} \leq C_b + 1/2. \quad (9)$$

Considérons maintenant un graphe  $(b+1)$ -minimal  $X$  ( $b \geq 1$ ) et notons  $T$  l'ensemble de ses sommets. Quitte à ajouter des arêtes de longueur arbitrairement petite, on peut supposer que le cardinal de  $T$  est égal à  $2b$ . Pour chaque sommet  $s$  de  $X$  soit  $t_s$  le "tripode" formé par les 3 arêtes issues de  $s$ ; ces arêtes sont distinctes 2 à 2 car, d'après (9),  $X$  n'a pas de boucle. On a donc

$$2 \text{ Long } X = \sum_{s \in T} \text{Long } t_s \leq 2b \text{ Max}_{s \in T} (\text{Long } t_s).$$

En ôtant à  $X$  un tripode de plus grande longueur, on obtient l'inégalité

$$C_{b+1} \geq \frac{b}{b-1} C_{b-1} \quad (b \geq 2). \quad (10)$$

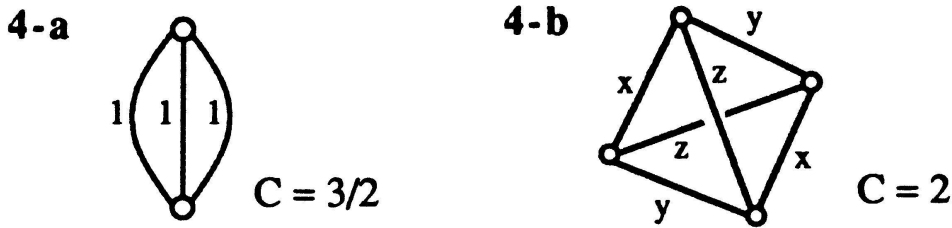


Figure 4

Cette estimation simple va permettre de déterminer  $C_b$  pour les petites valeurs de  $b$ . On commence par observer que  $C_1 = 1$  et  $C_2 = 3/2$  avec un unique graphe 2-minimal (Figure 4-a). Admettons pour l'instant que  $C_6 = 3$ . On trouve alors successivement  $C_3 = 2$ ,  $C_4 = 9/4$ ,  $C_5 = 8/3$  et  $C_8 = 7/2$  en appliquant l'inégalité (10) et en considérant les graphes des Figures 4-b, 3-a, 3-b et 6-a. Pour  $b = 7$ , on a seulement un encadrement:  $16/5 \leq C_7 \leq 10/3$  (voir Figure 3-c).

Il existe une infinité de graphes 3-minimaux (Figure 4-b, où  $(x, y, z)$  vérifie les relations (8) de 5.1). D'autre part, on peut vérifier que le graphe  $D$  (Figure 3-a) est l'unique graphe 4-minimal.

Le cas  $b = 6$ . D'après la Figure 5, on a déjà  $C_6 \leq 3$ . Comme  $C_5 = 8/3$ , un graphe 6-minimal ne contient pas de cycle à 2 arêtes. Par une preuve analogue à celle de l'inégalité (10), en remplaçant les tripodes par des configurations à 5 arêtes  $(\rangle\langle)$ , on montre que  $C_6 \geq (15/10)C_2 = 3$ . On conclut finalement que  $C_6 = 3$ . Le graphe  $P_1$  de la figure 5-b permet de construire une infinité de graphes 6-minimaux: il suffit d'assigner aux arêtes,  $a, f$  et  $g$  la longueur  $\varepsilon \in [0, 2]$ .

La relation (10) montre déjà que la suite  $C_b$  tend vers l'infini, puisqu'elle implique  $C_{b+1} \geq (3b/2)^{1/2}$ . Signalons pour terminer un résultat plus précis, dû à N. Alon [Al]:

$$C_b \geq \frac{b}{2[\log_2(2b)]} \tag{11}$$

où  $[ \ ]$  est la partie entière et  $\log_2$  le logarithme de base 2. En fait, N. Alon établit que tout graphe  $G$  admet au moins  $b/2[\log_2(2b(G))]$  cycles sans arête commune. De plus l'ordre de grandeur dans (11) est optimal (voir [Al]).

#### 5.4. Graphes sur une surface

Considérons d'une part une surface topologique  $\Sigma$  connexe fermée, et d'autre part un graphe métrique  $X$ . La donnée d'un plongement topologique de  $X$  dans  $\Sigma$

permet de minorer  $\text{Long } X/\text{Syst } X$  au moyen de  $b(X)$  et de  $\chi(\Sigma)$ , la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $\Sigma$ . On appelle *faces* (d'un plongement de  $X$  dans  $\Sigma$ ) les composantes connexes de  $\Sigma - X$  complétées par leurs bords dans  $\Sigma$ .

**PROPOSITION 5.4.1.** *Si  $X$  se plonge topologiquement dans  $\Sigma$  on a l'inégalité*

$$\text{Long } X/\text{Syst } X \geq \frac{1}{2} (b(X) + \chi(\Sigma) - 1). \quad (*)$$

*De plus l'égalité est réalisée si et seulement si les faces sont des disques dont le bord est systolique comme cycle de  $X$ ; dans ce cas  $X$  est minimal.*

*Preuve.* Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des faces et  $f$  le cardinal de  $\mathcal{F}$ . Alors

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} \sum_{a \subset \partial F} \text{Long } a = 2 \text{Long } X$$

car chaque arête est comptée 2 fois dans la somme. D'où l'inégalité

$$\text{Long } X/\text{Syst } X \geq f/2.$$

Par ailleurs  $\chi(\Sigma)$  peut être évaluée comme suit:

$$\chi(\Sigma) = \sum_{F \in \mathcal{F}} \chi(F) + \alpha - \sum_{s \in T} (k_s - 1)$$

où  $T$  est l'ensemble des sommets de  $X$ ,  $k_s$  la valence de  $s$  et  $\alpha$  le nombre d'arêtes de  $X$ . On trouve finalement

$$\chi(\Sigma) + b - 1 = \sum_{F \in \mathcal{F}} \chi(F) \leq f.$$

Enfin, la minimalité de  $X$  en cas d'égalité est donnée par la relation (\*).

**COROLLAIRE.** *Si  $G$  est un graphe tracé sur  $\Sigma$ , alors*

$$C(G) \geq \frac{1}{2} (b(G) + \chi(\Sigma) - 1).$$

*Remarque.* Cette relation peut s'utiliser pour majorer  $\chi(\Sigma)$ . On voit par exemple que les graphes  $D$  et  $E$  (Figure 3-a,b) ne sont pas planaires (ce qui est bien connu!). Quant au graphe  $F$  (Figure 3-c), il n'est pas projectif.

L'étude de l'égalité dans (\*) est intéressante. Pour une surface donnée, si l'égalité a lieu pour une certaine valeur de  $b$ , elle a lieu pour  $b + 1$ : il suffit d'insérer une arête de longueur  $Syst/2$  dans une face. Il existe pour tout  $b \in \mathbb{N}^*$  un graphe planaire (formé avec 2 sommets et  $b + 1$  arêtes de longueur 1) qui réalise l'égalité dans (\*). Par contre, ceci n'est plus vrai pour les autres surfaces.

**PROPOSITION 5.4.2**

- (1) Sur le plan projectif  $\mathbb{P}$  l'égalité (\*) est optimale pour  $b \geq 6$  et stricte avant.
- (2) Sur le tore  $\mathbb{T}$  l'égalité (\*) est optimale pour  $b \geq 8$  et stricte avant.

*Preuve.* (1) Comme  $\chi = 1$ , l'égalité implique  $C_b \leq b/2$ , donc  $b \geq 6$  (voir 5.3). Voici deux graphes réalisant l'égalité pour  $b = 6$  (Figure 5).

(2) Cette fois on a  $C_b \leq (b - 1)/2$  en cas d'égalité, donc  $b \geq 8$  d'après 5.3. Mais l'égalité a effectivement lieu pour  $b = 8$  (Figure 6-a).

*N.B.* Toutes les arêtes de  $P_0$  et de  $P_1$  sont de longueur 1, et de même pour les graphes  $G$  et  $H$  ci-dessous.

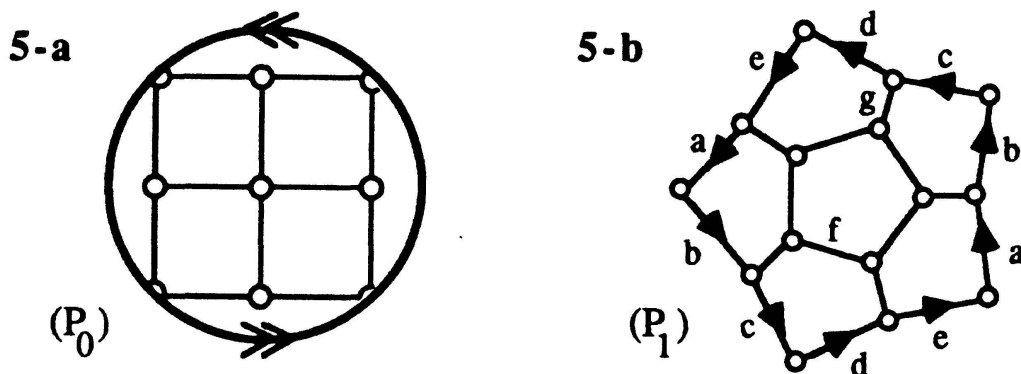


Figure 5

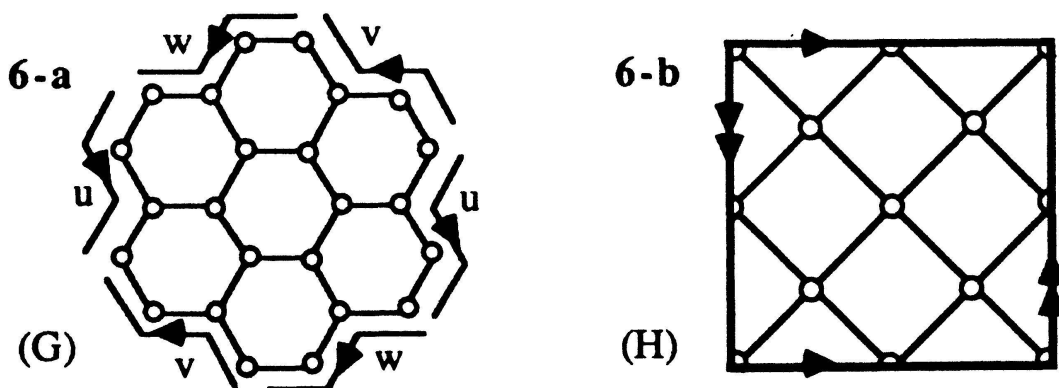


Figure 6

Pour la bouteille de Klein  $\mathbb{K}$ , l'égalité n'est possible que si  $b \geq 8$  et a lieu à partir de  $b = 9$  (Figure 6-b). En faisant des sommes connexes on voit que (\*) est optimale pour  $b \geq b_0$  avec

$$b_0 = 1 + 7m \quad \text{sur } \mathbb{T}^{\#m} \quad (m \geq 0),$$

$$b_0 = 6 + 7m \quad \text{sur } \mathbb{P}^{\#(2m+1)} \approx \mathbb{T}^{\#m} \# \mathbb{P} \quad (m \geq 0),$$

$$b_0 = 2 + 7m \quad \text{sur } \mathbb{P}^{\#2m} \approx \mathbb{T}^{\#(m-1)} \# \mathbb{K} \quad (m \geq 1).$$

Il est bien naturel de se demander quelle est la meilleure valeur de  $b_0$  pour ces surfaces:

*Problème.* Déterminer pour  $\mathbb{K}$  et pour d'autres surfaces la plus petite valeur de l'entier  $b$  pour laquelle l'inégalité (\*) est optimale.

#### REFERENCES

- [Al] N. ALON, Note (1985).  
 [Ba]<sub>1</sub> C. BAVARD, *Inégalités isosystoliques conformes pour la bouteille de Klein*, *Geom. Dedicata* 27 (1988), 349–355.  
 [Ba]<sub>2</sub> C. BAVARD, *Le volume systolique conforme des groupes crystallographiques du plan*, prépublication de l'ENS Lyon (1991).  
 [Ber]<sub>1</sub> M. BERGER, *Some relations between volume, injectivity radius, and convexity radius in Riemannian manifolds*, in: *Differential geometry and relativity*, ed. by Cahen & Flato, D. Reidel (1976), pp. 33–42.  
 [Ber]<sub>2</sub> M. BERGER, *Volume et rayon d'injectivité dans les variétés riemanniennes de dimension 3*, *Osaka J. Math.* 14 (1977), 191–200.  
 [Ber]<sub>3</sub> M. BERGER, *Une borne inférieure pour le volume d'une variété riemannienne en fonction du rayon d'injectivité*, *Ann. Inst. Four.* 30 (1980), 259–265.  
 [Bes] A. BESSE, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York (1978).  
 [Cr]<sub>1</sub> C. CROKE, *Some isoperimetric inequalities and eigenvalues estimates*, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 13 (1980), 419–435.  
 [Cr]<sub>2</sub> C. CROKE, *On the volume of metric balls*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 88 (1983), 660–664.  
 [Je] J. JENKINS, *Univalent functions and conformal mapping*, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York (1965).  
 [Gr] M. GROMOV, *Filling Riemannian manifolds*, *J. Diff. Geom.* 18 (1983), 1–147.  
 [GLP] M. GROMOV, J. LAFONTAINE et P. PANSU, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Cédic/Fernand Nathan, Paris (1981).

*Unité de Mathématiques*  
*Pures et Appliquées*  
 ENS Lyon,  
 46 Allée d'Italie  
 69364 LYON Cedex 07  
 France

Received April 26, 1991