Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 66 (1991)

Artikel: Convexité en topologie de contact.
Autor: Giroux, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50421

Comment. Math. Helvetici 66 (1991) 637–677 0010-2571/91/040637-41$1.50 + 0.20/0

Convexité en topologie de contact

EMMANUEL GIROUX

Introduction

Cet article aborde l'étude de la convexité en géométrie de contact, telle qu'elle a été définie dans [EG]: une structure, symplectique ou de contact, est dite convexe si elle est conformément invariante par le gradient d'une fonction de Morse propre. Pour les variétés symplectiques, cette propriété joue le rôle qu'occupe la pseudo-convexité stricte dans les variétés analytiques complexes. Elle ne peut, par exemple, être vérifiée que sur des variétés ouvertes ayant le type homotopique de polyèdres de dimension moitié et, dans [EG], Ya. Eliashberg et M. Gromov montrent comment elle tempère la géométrie et interdit certains phénomènes exotiques (voir aussi [Gr] et [El1]). En géométrie de contact, la situation se présente différemment. D'abord, les structures usuelles, sur les espaces de jets d'ordre 1, les sphères et les variétés d'éléments de contact, sont toutes convexes (voir 1.4.C). Ensuite, les résultats qu'on obtient ici font apparaître qu'en dimension 3, il existe de nombreuses variétés de contact convexes. En particulier, certaines structures exotiques découvertes par T. Erlandsson et D. Bennequin (voir [Be]) sont convexes; de fait, on ne connaît aucun exemple de structures non convexes.

La démarche adoptée est la suivante: étant donné une fonction de Morse propre f sur une variété V de dimension 3, on essaie de construire sur V une structure de contact ξ qui soit invariante par le flot d'un gradient X de f. L'étude des champs de contact (i.e. des champs préservant une structure de contact) montre que, si cette structure ξ existe, la surface C des points de V où X est tangent à ξ doit satisfaire, vis-à-vis de f, aux conditions suivantes (Proposition I.4.5):

(i) $f_{|C}$ est une fonction de Morse propre;

(ii) les points critiques de f sont tous sur C et sont exactement les points critiques de $f_{|C}$;

(iii) f et $f_{|C}$ ont les mêmes extrema locaux.

Une fonction de Morse n'admet pas toujours de surfaces vérifiant ces propriétés (voir IV.1.B). Néamoins, on peut la modifier, en ne lui ajoutant souvent que des points critiques d'indices 1 et 2 en position d'élimination, pour qu'une telle surface

C existe (Théorème IV.2.7). Par ailleurs, la donnée de C permet effectivement de construire la structure de contact ξ voulue (Théorème III.1.2). Pour obtenir celle-ci, on met sur chaque anse une structure induite par plongement dans un modèle bien choisi sur $\mathbb{R}^3$. La difficulté est d'ajuster ces plongements pour pouvoir recoller les morceaux: ce problème est localisé le long de certaines faces des anses. Or, au voisinage d'une surface, une structure de contact est entièrement décrite par le feuilletage (singulier) de dimension 1 qu'elle trace sur la surface. De plus, chaque surface considérée ici, correspondant à un niveau régulier de f, se trouve, par construction, être transverse dans $\mathbb{R}^3$ à un champ de vecteurs qui préserve la structure modèle et tient le rôle du gradient de f. Le point crucial est alors de comprendre comment, lorsqu'on bouge la surface par isotopie tout en la maintenant transversale à ce champ, on modifie son feuilletage (Proposition II.3.6). A ce point, une structure de contact convexe apparaît comme géométriquement descriptible par un nombre fini de ces feuilletages, portés par les différents niveaux réguliers de la fonction et déterminés seulement aux modifications précédentes près.

Parmi ces modifications possibles du feuilletage, figure l'élimination de paires de singularités (Lemme II.3.3). On peut ainsi étendre un résultat de Ya. Eliashberg qui permet de supprimer certains points complexes sur une surface contenue dans le bord pseudo-convexe d'un domaine holomorphe (voir [El1], Théorème 6.1 et [El2]). Pour cela, au lieu de la théorie des courbes holomorphes sur les variétés symplectiques de dimension 4, on utilise le fait remarquable suivant (Proposition II.2.6): dans une variété de contact de dimension 3, une surface possède génériquement un champ de contact transverse. Grâce à cette propriété d'invariance, le problème d'élimination relève de la géométrie symplectique des surfaces.

Les problèmes étudiés dans cet article m'ont été exposés par Yasha Eliashberg lors de conversations merveilleusement enrichissantes pour moi; je l'en remercie vivement. Je remercie également François Laudenbach et Jean-Claude Sikorav pour leurs nombreuses remarques et suggestions pertinentes à propos de ce texte.

I – Notion de convexité

1. Définitions préliminaires

A. *Structures symplectiques et de contact*

Une *structure symplectique sur un espace vectoriel* V de dimension $2n$ est une 2-forme extérieure ω dont la puissance extérieure n-ième est non nulle. L'*orthogonal* d'un sous-espace W de V est le sous-espace $\{v \in V \mid \forall w \in W, \omega(v, w) = 0\}$.

On dit que W est *coïsotrope* s'il contient son orthogonal. Noter que, si c est un réel non nul, $c\omega$ est encore une forme symplectique et que l'orthogonal de W est le même pour ω et $c\omega$.

Une *structure symplectique sur un fibré vectoriel* de rang pair est un champ de formes symplectiques sur ses fibres.

Une *structure symplectique sur une variété* V de dimension $2n$ est une 2-forme différentielle fermée ω qui induit sur chaque espace tangent une forme symplectique.

Une *structure de contact* sur une variété V de dimension $2n+1$ est un champ d'hyperplans ξ complètement non intégrable, c'est-à-dire défini localement par une 1-forme α telle que $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ ne s'annule jamais. Autrement dit, $d\alpha_{|\xi}$ est en tout point une forme symplectique. La multiplication de α par une fonction f partout non nulle change $d\alpha_{|\xi}$ en $f \cdot d\alpha_{|\xi}$, de sorte que ξ est muni d'une *structure symplectique conforme*. On remarque aussi que, si n est pair, ξ est naturellement orienté tandis que, si n est impair, V est naturellement orientée. Dans tous les cas, toute orientation transverse de ξ (il en existe si et seulement si ξ admet une équation globale $\alpha = 0$) oriente à la fois ξ et V.

B. *Feuilletages singuliers de dimension* 1

Dans ce texte, on appelle *feuilletage singulier* (de dimension 1) sur une variété M de dimension m un feuilletage $\mathscr{F}$ défini par un atlas $\{U_i, X_i\}$ où: $\{U_i\}$ est un recouvrement de M, X_i un champ de vecteurs sur U_i et, pour tout (i, j), il existe une fonction partout non nulle f_{ij} sur $U_i \cap U_j$ telle que $X_i = f_{ij} X_j$.

Remarque 1.1. Si chaque U_i est muni d'une forme volume θ_i, la donnée de X_i équivaut à celle de la $(m-1)$-forme $i(X_i)\theta_i$ (produit intérieur de θ_i par X_i).

On dit qu'un champ de vecteurs X sur M *dirige* $\mathscr{F}$ si, pour tout i, il existe une fonction f_i partout non nulle sur U_i telle que $X = f_i X_i$; on dit que $\mathscr{F}$ est *orientable* si un tel champ existe.

C. *Feuilletage caractéristique d'une hypersurface*

Soit S une hypersurface dans une variété de contact (V, ξ) de dimension $2n+1$. La trace sur ξ du fibré tangent à S détermine une distribution (de rang non constant) de sous-espaces coïsotropes dans $\xi_{|S}$. La distribution orthogonale pour la structure symplectique conforme de $\xi_{|s}$ est de rang 0 sur le lieu singulier Σ où ξ est tangent à S, et de rang 1 ailleurs. Elle définit un feuilletage singulier, au sens de B, qu'on appele feuilletage caractéristique de S. Localement, si θ est une forme volume sur S et β la 1-forme induite par une équation de ξ, le feuilletage caractéristique est défini par le champ X tel que $i(X)\theta = \beta \wedge (d\beta)^{n-1}$. On vérifie facilement que le feuilletage caractéristique de S est orientable si et seulement si le fibré normal de S est isomorphe au fibré quotient $(TV/\xi)_{|S}$.

Remarque 1.2. Hors du lieu singulier Σ, le feuilletage caractéristique $\mathscr{F}$ de S a une structure de contact transverse, $(\xi \cap TS)/\mathscr{F}$, invariante par holonomie (voir [McD]). Sur Σ, $TS_{|\Sigma} = \xi_{|\Sigma}$ a une structure symplectique conforme, invariante par les champs locaux qui dirigent $\mathscr{F}$ (voir 2.C).

2. Hypersurface caractéristique d'un champ de contact

A. *Champ de contact*

Soit (V, ξ) une variété de contact.

DÉFINITION 2.1. On appele *champ de contact* sur (V, ξ) tout champ de vecteurs dont le flot préserve ξ.

Il est bien connu (voir [A]) que:

PROPOSITION 2.2. *Les champs de contact sur* (V, ξ) *sont en correspondance bijective avec les sections du fibré normal à* ξ, TV/ξ. *Autrement dit, toute section de ce quotient se relève en un unique champ de contact.*

COROLLAIRE 2.3. *Tout champ de contact donné localement se prolonge globalement.*

Remarque. En présence d'une équation de ξ, i.e. d'une trivialisation de TV/ξ, une section de TV/ξ n'est autre qu'une fonction appelée hamiltonien du champ de contact correspondant.

B. *Hypersurface caractéristique*

Soit X un champ de contact sur (V, ξ).

DÉFINITION 2.4. On appele *hypersurface caractéristique* de X l'ensemble $C = C(X)$ des points où X est tangent à ξ.

Sur l'espace des champs de vecteurs (muni de la topologie C^∞), la propriété d'avoir une réduction modulo ξ transverse à la section nulle de TV/ξ est générique.

Dans ce cas, par abus de langage, on dira que le champ est *générique*. Son hypersurface caractéristique est alors régulière.

PROPOSITION 2.5. *Si X est générique, X est tangent à son hypersurface caractéristique C et dirige le feuilletage caractéristique de celle-ci.*

Démonstration. Le flot de X préserve X et ξ, donc C, de sorte que X est tangent à C.

Soit maintenant x un point de C et α une équation locale de ξ près de x. L'hypersurface C est définie localement par l'équation $i(X)\alpha = 0$ (régulière puisque X est générique). Par ailleurs, comme X est de contact, la dérivée de Lie de α vérifie: $L(X)\alpha = g\alpha$ pour une certaine fonction g. Pour $v \in T_xC \cap \xi_x$, on a alors:

$$\begin{aligned} d\alpha(x) \cdot (X(x), v) &= (L(X)\alpha)(x) \cdot v - (di(X)\alpha)(x) \cdot v \\ &= (g\alpha)(x) \cdot v - (di(X)\alpha)(x) \cdot v = 0 \end{aligned}$$

car les deux termes sont nuls. Ainsi $X(x)$ est orthogonal à $T_xC \cap \xi_x$.

De plus, si $X(x) = 0$, on a:

$$(L(X)\alpha)(x) = (g\alpha)(x) = (di(X)\alpha)(x).$$

Donc ξ est tangent à C en x. □

Remarque. Si ξ est transversalement orientable, il existe des champs de contact X dont l'hypersurface caractéristique est vide; ce sont les champs transverses à ξ, i.e. les champs de Reeb associés aux diverses équations de ξ.

EXEMPLE 2.6. Tout champ de contact X non singulier ou à singularités non dégénérées est générique.

Démonstration. Soit α une équation locale de ξ; on veut montrer que $d(i(X)\alpha)$ est non nul en tout point où $i(X)\alpha$ est nulle. Comme X préserve ξ, $L(X)\alpha = g\alpha$ pour une certaine fonction g. Par suite, $di(X)\alpha = g\alpha - i(X)\,d\alpha$.

Si X est non singulier en $x \in C$, $(i(X)\,d\alpha)(x)$ est non proportionnelle à $\alpha(x)$ car $d\alpha(x)$ est non dégénérée sur ξ_x. Ainsi, d'après l'expression de la dérivée de Lie, $di(X)\alpha$ est non nulle en x.

Maintenant, si X a en x une singularité non dégénérée, son linéarisé $A_x : T_xV \to T_xV$ est inversible. Alors la forme $(di(X)\alpha)(x)$, qui est égale à $\alpha(x) \circ A_x$, est non singulière. □

C. *Singularités des champs de contact*

Remarques. (a) Les singularités d'un champ de contact sont portées par son hypersurface caractéristique.

(b) La divergence d'un champ de vecteurs en un point singulier ne dépend pas du volume local avec lequel on la calcule: c'est la trace du linéarisé.

PROPOSITION 2.7. *Soit* (V, ξ) *une variété de contact de dimension* $2n+1$ *et soit* X *un champ de contact générique. A toute singularité* x *de* X *est associé un réel non nul* $c = c(x)$ (*coefficient de contraction*) *ayant les propriétés suivantes*:

(i) $(n+1)c$ (*resp.* nc) *est la divergence de* X *en* x (*resp. de* $X_{|C}$ *en* x);

(ii) *pour toute équation locale* α *de* ξ, *qui induit une forme* β *sur* C, *on a*:

$$(L(X)\alpha)(x) = c\alpha(x) \quad et \quad (L(X_{|C})\, d\beta)(x) = c\, d\beta(x).$$

Démonstration. Comme X est de contact, $L(X)\alpha = g\alpha$ pour une certaine fonction g; ainsi, s'il existe, le coefficient cherché est $c = g(x)$. Or, comme X est générique, $g(x)$ est non nul. Par ailleurs:

$$L(X)\, d\alpha = dL(X)\alpha = dg \wedge \alpha + g\, d\alpha.$$

Comme $\beta(x) = 0$, on a bien: $(L(X_{|C})\, d\beta)(x) = c\, d\beta(x)$. Maintenant, pour voir que c ne dépend pas du choix de α il suffit de montrer (i). Mais comme $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ et $(d\beta)^n$ sont des volumes locaux respectivement sur V et C, (i) résulte des expressions ci-dessus par dérivation d'un produit. Par exemple:

$$\begin{aligned} L(X)(\alpha \wedge (d\alpha)^n) &= (L(X)\alpha) \wedge (d\alpha)^n + \alpha \wedge L(X)(d\alpha)^n \\ &= g\alpha \wedge (d\alpha)^n + n\alpha \wedge L(X)\, d\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} = (n+1)g\alpha \wedge (d\alpha)^n. \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 2.8. *Si* x *est une singularité d'un champ de contact générique, la valeur propre transverse à* C (*l'espace tangent à* C *est stable*) *est égale à* c.

COROLLAIRE 2.9. *On suppose que* X *est, pour une certaine métrique, le gradient d'une fonction* f *qui a en* x *un point critique de Morse d'indice* i. *Si* $c(x)$ *est positif* (*respectivement négatif*), *alors* i *est au plus égal à* n (*resp. au moins égal à* $n+1$).

Démonstration. Soit α une équation de ξ près de x et β la forme induite sur C.

La forme $d\beta(x)$ est une forme symplectique sur T_xC. Si $c(x)$ est positif, l'espace tangent en x à la variété stable de $X_{|C}$ est de dimension i, car la valeur propre transverse est positive; de plus il est nécessairement isotrope, c'est-à-dire contenu dans son orthogonal symplectique (voir la remarque de 4.3). Par suite, i est au plus égal à n. De même, en raisonnant sur la variété instable, on voit que, si $c(x) < 0$, alors $i \geq n+1$. □

3. Hypersurfaces convexes

A. *Définition, exemple*

DÉFINITION 3.1. On dit qu'une hypersurface S plongée dans une variété de contact (V, ξ) est *convexe* s'il existe un champ de contact transverse à S.

Une hypersurface convexe est donc transversalement orientable, c'est-à-dire que ses voisinages tubulaires sont difféomorphes à $S \times \mathbb{R}$. Par ailleurs, tout germe de champ de contact le long de S, qui est transverse à S, se prolonge en un champ de contact global. L'étude des hypersurfaces convexes est donc étroitement liée à celle des structures de contact sur $S \times \mathbb{R}$ invariantes par le champ vertical $\partial/\partial t$, où t désigne la coordonnée sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLE 3.2 (Contactisation d'une variété symplectique exacte). On dit qu'une variété symplectique (W, ω) est *exacte* si ω est la différentielle d'une 1-forme β appelée forme de Liouville. Par dualité symplectique, il revient au même de dire qu'il existe sur W un champ de vecteurs X, appelé champ de Liouville, dont le flot dilate ω exponentiellement: $L(X)\omega = \omega$. Si $(W, \omega = d\beta)$ est un variété symplectique exacte, la forme $\beta + dt$ définit sur $W \times \mathbb{R}$ une structure de contact verticalement invariante. En outre, le champ de Liouville X, ω-dual de β, dirige le feuilletage caractéristique des hypersurfaces $W \times \{t\}$, $t \in \mathbb{R}$.

Remarques 3.3. (a) La structure de contact ainsi obtenue dépend non seulement de la structure symplectique ω mais aussi de la primitive β choisie. On observe cependant que, si on change β en $\beta + dh$, où h est une fonction sur W, le difféomorphisme $\phi : W \times \mathbb{R} \to W \times \mathbb{R}$, donné par $\phi(x, t) = (x, t + h(x))$, vérifie $\phi^*(\beta + dt) = (\beta + dh) + dt$. Il établit donc un isomorphisme entre les deux structures de contact.

(b) Si $H \subset W$ est une hypersurface transverse à X, la forme induite par β sur H est de contact. En effet, $\beta \wedge (d\beta)^{n-1} = (1/n)i(X)\omega^n$ induit sur H une forme volume.

B. *Structures de contact verticalement invariantes*

Soit S une variété de dimension $2n$. Une structure de contact ξ, transversalement orientable et verticalement invariante sur le cylindre $S \times \mathbb{R}$, se laisse définir par une équation globale $\beta + u\,dt = 0$, où β et u sont respectivement une 1-forme et une fonction sur S telles que:

la forme $\theta = (d\beta)^{n-1} \wedge (u\,d\beta + n\beta \wedge du)$ ne s'annule jamais sur S. $(*)$

En fait $\theta \wedge dt = (\beta + u\,dt) \wedge (d(\beta + u\,dt))^n$.

On observe que:

(1) L'ensemble Σ d'équation $u = 0$ est la trace sur $S \times \{0\}$ de l'hypersurface caractéristique du champ $\partial/\partial t$; c'est une hypersurface régulière sur laquelle β induit une forme de contact car, le long de Σ, $(*)$ s'écrit $(d\beta)^{n-1} \wedge \beta \wedge du \neq 0$.

(2) Sur l'ouvert $\Omega = S \backslash \Sigma$, ξ est encore défini par $\beta/u + dt = 0$ et on a: $\theta = u^{n+1}(d(\beta/u))^n$. Ainsi $(\Omega \times \mathbb{R}, \xi)$ est la contactisation de la variété symplectique exacte $(\Omega, d(\beta/u))$.

Soit Y le champ tangent à S défini par:

$$\beta \wedge (d\beta)^{n-1} = i(Y)\theta. \tag{$**$}$$

Ce champ dirige le feuilletage caractéristique de $S \times \{0\}$ (voir 1.C) et vérifie les relations ci-dessous.

(3) Sur $\Sigma : Y \cdot u = -1/n$. En effet:

$$\beta \wedge (d\beta)^{n-1} = -ni(Y)[du \wedge \beta \wedge (d\beta)^{n-1}] = -n(Y \cdot u)\beta \wedge (d\beta)^{n-1},$$

car $i(Y)[\beta \wedge d\beta^{n-1}] = 0$.

(4) Sur Σ, soit X le champ de Liouville de β/u défini par $\beta/u = i(X)\,d(\beta/u)$; on a:

$$X = nuY.$$

En effet:

$$i(X)\theta = u^{n+1}i(X)\left(d\left(\frac{\beta}{u}\right)\right)^n = nu^{n+1}\frac{\beta}{u} \wedge \left(d\left(\frac{\beta}{u}\right)\right)^{n-1} = nu\beta \wedge (d\beta)^{n-1}.$$

PROPOSITION 3.4. *Soit S une variété fermée de dimension $2n$ et soit $\mathscr{F}$ un feuilletage singulier de dimension* 1 *sur S* (*voir* 1.B). *Il existe sur $S \times \mathbb{R}$ une structure de contact verticalement invariante qui induit $\mathscr{F}$ comme feuilletage caractéristique sur $S \times \{0\}$ si et seulement si il existe dans S une hypersurface Σ transverse à $\mathscr{F}$* (*évitant en particulier les singularités de $\mathscr{F}$*) *telle que*:

(i) *le complémentaire S' d'un voisinage tubulaire ouvert de Σ, dont les fibres sont dans $\mathscr{F}$, est une variété symplectique exacte dont un champ de Liouville dirige $\mathscr{F}$ et sort transversalement sur le bord*;

(ii) *l'involution du revêtement double $\partial S' \to \Sigma$, obtenue en suivant les feuilles de $\mathscr{F}$ à travers le tube, préserve la structure de contact induite sur $\partial S'$* (*voir la Remarque* 3.3b) *mais renverse son orientation transverse.*

Démonstration. On suppose d'abord qu'il existe sur $S \times \mathbb{R}$ une structure de contact ξ verticalement invariante qui induit $\mathscr{F}$ comme feuilletage caractéristique sur $S \times \{0\}$. L'intersection Σ de S avec l'hypersurface caractéristique du champ $\partial/\partial t$ est une hypersurface de S transverse à $\mathscr{F}$ (voir (1) et (3) ci-dessus). Sur $\Omega = S \backslash \Sigma$, le champ vertical est transverse à ξ, donc ξ est transversalement orientable et défini par une unique équation $\beta + dt = 0$, où β est nécessairement une forme de Liouville sur Ω. En utilisant des équations locales près de Σ et les relations (3) et (4) ci-dessus, on voit que le champ de Liouville X associé à β sort le long de $\partial S'$, si S' est choisi comme dans l'énoncé. Enfin, la structure de contact ξ' définie par β sur $\partial S'$ est la trace sur $\partial S'$ de la structure de contact transverse à $\mathscr{F}$ et invariante par l'holonomie de $\mathscr{F}$. Il en résulte que l'involution du revêtement $\partial S' \to \Sigma$ préserve ξ'; mais, comme X change de sens au passage de Σ, l'orientation transverse de ξ' est renversée.

Inversement, on suppose maintenant les conditions (i) et (ii) remplies. On désigne par $d\beta$ la structure symplectique exacte sur S' dont le champ de Liouville X dirige $\mathscr{F}$ et sort le long de $\partial S'$.

LEMME 3.5. *On peut supposer que*:

(ii)′ *l'involution du revêtement $\partial S' \to \Sigma$ renverse la forme induite par β sur $\partial S'$.*

Démonstration. Soit $\bar{S}'$ la variété obtenue comme suit: on recolle sur S' le cylindre $\partial S' \times [0, \infty[$ le long de $\partial S' = \partial S' \times \{0\}$, en raccordant X avec le champ $\partial/\partial r$ où r est la coordonnée sur $[0, \infty[$; on note encore X le champ étendu. Si η désigne la 1-forme induite par β sur $\partial S'$, on prolonge β à $\bar{S}'$ en posant $\beta = e^r \eta$ sur $\partial S' \times [0, \infty[$. Alors $(\bar{S}', d\beta)$ est une variété symplectique exacte dont le champ de Liouville est X.

Soit maintenant τ l'involution du revêtement $\partial S' \to \Sigma$; par hypothèse, il exist une fonction négative sur $\partial S'$, notée $-e^h$, vérifiant $\tau^*\eta = -e^h \eta$; comme $\tau^2 = id$, on a: $\tau^* h = -h$. Soit h_0 un minorant de h sur $\partial S'$ et soit

$$S'_0 = S' \cup \{(y, r) \in \partial S' \times [0, \infty[\mid r \leq \tfrac{1}{2}[h(y) - h_0]\}.$$

Alors la forme induite par β sur $\partial S'_0 \cong \partial S'$ est: $\eta_0 = e^{(h - h_0)/2}\eta$; par suite:

$$\tau^*\eta_0 = e^{\tau^*(h - h_0)/2}\tau^*\eta = -e^{-(h + h_0)/2} e^h \eta = -\eta_0.$$

Enfin on a une isotopie qui envoie S'_0 sur S' en respectant le feuilletage par les orbites de X, ce qui démontre le lemme.

Sur $S' \times \mathbb{R}$, l'équation $\beta + dt = 0$ définit une structure de contact ξ verticalement invariante qu'on cherche à prolonger près de $\Sigma \times \mathbb{R}$. Pour cela, on suppose d'abord Σ transversalement orientable, et on se donne un voisinage scindé, $U \cong \Sigma \times]-1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$, dans lequel les feuilles de $\mathscr{F}$ sont les segments $\{pt\} \times]-1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$. On choisit le paramétrage pour que:

- $\Sigma \cap U = \Sigma \times \{0\}$ et $\partial S' \cap U = \Sigma \times \{-1, 1\}$;
- sur $S' \cap U$, X a pour expression $-s(\partial/\partial s)$, où s est la coordonnée dans l'intervalle $]-1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$.

Les relations $L(X)\beta = \beta$, $i(X)\beta = 0$ et la propriété (ii)$'$ montrent que $\beta_{|S' \cap U} = (1/s)\gamma$, où γ est une forme de contact sur $\Sigma \times \{1\}$. Alors la forme $\gamma + s\,dt$ définit sur U une structure de contact qui coïncide avec ξ sur $(U \cap S') \times \mathbb{R}$.

Enfin, si Σ n'est pas transversalement orientable, on passe à un revêtement de S dans lequel elle le devient et on fait la construction précédente de manière équivariante. $\square$

Remarque (F. Laudenbach). Si n est pair et si S est orientable, l'hypersurface Σ sépare. En effet, ξ est alors orientable, donc transversalement orientable, puisque $S \times \mathbb{R}$ est orientable. Par suite, les deux côtés de Σ sont donnés par le signe de $\partial/\partial t$ relativement à cette orientation transverse.

4. Structures de contact convexes

A. *Pseudo-gradients d'une fonction de Morse*

DÉFINITION 4.1. Soit $f: M \to \mathbb{R}$ une fonction de Morse, c'est-à-dire une fonction dont tous les points critiques sont non dégénérés. On dit qu'un champ de vecteurs X est un *pseudo-gradient* de f s'il existe sur M une métrique riemannienne et une fonction positive ρ telles que, partout sur M, on ait $X \cdot f \geq \rho \, \|df\|^2$. On a alors une relation semblable pour toute autre métrique riemannienne. Exemple: le gradient de f pour une métrique donnée vérifie cette inégalité.

On rappelle qu'une singularité x d'un champ X est *hyperbolique* si le linéarisé A_x de X en x est hyperbolique, i.e. n'a aucune valeur propre de partie réelle nulle. Dans ce cas, le théorème de la variété stable affirme que les points ayant x pour ω-limite (resp. α-limite) forment une sous-variété immergée appelée variété stable (resp. instable); son espace tangent en x est la variété stable (resp. instable) du champ linéaire A_x. Il est bien connu que:

PROPOSITION 4.2. *Soif f une fonction de Morse sur une variété M de dimension m et soit X un pseudo-gradient de f. Alors*:

(i) *les singularités de X sont hyperboliques et sont exactement les points critiques de f*;
(ii) *en un point critique d'indice i de f, la variété stable (respectivement instable) de X est de dimension i (respectivement $(m-i)$).*

Remarque 4.3. Soit A un endomorphisme hyperbolique de $\mathbb{R}^{2n}$ et ω une forme symplectique linéaire sur $\mathbb{R}^{2n}$. Si $(e^{tA})^*\omega = e^{ct}\omega$ pour c constante positive et pour tout t réel, alors la variété stable W^s du champ linéaire A est isotrope (i.e. contenue dans son orthogonal symplectique). En effet, pour $v, w \in W^s$, $\omega(v, w) = e^{-ct}\omega(e^{tA}v, e^{tA}w)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, donc est nul. Ceci permet d'étendre le Corollaire 2.9 au cas où X est pseudo-gradient d'une fonction de Morse.

B. *Notion et condition de convexité pour une structure de contact*

Dans [EG], Ya. Eliashberg et M. Gromov proposent la définition suivante.

DÉFINITION 4.4. On dit qu'une structure de contact ξ sur une variété V est *convexe* s'il existe une fonction de Morse propre $f : V \to [0, \infty[$ ayant un pseudo-gradient complet qui préserve ξ.

Les niveaux réguliers de f sont alors des hypersurfaces convexes. De plus il découle de 2.C et 4.A que:

PROPOSITION 4.5. *Soit (V, ξ) une variété de contact et $f : V \to [0, \infty[$ une fonction de Morse propre. Si ξ est préservé par un pseudo-gradient de f, l'hypersurface caractéristique C de ce champ vérifie les propriétés suivantes*:

(i) *$f_{|C}$ est une fonction de Morse propre*;
(ii) *les points critiques de f sont sur C et sont exactement les points critiques de $f_{|C}$*;
(iii) *un point critique d'indice i pour f donne, pour $f_{|C}$, un point critique d'indice i si $i \leq n$ et d'indice $i-1$ si $i \geq n+1$.*

Dans la partie III, on montrera comment construire, inversement, des structures de contact convexes sur une variété V de dimension 3 à partir d'une fonction de Morse et d'une surface dans V vérifiant les conditions ci-dessus.

C. *Exemples de structures de contact convexes*

EXEMPLE 4.6 (Contactisation d'une variété de Weinstein)

Définition (Ya. Eliashberg et M. Gromov, [EG]). On dit qu'une variété symplectique (W, ω) est de *Weinstein* s'il existe une fonction de Morse propre $f_0 : W \to [0, \infty[$ ayant un pseudo-gradient complet X_0 qui dilate ω exponentiellement: $L(X_0)\omega = \omega$. Une telle variété symplectique est donc exacte car, comme ω est fermée, on a $\omega = d\beta$ où $\beta = i(X_0)\omega$.

Dans ces conditions, la structure de contact ξ définie sur $W \times \mathbb{R}$ par l'équation $\beta + dt = 0$ est convexe. En effet, le champ $X = X_0 + t(\partial/\partial t)$ préserve ξ puisque $L(X)(\beta + dt) = \beta + dt$. De plus, X est un pseudo-gradient complet pour la fonction de Morse propre $f : W \times \mathbb{R} \to [0, \infty[$ donnée par $f(x, t) = f_0(x) + t^2$.

Un exemple typique de variété de Weinstein est l'espace cotangent (à une variété quelconque) muni de sa structure symplectique canonique ω. Dans ce cas, on peut choisir X_0 pour que $\beta = i(X_0)\omega$ diffère de la forme de Liouville canonique par la différentielle d'une fonction. La contactisation de β est alors isomorphe à la structure de contact canonique sur l'espace des 1-jets de fonctions (voir la Remarque 3.3a): cette structure est par conséquent convexe.

EXEMPLE 4.7. La structure de contact donnée sur S^{2n+1} par les tangentes complexes à la sphère unité de $\mathbb{C}^{n+1}$ est convexe. En effet, si $z_j = x_j + iy_j$, $1 \leq j \leq n + 1$, sont les coordonnées, cette structure a par exemple pour équation la forme induite par $-\Sigma\, y_j\, dx_j$; on vérifie alors que le champ de contact associé au hamiltonien x_k est un pseudo-gradient de la fonction y_k. L'hypersurface caractéristique de ce champ est la sphère équatoriale d'équation $x_k = 0$.

EXEMPLE 4.8 (Structure canonique sur la variété des éléments de contact). Soit $\pi : V \to M$ le fibré des éléments de contact sur une variété M de dimension $n + 1$. Alors la structure de contact canonique sur V (voir [A]) est convexe.

Argument. Etant donné une fonction de Morse propre $f_0 : M \to [0, \infty[$, on choisit un pseudo-gradient complet X_0 de f_0 ayant la propriété suivante: en tout point critique de f_0, les valeurs propres de X_0 sont réelles et distinctes. Comme tout champ de vecteurs sur M, le champ X_0 se relève naturellement en un champ de contact X sur V. Il s'avère alors que X est un pseudo-gradient complet pour une certaine fonction de Morse propre $f : V \to [0, \infty[$. On obtient f en perturbant comme suit la fonction $f_0 \circ \pi$ au-dessus d'un voisinage des points critiques de f_0: au-dessus d'un tel point x, le champ X est tangent à la fibre $F = \pi^{-1}(x)$ et n'est autre que le champ induit naturellement par le linéarisé de X_0 sur l'espace projectif cotangent; comme les valeurs propres de X_0 sont réelles et distinctes, $X_{|F}$ est le gradient d'une fonction de Morse $g : F \to [0, \infty[$ ayant exactement $n+1$ points critiques d'indices tous distincts; c'est cette fonction g, convenablement pondérée et prolongée, qu'on ajoute à $f_0 \circ \pi$.

Remarque. L'hypersurface caractéristique du champ X ci-dessus est le conormal du champ X_0.

II – Sur le feuilletage caractéristique des surfaces en dimension 3

1. Propriétés des feuilletages caractéristiques

On s'intéresse ici aux feuilletages singuliers d'une surface S qui peuvent se réaliser comme feuilletages caractéristiques par plongement de S dans une variété de contact de dimension 3. Dans une telle variété, naturellement orientée, le fibré normal de S est isomorphe au fibré $\bigwedge^2 TS$; ceci permet de parler de germes de structures de contact le long de S sans spécifier de variété ambiante.

A. *Forme générale des feuilletages caractéristiques*

DÉFINITION 1.1. On dit qu'une singularité x d'un champ de vecteurs Y est *isochore* si la divergence de Y en x est nulle. Une singularité isochore de Y est aussi une singularité isochore de $f \cdot Y$ pour toute fonction f; cette notion est donc bien définie pour les feuilletages singuliers au sens de 1.1.B.

PROPOSITION 1.2. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage singulier sur une surface S. On fixe une orientation sur la variété $\bigwedge^2 TS$ et on s'intéresse uniquement aux germes de structures de contact le long de S qui donnent cette orientation.*

(a) *$\mathcal{F}$ est le feuilletage caractéristique induit sur S par un germe de structures de contact si et seulement si $\mathcal{F}$ est sans singularités isochores.*

(b) *Si S est fermée, deux germes de structures de contact qui induisent le même feuilletage caractéristique $\mathcal{F}$ sont isomorphes: ils sont conjugués par un germe de difféomorphisme qui est isotope à l'identité parmi les difféomorphismes préservant $\mathcal{F}$.*

Démonstration. (a) L'absence de singularités isochores est nécessaire; en effet, si α est une forme de contact qui induit sur S une forme β nulle en x, la forme $d\beta(x)$, qui n'est autre que $d\alpha(x)_{|\mathrm{Ker}\,\alpha(x)}$, est non dégénérée; autrement dit, le champ Y donné près de x par $\beta = i(Y)\,d\beta$ a une divergence non nulle en x.

La réciproque et le (b) reposent sur le fait suivant: soit S_0 une surface orientable; une 1-forme $\alpha = \beta_t + u_t\, dt$ sur $S_0 \times \mathbb{R}$ est de contact si et seulement si:

$$u_t\, d\beta_t + \beta_t \wedge \left(du_t - \frac{\partial \beta_t}{\partial t} \right) \quad \text{ne s'annule jamais.} \qquad (*)$$

En particulier, β_0 étant donnée, les couples $(u_0, (\partial\beta_t/\partial t)_{|t=0})$ qui vérifient cette inéquation pour $t = 0$, avec un signe fixé, constituent un ensemble convexe; or ces couples sont ceux qui déterminent un germe de structure de contact. On suppose maintenant S orientable et on prend sur S une forme d'aire ω telle que $\omega \wedge dt$ donne l'orientation choisie sur $\bigwedge^2 TS \cong S \times \mathbb{R}$. On suppose de plus que $\mathscr{F}$ est transversalement orientable, c'est-à-dire donné par une équation $\beta = 0$, où β est une 1-forme sur S. On désigne par u la fonction définie sur S par $d\beta = u\omega$, et on se donne une 1-forme γ sur S telle que la 2-forme $\beta \wedge \gamma$ soit positive ou nulle par rapport à ω, et strictement positive hors du lieu singulier de β. On pose alors $\beta_t = \beta + t(du - \gamma)$. La condition $(*)$ montre immédiatement que la 1-forme $\beta_t + u\, dt$ définit une structure de contact près de $S \times \{0\}$ dans $S \times \mathbb{R}$; en effet:

$$u\, d\beta + \beta \wedge \left(du - \frac{\partial \beta_t}{\partial t}_{|t=0} \right) = u^2\omega + \beta \wedge \gamma.$$

Or, comme $\mathscr{F}$ est sans singularités isochores, u ne s'annule en aucun point du lieu singulier de β.

Enfin, si S n'est pas orientable ou si $\mathscr{F}$ n'est pas transversalement orientable, on pallie ce défaut en passant à un revêtement d'ordre 2 ou 4 sur lequel on effectue la construction précédente de manière invariante.

(b) En passant éventuellement au revêtement double de S sur lequel $\mathscr{F}$ devient transversalement orientable, on se ramène au cas où les deux germes de structure de contact sont transversalement orientables. Ils admettent alors des équations α_0 et α_1 qui induisent sur S la même forme. La formule $(*)$ montre que le noyau ξ_s de $\alpha_s = (1-s)\alpha_0 + s\alpha_1$ est, près de S, une structure de contact pour tout $s \in [0, 1]$.

On cherche maintenant, par la méthode de J. Moser, une isotopie (φ_s), $s \in [0, 1]$, qui transporte ξ_0 sur ξ_s, i.e. vérifie: $\alpha_0 \wedge \varphi_s^*\alpha_s = 0$. Cette condition signifie que le chemin $s \mapsto \varphi_s^*\alpha_s$ reste sur le rayon $\{r\alpha_0,\ r > 0\}$ dans l'espace des 1-formes; autrement dit:

$$\varphi_s^*\alpha_s \wedge \frac{\partial}{\partial s}(\varphi_s^*\alpha_s) = 0 \qquad \text{pour tout } s.$$

En notant X_s le générateur infinitésimal de (φ_s), cette relation s'écrit:

$$(L(X_s)\alpha_s)_{|\xi_s} = -\frac{\partial \alpha_s}{\partial s}{}_{|\xi_s}.$$

On prend pour X_s le champ vérifiant à la fois

$$i(X_s)\alpha_s = 0 \quad \text{et} \quad (i(X_s)\, d\alpha_s)_{|\xi_s} = -\frac{\partial \alpha_s}{\partial s}{}_{|\xi_s}.$$

Ce système possède une unique solution par définition des structures de contact. De plus, si v est un vecteur de $\xi_s \cap TS = \xi_0 \cap TS$, on a $(\partial\alpha_s/\partial s)(v) = 0$, donc $d\alpha_s(X_s, v) = 0$. Ceci montre que X_s est tangent à $\mathscr{F}$ le long de S. On utilise enfin que S est fermée pour intégrer X_s en une isotopie. □

B. *Propriétés génériques des feuilletages caractéristiques*

L'espace des feuilletages singuliers sur une surface S (au sens de I.1.B) a une topologie naturelle comme quotient de l'espace des champs de plans le long de la section nulle dans $\bigwedge^2 TS$. Si maintenant S est plongée dans une variété orientée V de dimension 3, l'application qui à un champ de plans sur V associe le feuilletage induit sur S est ouverte. Comme l'ensemble des structures de contact forme un ouvert, son image est un ouvert dans l'espace des feuilletages singuliers de S. Par ailleurs, les structures de contact étant localement stables d'après un théorème de J. Gray [G], on voit:

LEMME 1.3. *Soit $\mathscr{P}$ une propriété C^∞-générique des feuilletages singuliers et S une surface plongée dans une variété de contact (V, ξ). On peut bouger S par une isotopie C^∞-petite pour que son feuilletage caractéristique vérifie $\mathscr{P}$.*

EXEMPLE 1.4. On rappelle qu'un champ de vecteurs sur une surface fermée est dit de Morse–Smale s'il vérifie les trois propriétés suivantes:

(i) les singularités et les orbites périodiques de X sont hyperboliques;

(ii) l'ensemble α-limite (resp. ω-limite) de tout point est une singularité ou un cycle limite;

(iii) il n'y a pas de connexions de selles.

D'après un théorème de M. Peixoto, un champ de vecteurs sur une surface orientable fermée est C^∞-génériquement de Morse–Smale.

Soit alors S une surface orientable fermée dans une variété de contact (V, ξ). Si ξ est transversalement orientable, le feuilletage caractéristique de S est dirigé par un champ de vecteurs qu'on peut rendre de Morse–Smale par une isotopie C^∞-petite de S dans V.

2. Surfaces convexes

A. *Découpage d'une surface convexe*

On rappelle qu'une surface S, plongée dans une variété de contact (V, ξ) de dimension 3, est dite convexe s'il existe un champ de vecteurs de contact transverse à S. Une telle surface est transversalement orientable, donc orientable. Il découle immédiatement des Propositions I.3.4 et II.1.2(b) que:

PROPOSITION 2.1. *Soit (V, ξ) une variété de contact de dimension 3, S une surface orientable fermée plongée dans V et $\mathscr{F}$ son feuilletage caractéristique. Alors la surface S est convexe si et seulement s'il existe sur S une courbe Γ transverse à $\mathscr{F}$, en général non connexe, qui découpe S en sous-surfaces où $\mathscr{F}$ se laisse diriger par un champ dilatant, pour une certaine aire, et sortant sur le bord.*

Remarque. En particulier, si S est convexe, toute feuille de $\mathscr{F}$ coupe Γ au plus une fois.

Dans la suite, on dira que Γ est le *découpage* de S (voir la Remarque 2.3). La donnée d'un champ de contact X transverse à S matérialise ce découpage par la courbe des points de S où X est tangent à ξ.

PROPOSITION 2.2. (a) *Soit S une surface fermée. Deux structures de contact verticalement invariantes sur $S \times \mathbb{R}$ qui définissent la même orientation et induisent le même feuilletage caractéristique $\mathscr{F}$ sur $S \times \{0\}$ sont isotopes: elles sont conjuguées par un difféomorphisme produit $\varphi \times Id$, où φ est isotope à l'identité parmi les difféomorphismes qui préservent $\mathscr{F}$. De plus, si le découpage de S associé au champ vertical est le même pour les deux structures, il est préservé tout au long de l'isotopie.*

(b) *Pour $i = 0, 1$, soit S_i une surface convexe dans une variété de contact (V_i, ξ_i); soit $\mathscr{F}_i$ son feuilletage caractéristique et X_i un champ de contact transverse à S_i (la donnée de X_i oriente S_i). Si S_0 et S_1 sont fermées (compactes sans bord) et s'il existe un difféomorphisme de S_0 dans S_1 qui respecte les orientations et envoie $\mathscr{F}_0$ sur $\mathscr{F}_1$, alors il existe un germe de difféomorphisme de contact, de (V_0, S_0) dans (V_1, S_1) qui envoie X_0 sur X_1.*

Démonstration. Le (b) résulte immédiatement du (a) qui se démontre exactement comme le (b) de la Proposition 1.2. L'isotopie consiste à glisser le long des feuilles de $\mathcal{F}$ pour faire tourner l'une des structures de contact jusqu'à l'amener sur l'autre. Ceci n'est en général possible que si S est fermée. □

Remarque 2.3. La Proposition 2.2 montre que le feuilletage caractéristique $\mathcal{F}$ d'une surface convexe S détermine totalement, à isotopie près parmi les courbes transverses à $\mathcal{F}$, le découpage Γ, c'est-à-dire la trace sur S de la surface caractéristique d'un champ de contact transverse. Au paragraphe 3, on verra dans quelle mesure cette courbe révèle la géométrie du feuilletage caractéristique de S. Auparavant on donne des critères géométriques de convexité et de non-convexité et on montre en particulier qu'une surface orientable est génériquement convexe. Cette généricité, exceptionnelle, est à rapprocher du fait que tout ouvert connexe de $\mathbb{R}$ (respectivement de $\mathbb{C}$) est convexe (respectivement pseudo-convexe): en dimension 3, dimension minimale des variétés de contact, la convexité est une propriété dégénérée.

B. *Exemples de surfaces non convexes*

Une structure de contact sur $S \times \mathbb{R}$ invariante par $\partial/\partial t$ est (localement) définie par des équations du type $\beta + u\,dt = 0$ où β et u sont respectivement une 1-forme et une fonction sur (un ouvert de) S telles que:

$$u\,d\beta + \beta \wedge du \quad \text{ne s'annule jamais.} \tag{$**$}$$

Le feuilletage caractéristique $\mathcal{F}$ de S est alors défini par $\beta = 0$. Si ω est une forme d'aire sur S et si Y est le champ qui dirige $\mathcal{F}$ défini par $i(Y)\,\omega = \beta$, la condition $(**)$ s'écrit encore

$$u \operatorname{div}_\omega(Y) - Y \cdot u \neq 0. \tag{$***$}$$

Ceci montre immédiatement que le feuilletage caractéristique d'une surface convexe fermée S ne peut être défini par une forme fermée (non singulière). Par exemple, les tores invariants de la fibration de Hopf dans S^3 ne sont pas convexes pour la structure standard. On voit de même que, si S est convexe, son feuilletage caractéristique $\mathcal{F}$ ne présente aucune feuille fermée ayant une application de premier retour tangente à l'identité. En effet, au voisinage d'une telle feuille F le feuilletage $\mathcal{F}$ admet une équation $\beta = 0$ où $d\beta_{|F}$ est identiquement nulle; il est alors impossible de trouver une fonction u telle que $u\,d\beta + \beta \wedge du$ ne s'annule pas sur F

puisque $u_{|F}$ a nécessairement des points critiques. Enfin, la convexité interdit certaines connexions de selles; pour être précis, on pose:

DÉFINITION 2.4. Soit x une singularité non isochore d'un feuilletage singulier $\mathscr{F}$. On dit qu'on *oriente positivement* $\mathscr{F}$ en x lorsqu'on choisit, pour diriger $\mathscr{F}$ près de x, un champ de vecteurs dont la divergence en x est positive.

Si S est convexe, aucune de ses feuilles caractéristiques ne joint deux selles en étant séparatrice stable de l'une et de l'autre pour leur orientation positive. Ceci résulte par exemple de (∗∗∗): si, près d'une telle feuille F, on oriente le feuilletage par un champ Y dirigé de la selle x_0 vers la selle x_1, on doit avoir $u(x_0)$ négatif et $u(x_1)$ positif. Or, d'après (∗∗∗) u ne peut s'annuler qu'en décroissant dans la direction de Y.

C. *Exemples de surfaces convexes*

DÉFINITION 2.5. On dit qu'un feuilletage singulier $\mathscr{F}$ sur une surface fermée S est *de Morse–Smale* s'il vérifie les conditions suivantes:

(i) les singularités et les feuilles fermées de $\mathscr{F}$ sont hyperboliques;

(ii) l'ensemble limite de toute demi-feuille est une singularité ou une feuille fermée;

(iii) $\mathscr{F}$ ne présente aucune connexion de selles.

On dit que $\mathscr{F}$ est *presque de Morse–Smale* s'il vérifie (i), (ii) et:

(iii′) quand on oriente $\mathscr{F}$ positivement près des selles, les variétés stables associées ne se rencontrent pas.

PROPOSITION 2.6. *Soit S une surface fermée orientable plongée dans une variété de contact (V, ξ). Si le feuilletage caractéristique $\mathscr{F}$ de S est presque de Morse–Smale, alors S est convexe.*

Démonstration. D'après (b) de la Proposition 1.2, il suffit de construire sur $S \times \mathbb{R}$ une structure de contact invariante par $\partial/\partial t$ qui met $\mathscr{F}$ comme feuilletage caractéristique sur $S \times \{0\}$. Autour de chaque feuille fermée (resp. de chaque foyer), on prend un anneau (resp. un disque) à bord transverse à $\mathscr{F}$. Près des selles, on oriente $\mathscr{F}$ positivement. Utilisant (ii) de la Définition 2.5, on place des bandes autour de leurs variétés stables de sorte que la réunion de ces anneaux, disques et bandes soit une surface S_0 à bord transverse à $\mathscr{F}$ (voir Figure 1). Par construction d'après le (iii′) de la Définition 2.5, sur un voisinage U de S_0, $\mathscr{F}$ est dirigé par un champ Y sortant le long de ∂S_0 et dont les singularités sont à divergence positive.

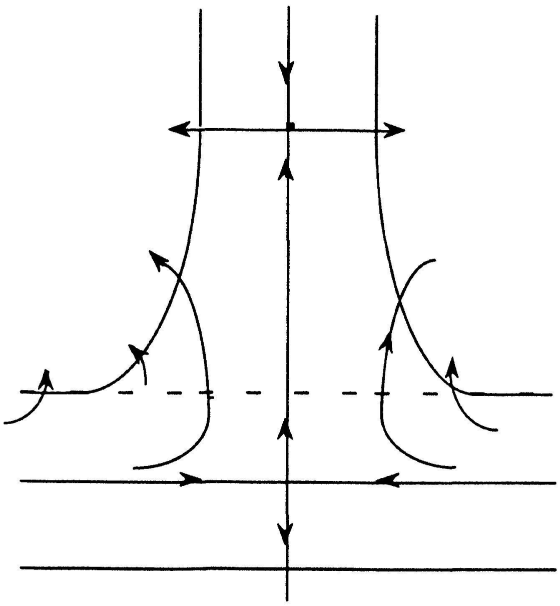

Figure 1

Il existe alors une forme d'aire ω sur S telle que $\mathrm{div}_\omega(Y) > 0$ sur U. On pose $u = 1$ donc $u\,\mathrm{div}_\omega(Y) - Y \cdot u > 0$ sur U.

Sur la surface à bord $S' = \mathrm{adh}\,(S \backslash S_0)$, $\mathscr{F}$ est un feuilletage non singulier transverse au bord et sans feuilles fermées. D'après (ii) comme S est orientable, S' est une réunion d'anneaux feuilletés par des segments allant d'un bord à l'autre. On peut alors terminer en utilisant la Proposition 2.1 ou le raisonnement élémentaire suivant. On choisit sur S' un champ non singulier Y' dirigeant $\mathscr{F}$ et coïncidant avec $\pm Y$ sur un voisinage collier U' de $\partial S'$ dans $U \cap S'$. On pose $u' = \pm 1$ sur U' selon que $Y' = \pm Y$; on cherche alors à prolonger à S' le germe de u' au bord de manière à avoir: $u'\,\mathrm{div}_\omega(Y') - Y' \cdot u' > 0$ sur S'. Ce prolongement résulte immédiatement de la remarque suivante.

Remarque 2.7. Soit $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction positive en 0 et négative en 1. Il existe une fonction $v : [0, 1] \to \mathbb{R}$ égale à 1 près de 0 et à -1 près de 1 telle que $vh - dv/d\theta$ soit positive; on prend $v(\theta) = w(\theta) \exp\left(\int_0^\theta h(\sigma)\, d\sigma\right)$ où $w : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est une fonction décroissante convenable. □

3. Déformations de feuilletages caractéristiques

A. *Une forme réduite de feuilletages caractéristiques*

Soit S une surface fermée orientable plongée dans une variété de contact (V, ξ) de dimension 3 avec un feuilletage caractéristique $\mathscr{F}$ de Morse–Smale. D'après la

Proposition 2.6, il existe un germe de champ de contact transverse à S. Etant donné un voisinage quelconque U de S, il est facile de prolonger ce germe en un champ de contact dont le flot définisse un plongement $S \times \mathbb{R} \to V$ d'image $V_0 \subset U$. Sur $V_0 \cong S \times \mathbb{R}$, $\xi_0 = \xi_{|V_0}$ est une structure de contact invariante par $\partial/\partial t$ et la surface caractéristique de ce champ de contact est un cylindre $\Gamma \times \mathbb{R}$ où Γ découpe $S = S \times \{0\}$ comme indiqué en 2.1. Alors toute fonction $h : S \to \mathbb{R}$ a pour graphe une surface convexe S_h contenue dans V_0 ayant "même découpage Γ" que S.

PROPOSITION 3.1. *Il existe une fonction $h : S \to \mathbb{R}$ telle que le feuilletage caractéristique $\mathscr{F}_h$ de S_h soit de Morse–Smale et se présente, sur chaque composante S' de la surface obtenue en découpant S_h suivant Γ, de la manière suivante:*

(i) *si S' est un disque, $\mathscr{F}_{h|S'}$ a pour unique singularité un foyer et n'a aucune feuille fermée: c'est topologiquement un feuilletage radial;*

(ii) *si S' n'est pas un disque, $\mathscr{F}_{h|S'}$ a exactement une feuille fermée et n'a pour singularité que des selles.*

De plus on peut choisir h négative ou nulle.

On démontre cette proposition en C; elle résulte également de la Proposition 3.6.

B. *Elimination des singularités*

DÉFINITION 3.2. Etant donné un feuilletage singulier sans singularités isochores sur une surface, on dit qu'un foyer x_0 et une selle x_1 sont en *position d'élimination simple* (resp. en *position d'élimination cyclique*) si lorsqu'on oriente positivement le feuilletage près de x_1, une et une seule séparatrice stable vient de x_0 (resp. les deux séparatrices stables viennent de x_0).

LEMME D'ÉLIMINATION 3.3 (voir [El1] Théorème 6.1 et [El2]). *Avec les notations et les hypothèses de* 3.A, *soit x_0 et x_1 un foyer et une selle de $\mathscr{F}$ en position d'élimination simple ou cyclique.*

(a) *Il existe dans S un anneau A disjoint de Γ et vérifiant:*

- *les seules singularités de $\mathscr{F}$ sur A sont x_0 et x_1;*
- *$\mathscr{F}_{|A}$ ne présente pas de feuille fermée;*
- *$\mathscr{F}$ est transverse au bord de A.*

Les deux configurations sont représentées sur les Figures 2 *et* 3.

(b) *Il existe une fonction $k : A \to]-\infty, 0]$ à support dans l'intérieur de A et telle que le feuilletage caractéristique sur le graphe de k n'ait aucune singularité.*

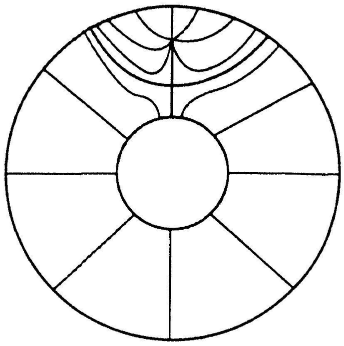

Figure 2

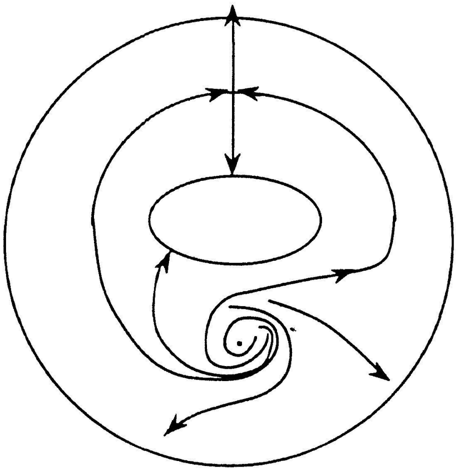

Figure 3

Démonstration. (a) Soit S' la composante connexe de x_1 dans la surface obtenue en découpant S le long de Γ. Il existe sur S' un champ qui dirige $\mathscr{F}$, sort le long de $\partial S'$ et dilate une certaine forme d'aire sur S'. En particulier ce champ oriente positivement $\mathscr{F}$ près de x_1 et la variété stable $W^s(x_1)$ reste dans S'.

Si x_0 et x_1 sont en position d'élimination cyclique, on prend pour A un voisinage annulaire de la réunion $\{x_0\} \cup W^s$.

Si x_0 et x_1 sont en position d'élimination simple, de deux choses l'une: ou bien l'autre branche de W^s vient d'un foyer x_2, ou elle vient d'une feuille fermée F nécessairement disjointe de Γ. Dans le premier cas, on prend pour A un disque voisinage de la réunion $\{x_0, x_2\} \cup W^s$, privé d'un disque autour de x_2. Dans le second cas, on se donne d'abord un anneau A' autour de F à bord transverse à $\mathscr{F}$; la branche de W^s qui vient de F coupe alors $\partial A'$ en un point x; on prend pour A un voisinage de la réunion de l'arc qui joint x à x_0 dans W^s et de la composante de x sur $\partial A'$.

(b) Comme A est disjoint de Γ, la structure de contact sur $A \times \mathbb{R}$ est la contactisation d'une forme de Liouville β sur A; autrement dit, elle a une équation de la forme $\beta + dt = 0$. Ainsi, pour toute fonction $k : A \to \mathbb{R}$ le feuilletage caractéristique sur le graphe A_k de k est défini par $\beta + dk = 0$.

Soit alors ω une forme d'aire quelconque sur A et Y le champ donné par $i(Y)\omega = \beta$. On cherche à ajouter à Y le ω-hamiltonien Y_k d'une fonction k à support dans l'intérieur de A de sorte que $Y + Y_k$ soit non singulier (ici Y_k est défini par $i(Y_k)\omega = dk$). Pour cela on se donne, sur A, un feuilletage par cercles parallèles au bord qu'on note $\mathscr{G}$. Sur un voisinage B de ∂A dans A, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont transverses. Sur $A \backslash B$, le champ Y est borné. On choisit donc une fonction $k : A \to]-\infty, 0]$, à support dans l'intérieur de A, constante sur les feuilles de $\mathscr{G}$, et dont le ω-hamiltonien Y_k est très grand sur $A \backslash B$. Alors $Y + Y_k$ est non nul sur $A \backslash B$. Sur B, Y est non singulier et est transverse à Y_k là ou Y_k est non nul. Par suite $Y + Y_k$ est partout non nul. □

Remarque 3.4. Dans le cas où x_0 et x_1 sont en position d'élimination cyclique, on crée ainsi une feuille fermée.

Dans le cas où x_0 et x_1 sont en position d'élimination simple, toutes les feuilles vont d'un bord à l'autre de l'anneau.

On peut facilement vérifier que cette construction préserve la caractère Morse–Smale du feuilletage.

C. *Fin de la démonstration de la Proposition* 3.1

Soit S' une composante de la surface obtenue en découpant S suivant Γ. Sur S', on choisit un champ Y qui dirige $\mathscr{F}$ et qui dilate une forme d'aire donnée; les foyers et les orbites fermées de Y sont alors répulsifs.

(i) On suppose que S' est un disque. Alors S' ne contient pas d'orbites fermées puisque Y est dilatant. Si $x_1 \in S'$ est une selle de Y, sa variété stable reste dans S', donc x_1 est en position d'élimination avec un foyer. Quand on a éliminé toutes les selles, il reste un seul foyer.

(ii) On suppose maintenant que S' n'est pas un disque. Les orbites de Y qui partent d'un foyer $x_0 \in S'$ ne peuvent aller vers une orbite fermée $F \subset S'$. Elles ne peuvent non plus toutes sortir puisque S' n'est pas un disque. Par suite, l'une au moins va vers une sells $x_1 \in S'$ de sorte qu'on peut éliminer tous les foyers de S'. Maintenant, comme l'ensemble α-limite de tout point de S' est dans S', S' contient au moins une orbite fermée. Si elle n'en contient qu'une, on a terminé. Si elle en contient deux, F et F', alors S' n'est pas un anneau et il existe au moins une selle x dans S' dont une séparatrice et une seule vient de F'. – En effet, sinon, soit $y_1, \ldots, y_p$ les selles dont une séparatrice (et en fait toute la variété stable) vient de F'; l'ensemble des points de S' qui ont pour α-limite l'un des y_i, ou F', est une composante connexe de S', mais S' est connexe. – Par le procédé inverse de l'élimination cyclique, on remplace F' par un foyer x_0 et une selle x_1 en position d'élimination cyclique. La séparatrice de x qui venait de F' vient maintenant de x_0 de sorte que x_0 et x sont en position d'élimination simple. □

D. *Feuilletages adaptés à un découpage donné*

Soit S une surface fermée convexe dans une variété de contact (V, ξ) de dimension 3, et soit X un champ de vecteurs de contact transverse à S dont le flot définit un plongement $S \times \mathbb{R} \to V$. On note Γ le découpage de S associé à X, courbe des points de S où X est tangent à ξ et on désigne par S_Γ la surface compacte à bord obtenue en découpant S suivant Γ.

DÉFINITION 3.5. (a) On appellera *isotopie admissible* de S dans V toute isotopie de S à travers des surfaces transverses à X, qui évitent en particulier les singularités.

(b) On dira qu'un feuilletage singulier de S est *adapté* à Γ si le feuilletage induit sur S_Γ est dirigé par un champ qui dilate une certaine aire et qui sort transversalement sur le bord ∂S_Γ.

PROPOSITION 3.6. *Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage de S adapté à Γ. Alors, il existe une isotopie admissible $\delta_s : S \to V$, $s \in [0, 1]$, telle que le feuilletage caractéristique sur $\delta_1 S$ soit $\delta_1 \mathscr{F}$. De plus, pour tout $s \in [0, 1]$, le découpage de $\delta_s S$ associé à X est $\delta_s \Gamma$.*

Démonstration. On désigne par $\mathscr{F}_0$ le feuilletage caractéristique de S et par ξ_0 la structure de contact verticalement invariante induite sur $S \times \mathbb{R}$ par le flot de X, $\psi : S \times \mathbb{R} \to V$. On se donne sur S une forme d'aire ω telle que $\omega \wedge dt$ oriente $S \times \mathbb{R}$ comme ξ_0; enfin on prend un voisinage tubulaire fermé A de Γ, assez petit pour que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}_0$ le feuillettent[1] par segments d'un bord à l'autre.

Sur $(S \setminus \operatorname{int} A) \times \mathbb{R}$, ξ_0 admet une unique équation du type $i(Y_0)\omega + dt = 0$, où Y_0 est un champ sur $S \setminus \operatorname{int} A$ qui dirige $\mathscr{F}_0$ et qui dilate ω. Par ailleurs, comme $\mathscr{F}$ est adapté à Γ il existe sur $S \setminus \operatorname{int} A$ un champ Y qui dirige $\mathscr{F}$ et qui dilate une certaine aire; en observant que $\operatorname{div}_{\pm e^g \omega}(Y) = e^{-g} \operatorname{div}_\omega (e^g Y)$, on remplace Y par un champ Y_1 qui dilate ω. Pour $s \in [0, 1]$, on pose $Y_s = (1-s)Y_0 + sY_1$. Alors, l'équation $i(Y_s)\omega + dt = 0$ définit, pour tout s dans $[0, 1]$, une structure de contact

[1] Ce texte a été rédigé avant la réforme de l'orthographe qui enjoint d'écrire feuillètent.

ξ_s verticalement invariante sur $(S\setminus \operatorname{int} A) \times \mathbb{R}$. Maintenant, sur un petit voisinage U de A dans S, on prend des champs Y'_0 et Y'_1 qui dirigent respectivement $\mathscr{F}_0$ et $\mathscr{F}$ et qui coïncident avec $\pm Y_0$ et $\pm Y_1$ sur $U \cap (S\setminus \operatorname{int} A)$; pour $s \in [0, 1]$, on pose encore $Y'_s = (1-s)Y'_0 + sY'_1$. Sur $U \times \mathbb{R}$, la structure de contact ξ_0 est définie par une unique équation du type $i(Y'_0)\omega + u_0\, dt$; la fonction u_0 s'annule sur Γ, est égale à ± 1 là où $Y'_0 = \pm Y_0$ et satisfait sur $U : u_0 \operatorname{div}_\omega (Y'_0) - Y'_0 \cdot u_0 > 0$.

En utilisant alors la Remarque 2.7, on fabrique une famille u_s de fonctions sur U telles que, pour tout $s \in [0, 1]$, on ait $u_s \operatorname{div}_\omega (Y'_s) - (Y'_s \cdot u_s) > 0$, avec $u_s = \pm 1$ là où $Y'_s = \pm Y_s$. On obtient ainsi sur $S \times \mathbb{R}$ une famille encore notée ξ_s, $s \in [0, 1]$, de structures de contact verticalement invariantes; par construction, la surface caractéristique du champ vertical est $\Gamma \times \mathbb{R}$ pour toutes les structures ξ_s et le feuilletage caractéristique induit par ξ_1 sur $S \times \{0\}$ n'est autre que $\mathscr{F}$.

La méthode de J. Moser (voir la démonstration de la Proposition 1.2) fournit alors une famille de champs de vecteurs verticalement invariants sur $S \times \mathbb{R}$, qui, puisque S est fermée, s'intègre en une isotopie φ_s vérifiant $\varphi_s^* \xi_s = \xi_0$; de plus les difféomorphismes $\varphi_s : S \times \mathbb{R} \to S \times \mathbb{R}$ préservent $\partial/\partial t$ donc $\Gamma \times \mathbb{R}$; par suite $\varphi_s^{-1}(S \times \{0\})$ est toujours transverse à $\partial/\partial t$ et est découpé par son intersection avec $\Gamma \times \mathbb{R}$. En composant avec une translation verticale, on peut s'arranger pour que $\varphi_s^{-1}(S \times \{0\})$ soit contenue dans $S \times]-\infty, 0]$. On pose alors $\delta_s = \psi \circ \varphi_s^{-1}|_{S \times \{0\}}$.

$\square$

Remarque. La proposition précédente permet, comme le Lemme 3.3, d'éliminer les singularités et de démontrer la Proposition 3.1. Elle donne également d'autres formes réduites pour le feuilletage caractéristique des surfaces convexes; par exemple:

EXEMPLE 3.7 (Feuilletage associé à une décomposition en anses). Soit (S, X, Γ, S_Γ) comme précédemment. Par *décomposition en anses* de S_Γ, on entend une collection finie d'arcs $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ disjoints dans S_Γ, allant du bord au bord, et tels que le complémentaire dans S_Γ d'un voisinage régulier Ω de $\partial S_\Gamma \cup \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_r$ soit une réunion disjointe de disques $\Delta_1, \ldots, \Delta_q$.

A toute décomposition en anses de S_Γ, on associe un feuilletage singulier de S_Γ, unique à homéomorphisme près, de la manière suivante: sur chaque disque Δ_i, on met un feuilletage radial et, sur Ω, on prend le feuilletage décrit sur la Figure 4; ce feuilletage est dirigé par un champ sortant sur ∂S_Γ, rentrant sur $\partial\Omega \setminus \partial S_\Gamma$, qui ne possède aucune orbite fermée et a pour singularités exactement r selles à divergence positive dont les variétés instables sont les γ_j; noter que les variétés stables de ces selles viennent des centres des disques Δ_i. Par recollement, on construit sur S des feuilletages adaptés à Γ, sans feuilles fermées.

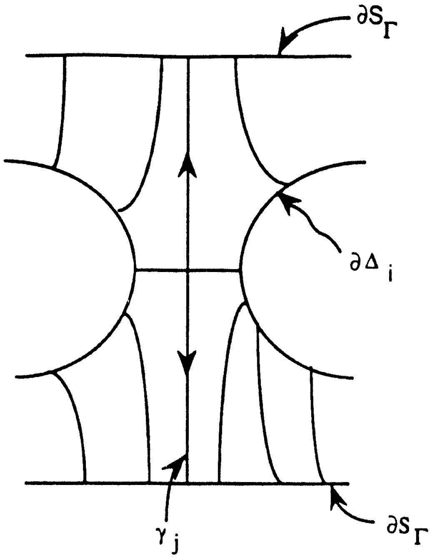

Figure 4

III – Construction de structures de contact convexes en dimension 3

1. Structures de contact convexes et surfaces essentielles

A. *Résultats d'existence*

DÉFINITION 1.1. (a) Soit V une variété de dimension 3 et $f: V \to [0, +\infty[$ une fonction de Morse propre. On dit qu'une surface C plongée dans V, non nécessairement connexe, est *f-essentielle* si elle vérifie les trois propriétés suivantes:

(i) $f_{|C}$ est une fonction de Morse propre;

(ii) tous les points critiques de f sont sur C et sont exactement les points critiques de $f_{|C}$;

(iii) un point critique d'indice 1 ou 2 pour f est d'indice 1 pour $f_{|C}$; il revient au même de dire que f et $f_{|C}$ ont les mêmes extrema locaux.

(b) On dit qu'une structure de contact sur une variété orientée de dimension 3 est positive si elle induit l'orientation donnée.

THÉORÈME D'EXISTENCE 1.2. *Soit V une variété orientée de dimension* 3 *et $f: V \to [0, \infty[$ une fonction de Morse propre. Il existe sur V une structure de contact positive préservée par un pseudo-gradient complet de f si et seulement s'il existe dans V une surface C f-essentielle.*

Remarque. En I.4, on a vu que l'existence d'une surface f-essentielle est nécessaire; on va démontrer dans cette partie qu'elle suffit. Le problème de l'existence de surfaces essentielles pour une fonction donnée sera discuté dans la partie IV; il découlera de cette discussion une version du théorème de R. Lutz et J. Martinet (voir [Ma]) pour les structures de contact convexes, à savoir:

THÉORÈME 1.3. *Toute variété orientée de dimension* 3 *porte une structure de contact positive convexe.*

DÉFINITION 1.4 (Ya. Eliashberg [El3]). On dit qu'une structure de contact sur une variété V de dimension 3 est *vrillée* (overtwisted) s'il existe un disque de dimension 2, plongé dans V, dont le feuilletage caractéristique présente un cycle limite (avec exactement une singularité à l'intérieur selon [El3], mais les arguments de II.3 montrent que cette condition n'ajoute rien).

R. Lutz a décrit un procédé pour construire sur toute variété de dimension 3 une structure de contact vrillée [Lu]; on en donnera une version "convexe" montrant que:

COROLLAIRE 1.5. *Toute variété orientée de dimension* 3 *porte une structure de contact positive convexe et vrillée.*

D'après un théorème de M. Gromov et Ya. Eliashberg (voir [Gr] et [El1]), les structures de contact vrillées ne sont pas symplectiquement remplissables (voir [El1] et [EG] pour la définition). Il existe par suite des structures de contact convexes non symplectiquement remplissables, ce qui répond à une question de [EG].

B. *Schéma de la démonstration du Théorème* 1.2

Soit $a_0 < a_1 < \cdots$ les valeurs critiques de f, qu'on suppose distinctes (uniquement pour simplifier l'exposé), et soit $b_0 < b_1 < \cdots$ des valeurs régulières intermédiaires, c'est-à-dire telles que $a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \cdots$. On pose $V_k = \{x \in V \mid f(x) \leq b_k\}$ et $C_k = C \cap V_k$.

Alors V_{k+1} s'obtient à partir de V_k par attachement d'une anse unique d'indice égal à l'indice de f au point critique x_{k+1} de valeur a_{k+1}. Comme C est f-essentielle, C_{k+1} s'obtient simultanément à partir de C_k par attachement d'une anse d'indice égal à l'indice de $f_{|C}$ en x_{k+1}. Précisément, soit $H_i = D^i \times D^{3-i}$ une anse d'indice $i = 0, 1, 2, 3$; l'attachement de H_i sur V_k est donné par un plongement $\varphi : \partial D^i \times D^{3-i} \to \partial V_k$; la paire (V_{k+1}, V_k) ne dépend que de la classe d'isotopie de φ. Pour $j \leq i$, soit D^j le sous-disque $D^j \times \{0\}$ contenu dans D^i; alors pour un choix convenable de φ, l'anse qu'on attache à C_k est $D^j \times D^{2-j}$ avec $j = 0, 1, 1, 2$ quand $i = 0, 1, 2, 3$; on la recolle suivant la restriction de φ à $\partial D^j \times D^{2-j} \subset \partial D^i \times D^{3-i}$.

Par récurrence sur k, on va construire sur V_k une structure de contact positive ξ_k, ainsi qu'un pseudo-gradient X_k de $f_k = f_{|V_k}$ qui préserve ξ_k et dont la surface caractéristique est C_k. Pour cela on va distinguer quatre cas correspondant aux différents indices possibles. Il n'est pas nécessaire de se soucier du problème de complétude car on peut toujours le régler après coup; en effet:

Remarque 1.6. Soit c un nombre positif donné, S une surface fermée et ξ une structure de contact verticalement invariante sur $S \times [0, 1]$. Alors il existe sur $S \times [0, 1]$ une structure de contact ξ' ayant les propriétés suivantes:

(i) ξ' coïncide avec ξ près du bord;

(ii) ξ' est préservée par un champ X' qui est égal à $\partial/\partial t$ près du bord, et dont les orbites sont les segments $\{\cdot\} \times [0, 1]$ parcourus en un temps c.

Démonstration. On étend ξ en une structure de contact verticalement invariante sur $S \times \mathbb{R}$ et on choisit un difféomorphisme $\rho : [0, c] \to [0, 1]$ qui coïncide avec l'identité près de 0 et avec une translation près de c; on prend alors pour ξ' et X' les images par $Id \times \rho$ de ξ et $\partial/\partial t$. □

2. Attachement des anses d'indice 0 et 3

A. *Le modèle*

Sur $\mathbb{R}^3$ orienté par $dx \wedge dy \wedge dz$, le champ de plans d'équation $dz + uy\,dx + vx\,dy = 0$, $u, v \in \mathbb{R}$, est une structure de contact positive si et seulement si $v - u > 0$. Ce champ de plans est préservé par tous les champs de vecteurs du type

$$ax\frac{\partial}{\partial x} + by\frac{\partial}{\partial y} + cz\frac{\partial}{\partial z}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, \qquad \text{avec } c = a + b;$$

en effet, leur flot au temps t est donné par $(x, y, z) \to (e^{at}x, e^{bt}y, e^{ct}z)$. Enfin, pour $v - u > 0$ et $c = a + b$, la surface caractéristique du champ de vecteurs de contact ainsi défini a pour équation: $cz + (au + bv)xy = 0$.

Soit ζ_0 la structure de contact d'équation $dz - y\,dx + x\,dy = 0$. Les champs de contact

$$Z_0 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2z\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{et} \quad Z_3 = -Z_0$$

ont pour surface caractéristique le plan $\{z = 0\}$ et sont des pseudo-gradients respectivement de $g_0 = x^2 + y^2 + z^2$ et $g_3 = -g_0$.

On désigne par H_3 l'anse d'indice 3: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ qu'on oriente par ζ_0; on note F_3 le bord de H_3 muni de l'orientation induite par le champ rentrant Z_3: cette orientation est opposée à l'orientation usuelle de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ comme bord de la boule.

B. *Anses d'indice* 0

Comme a_0 est le minimum de f, il existe un difféomorphisme de V_0 sur la boule fermée $B^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ qui respecte les orientations, qui envoie C_0 sur $B^3 \cap \{z=0\}$ et qui, à une transformation affine de $\mathbb{R}$ près, conjugue $f_0 = f_{|V_0}$ avec $x^2+y^2+z^2$. Alors l'inverse de ce difféomorphisme transforme ζ_0 en une structure de contact ξ_0 sur V_0 et envoie le champ Z_0 sur un pseudo-gradient X_0 de f_0; par construction, ce pseudo-gradient préserve ξ_0 et a C_0 pour surface caractéristique.

Tout "attachement" d'une anse d'indice 0 se traite de la même manière.

C. *Anses d'indice* 3

Sur V_k, on dispose, par hypothèse de récurrence, d'une structure de contact ξ_k, ainsi que d'un pseudo-gradient X_k de $f_k = f_{|V_k}$ qui préserve ξ_k et a pour surface caractéristique C_k.

DÉFINITION 2.1. Soit $S \subset \partial V_k$ une surface. On dira qu'une isotopie δ_s de plongements de S dans V_k est *admissible* si, pour tout s, $\delta_s S$ est transverse à X_k dans V_k et coupe C_k suivant $\delta_s(S \cap C_\kappa)$.

Il est clair qu'une telle isotopie se prolonge en une isotopie de plongements $\bar{\delta}_s : V_k \to V_k$ *admissible* au sens suivant:

- pour tout s, $\bar{\delta}_s$ envoie C_k dans C_k;
- pour tout s, $\bar{\delta}_s^* X_k$ est encore un pseudo-gradient de f_k et préserve évidemment la structure de contact positive $\bar{\delta}_s^* \xi_k$.

On suppose maintenant que V_{k+1} s'obtient à partir de V_k en attachant une anse d'indice 3, c'est-à-dire en recollant une boule sur une composante sphérique S de ∂V_k. Simultanément C_{k+1} s'obtient en attachant à C_k un disque le long de $S \cap \partial C_k$; cette intersection est donc une courbe connexe Γ. On désigne par $\phi : F_3 \to S$ un difféomorphisme d'attachement qui respecte les orientations et envoie $F_3 \cap \{z=0\}$ sur Γ.

LEMME 2.2. *On peut trouver une isotopie admissible* $\delta_s : S \to V_k$, $s \in [0, 1]$, *telle qu'il existe un germe de difféomorphisme* $\psi : (H_3, F_3) \to (V_k, \delta_1 S)$ *ayant les propriétés suivantes*:

(i) $\psi_{|F_3}$ *est isotope à* $\delta_1 \phi$ *parmi les difféomorphismes de* F_3 *dans* $\delta_1 S$ *qui envoient* $F_3 \cap \{z = 0\}$ *dans* $\delta_1 \Gamma$;

(ii) ψ *transporte* ζ_0 *sur* ξ_k *et* Z_3 *sur* X_k.

Démonstration. D'après la Proposition II.2.2, il suffit de trouver une isotopie admissible δ_s pour laquelle le difféomorphisme $\delta_1 \phi : F_3 \to \delta_1 S$ respecte les orientations et envoie le feuilletage caractéristique induit par ζ_0 sur celui induit par ξ_k. Cette isotopie est immédiatement donnée par la Proposition II.3.6 puisque le feuilletage obtenu sur S en transportant par ϕ le feuilletage caractéristique de F_3 est adapté
à Γ. □

Soit maintenant $\bar{\delta}_s$ une isotopie admissible de plongements $V_k \to V_k$ qui prolonge l'isotopie δ_s du lemme ci-dessus (voir 2.1). On peut attacher H_3 à V_k de manière à recoller d'une part $\bar{\delta}_1^* (\xi_k)$ avec ζ_0, et d'autre part $\bar{\delta}_1^*(X_k)$ avec Z_3. On prolonge alors f_k à cette variété par une fonction sur H_3 qui admet Z_3 pour pseudo-gradient et vaut $(a_{k+1} - x^2 - y^2 - z^2)$ près de l'origine. Sur les autres composantes de ∂V_k, on ajoute un collier extérieur jusqu'au niveau b_{k+1}; là, on prolonge X_k trivialement puis ξ_k de manière invariante.

3. Attachement des anses d'indices 1 et 2

A. *Le modèle*

Sur $\mathbb{R}^3$ orienté par $dx \wedge dy \wedge dz$, soit ζ_1 la structure de contact positive d'équation $dz + y\,dx + 2x\,dy = 0$. Les champs de contact

$$Z_1 = 2x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{et} \quad Z_2 = -Z_1$$

ont pour surface caractéristique le plan $\{z = 0\}$ et sont des pseudo-gradients respectivement de $g_1 = x^2 - y^2 + z^2$ et $g_2 = -g_1$.

Etant donné $\varepsilon > 0$, on désigne par $H_1 = H_1(\varepsilon)$ l'anse d'indice 1 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq \varepsilon^2, y^2 \leq 1\}$ et on note $F_1 = F_1(\varepsilon)$ la surface $H_1 \cap \{y = \pm 1\}$. La donnée de ζ_1 et Z_1 oriente H_1 et F_1. De même, on désigne par H_2 l'anse d'indice 2 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 \leq \varepsilon^2, x^2 + z^2 \leq 1\}$ et on note F_2 la surface $H_2 \cap \{x^2 + z^2 = 1\}$; H_2 et F_2 sont orientées par la donnée de ζ_1 et de Z_2. Si on paramètre F_2 par

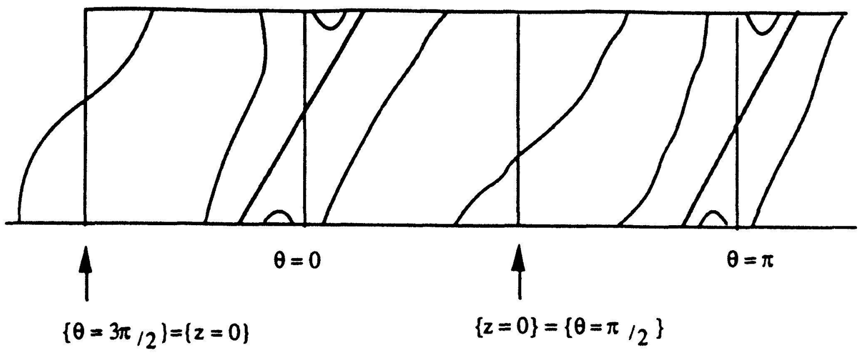

Figure 5

$(\theta, y) \mapsto (x = \sin\theta, y, z = \cos\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, l'orientation décrite précédemment est donnée par $d\theta \wedge dy$. Par ailleurs le feuilletage caractéristique induit par ζ_1 a pour équation: $(y\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta + 2\sin\theta\, dy = 0$; il se présente donc comme sur la Figure 5.

On montre facilement que:

LEMME 3.1. *Pour $i = 1, 2$ et $\varepsilon > 0$ donné, soit h_i un germe non singulier de fonction le long de F_i, égal à une constante négative sur F_i. Alors h_i se prolonge en une fonction sur H_i qui coïncide avec g_i près de l'origine, et dont Z_i est un pseudo-gradient.*

B. *Anses d'indice* 2

On suppose que V_{k+1} (resp. C_{k+1}) s'obtient en attachant à V_k (resp. à C_k) une anse d'indice 2 (resp. d'indice 1). Cet attachement est donné par un plongement $\phi : F_2 \to S = \partial V_k$ qui respecte les orientations et qui rencontre $\Gamma = \partial C_k$ exactement le long de $F_2 \cap \{z = 0\}$. La courbe d'attachement Θ, image par ϕ de $F_2 \cap \{y = 0\}$, coupe donc Γ en deux points et est ainsi partagée en deux arcs notés Θ_+ et Θ_-. Enfin, on désigne par S_Γ la surface obtenue en découpant S suivant Γ. Pour construire la structure de contact ξ_{k+1} et le champ X_{k+1} sur V_{k+1}, il suffit, d'après le Lemme 3.1, de démontrer que:

LEMME 3.2. *On peut trouver une isotopie admissible $\delta_s : S \to V_k$, $s \in [0, 1]$, telle qu'il existe un anneau A autour de Θ, et un germe de difféomorphisme $\psi : (H_2, F_2) \to (V_k, \delta_1 A)$ ayant les propriétés suivantes:*

(i) *$\psi_{/F_2}$ est isotope à $\delta_1\phi$ parmi les plongements de F_2 dans $\delta_1 A$ qui rencontrent $\delta_1\Gamma$ exactement le long de $F_2 \cap \{z = 0\}$;*

(ii) *ψ transporte ζ_1 sur ξ_k et Z_2 sur X_k.*

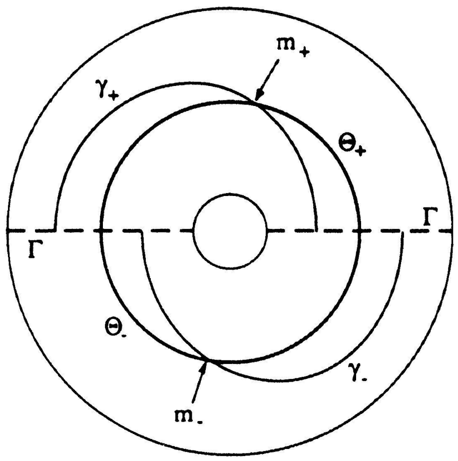

Figure 6

Démonstration. On commence par fabriquer une isotopie admissible $\delta'_s : S \to V_k$, $s \in [0, 1]$, telle qu'il existe un anneau A autour de Θ, et un difféomorphisme $\psi' : F_2 \to \delta'_1 A$ qui respecte les orientations, qui rencontre $\delta'_1 \Gamma$ exactement le long de $F_2 \cap \{z = 0\}$ et qui conjugue les feuilletages caractéristiques induits respectivement par ζ_1 et ξ_k. Pour cela, on se donne deux arcs γ_+ et γ_- ayant leurs extrémités sur Γ et vérifiant les conditions suivantes (voir Figure 6):

- γ_+ et γ_- sont contenus dans un voisinage tubulaire Ω de Θ dans S et sont isotopes respectivement à Θ_+ et Θ_- dans Ω; de plus ils ne coupent pas Γ dans leurs intérieurs;
- $\gamma_\pm$ traverse $\Theta_\pm$ en un seul point $m_\pm$;
- dans Ω, Θ coupe Γ entre γ_+ et γ_-.

On complète alors la donnée de γ_+ et γ_- en une décomposition en anses de S_Γ (voir Exemple II.3.7). Le feuilletage associé induit sur S un feuilletage $\mathscr{F}$ adapté à Γ (Définition II.3.5) qui, sur un anneau A autour de Θ, est conjugué au germe du feuilletage caractéristique de F_2 le long du cercle $\{y = 0, x^2 + z^2 = 1\}$. La Proposition II.3.6 fournit une isotopie admissible $\delta'_s : S \to V_k$ telle que $\delta'_1 A$ ait pour feuilletage caractéristique $\delta'_1(\mathscr{F})$. On obtient ainsi le difféomorphisme cherché $\psi' : F_2 \to \delta'_1 A$.

Maintenant, on prolonge ψ' en un germe de difféomorphisme, encore noté ψ', $(H_2, F_2) \to (V_k, \delta'_1 A)$, qui envoie Z_2 sur X_k. Ainsi, ξ_k (resp. $\psi'_* \zeta_1$) induit sur $S \times \mathbb{R}$ (resp. $A \times \mathbb{R}$), via δ'_1 et le flot de X_k, une structure de contact η_0 (resp. η) verticalement invariante. Il suffit alors d'établir le fait suivant:

SOUS-LEMME 3.3. *On peut prolonger η à $S \times \mathbb{R}$ en une structure de contact η_1 verticalement invariante donnant sur $S \times \{0\}$ le même feuilletage caractéristique et le même découpage que η_0.*

Démonstration de (3.3 ⇒ 3.2). Comme S est fermée, on peut maintenant arguer de l'unicité des structures de contact verticalement invariantes qui induisent un feuilletage caractéristique donné sur $S \times \{0\}$ (Proposition II.2.2): il existe une isotopie $\varphi_s : S \times \mathbb{R} \to S \times \mathbb{R}$, qui préserve à la fois $\partial/\partial t$ et les niveaux $S \times \{t\}$, telle que φ_1 redresse η_1 sur η_0. On obtient alors l'isotopie admissible (δ_s) et le difféomorphisme ψ cherchés en corrigeant par φ_1 l'isotopie (δ'_s) et le difféomorphisme ψ'.

Démonstration de 3.3. Comme ψ' rencontre $\delta'_1\Gamma$ exactement le long de $F_2 \cap \{z = 0\}$, il existe une fonction $h : A \to \mathbb{R}$ telle que, si η_0 est définie près d'un point de $A \times \mathbb{R}$ par une équation $\beta + u\,dt = 0$, alors η_1 est définie près de ce point par $\beta + e^h u\,dt = 0$. On prolonge h arbitrairement dans un voisinage de Γ.

Sur $S_\Gamma \times \mathbb{R}$, η_0 induit une structure de contact verticalement invariante, globalement définie par une équation du type $i(Y)\omega + u\,dt = 0$ où:

- ω est une aire sur S_Γ;
- Y est un champ qui sort le long de ∂S_Γ et qui dirige le feuilletage de S_Γ induit par $\mathscr{F}$, c'est-à-dire le feuilletage associé à la décomposition en anses choisie sur S_Γ ;
- u est une fonction positive sur int S_Γ, nulle au bord et vérifiant $u\,\mathrm{div}_\omega(Y) - Y \cdot u > 0$.

Soit A_Γ la partie de S_Γ correspondant à A; sur $A_\Gamma \times \mathbb{R}$, η induit une structure de contact d'équation $i(Y)\omega + e^h u\,dt = 0$. D'où: $u(\mathrm{div}_\omega(Y) - Y \cdot h) - Y \cdot u > 0$, autrement dit:

$$u(Y \cdot h) < u\,\mathrm{div}_\omega(Y) - Y \cdot u. \qquad (*)$$

Il s'agit donc de prolonger h à S_Γ en préservant cette inégalité. On observe que, sur un voisinage U assez petit de ∂S_Γ, la fonction h donnée arbitrairement vérifie (∗) puisque u s'annule sur ∂S_Γ. Le fait qu'on puisse alors prolonger h résulte des deux remarque suivantes:

• Sur int S_Γ, où $u > 0$, (∗) s'écrit $Y \cdot h < \mathrm{div}_\omega(Y) - Y \cdot \mathrm{Log}\, u$. Or toute orbite de Y qui sort de A_Γ va en un temps fini sur ∂S_Γ sans recouper A_Γ. Sur un tel segment d'orbite, h est donné près des extrémités, mais la variation de $-\mathrm{Log}\, u$ est infinie et $\mathrm{div}_\omega Y$ est borné; on peut donc prolonger h sur ce segment.

• Une orbite de Y qui rentre dans A_Γ vient d'un foyer sans couper A_Γ auparavant. Sur l'intervalle de temps correspondant du type $]-\infty, \tau_0]$, h n'est donné que près de τ_0. La condition (∗), qui majore sa dérivée par une quantité strictement positive et minorée, n'empêche pas de prolonger h en une fonction à support compact. □

C. *Anses d'indice* 1

On suppose que V_{k+1} (resp. C_{k+1}) s'obtient à partir de V_k (resp. de C_k) en attachant une anse d'indice 1 sur deux points p et q de $\Gamma = \partial C_k \subset S = \partial V_k$. On note p_0 et q_0 les points de coordonnées $(0, 1, 0)$ et $(0, -1, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$. D'après le Lemme 3.1, il suffit d'établir le fait suivant:

LEMME 3.4. *Il existe un germe de difféomorphisme* $(V_k, p, q) \to (H_1, p_0, q_0)$ *qui envoie* ξ_k *sur* ζ_1 *et* X_k *sur* Z_1.

C'est dans ce lemme, dont la démonstration est facile, qu'intervient l'orientabilité de V.

IV – Construction de surfaces essentielles

Dans cette partie, on donne des méthodes pour construire, sur les variétés de dimension 3, des fonctions de Morse ayant des surfaces essentielles (voir Définition III.1.1). J'ai eu le plaisir de discuter cette question avec plusieurs personnes, en particulier Slava Kharlamov, François Laudenbach, Christine Lescop et Alexis Marin; je tiens à les remercier de leurs suggestions et remarques.

1. Quelques exemples

A. *Exemples de surfaces essentielles*

EXEMPLE 1.1 (F. Laudenbach). Soit V_0 une variété compacte de dimension 3 à bord connexe $C = \partial V_0$, et soit $f_0 : V_0 \to \mathbb{R}$ une fonction ayant les propriétés suivantes:

(i) f_0 est non singulière et sa restriction à C est une fonction de Morse;

(ii) tout minimum local (resp. maximum local) de $f_{0|C}$ est un minimum local (resp. maximum local) de f_0 sur V_0.

Alors il existe sur le double $V = V_0 \cup_C V_0$ de V_0 une fonction de Morse f pour laquelle C est une surface essentielle.

Remarque. On verra plus loin (Lemme 2.2) que, si V_0 possède une fonction f_0 vérifiant (i) et (ii) alors V_0 est un corps en anses.

Démonstration. Un moyen simple pour construire le double V de V_0 est le suivant: on se donne une fonction de Morse $g_0 : (V_0, C) \to ([0, 1], 1)$ sans singularité près du bord. On prend sur $V_0 \times [-1, 1]$ la fonction $g(x, s) = g_0(x) + s^2$ et on pose $V = \{g = 1\} \subset V_0 \times [-1, 1]$. Il s'agit d'une variété lisse qui s'identifie au double de V_0 via les deux applications $V_0 \to V$, $x \to (x, \pm(1 - g_0(x))^{1/2})$, qui envoient C sur $C \times \{0\} \subset V$.

Soit maintenant π la projection $V_0 \times [-1, 1] \to V_0$ et f la restriction à V de $f_0 \circ \pi$. Comme le noyau de $d(f_0 \circ \pi)$ contient en tout point $\partial/\partial s$ et comme l'espace tangent à V est défini par $d(g_0 \circ \pi) + 2s\, ds = 0$, on voit que les points critiques de f sont tous situés sur $C \times \{0\} = V \cap (V_0 \times \{0\})$ et correspondent exactement aux points critiques de $f_{0|C}$. De plus la condition (ii) entraîne que tout minimum (resp. maximum) local de $f_{|C}$ est un minimum (maximum) de f. □

EXEMPLE 1.2 (V. M. Kharlamov). Soit Γ un entrelacs de S^3 et $\pi : V \to S^3$ un revêtement double ramifié au-dessus de Γ. On suppose qu'il existe une surface de Seifert C_0, bordée par Γ, et une fonction de Morse f_0 sur S^3 vérifiant les conditions suivantes:

(i) les points critiques de f_0 sont sur $C_0 \backslash \Gamma$ et sont exactement les points critiques de $f_{0|C_0}$;

(ii) $f_{0|C_0}$ n'a ni minimum local ni maximum local sur Γ.

Alors $C = \pi^{-1}(C_0)$ est une surface essentielle pour $f = f_0 \circ \pi$.

Remarque. Pour de nombreux entrelacs, on peut trouver une surface de Seifert vérifiant (i) et (ii) avec pour f_0 la fonction hauteur standard sur S^3.

Démonstration. Les points critiques de f (resp. de $f_{|C}$) sont de deux types:

- les préimages par π des points critiques de f_0 (resp. de $f_{0|C_0}$);
- les préimages par π des points critiques de $f_{0|\Gamma}$. Pour f, un tel point $x \in V$ est d'indice 1 ou 2 suivant que $f_{0|\Gamma}$ a en $\pi(x)$ un minimum ou un maximum; pour $f_{|C}$, un tel point est toujours d'indice 1 d'après (ii). □

B. *Un exemple de fonction n'ayant aucune surface essentielle* (*confectionné avec C. Lescop*).

EXEMPLE 1.3. Soit p, q des entiers premiers entre eux $0 \leq q \leq p - 1$. L'espace lenticulaire orienté $L(p, q)$ possède une fonction de Morse "canonique" f qui est ordonnée et a exactement un point critique de chaque indice 0, 1, 2, 3. Si cette fonction possède une surface essentielle C alors ou $q = 1$, ou $q = p - 1$, ou q est impair et $p = 2(q \pm 1)$.

Démonstration. Soit b une valeur régulière de f comprise entre les valeurs critiques d'indice 1 et 2. On pose $C_0 = C \cap \{f \leq b\}$, $\Gamma = \partial C_0 \subset \{f = b\}$ et on note Θ

la courbe d'attachement de l'anse d'indice 2 sur la surface $\{f = b\}$, qui est un tore orienté. Enfin, on désigne par μ un méridien orienté de ce tore (μ borde un disque dans $\{f \leq b\}$) et par λ la courbe orientée déterminée par les 2 conditions suivantes:

- le nombre d'intersection avec μ est $+1$: $[\lambda] \cdot [\mu] = +1$;
- pour une bonne orientation de Θ, $[\Theta] = q[\mu] + p[\lambda]$.

On distingue deux cas suivant que C_0 est orientable ou non.

(a) Si C_0 est orientable, c'est un anneau et la courbe Γ a deux composantes isotopes, Γ_0 et Γ_1, qui coupent μ une fois chacune. En les orientant convenablement, on a, pour $i = 0, 1$:

$$[\Gamma_i] = m[\mu] + [\lambda],$$

donc

$$[\Theta] \cdot [\Gamma_i] = pm - q, \qquad \text{où } m \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, Γ coupe Θ en au moins $2|pm - q|$ points; or, puisque C existe, Θ coupe Γ en exactement deux points, d'où $pm - q = 0$, 1 ou -1. Par suite, ou $m = 0$ et $q = 1$ (à moins que $q = 0$ et $p = 1$) ou $m = 1$ et $q = p - 1$.

(b) Si C_0 n'est pas orientable, c'est un ruban de Möbius et Γ est connexe. Avec l'orientation convenable, on a $[\Gamma] = m[\mu] + 2[\lambda]$, où m est un entier impair.

Le même argument qu'avant montre qu'on doit avoir $mp - 2q = 0, 2$ ou -2; par suite, $m = 1$ et $p = 2(q \pm 1)$, avec q impair pour que p et q soient premiers entre eux. □

Remarque 1.4. Compte tenu de la Proposition I.4.5, cet exemple montre qu'il existe des champs de vecteurs qui, pour des raisons globales, ne préservent aucune structure de contact.

2. Une méthode générale pour construire des surfaces essentielles

A. *Scindement par une surface essentielle*

DÉFINITION 2.1. Soit S une surface et Γ une courbe fermée de S, en général non connexe. On dira que Γ *partage* S *"équitablement"* si on peut recouvrir S par deux sous-surfaces, en général non connexes, qui sont toutes deux bordées par Γ et ont même caractéristique d'Euler–Poincaré.

LEMME 2.2. *Soit V une variété de dimension* 3, $f: V \to [0, \infty[$ *une fonction de Morse propre (à valeurs critiques distinctes) et C une surface f-essentielle transversalement orientable dans V. Alors*:

(i) *C sépare V en corps en anses*;

(ii) *C coupe chaque niveau régulier de f suivant une courbe qui partage équitablement ce niveau.*

On rappelle qu'un corps en anses compact est une variété de dimension 3 compacte à bord obtenue en attachant sur une boule des anses d'indice 1; dans le cas non compact, on désigne par corps en anses une limite inductive de corps en anses compacts.

Démonstration. On choisit une orientation transverse de C et on se donne deux valeurs régulières de f, $b_0 < b_1$, entre lesquelles f prend exactement une valeur critique. Pour $i = 0, 1$, on pose $V_i = \{f \leq b_i\}$, $C_i = C \cap V_i$, $S_i = \{f = b_i\}$ et $\Gamma_i = C \cap S_i$. Ainsi, V_1 (resp. C_1) s'obtient à partir de V_0 (resp. de C_0) en attachant une anse H (resp. $K \subset H$: voir la discussion de II.1.B). On observe que K sépare H en deux composantes; on les note H^- et H^+, K étant transversalement orientée de H^- vers H^+.

Si la valeur critique de f entre b_0 et b_1 est le minimum absolu de f, C_1 est un disque qui sépare la boule V_1 en deux boules (à bord anguleux). De plus, Γ_1 est un cercle et partage donc équitablement la sphère S_1.

On suppose maintenant que V_0 est réunion de deux corps en anses, éventuellement non connexes et à bord anguleux, qui s'intersectent exactement le long de C_0. On les désigne par V_0^- et V_0^+, C_0 étant transversalement orientée de V_0^- vers V_0^+. On suppose de plus que Γ_0 partage équitablement S_0.

Comme l'attachement de K sur C_0 doit respecter l'orientation transverse, C_1 sépare V_1 en $V_1^- = V_0^- \cup H^-$ et $V_1^+ = V_0^+ \cup H^+$. Ainsi C sépare V en deux sous-variétés V^- et V^+.

Pour montrer (i) et (ii), on observe que le bord de $V_i^\pm$, pour $i = 0, 1$, se décompose en deux parties: C_i et $S_i^\pm = V_i^\pm \cap S_i$. Par hypothèse, S_0^- et S_0^+ ont la même caractéristique d'Euler. Or:

• Si H est d'indice $j = 0, 1$, $V_1^\pm$ s'obtient à partir de $V_0^\pm$ en attachant une anse d'indice j. De même, $S_1^\pm$ s'obtient à partir de $S_0^\pm$ en attachant une anse d'indice j, d'où:

$$\chi(S_1^\pm) = (-1)^j + \chi(S_0^\pm),$$

donc

$$\chi(S_1^+) = \chi(S_1^-).$$

• Si H est d'indice $j = 2, 3$, $V_1^{\pm}$ est homéomorphe à $V_0^{\pm}$: on recolle simplement une boule le long d'un disque contenu dans le bord. Cependant, $S_1^{\pm}$ s'obtient à partir de $S_0^{\pm}$ par une "demi-chirurgie" d'indice j (il s'agit d'une chirurgie le long d'un arc ou d'un disque s'appuyant sur le bord de $S_0^{\pm}$). On a alors:

$$\chi(S_1^{\pm}) = (-1)^j + \chi(S_0^{\pm}),$$

donc, comme précédemment,

$$\chi(S_1^{+}) = \chi(S_1^{-}). \qquad \square$$

B. *La construction principale*

LEMME 2.3. *Soit S une surface fermée, Γ_0 une courbe fermée dans S, non nécessairement connexe, et α un arc simple joignant dans S deux points de Γ_0 sans autre intersection. Il existe alors une fonction de Morse $f: S \times [0, 1] \to [0, 1]$ vérifiant les propriétés suivantes*:

(i) *f a exactement deux points critiques ordonnés d'indices respectifs* 1 *et* 2; *de plus, pour t proche de* 0 *ou* 1, $f_{|(S \times t)} = t$;

(ii) *f possède une surface essentielle qui coupe $S \times \{0\}$ suivant Γ_0 et $S \times \{1\}$ suivant la courbe Γ_1 dessinée sur la Figure 7 et obtenue comme suit*: *on ajoute une petite composante fermée Γ', d'un côté ou de l'autre de α et on fait la chirurgie de Γ_0 le long de α dans un voisinage de α évitant Γ'.*

(iii) *Si Γ_0 partage S équitablement, C est transversalement orientable, et Γ_1 partage aussi S équitablement.*

Démonstration. Le méthode est la suivante: on réalise $S \times [0, 1]$ en attachant successivement une anse d'indice 1 sur $S \times [0, \varepsilon]$, puis une anse d'indice 2 en position d'élimination; simultanément, on attache deux anses d'indice 1 à $\Gamma_0 \times [0, \varepsilon]$ de manière à obtenir la surface essentielle voulue.

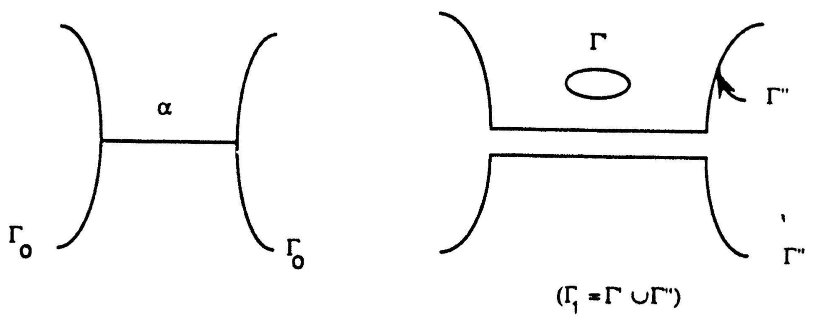

Figure 7

Soit α_0, α_1 éléments de Γ_0 les extrémités de α. Pour $i = 0, 1$, on choisit en α_i une base (v_i, w_i) de l'espace tangent à S ayant les propriétés suivantes:

(1) v_0 et v_1 sont tangents à Γ_0 et sont du même côté de α;

(2) w_0 et w_1 sont tangents à α et rentrent dans α.

On attache alors l'anse d'indice 1, $H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1\}$, sur $S \times \{\varepsilon\}$ comme suit: on envoie $(i, 0, 0)$ sur α_i, $(\partial/\partial y)(i, 0, 0)$ sur v_i et $(\partial/\partial z)(i, 0, 0)$ sur w_i. Plus précisément, les points $(i, y, 0)$ avec $-1 \leq y \leq 1$ vont dans Γ_0 et les points $(i, 0, z)$ avec $0 \leq z \leq 1$ vont dans α. On attache ainsi $K_1 = H_1 \cap \{z = 0\}$ sur $\Gamma_0 \times \{\varepsilon\}$. On désigne par C_1 la surface obtenue et par Γ son bord supérieur: $\Gamma = \partial C_1 \backslash \Gamma_0$.

Pour $i = 0, 1$, on note maintenant α'_i le point de α image de $(i, 0, 1)$ et α' le sous-arc de α joignant α'_0 et α'_1. Dans le bord latéral de H, $H \cap \{y^2 + z^2 = 1\}$, on choisit un arc α'' transverse aux cercles $\{x = \text{const.}\}$, isotope à extrémités fixes au segment $\{(x, 0, 1) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ et qui coupe en deux points l'ensemble $\{(x, \pm 1, 0) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ (voir Figure 8).

On attache alors une anse d'indice 2 le long de $\Theta = \alpha' \cup \alpha''$. Comme α'' est transverse aux cercles $\{x = \text{const.}\}$, la variété ainsi obtenue est difféomorphe à $S \times [0, 1]$ d'après le lemme d'élimination de S. Smale [Mi]. De plus, par construction, Θ coupe Γ en deux points de sorte qu'on peut attacher (de manière unique) une anse d'indice 1 à C_1. On voit alors sans peine que la surface C obtenue vérifie les conditions de l'énoncé. □

EXEMPLE 2.4. Si S est la sphère S^2 et si Γ_0 est un cercle, la courbe Γ_1 que donne le Lemme 2.2 est formée de trois cercles emboîtés (i.e. dont le complémentaire est réunion disjointe de deux disques et deux anneaux).

COROLLAIRE 2.5. *Il existe une fonction de Morse* $g : S^2 \times [0, 2] \to [0, 2]$ *vérifiant les propriétés suivantes*:

(i) *pour* t *proche de* 0 *ou* 2, $g_{|S^2 \times \{t\}} = t$;

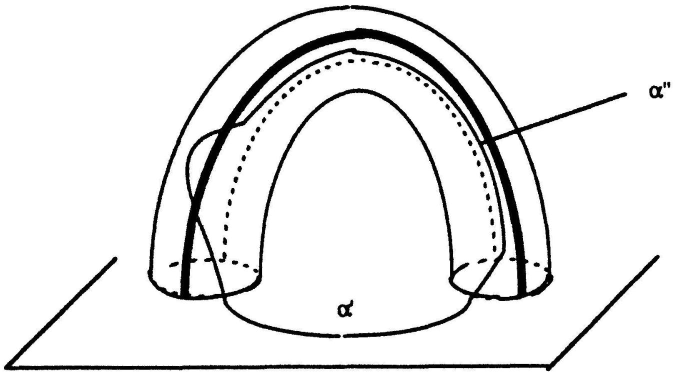

Figure 8

(ii) *g possède une surface essentielle C qui coupe $S^2 \times \{0\}$ et $S^2 \times \{2\}$ suivant un cercle, et qui rencontre $S^2 \times \{1\}$ suivant trois cercles emboîtés.*

Démonstration. Soit $f: S^2 \times [0, 1] \to [0, 1]$ "la" fonction donnée par le Lemme 2.3 en prenant pour Γ_0 un cercle. On obtient g en recollant f avec la fonction: $S^2 \times [1, 2] \to [1, 2]$, $(x, t) \mapsto (2 - f(x, 2 - t))$. □

COROLLAIRE 2.6 (Version convexe de la modification de Lutz [Lu]). *Toute variété de dimension* 3 *qui porte une structure de contact convexe porte une structure de contact convexe et vrillée.*

Remarque. Ce corollaire montre comment déduire le Corollaire III.1.5 du Théorème III.1.3.

Démonstration. Soit V la variété. S'il existe sur V une structure de contact convexe, il existe, d'après la Proposition I.4.5, une fonction de Morse propre $f: V \to [0, \infty[$ possédant une surface essentielle C. Pour une valeur régulière b de f, légèrement supérieure au minimum absolu et pour ε assez petit, l'ensemble $\{b - \varepsilon \leq f \leq b + \varepsilon\}$ est un cobordisme produit $W \cong S^2 \times [0, 1]$ que C coupe suivant un cylindre à base circulaire $\Gamma \times [0, 1]$. Le Corollaire 2.5 permet de remplacer f par une fonction de Morse propre $f': V \to [0, \infty[$ possédant une surface essentielle C' qui coupe $S = \{f' = b\} \cong S^2$ suivant trois cercles emboîtés. Le Théorème III.1.2 donne une structure de contact positive ξ' sur V qui est invariante par un pseudo-gradient X' de f' admettant C' pour surface caractéristique. La Proposition II.3.1 montre qu'alors, à une isotopie admissible près, le feuilletage caractéristique de S présente deux cycles limites, chacun d'eux bordant un disque avec exactement une singularité à l'intérieur. □

C. *Un théorème d'existence*

THÉORÈME 2.7. *Sur toute variété de dimension* 3, *il existe une fonction de Morse positive et propre qui admet une surface essentielle transversalement orientable.*

Remarque. Le Théorème 2.7, avec le Théorème III.1.2, entraîne immédiatement le Théorème III.1.3.

Démonstration. Soit V la variété, et $f: V \to [0, \infty[$ une fonction de Morse propre, ayant un seul maximum si V est fermée et aucun si V est ouverte. Soit b_0 et b_1 deux valeurs régulières de f entre lesquelles f prend une seule valeur critique a. On pose $V_i = \{f \leq b_i\}$ pour $i = 0, 1$ et $S = \{f = b_0\}$.

Si a est le minimum absolu de f, $f_{|V_1}$ possède une surface essentielle transversalement orientable. On suppose donc maintenant que $f_{|V_0}$ possède une surface essentielle transversalement orientable C_0, de bord Γ_0, et on distingue trois cas, suivant l'indice de la valeur critique a.

Indice 1. V_1 s'obtient à partir de V_0 en attachant une anse H d'indice 1. Quitte à changer l'attachement de H par isotopie, on peut attacher simultanément sur C_0 une anse d'indice 1 de manière à avoir, pour $f_{|V_1}$, une surface essentielle transversalement orientable.

Indice 2. D'après le Lemme 2.2, Γ_0 partage S équitablement. Par suite la courbe d'attachement Θ de l'anse H d'indice 2 coupe Γ_0 en un nombre pair $2r$ de points. Si $r = 1$, on peut attacher à C_0 une anse d'indice 1, $K \subset H$, ce qui donne pour $f_{|V_1}$ une surface essentielle transversalement orientable. Si $r = 0$, on bouge Θ par isotopie pour créer deux points d'intersection. Maintenant si $r > 1$, on applique le Lemme 2.3 à un sous-arc α de Θ qui joint deux points consécutifs d'intersection avec Γ_0. On élimine ainsi ces deux points en remplaçant $f_{|V_0}$ par une fonction f' qui a deux points critiques de plus d'indices respectifs 1 et 2; on a alors une nouvelle surface essentielle C_0' transversalement orientable dont le bord Γ_0' partage encore équitablement la surface $\{f' = b_0\} = \{f = b_0\}$. En répétant plusieurs fois cette opération, on se ramène au cas où $r = 1$.

Remarque. Pour les variétés compactes à bord, la démonstration est finie; pour les variétés ouvertes et non compactes, on termine par un argument classique de limite inductive.

Indice 3. Comme f a un seul maximum, la surface $S = \{f = b_0\}$ est une sphère. Si $\Gamma_0 \subset S$ est un cercle, on peut, en attachant l'anse d'indice 3, recoller un disque à C_0, ce qui donne la surface essentielle transversalement orientable cherchée. Maintenant, si Γ_0 n'est pas connexe, on procède comme suit.

D'après le Lemme 2.2, Γ_0 partage S équitablement. Par suite, il existe une composante Γ de Γ_0 qui vérifie les propriétés suivantes:

(1) Γ ne borde pas un disque de $S \backslash \Gamma_0$;

(2) dans l'un des hémisphères de S délimités par Γ, toute composante de Γ_0 borde un disque de $S \backslash \Gamma_0$; on note S' cet hémisphère et S'' l'autre.

(Pour voir que Γ existe, on observe que, si aucune composante de Γ_0 ne vérifie (1), $S \backslash \Gamma_0$ est formé d'une part d'une réunion disjointe de disques, et d'autre part d'un disque troué. Par conséquent, Γ_0 ne partage pas S équitablement. Pour obtenir (2), on choisit une composante Γ vérifiant (1) "minimalement".)

Maintenant, on prend une composante Γ' de Γ_0 dans S' et, dans S'', on choisit une composante Γ'' qu'on peut relier à Γ par un arc α^* sans recouper Γ_0. La construction inverse de celle de Lemme 2.3 permet d'éliminer Γ' tout en faisant la somme connexe de Γ et Γ'' le long de α^*. La courbe ainsi obtenue partage encore S équitablement et a deux composantes de moins. En répétant cette opération, on rend Γ_0 connexe ce qui termine la démonstration.

RÉFÉRENCES

[A] V. I. ARNOLD, *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*, Mir 1976.

[Be] D. BENNEQUIN, *Entrelacements et équations de Pfaff*, Astérisque *107–108* (1983), 87–161.

[El1] Ya. ELIASHBERG, *Filling by holomorphic discs*, Proc. Conf. in low dim. top., Durham, 1989.

[El2] Ya. ELIASHBERG, *Killing of elliptic complex points and the Legendrian isotopy*, en préparation.

[El3] Ya. ELIASHBERG, *Classification of over-twisted contact structures on 3-manifolds*, Invent. Math. *98* (1989), 623–637.

[EG] Ya. ELIASHBERG et M. GROMOV, *Convex Symplectic Manifolds*, prépublications I.H.E.S. 1990.

[G] J. W. GRAY, *Some global properties of contact structures*, Ann. of Math. *69* (1959), 421–450.

[Gr] M. GROMOV, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. *82* (1985), 307–347.

[Lu] R. LUTZ, *Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles de dimension 3*, Ann. Inst. Fourier *27*, *3* (1977), 1–15.

[Ma] J. MARTINET, *Formes de contact sur les variétés de dimension 3*, L.N.M. 209, 142–163, Springer 1971.

[McD] D. MCDUFF, *Applications of convex integration to symplectic and contact geometry*, Ann. Inst. Fourier *37*, *1* (1987), 107–133.

[Mi] J. MILNOR, *Lectures on the h-Cobordism Theorem*, Princeton Univ. Press, 1965.

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
U.M.R. 128 du CNRS
Ecole Normale Supérieure de Lyon
46, Allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07, France

Reçu le 26 avril 1991