

Zeitschrift:	Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber:	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band:	65 (1990)
Artikel:	Une structure symplectique sur R ⁶ avec une sphère lagrangienne plongée et un champ de Liouville complet.
Autor:	Muller, Marie-Paule
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-49747

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Une structure symplectique sur \mathbb{R}^6 avec une sphère lagrangienne plongée et un champ de Liouville complet

MARIE-PAULE MULLER

On construit une sphère lagrangienne plongée dans \mathbb{R}^6 , pour une structure symplectique ayant un champ de Liouville complet. Cette structure est obtenue par symplectisation, à partir d'une forme de contact sur \mathbb{R}^5 .

M. Gromov a montré que la structure symplectique habituelle sur \mathbb{R}^6 ne contient pas de sphère lagrangienne plongée. En corollaire, nous obtenons l'existence d'une structure symplectique exotique complète sur \mathbb{R}^6 , et d'une structure de contact exotique sur \mathbb{R}^5 .

Introduction

Dans ce travail, nous nous proposons de démontrer le

THEOREME A. *Il existe sur \mathbb{R}^6 une structure symplectique Ω , possédant un champ de Liouville complet, qui accepte un plongement lagrangien de la sphère S^3 .*

Les conjectures d'Arnold, datant des années soixante, ont donné aux variétés lagagiennes un rôle central en géométrie symplectique globale. Sous l'impulsion de V. Arnold et de M. Gromov, de nombreux travaux ont été consacrés à leur étude. L'une des conjectures d'Arnold, devenue un théorème de M. Gromov en 1985, est la non-existence de sous-variétés lagagiennes exactes dans \mathbb{R}^{2n} , pour la structure symplectique habituelle.

En nous limitant au contexte du problème d'existence d'immersions et de plongements lagagiens dans un espace euclidien, rappelons les principaux résultats obtenus.

En dimension $n \neq 3$, si on exclut le cas trivial $n = 1$, des arguments de nature homologique (R. Wells, [We1]) ou homotopique (S. Smale [Sm], M. Gromov [G3], T. Kawashima [Ka]), en fonction des dimensions considérées, permettent de montrer qu'il n'existe pas de plongement lagrangien de S^n dans l'espace euclidien, et

ceci quelle que soit sa structure symplectique. Ces arguments s'appuient tous sur le fait qu'une sous-variété lagrangienne est *totalement réelle*, pour une structure presque complexe sur \mathbb{R}^{2n} adaptée à la structure symplectique. Ils ne donnent aucune information sur le cas $n = 3$, et il y a une bonne raison à cela: M. Gromov montre aussi, dans [G3], l'existence d'un plongement *totalement réel* de S^3 dans \mathbb{C}^3 . P. Ahern et W. Rudin en présentent d'ailleurs un exemple très simple, graphe d'une application à valeurs complexes sur $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ [A-R]. Le théorème de Gromov–Lees ([G2], [L]) montre qu'il y a "beaucoup" d'*immersions* lagrangiennes dans \mathbb{C}^n (muni de la structure symplectique standard, qui est la partie imaginaire de la forme hermitienne habituelle): il suffit que le complexifié du fibré tangent d'une variété V (de dimension n) soit trivial pour assurer l'existence d'une immersion lagrangienne de V dans \mathbb{C}^n . En particulier, la sphère S^n admet une immersion lagrangienne dans \mathbb{C}^n . Elle n'y admet un plongement totalement réel que pour $n = 1$ ou $n = 3$. De manière générale, pour une variété (fermée) V de dimension n , l'existence d'un plongement *totalement réel* (et non pas lagrangien...) est pourtant liée naturellement à l'étude des *immersions* lagrangiennes. En effet, M. Gromov a montré que V admet un plongement totalement réel dans \mathbb{C}^n si et seulement s'il existe une immersion lagrangienne régulièrement homotope (comme immersion) à un plongement [G3]. Par ailleurs, M. Audin présente des conditions, portant sur la dimension ou sur la topologie de V , pour l'existence d'immersions lagrangiennes ou de plongements, dans les classes d'homotopie régulière d'immersions [Au].

Lorsque \mathbb{R}^6 est muni de la structure symplectique standard (celle de $\mathbb{C}^3 \dots$), M. Gromov a résolu le problème de l'existence d'un *plongement lagrangien* de S^3 et, là encore, la réponse est négative: c'est un cas particulier de l'un des théorèmes qu'il obtient par son étude des courbes pseudo-holomorphes dans les variétés symplectiques, et qui affirme qu'aucune variété fermée n'admet de plongement lagrangien exact dans \mathbb{R}^{2n} équipé de la structure symplectique standard [G4] (J. C. Sikorav présente une démonstration détaillée de ce théorème dans [Si]).

Malgré tous ces résultats de non-existence et dans une communauté symplectique aux avis très partagés sur la question, Gromov suspectait l'existence possible d'un plongement lagrangien de S^3 pour une autre structure symplectique sur \mathbb{R}^6 ([G5], p. 344). Le Théorème A est une conséquence du

THEOREME B. *Il existe une forme de contact α sur \mathbb{R}^5 et une application $\varphi : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$, telles que la forme induite $\varphi^*\alpha$ soit complètement intégrable et ait un facteur intégrant g qui permette de relever φ en un plongement (lagrangien) $\Phi = (\varphi, g)$.*

Le théorème de M. Gromov [G4] nous assure que la structure symplectique Ω du Théorème A est exotique, plus précisément qu'elle ne se plonge pas dans la structure symplectique standard. Sur \mathbb{R}^3 , D. Bennequin a abouti à l'existence de

structures de contact exotiques par une analyse fine des propriétés géométriques des courbes intégrales que présente la structure de contact standard, avec des techniques de la théorie des noeuds [B]. De manière indépendante, Y. Eliashberg a démontré également ce résultat [E]. En dimensions supérieures, M. Gromov annonce dans [G4] des structures de contact exotiques sur \mathbb{R}^{2n-1} , en se référant à [G6], et présente aussi une construction de structures symplectiques exotiques sur \mathbb{R}^{2n} ; récemment, L. Bates et G. Peschke en ont donné un exemple explicite très simple sur \mathbb{R}^4 [B-P]. Remarquant que la structure symplectique standard sur \mathbb{R}^{2n} a un “bon” comportement à l’infini (elle a un champ de Liouville complet, et est associée à une métrique complète), A. Weinstein pose dans [Wei] la question de l’existence, sur \mathbb{R}^{2n} , de structures symplectiques exotiques complètes et/ou convexes à l’infini, au sens de Gromov [G4]. Citons par exemple D. Mac Duff, qui utilise (entre autres choses) l’existence d’un champ de Liouville complet, pour montrer que la forme de Kähler associée à une métrique kählérienne complète de courbure négative sur \mathbb{R}^{2n} définit une structure symplectique isomorphe à la structure standard [MD].

Le mode de construction, par le Théorème B, de la structure symplectique Ω du Théorème A lui garantit l’existence d’un champ de Liouville complet, et le théorème de M. Gromov permet de compléter la description de la structure de contact définie par α sur \mathbb{R}^5 :

THEOREME C. *La structure symplectique Ω ne se plonge pas dans la structure symplectique standard. La structure de contact sur \mathbb{R}^5 dont elle est issue par symplectisation ne se plonge donc pas non plus dans la structure de contact standard.*

Remerciements

Je dois à Daniel Bennequin de m’avoir signalé la conjecture et la voie d’approche ‘par symplectisation’ que M. Gromov suggérait d’explorer. Son soutien amical et les longues discussions que nous avons eues ont été décisives pour l’élaboration de ce travail.

François Laudenbach a suivi avec attention la progression de la construction. Je le remercie chaleureusement pour sa lecture détaillée du manuscrit et pour ses commentaires, ainsi que pour la présentation qu’il en a faite au colloque de Géométrie Symplectique de Berkeley.

Michèle Audin, Emmanuel Giroux, Jean Martinet, Claude Roger ont eu la patience de m’écouter et de me lire, ainsi que Pierre Molino, qui m’a donné l’occasion d’exposer ce travail au séminaire Sud Rhodanien de Géométrie Difféentielle. Les remarques de Thomas Delzant m’ont permis d’améliorer cette rédaction.

Ce travail a fourni la matière de la thèse de Doctorat d'Etat que j'ai soutenue à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg, en mars 1989. Je tiens à remercier encore Michèle Audin, Mikhael Gromov, François Laudenbach, Jean Martinet et Pierre Molino d'avoir accepté de faire partie du jury.

Plan de la construction

Au §1, nous montrons comment le Théorème A se déduit, par symplectisation, du Théorème B.

On remarque que l'application φ du Théorème B n'est certainement pas une immersion. Nous la construirons de manière à être la plus simple possible, c'est-à-dire générique (§2.1), avec deux singularités.

Au §3, nous introduisons la notion de *courbe d'holonomie*, qui sert à interpréter la condition d'injectivité de Φ (et aussi à repérer ses éventuels points doubles). En particulier, cette interprétation permet de montrer très simplement que si Φ est injective, alors les *courbes de points doubles* de φ ne peuvent pas être transverses au champ de contact.

Le §4 intègre la géométrie de contact aux singularités génériques des applications $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$. Nous obtenons ainsi un modèle "legendrien" du parapluie de Whitney, dont le germe servira à construire la forme de contact α au voisinage des deux points singuliers de φ , avec l'assurance que Φ sera bien un plongement au voisinage de ces deux points.

Au §5, nous décrivons une famille de prolongements de cette forme de contact à un voisinage de la courbe des points doubles de φ .

Le feuilletage partiel qu'induit à la source (sur la sphère) l'équation $\alpha = 0$ est prolongé au §6, en tenant compte de l'analyse faite au §3. Au but (au-dessus de l'image de la sphère), le prolongement du champ d'hyperplans défini par cette équation devient alors une formalité.

Ceci achève pratiquement la partie "différentielle" de la construction: à partir du §7, les ingrédients sont essentiellement de nature homotopique.

Au voisinage de la courbe des points doubles, le champ d'hyperplans est de contact; il est alors porteur de structures complexes, adaptées à la structure symplectique $d\alpha$. Notre objectif est de prolonger une telle structure complexe sur le champ d'hyperplans au-dessus de l'image $\varphi(S^3)$ (le feuilletage induit doit être totalement réel) et, de plus, d'obtenir ainsi un fibré complexe trivial.

Tout d'abord, le feuilletage induit par la structure de contact permet de définir un *indice sur la courbe des points doubles*, analogue à l'indice de Maslov classique ([M], [Ar1]).

Le calcul de cet indice est fait au §8, pour les prolongements du §5. Une expression combinatoire de sa valeur est donnée pour la dimension trois.

Au §9, nous dégageons une condition de *trivialité* pour le fibré complexe, en supposant prolongée une structure complexe adaptée. Cette condition porte sur l'indice calculé au §8.

Le *prolongement* de la structure complexe est analysé au §10. Nous en tirons une deuxième condition, qui, associée à la précédente, permet d'obtenir un fibré complexe prolongé et trivial, au-dessus de $\varphi(S^3)$, à partir de l'un des modèles du §5.

Rappelons que le feuilletage induit sur $\varphi(S^3)$ est totalement réel. Il est alors possible de construire, à partir de cette structure complexe, un prolongement de la forme de contact à un voisinage de $\varphi(S^3)$. Le *h*-principe de M. Gromov ([G1]) voir aussi [Ha]), permet de prolonger enfin cette forme de contact à \mathbb{R}^5 , à partir d'un prolongement du fibré complexe.

Les grandes lignes de la construction sont présentées de manière plus détaillée dans [Mu].

§1. Des lagrangiennes dans un symplectisé

Considérons une forme de contact α sur \mathbb{R}^{2n-1} . Si p désigne de projection de $\mathbb{R}^{2n-1} \times \mathbb{R}$ sur le premier facteur, et si t est une fonction coordonnée sur le facteur \mathbb{R} , la forme $\Omega = d(t \cdot p^*\alpha)$ définit une structure symplectique sur $\mathbb{R}^{2n-1} \times (\mathbb{R}, -\{0\})$. Ceci est la description, appliquée au cas particulier qui nous occupe, de l'opération de symplectisation [Ar2].

Remarquons que le champ de vecteurs $\xi = t(\partial/\partial t)$ est un *champ de Liouville* pour la structure symplectique $\Omega : d(i(\xi)\Omega) = \Omega$. Comme Ω est fermée, $d(i(\xi)\Omega) = \theta(\xi)\Omega$ (dérivée de Lie de Ω dans la direction ξ); le flot du champ de Liouville est conforme pour la structure symplectique.

PROPOSITION. Soient α une forme de contact sur \mathbb{R}^{2n-1} , et $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ une application, définie sur une variété fermée M de dimension n , telle que l'équation $\varphi^*\alpha = 0$ défuisse un feuilletage (avec singularités) ayant une intégrale première, c'est-à-dire telle qu'il existe deux fonctions $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ (l'intégrale première) et $g : M \rightarrow]0, +\infty[$ (le facteur intégrant) vérifiant:

$$g \cdot \varphi^*\alpha = df.$$

On lui associe l'application

$$\Phi = (\varphi, g) : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1} \times]0, +\infty[.$$

Soit $\Omega = d(t \cdot p^\alpha)$ la forme symplectique sur $\mathbb{R}^{2n-1} \times]0, +\infty[$, associée à α comme ci-dessus. Alors $\Phi^*\Omega = 0$.*

Démonstration. $\Phi^*(t\alpha) = g \cdot \varphi^*\alpha = df$. Donc $\Phi^*\Omega = 0$. \diamond

EXEMPLE. Toute immersion lagrangienne *exacte*, à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n-1} \times]0, +\infty[$ muni d'une structure symplectisée d'une forme de contact sur \mathbb{R}^{2n-1} , est de la forme décrite par la proposition.

REMARQUE 1. Si l'application Φ donnée par cette construction est un plongement, la structure symplectique Ω est nécessairement exotique, et donc la forme de contact α est exotique elle aussi. En effet, l'un des résultats de M. Gromov [G4] assure la non-existence de sous-variétés lagrangiennes fermées exactes, plongées dans $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{R}_u^n \times \mathbb{R}_x^n$ muni de la structure symplectique

$$\Omega_0 = \sum_{i=1}^n du_i \wedge dx_i.$$

REMARQUE 2. La question de l'injectivité et du rang de Φ sera discutée en §2 et §3. Mais nous pouvons d'ores et déjà affirmer que sous les hypothèses de la proposition, φ ne peut pas être une immersion. En effet, les points critiques de f sont nécessairement des points singuliers de φ , car

$$\varphi^*d\alpha = d\frac{1}{g} \wedge df$$

ce qui signifie qu'en tout point p , l'image par l'application tangente $T\varphi(p)$ du noyau de $df(p)$ est un sous-espace isotrope, pour la forme symplectique $d\alpha$ définie sur l'hyperplan de contact $[\alpha = 0]$ au point $\varphi(p)$. Sa dimension doit donc être inférieure ou égale à $n - 1$.

Nous traduisons maintenant, par des conditions portant sur (φ, α, f) , le fait que Φ doit être un plongement.

§2. Parapluie de Whitney. Un exemple d'application $\varphi_0 : S^n \rightarrow (\mathbb{R}^{2n-1}, \alpha_0)$

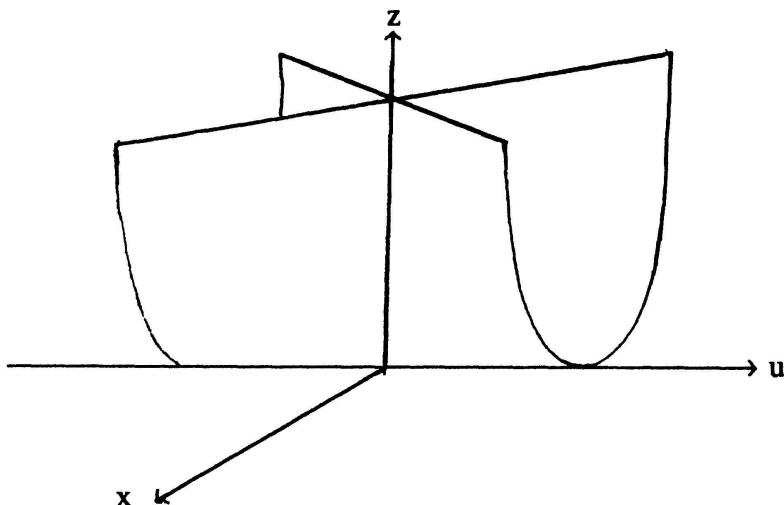
Après avoir rappelé des résultats de H. Whitney [Wh], nous présentons en 2.2 un exemple du type décrit en §1 (mais l'application Φ qui lui est associée ne pourra pas être injective!) en superposant la forme de contact standard de \mathbb{R}^{2n-1} à la géométrie d'un exemple d'application générique, dans le cas de la sphère.

2.1. Le *parapluie de Whitney* est le germe en $0 \in \mathbb{R}^n$ de l'application

$$W_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$$

$$(u, w) \mapsto (u, uw, w^2)$$

où $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}_u^{n-1} \times \mathbb{R}_w$ et $\mathbb{R}^{2n-1} \cong \mathbb{R}_u^{n-1} \times \mathbb{R}_x^{n-1} \times \mathbb{R}_z$.



Soit M une variété fermée de dimension n . Génériquement, une application $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ a des points singuliers isolés, où le rang est $n-1$ et au voisinage desquels φ est modelée sur le “parapluie de Whitney”, ainsi que des courbes de points doubles, le long desquelles l'intersection se fait transversalement. Il n'y a pas de points triples ni $n \geq 3$. Le choix d'une orientation de \mathbb{R}^{2n-1} (et, si n est pair, d'une orientation de l'axe des w dans \mathbb{R}^n) permet de distinguer *deux* parapluies de Whitney orientés. Le deuxième parapluie de Whitney orienté peut s'écrire $\sigma \circ W_0$, où σ désigne l'involution de changement de signe sur la dernière coordonnée. Pour une application générique $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$, les points singuliers de chacun des deux types sont en nombre égal si la dimension n est impaire.

NOTATIONS. Dorénavant, S^n désignera la sphère dont l'équation est $\|u\|^2 + w^2 + t^2 = 1$ dans $\mathbb{R}_u^{n-1} \times \mathbb{R}_w \times \mathbb{R}_t$, et Γ en sera le grand cercle $[u = 0]$. Sur

S^n , on notera respectivement S (Sud) et N (Nord) les points $(0, 0, -1)$ et $(0, 0, +1)$.

L'espace euclidien \mathbb{R}^{2n-1} est identifié à $\mathbb{R}_u^{n-1} \times \mathbb{R}_x^{n-1} \times \mathbb{R}_z$.

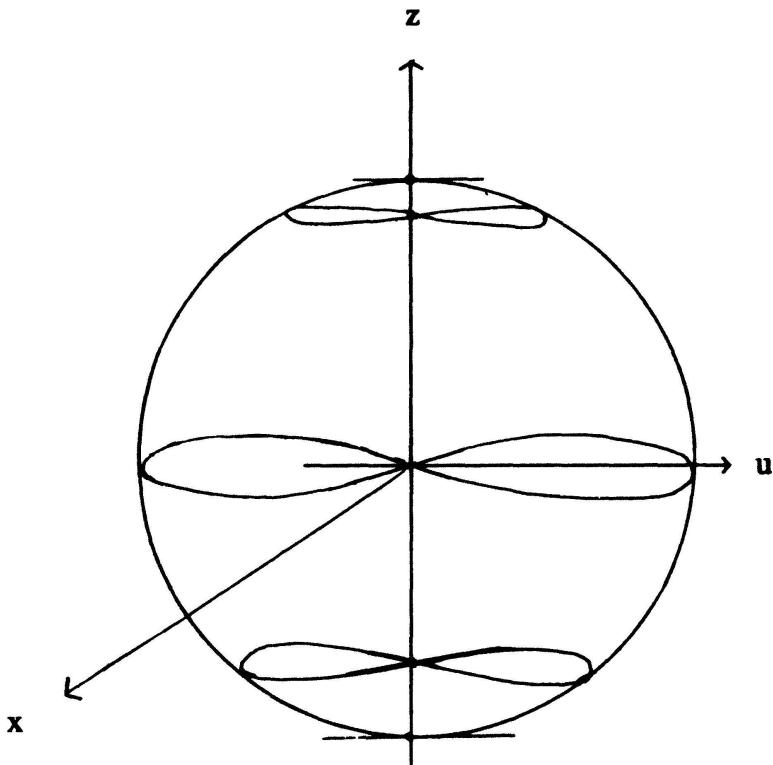
EXAMPLE. Nous nous bornerons ultérieurement à considérer des applications φ définies sur S^n , avec deux singularités et une seule courbe de points doubles. Voici un exemple simple d'une telle application:

$$\varphi_0 : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$$

$$(u, w, t) \mapsto (u, wu, t).$$

Les points singuliers de φ_0 sont S et N , et la courbe des points doubles Δ est l'image du cercle Γ privé des deux points S et N .

L'image $\Sigma = \varphi_0(S^n)$ peut se représenter par le dessin suivant, sur lequel on a tracé les images de quelques sphères [$t = C^{\text{ste}}$] de S^n .

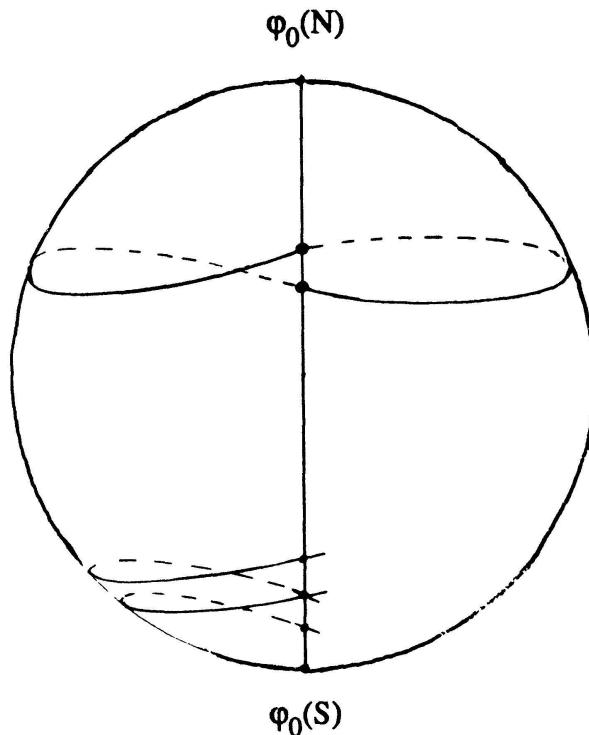


2.2. Voyons ce que devient la *forme de contact standard* $\alpha_0 = dz - x \cdot du$, sur l'image Σ :

$$\varphi_0^* \alpha_0 = dt - w(u \cdot du) = dt + w(w \cdot dw + t \cdot dt)$$

Comme cette 1-forme vérifie la condition de Frobenius $(\varphi_0^*\alpha_0) \wedge d(\varphi_0^*\alpha_0) = 0$, l'équation $\varphi_0^*\alpha_0 = 0$ définit un feuilletage (avec singularités) de S^n . Il est facile de voir que les seules singularités de ce feuilletage sont les points S et N , et toutes les feuilles de $S^n - \{S, N\}$ sont (difféomorphes à) des sphères.

La courbe des points doubles est transverse au champ des hyperplans de contact $[\alpha_0 = 0]$, et φ_0 plonge chaque feuille dans \mathbb{R}^{2n-1} .



Nous allons voir maintenant qu'un tel exemple *ne peut pas* donner un plongement lagrangien Φ .

§3. Etude de l'injectivité de Φ . Holonomie

Revenons à la situation décrite en §1, pour une application φ générique comme en §2.1.

3.1. Injectivité de Φ ([Mu]).

L'injectivité de l'application Φ est évidemment assurée si $g(p) \neq g(q)$ lorsque $\varphi(p) = \varphi(q)$. Cette condition peut se traduire de la manière suivante, à priori plus compliquée, mais qui présente l'avantage de ne porter que sur l'intégrale première f , ce qui permettra d'oublier la fonction g dès qu'on se sera assuré du rang de Φ aux points singuliers de φ .

Soit Δ une courbe de points doubles aboutissant aux images de deux points-parapluie. Considérons des paramétrages $\gamma_1, \gamma_2 :]0, 1[\rightarrow M$ des deux composantes connexes de $\varphi^{-1}(\Delta)$ vérifiant la condition: $\varphi \circ \gamma_1 = \varphi \circ \gamma_2$.

DEFINITION. La courbe $H = (f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2)$, tracée dans le plan, est appelée *courbe d'holonomie* associée à (Δ, f) . Pour une courbe fermée de points doubles, la définition est analogue (les γ_i et H sont alors des lacets).

PROPOSITION. Si les singularités de la fonction $f \circ \gamma_1$ sont isolées pour toutes les courbes de points doubles, l'injectivité de Φ se lit sur la pente p de la tangente aux courbes d'holonomie qui leur sont associées: la fonction p doit être différente de 1 en tout point (singularités comprises).

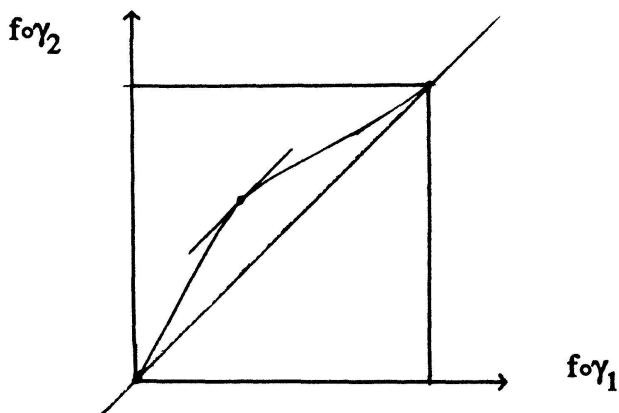
Démonstration. Les paramétrages γ_1, γ_2 vérifient la condition $\varphi \circ \gamma_1 = \varphi \circ \gamma_2$, et $\varphi^* \alpha = (1/g) df$. On en déduit que

$$p = \frac{(f \circ \gamma_2)'}{(f \circ \gamma_1)'} = \frac{g \circ \gamma_2}{g \circ \gamma_1} \quad \diamond$$

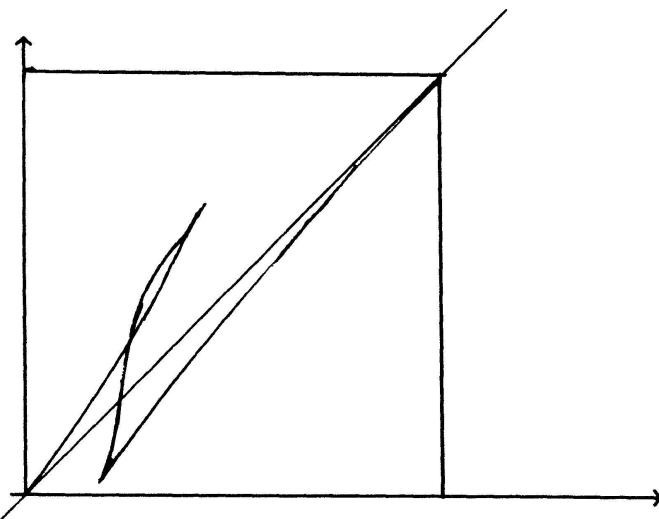
L'image de H est en fait la réunion de graphes de difféomorphismes définis sur des intervalles (ce sont ces fonctions, ou plutôt les classes de conjugaison de leurs germes aux points $f \circ \gamma_1(s)$ tels que $\gamma_1(s)$ et $\gamma_2(s)$ soient sur une même feuille, qui correspondent à la notion habituelle d'holonomie pour un feuilletage).

COROLLAIRE. Si Φ est injective, alors φ n'a pas de courbe de points doubles transverse (en tout point) au champ de contact $[\alpha = 0]$.

Démonstration. L'existence de l'intégrale première f interdit les courbes fermées de points doubles transverses au champ de contact. Pour celles qui aboutissent aux images de deux points-parapluie, appliquer le théorème des accroissements finis!



Remarquons que pour une courbe ayant des points stationnaires, le théorème des accroissements finis ne s'applique pas . . . comme l'illustre le dessin suivant:



3.2. La nature des singularités présentées par les courbes d'holonomie peut être précisée, du fait que α est une forme de contact:

PROPOSITION [Mu]. *Les points stationnaires des courbes d'holonomie sont des points de première espèce (c'est-à-dire que la pente p est à dérivée non nulle aux valeurs correspondantes du paramètre).*

3.3. Cas particulier

L'application φ que nous construirons sur S^n (pour $n = 3 \dots$) aura deux singularités, les points S et N , et une (seule) courbe de points doubles $\bar{\Delta}$, image du cercle Γ privé des deux points S et N . D'après §1. Remarque 2, S et N sont alors les seuls points critiques de l'intégrale première f (qui sera en fait une fonction de Morse), et le feuilletage défini par l'équation $df = 0$ sera un feuilletage en sphères sur $S^n - \{S, N\}$. La forme de contact α est construite d'abord au voisinage des points $\varphi(S)$ et $\varphi(N)$, ensuite au voisinage de $\bar{\Delta}$.

§4. Parapluies de Whitney (orientés) legendriens. Rang de Φ

4.1. L'espace euclidien \mathbb{R}^{2n-1} est pourvu des coordonnées

$$(u, x, z) = (u_1, \dots, u_{n-1}, x_1, \dots, x_{n-1}, z),$$

et est orienté par cet ordre. Il est muni de la *forme de contact standard*:

$$\alpha_0 = dz - x \cdot du = dz - \sum x_i du_i.$$

PROPOSITION. *Le germe en $0 \in \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}_u^{n-1} \times \mathbb{R}_w$ de l'application $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$*

$$(u, w) \mapsto \begin{cases} u \\ x = wu \\ z = \|u\|^2 + w^2 - \frac{w^3}{3} \end{cases}$$

- i) présente en 0 une singularité du type “parapluie de Whitney”
- ii) transforme les sphères $[\|u\|^2 + w^2 = C^{\text{ste}}]$ en legendriennes pour la structure de contact $\alpha_0 = 0$.

Démonstration. Les propriétés du 2-jet de W en 0 sont immédiates à vérifier, et:

$$W^*\alpha_0 = (2 - w)(u \cdot du + w \cdot dw).$$

◇

Il suffit de changer de signe de la fonction $z(u, w)$ dans l'expression de W pour obtenir le deuxième parapluie de Whitney orienté, que l'on notera $\sigma \circ W$. Les sphères concentriques de \mathbb{R}^n centrées en 0 sont alors transformées en legendriennes pour la structure de contact associée à la forme $\bar{\alpha}_0 = dz + x \cdot du$.

REMARQUE. En gardant l'application W inchangée, on peut noter que la structure de contact $\bar{\alpha}_0 = 0$ induit aussi un feuilletage au voisinage de 0 (singulier en 0, avec des feuilles difféomorphes à des sphères). Comme on le voit sur la forme induite $W^*\bar{\alpha}_0$, cette structure a l'inconvénient de ne pas permettre le calcul d'une intégrale première, et donc du facteur intégrant g qu'il est nécessaire de contrôler pour s'assurer que Φ sera de rang maximum aux points singuliers de φ .

4.2. L'application $\varphi : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$

Il existe une application globale $\varphi : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ dont l'expression locale au voisinage de S (resp. N) soit, à une translation verticale près, égale à W (resp. $\sigma \circ W$). Plus précisément, soit π_S (resp. π_N) la restriction à un voisinage de S (resp.

N) de la projection $S^n \rightarrow \mathbb{R}_{u,w}^n$. Notons

$$W_S = (0, 0, -2) + W \circ \pi_S \quad (\text{germe en } S),$$

$$W_N = (0, 0, 2) + \sigma \circ W \circ \pi_N \quad (\text{germe en } N).$$

En suivant la démonstration de H. Whitney [Wh], on voit qu'il existe des difféomorphismes globaux de \mathbb{R}^{2n-1} et de S^n qui, lorsqu'on les compose avec W_S et W_N , donnent les germes en S et N de $\varphi_1 : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ définie par $\varphi_1(u, w, t) = (u, wu, 2t)$, ce qui permet de prolonger W_S et W_N (restreintes à des voisinages convenables de S et N) en une application φ définie sur toute la sphère.

On peut aussi prolonger W_S et W_N en construisant explicitement une application φ , par exemple de la manière suivante. Partons de W_S ; à l'aide d'une partition de l'unité convenable, on prolonge d'abord W_S (restreinte à un voisinage de S (assez petit) $[t < t_1]$ (avec $-1 < t_1 < 0$)) à un voisinage plus grand $[t < t_2]$ ($t_1 < t_2 < 0$), par une application dont l'expression contient un terme de la forme $-\lambda(t) \cdot w^3/3$, où λ est une fonction identique à 1 (resp. 0) pour t voisin de t_1 (resp. t_2); une deuxième partition de l'unité permet de prolonger encore l'application ainsi obtenue en ayant, pour $t > t_3$ ($t_2 < t_3 < 0$), l'expression de φ_1 . On complète la construction par symétrie, en exigeant que $\varphi \circ \sigma = \sigma \circ \varphi$, où désigne l'involution de changement de signe sur la dernière coordonnée, de $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ou de \mathbb{R}^{2n-1} .

Ces opérations de prolongement peuvent se faire en n'affectant, par les partitions de l'unité, que la dernière fonction coordonnée $z(u, w, t)$; la courbe Δ des points doubles de φ est toujours l'image du cercle $[u = 0]$, privé des points S et N .

NOTATIONS. On convient de noter Γ_1 (resp. Γ_2) le demi-cercle $[u = 0; w < 0]$ (resp. $[u = 0; w > 0]$). Le germe de sous-variété (le long de Δ) que l'on obtient en prenant l'image par φ des voisinages de Γ_j ($j = 1, 2$) est désigné par Σ_j .

4.3. Rang de Φ

Aux points singuliers de φ , le rang de $\Phi = (\varphi, g)$ est égal à n si dg n'est pas nulle sur le noyau de l'application tangente $T\varphi$. Remarquons que ce rang dépend de la structure de contact $\alpha = 0$, et non pas de la forme α .

Le rang en 0 de l'application $(W, g) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ définie par $W^* \alpha_0 = (1/g)df$, pour l'intégrale première $f(u, w) = \|u\|^2 + w^2$, est égal à n . En effet, le noyau de $TW(0)$ est engendré par $\partial/\partial w$, et $g(u, w) = 2/(2-w)$. Il est facile de vérifier que ce rang ne dépend pas du choix de l'intégrale première.

Avec la construction faite en 4.2, Φ sera donc une immersion.

§5. Prolongement de la structure de contact à un voisinage de la courbe des points doubles

L'application φ construite en §4 est définie, au voisinage du point S , par l'expression:

$$\varphi(u, w, t) = \left(u, wu, -2 + \|u\|^2 + w^2 - \frac{w^3}{3} \right).$$

Pour $\zeta > 0$ proche de zéro, la résolution de l'équation en w :

$$\zeta = w^2 - \frac{w^3}{3}$$

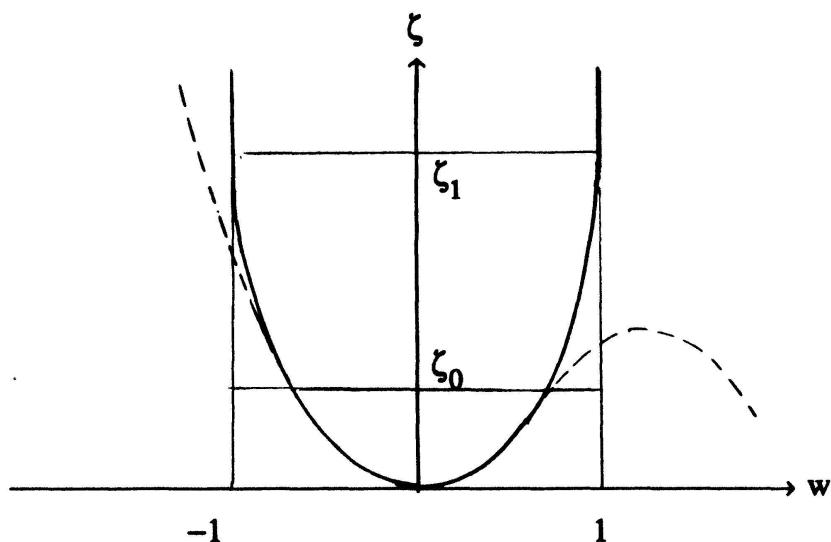
donne deux fonctions $w_j(\zeta)$ ($j = 1, 2$; $w_1 < 0 < w_2$), définies pour $\zeta \in]0, \zeta_0[$, qui permettent de décrire la nappe $\Sigma_j \subset \mathbb{R}^{2n-1}$ par les $n-1$ équations

$$x = w_j(z + 2 - \|u\|^2) \cdot u \quad (\text{E})$$

5.1. Premier prolongement

Les fonctions $w_j(\zeta)$ sont prolongées de manière à rejoindre des constantes, avec la condition $w_1 < 0 < w_2$; on peut par exemple astreindre w_j à vérifier, pour ζ voisin de ζ_1 ($\zeta_0 < \zeta_1 < 2$):

$$w_1(\zeta) = -1 \quad w_2(\zeta) = +1.$$



Ceci permet de prolonger les nappes Σ_j : on définit $\tilde{\Sigma}_j$ par les équations (E) avec les fonctions w_j prolongées. Notons que $\tilde{\Sigma}_1$ et $\tilde{\Sigma}_2$ restent transverses, et que l'intersection $\tilde{\Sigma}_1 \cup \tilde{\Sigma}_2$ est un segment vertical sur l'axe des z . La structure de contact $\alpha_0 = 0$ induit un feuilletage sur $\tilde{\Sigma}_j$, car w_j est composée avec une fonction de $(\|u\|^2, z)$.

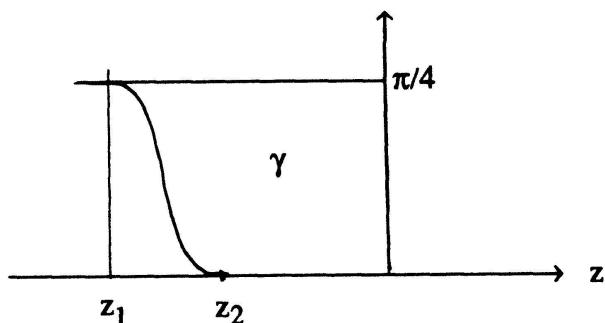
5.2. Deuxième prolongement

On fait “pivoter” les deux nappes autour de l’axe vertical, au-dessus d’un petit segment, afin de rejoindre respectivement $[x = 0]$ et $[u = 0]$: plus précisément, on prolonge Σ_1 et Σ_2 de manière à ce qu’elles vérifient respectivement les systèmes d’équations:

$$\tilde{\Sigma}_1 : \cos \gamma(z) \cdot x + \sin \gamma(z) \cdot u = 0$$

$$\tilde{\Sigma}_2 : -\sin \gamma(z) \cdot x + \cos \gamma(z) \cdot u = 0$$

où γ est une fonction ayant l’allure suivante:



avec: $\gamma(z) = \pi/4$ au voisinage de $z_1 = \zeta_1 - 2$
 $= 0$ au voisinage de z_2 ($z_1 < z_2 < 0$).

La structure de contact $\alpha_0 = 0$ induit toujours un feuilletage sur $\tilde{\Sigma}_j$.

Pour $z \geq z_2$, nous avons maintenant

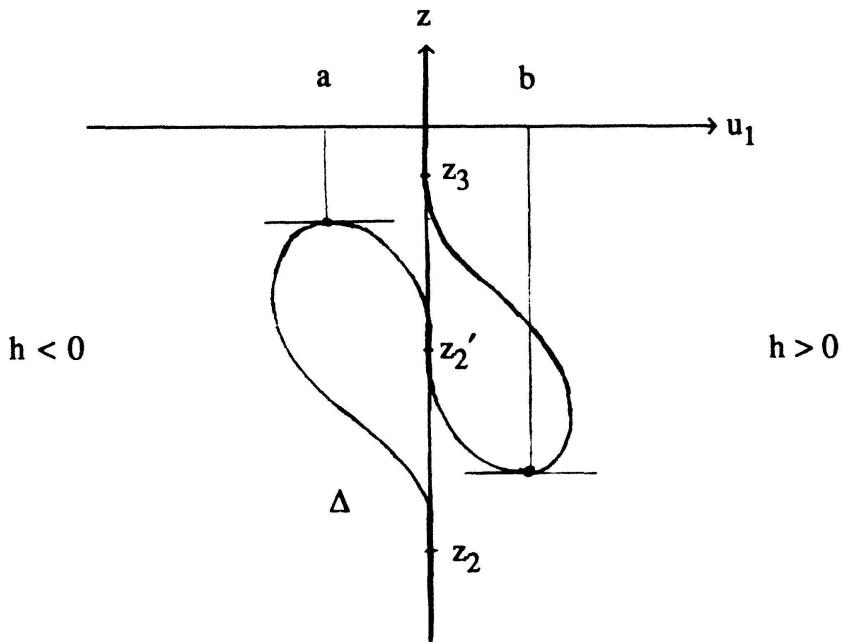
$$\tilde{\Sigma}_1 : x = 0 \quad \tilde{\Sigma}_2 : u = 0$$

avec la forme de contact $\alpha_0 = dz - x \cdot du$.

5.3. Troisième prolongement (Pour n impair)

Les équations de la nappe $\tilde{\Sigma}_1$ restent inchangées. La nappe $\tilde{\Sigma}_2$ est prolongée en gardant ses équations: $u_2 = \dots = u_{n-1} = 0$, et en modifiant sa première équation par le choix, dans le 2-plan $[x = 0, u_2 = \dots = u_{n-1} = 0]$, d'une courbe $\Delta = \tilde{\Sigma}_1 \cup \tilde{\Sigma}_2$ ayant un nombre pair de points de contact avec le champ horizontal $[dz = 0]$, et d'une "inclinaison" de la nappe, de manière à ce qu'elle reste transverse à ce champ horizontal, et donc à la structure de contact: en effet, au voisinage de chacune des "boucles" formées par la courbe Δ , la forme de contact est prolongée soit par α_0 , soit par $\bar{\alpha}_0$. Le prolongement par $\bar{\alpha}_0$ se fera après avoir effectué un demi-tour dans chaque 2-plan de coordonnées (x_i, x_{i+1}) (pour i impair) au-dessus de petits segments verticaux encadrant la boucle concernée, afin de passer de α_0 à $\bar{\alpha}_0$, et de revenir ensuite à α_0 . Précisons les détails de cette opération.

Soit $h : \mathbb{R}_{u_1, z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de rang 1, définie pour $z_2 \leq z \leq z_3$ ($z_2 < z_3 < 0$), telle que la courbe Δ d'équation $h(u_1, z) = 0$ ait l'allure représentée sur la figure:



avec les propriétés suivantes:

- i) la courbe Δ est transverse au feuilletage horizontal, sauf en deux points, où le contact est d'ordre un. En ces deux points de contact, C_1 et C_2 , les abscisses a et b sont non nulles
- ii) la fonction h est telle que $h(u_1, z) = u_1$ lorsque z voisin de z_2 ou de z_3 , et $h(u_1, z) = -u_1$ sur un voisinage d'un point $(0, z'_2)$ situé, sur Δ , entre les deux points de contact C_1 et C_2 .

On considère dorénavant Δ dans $\mathbb{R}_{u,x,z}^{2n-1}$. En juxtaposant plusieurs exemplaires de cette portion de courbe, nous obtenons une courbe Δ qui a un nombre pair arbitraire de points de contact C_1, \dots, C_{2m} avec le feuilletage horizontal $dz = 0$, pour $z_2 \leq z \leq z_3$. La numérotation des C_k est faite dans l'ordre du parcours de Δ , de $\varphi(S)$ vers $\varphi(N)$.

Pour fixer les idées, on convient de choisir h de manière à ce qu'en tout point de contact C_k , on ait $(\partial h / \partial z)(C_k) < 0$.

Chaque point de contact C_k est situé sur une boucle de Δ , et celle-ci est encadrée par deux segments verticaux I_{k-1} et I_k , au voisinage desquels $h(u_1, z) = \pm u_1$. Choisissons une fonction “inclinaison” $k(u_1, x_1, z)$, strictement positive en chaque point de contact (il sera expliqué en Remarque 1 pourquoi cette condition de positivité ...), définie sur un voisinage de Δ , et décrivons la deuxième nappe (pour $z_2 \leq z \leq z_3$) par les équations:

$$h(u_1, z - k(u_1, x_1, z) \cdot x_1) = 0,$$

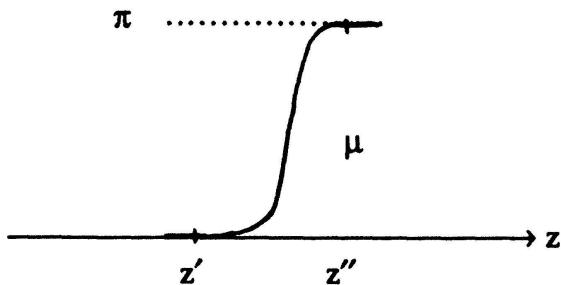
$$u_2 = \dots = u_{n-1} = 0.$$

La structure de contact $\alpha_0 = 0$ induit encore un feuilletage sur elle. Il est régulier du fait que $k \neq 0$ aux points de contact. La structure de contact $\bar{\alpha}_0 = 0$ induit, elle aussi, un feuilletage. Au voisinage de chaque segment vertical de Δ , la nappe $\tilde{\Sigma}_2$ se définit par les équations: $u = 0$, et ces deux structures de contact induisent donc le même feuilletage sur cette nappe (les feuilles sont les niveaux $z = C^{ste}$).

Il est possible de prolonger la forme de contact jusqu'au niveau $[z = z_3]$ en choisissant arbitrairement $\alpha = \alpha_0$, ou $\alpha = \bar{\alpha}_0$, au voisinage de chacune des boucles de Δ . Le raccord est effectué en faisant subir un demi-tour à la structure symplectique définie par $d\alpha$ sur $[\alpha = 0]$: explicitons la forme de contact au voisinage l'un segment vertical I_k , sur lequel $z' \leq z \leq z''$, dans le cas où $\alpha = \alpha_0$ (resp. $\bar{\alpha}_0$) pour z voisin de z' (resp. z''):

$$\begin{aligned} \alpha = dz - \sum_{i=1}^{(n-1)/2} & (\cos \mu(z) \cdot x_{2i-1} + \sin \mu(z) \cdot x_{2i}) du_{2i-1} \\ & + (-\sin \mu(z) \cdot x_{2i-1} + \cos \mu(z) \cdot x_{2i}) du_{2i} \end{aligned}$$

où μ est une fonction nulle au voisinage de z' , et égale à un multiple d'ordre impair de π au voisinage de z'' :



Si on a fait le choix $\alpha = \bar{\alpha}_0$ (resp. α_0) pour z voisin de z' (resp. z''), il est facile d'imaginer une fonction μ convenable.

Pour fixer les idées, on termine ce troisième prolongement avec $\alpha = \alpha_0$ pour z voisin de z_3 , en faisant encore un “demi-tour” au-dessus du segment vertical I_{2m} , si on a fait le choix $\alpha = \bar{\alpha}_0$ sur la boucle contenant le dernier point de contact C_{2m} .

REMARQUE 1. Il est possible aussi de faire le prolongement ci-dessus avec une fonction k dont on exige seulement qu'elle soit non nulle aux points de contact. Dans ce cas, considérons un difféomorphisme D d'un voisinage de Δ tel que $D(u, x, z) = (u, -x, z)$ au voisinage de chaque boucle contenant un point de contact en lequel $k < 0$, et égal à l'identité au voisinage des autres boucles ainsi que pour z proche de z_2 ou z_3 . Un tel difféomorphisme existe: il suffit de faire un (nombre impair de) demi-tour(s) dans chaque 2-plan de coordonnées (x_i, x_{i+1}) (pour i impair), au-dessus de segments verticaux encadrant les points de contact où k est négative. Ce difféomorphisme D transforme la deuxième nappe en une nappe dont l'inclinaison est positive en tous les points de contact, et α_0 (resp. $\bar{\alpha}_0$) en $\bar{\alpha}_0$ (resp. α_0) au voisinage des boucles où l'inclinaison a changé de signe.

REMARQUE 2. Par une homotopie sur la fonction k à travers des fonctions non nulles aux points de contact (de manière à ce que la structure de contact induise un *feuilletage régulier* sur les nappes à chaque instant), nous arrivons à une inclinaison constante égale à +1. Cette homotopie peut s'interpréter, via une isotopie de \mathbb{R}^{2n-1} ramenant les deux nappes à une position fixe et ne modifiant que la région $z_2 < z < z_3$, comme une homotopie sur la forme de contact, les deux nappes restant fixées, à travers des formes de contact induisant un feuilletage régulier sur les nappes.

REMARQUE 3. Deux points de contact consécutifs en lesquels on a fait le *même* choix pour la forme de contact peuvent être supprimés par une homotopie. Plus précisément, supposons par exemple que $\alpha = \alpha_0$ au voisinage de deux boucles consécutives de Δ (le calcul avec $\bar{\alpha}_0$ est analogue). Par une première homotopie (cf. Remarque 2), on arrive à une deuxième nappe dont l'inclinaison ne s'annule pas. Si

la fonction k n'a pas de zéros, et si on fait une homotopie sur la fonction h (à travers des fonctions de rang un) de manière à effacer les deux points de contact, la structure de contact $\alpha_0 = 0$ induit sur la deuxième nappe un *feuilletage régulier* à chaque instant. Comme précédemment, cette déformation de la deuxième nappe peut se traduire, via une isotopie, par une homotopie sur la forme de contact.

5.4. Quatrième prolongement

Rappelons que n est impair dorénavant.

Pour $z_3 \leq z \leq z_4$ (avec $z_3 < z_4 = -z_2$), les équations des deux nappes restent

$$\tilde{\Sigma}_1 : x = 0 \quad \tilde{\Sigma}_2 : u = 0$$

mais la structure symplectique subit un dernier demi-tour: on prolonge la forme de contact α en utilisant la formule donnée dans le “troisième prolongement”, avec une fonction μ égale à 0 (resp. π) au voisinage de z_3 (resp. z_4). Dorénavant, $\alpha = \bar{\alpha}_0$.

Pour $z \geq z_4 = -z_2$, les deux nappes ainsi que la *structure* de contact sont complétées avec l'image, par la symétrie $\sigma(u, x, z) = (u, x, -z)$, de la partie déjà construite, restreinte à $z \leq z_2$. La *forme* de contact est donc prolongée par $\bar{\alpha}_0$.

5.5. Il reste à choisir un difféomorphisme de \mathbb{R}^{2n-1} , égal à l'identité pour z voisin de ± 2 , qui transforme Σ_j (cf. §4, Notations) en $\tilde{\Sigma}_j$ ($j = 1, 2$). Les choix faits dans la partie “troisième prolongement” déterminent alors une forme de contact, que nous noterons encore α , au voisinage de la courbe des points doubles de φ .

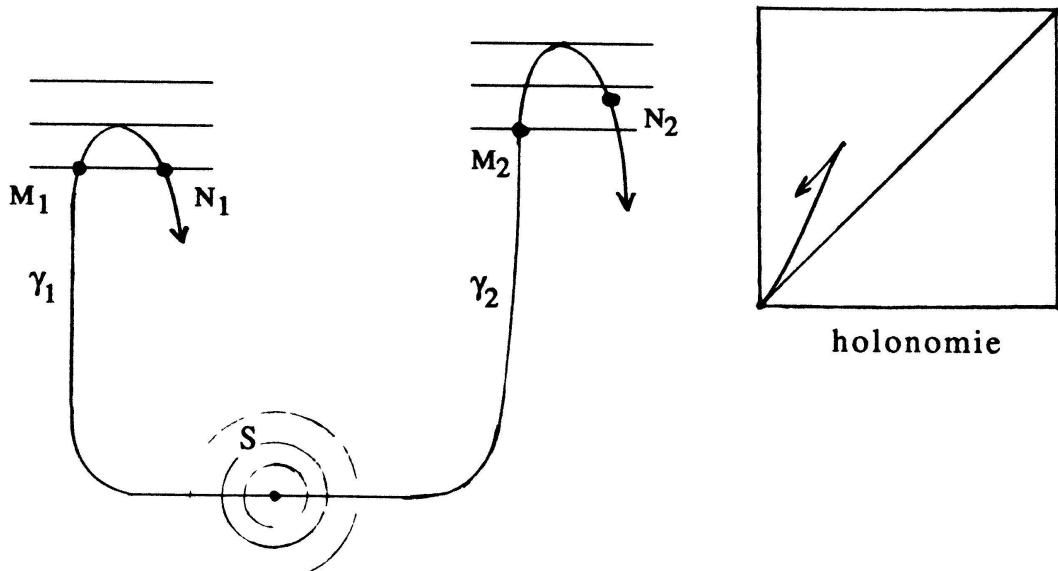
L'équation $\alpha = 0$ définit un feuilletage (singulier en S et N) au voisinage du cercle Γ dans S^n . Les feuilles proches de S et N sont les niveaux $[t = C^{ste}]$.

L'étape suivante (§6) consiste à prolonger correctement le feuilletage à la sphère: il faut qu'il ait une intégrale première telle que la courbe d'holonomie associée soit de pente $\neq 1$ (cf. §3).

5.6. Nota

Il est possible de reconnaître à la source (sur la sphère) le choix qui a été fait pour la forme de contact (α_0 ou $\bar{\alpha}_0$) au voisinage d'un point de contact C_k de Δ (cf. §5.3, troisième prolongement), en examinant les paramétrages γ_1 et γ_2 (choisis tels que $\varphi \circ \gamma_1 = \varphi \circ \gamma_2$) dans la variété feuilletée, au voisinage des points $\varphi^{-1}(C_k)$. Lorsque k est impair, le choix de α_0 donne un feuilletage dans lequel les courbes γ_1 et γ_2 peuvent se représenter, par rapport aux feuilles, de la manière suivante (qui se

traduit, sur la courbe d'holonomie associée à une intégrale première (du feuilletage partiel) ayant son minimum en S , par une pente décroissante au voisinage du point stationnaire associé; voir §3.3.):



Des points identifiés par φ sont marqués:

$$\varphi(M_1) = \varphi(M_2),$$

$$\varphi(N_1) = \varphi(N_2).$$

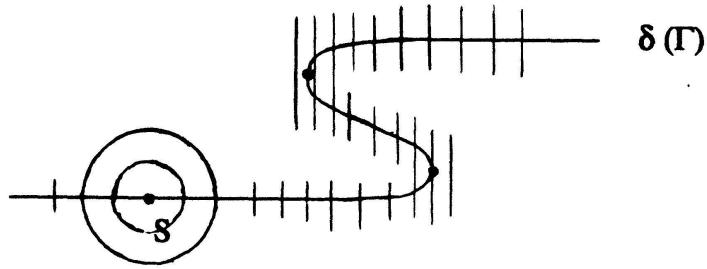
Pour le choix de $\bar{\alpha}_0$ (avec k impair), le parcours de Γ_2 est accéléré, au lieu d'être ralenti: la pente de la courbe d'holonomie est croissante au voisinage du point stationnaire.

Lorsque k est pair, la description correspondante est facile à déduire de ce qui précède.

6. Prolongements du feuilletage à S^n et du fibré F au-dessus de $\varphi(S^n)$

6.1. Prolongement du feuilletage

6.1.1. Nous tordons d'abord Γ de manière à faire coïncider les feuilles, définies à son voisinage, avec les niveaux $[t = C^{ste}]$: il existe un difféomorphisme (global) δ de S^n , égal à l'identité au voisinage de S et de N , tel que l'équation $\delta^* dt = 0$ défuisse le feuilletage donné sur un voisinage de Γ .



A un tel difféomorphisme δ correspond une courbe d'holonomie, associée à l'intégrale première t , par exemple (cf. §2).

6.1.2. PROPOSITION. *Le difféomorphisme δ peut être choisi de manière à obtenir une courbe d'holonomie dont la pente est strictement supérieure à un.*

Démonstration. Remarquons d'abord que cette pente est > 1 au voisinage des deux extrémités. En effet, si

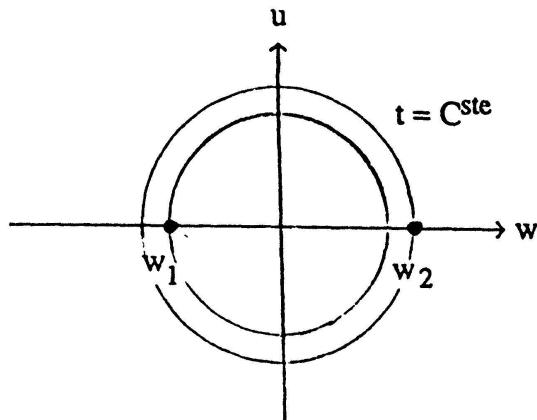
$$(\varphi \circ \delta^{-1})^* \alpha = \frac{1}{g} dt$$

(où α est choisie comme en §5), le rang de $(\varphi \circ \delta^{-1}, g)$ est égal à n aux points S et N (cf. §4), ce qui nous assure que la pente de la courbe d'holonomie ne prend pas la valeur 1 au voisinage des deux extrémités (cf. §3). De plus, l'équation (pour $w_1 < 0 < w_2$ proches de zéro)

$$w_2^2 - \frac{w_2^3}{3} = w_1^2 - \frac{w_1^3}{3}$$

montre que $w_2 > -w_1$. C'est l'équation des points doubles de φ au voisinage de S et N : les points $(0, w_1)$ et $(0, w_2)$ ont la même image par le modèle local W décrit au §4.

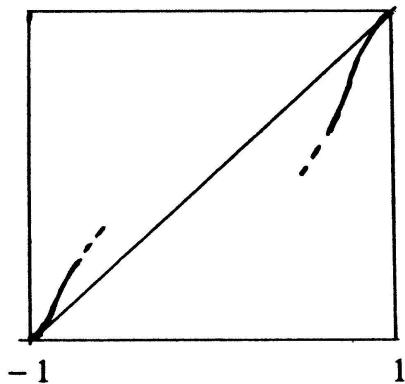
L'intégrale première t a un minimum au point S . Pour des paramétrages γ_1 et γ_2 de Γ_1 ($w < 0$) et de Γ_2 ($w > 0$) comme au §3, nous obtenons $t \circ \gamma_2 > t \circ \gamma_1$ (pour γ_j proche de S)



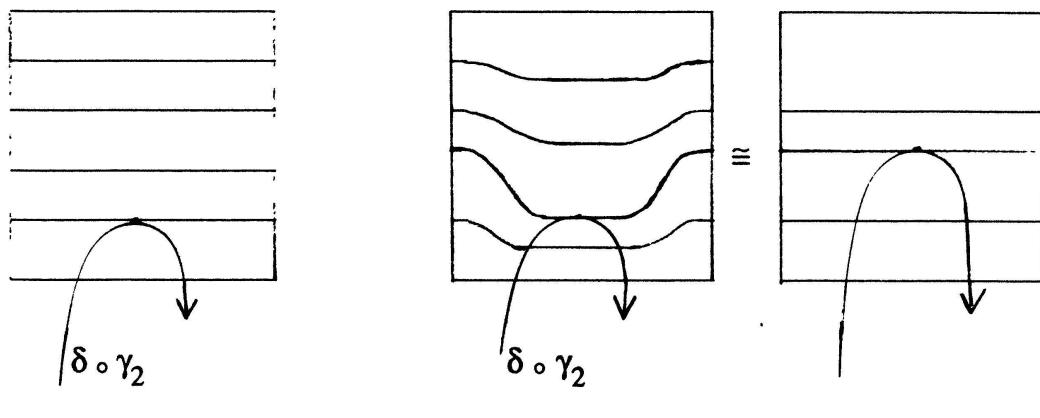
En revanche, comme la fonction t a un maximum au point N ,

$t \circ \gamma_2 < t \circ \gamma_1$ (pour γ_j proche de N).

La courbe d'holonomie $H = (t \circ \gamma_1, t \circ \gamma_2)$ a donc, près de ses extrémités, l'allure suivante:



Etant donné un difféomorphisme δ comme en 6.1.1, nous pouvons maintenant modifier le feuilletage $[t = C^{ste}]$ en "comprimant" suffisamment les feuilles dans des cylindres $D^{n-1} \times [0, 1]$ feuillettés par les $D^{n-1} \times \{\text{point}\}$, ce qui revient (modulo un difféomorphisme de la sphère) à modifier δ en gardant le feuilletage inchangé, de manière à obtenir une courbe d'holonomie dont la pente est strictement supérieure à en tout point:



Le feuilletage donné au voisinage de Γ est ainsi prolongé à toute la sphère S^n , la fonction $f = t \circ \delta$ en est une intégrale première, et la courbe d'holonomie associée a les propriétés voulues (cf. §3).

6.2. Prolongement du fibré

Considérons une structure de contact $\alpha = 0$ (comme au §5) définie sur un voisinage (tubulaire, assez petit) v de $\bar{\Gamma} = \varphi(\Gamma)$, et un feuilletage $df = 0$ sur S^n , singulier en N et S seulement, qui prolonge le feuilletage $\varphi^*\alpha = 0$. L'équation $\alpha = 0$ définit, dans le fibré tangent $T\mathbb{R}^{2n-1}$ restreint à v , un sous-fibré F de rang $2n - 2$, transverse à $\Sigma = \varphi(S^n)$ au-dessus du bord $\partial(v \cap \Sigma)$. Il se prolonge donc au-dessus de $\Sigma \setminus v$, de manière à ce que $F \cap T\Sigma$ soit le fibré tangent aux feuilles (vues dans Σ). Il suffit de prolonger un sous-fibré supplémentaire de $T\Sigma$ (dans $T\mathbb{R}^{2n-1}$) que F contient au-dessus du bord $\partial(v \cap \Sigma)$.

§7. “Indice de Maslov” sur la courbe des points doubles

Revenons à la situation générale présentée en §1, pour une application générale comme en §2, $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$. Soient Δ une courbe de points doubles aboutissant aux images de deux points-parapluie S et N , et Γ_1, Γ_2 les deux composantes connexes de $\varphi^{-1}(\Delta)$. Le feuilletage $\varphi^*\alpha = 0$ est régulier au-dessus de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (cf. §1 Remarque 2). Sa restriction aux deux courbes Γ_1 et Γ_2 fournit au-dessus de Δ deux sous-fibrés de rang $n - 1$, T_1 et T_2 , du fibré F défini par $\alpha = 0$.

7.1. Prolongement aux extrémités

Supposons qu'au voisinage de S et N , l'angle entre les feuilles et Γ_j reste supérieur à une constante > 0 ($j = 1, 2$). C'est toujours le cas, par exemple, si le feuilletage a un centre non dégénéré en S et N , en particulier pour les constructions de §5. Sous cette hypothèse, les champs de $(n - 1)$ -plans T_1 et T_2 ont une limite commune en $\varphi(S)$ (resp. $\varphi(N)$): l'image de $T\varphi(S)$ (resp. $T\varphi(N)$). Comme la forme $\varphi^*\alpha$ est complètement intégrable, $d\alpha$ est nulle sur T_1 et T_2 (au-dessus de l'adhérence $\bar{\Delta}$, par continuité). On peut donc calculer l'*indice de Maslov* de T_2 par rapport à T_1 , sur $\bar{\Delta}$, de manière analogue à ce qui se fait d'habitude au-dessus d'une courbe fermée, pour deux sous-fibrés lagrangiens d'un fibré muni d'une structure symplectique ([Ma], voir aussi [Ar1]).

Supposons, de plus, que M soit orientable. Le choix d'une orientation du feuilletage définit une orientation de T_1 et T_2 . Si les singularités du feuilletage en S et N sont non dégénérées (ce qui est le cas en §5), alors les orientations de T_1 et T_2 sont *opposées* en $\varphi(S)$, ainsi qu'en $\varphi(N)$.

7.2. Indice de Maslov

Rappelons (dans le cas orienté) comment le calcul d l'indice de Maslov peut se faire, en l'adaptant à la situation décrite en 7.1.

Soit J une structure complexe sur le fibré F (au-dessus d'un voisinage de $\bar{\Delta}$), adaptée à la structure symplectique $d\alpha$ sur F , c'est-à-dire telle que

$$d\alpha(X, JX) > 0 \text{ si } X \neq 0$$

([G4]). D'après le théorème de Frobenius, les sous-fibrés T_1 et T_2 sont lagrangiens pour $d\alpha$, et donc totalement réels pour J .

Sur un espace vectoriel F (de dimension paire $2p$) muni d'une structure complexe J , identifions deux bases (complexes) de F si la matrice de changement de base est réelle et de déterminant positif. Un p -plan réel orienté T s'identifie naturellement à une telle classe d'équivalence. Si T_1 et T_2 sont deux p -plans réels orientés, représentés chacun par une base, le déterminant de la matrice $M \in Gl(p, \mathbb{C})$ de changement de base (complexe) de F , projeté sur le cercle S^1 par la projection radiale "argument", ne dépend plus des bases de T_1 et T_2 choisies.

En revenant aux deux sous-fibrés réels (de rang $n - 1$) T_1 et T_2 , au-dessus de $\bar{\Delta}$, nous obtenons ainsi une application

$$Dét_J(T_2/T_1) : \bar{\Delta} \rightarrow S^1$$

qui prend la valeur -1 aux points $\varphi(S)$ et $\varphi(N)$.

L'espace des structures complexes adaptées à $d\alpha$ est contractile [G4]. Le degré de l'application $Dét_J(T_2/T_1)$ est donc indépendant du choix de J . C'est ce nombre que nous appellerons *indice de T_2 par rapport à T_1* le long de $\bar{\Delta}$ (on convient que $\bar{\Delta}$ est parcouru de $\varphi(S)$ vers $\varphi(N)$).

7.3. La projection $p : T_2 \rightarrow JT_1$

Comme T_1 est un sous-fibré totalement réel de F (au-dessus de $\bar{\Delta}$), il est transverse à son image JT_1 . Considérons la projection $p : T_2 \rightarrow JT_1$ parallèlement à T_1 . Comme les deux nappes Σ_1 et Σ_2 sont transverses, le rang de p sur Δ égal à $n - 1$, sauf aux points de contact, où il est égal à $n - 2$.

On suppose que les points de contacts C_1, \dots, C_k, \dots de F avec Δ sont en nombre fini, et d'ordre un.

Les composantes connexes obtenues en enlevant ces points de contact de Δ (des arcs ouverts...) sont appelées *segments transverses* et seront notées $\sigma_0, \dots, \sigma_k, \dots$ (toutes les numérotations sont faites dans l'ordre du parcours de Δ , de $\varphi(S)$ vers $\varphi(N)$).

Au-dessus de σ_k , T_1 est transverse à T_2 , et p est donc un isomorphisme.

Convenons d'orienter le fibré JT_1 en transportant par J l'orientation de T_1 . L'isomorphisme p respecte -ou inverse- l'orientation de manière constante au-dessus de σ_k . Au point de contact entre σ_k et σ_{k+1} , le rang de p est égal à $n - 2$, son déterminant (relativement à des repères trivialisant les fibrés T_2 et JT_1) change de signe en passant au-dessus de σ_{k+1} .

§8. Calcul de l'indice sur \bar{A} pour les exemples du §5

Dans les exemples du §5, on convient que T_1 (resp. T_2) s'obtient en restreignant le feuilletage (orienté) de $S^n - \{S, N\}$ au demi-cercle Γ_1 (sur lequel $w < 0$) (resp. Γ_2 ($w > 0$)).

8.1. Partons du point $\varphi(S)$. Il est facile de voir que p inverse l'orientation au-dessus du premier segment transverse σ_0 : l'expression explicite de φ au voisinage de S (cf. §4) permet d'en faire le calcul.

En fait, il y a une raison plus générale à ce qu'il en soit ainsi: par la projection π sur \mathbb{R}^{2n-2} qui oublie la coordonnée z , les feuilles de Σ proches de $\varphi(S)$ se projettent sur des sphères immergées à un seul point double, qui sont lagrangiennes dans \mathbb{R}^{2n-2} pourvu de la structure symplectique $du \wedge dx$ (la forme induite par $d\alpha = d\alpha_0 = du \wedge dx$ est nulle sur chaque feuille, par le théorème de Frobenius). Ainsi, la restriction de $\pi \circ \varphi$ à chaque sphère S_r^{n-1} d'équation

$$\|u\|^2 + w^2 = r^2 = 1 - t^2$$

(r petit) est une immersion lagrangienne (à un point double, ce qui est immédiat à vérifier).

Rappelons que la dimension n est impaire, dans la construction de §5. L'intersection en un tel point double est *négative*, lorsque \mathbb{R}^{2n-2} est orienté par l'ordre $u_1, \dots, u_{n-1}, x_1, \dots, x_{n-1}$: si $\tau_1(r)$ et $\tau_2(r)$ sont les images orientées, par l'immersion lagrangienne, des plans tangents à la sphère orientée S_r^{n-1} aux points $w = -r$ et $w = +r$, alors l'orientation donnée par $\tau_1(r) \oplus \tau_2(r)$ est l'opposée de celle de \mathbb{R}^{2n-2} . Remarquant que $\tau_1(r)$ est transverse à $\tau_2(s)$ quels que soient r, s voisins de zéro, on en déduit que si w_1, w_2 ($w_1 < 0 < w_2$) sont tels que $\varphi(0, w_1, t_1) = \varphi(0, w_2, t_2)$, l'orientation donnée par $\tau_1(-w_1) \oplus \tau_2(w_2)$ est encore l'opposée de celle de \mathbb{R}^{2n-2} .

La structure complexe J_0 , définie sur \mathbb{R}^{2n-2} par

$$J_0 \frac{\partial}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

se relève en une structure complexe, qui sera encore notée J_0 , sur le fibré F au-dessus d'un voisinage de $\varphi(S)$ (sur lequel F est défini par $\alpha_0 = 0$); cette structure complexe est évidemment adaptée à $d\alpha_0$. Elle se prolonge en une structure complexe J adaptée à $d\alpha$, au-dessus de Δ . A cause de la connexité de l'espace des structures complexes adaptées à une 2-forme symplectique (algébrique) sur un espace vectoriel ([G4]), nous pouvons supposer qu'au voisinage de $\varphi(N)$, J est le relèvement sur F de $-J_0$, qui est adaptée à $dx \wedge du$ (au voisinage de $\varphi(N)$, $\alpha = \bar{\alpha}_0 = dz + x \cdot du$).

Au point de Δ (proche de $\varphi(S)$) considéré, l'orientation de F donnée par $T_1 \oplus T_2$ est donc l'opposée de celle donnée par $T_1 \oplus J_0 T_1$. Ceci signifie que p inverse l'orientation, au-dessus de ce point du segment transverse σ_0 . Là encore, la connexité de l'espace des structures complexes adaptées à une 2-forme symplectique donnée montre que cette propriété est indépendante du choix de la structure complexe adaptée.

On déduit de ce qui précède et de §7.3 le

LEMME. *L'application $p : T_2 \rightarrow JT_1$ inverse l'orientation au-dessus des segments transverses d'indice pair, et la respecte au-dessus des autres.* \diamond

8.2. Le cas $n = 3$

LEMME 1. (*Pour $n = 3$.*) *Aux points de contact de Δ avec les feuilletages des nappes Σ_j , $\text{Dét}_J(T_2/T_1) \notin \mathbb{R}$. De plus, le signe de la partie imaginaire de $\text{Dét}_J(T_2/T_1)$ en ces points est indépendant du choix de J .*

Démonstration. Choisissons des repères (U^1, V^1) pour T_1 , (U^2, V^2) pour T_2 , tels qu'au point de contact considéré, on ait $U^1 = U^2$. En ce point de contact, la matrice M exprimant (U^2, V^2) en fonction de (U^1, V^1) , comme bases complexes de F (pour la structure adaptée J) est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & c + i\gamma \\ 0 & d + i\delta \end{pmatrix} \quad (c, \gamma, d, \delta \in \mathbb{R})$$

avec $V^2 = cU^1 + \gamma JU^1 + dV^1 + \delta JV^1$.

Comme T_1 et T_2 sont lagrangiens, et comme $U^2 = U^1$:

$$0 = d\alpha(U^2, V^2) = \gamma \cdot d\alpha(U^1, JU^1) + \delta \cdot d\alpha(U^1, JV^1).$$

Or: $d\alpha(U^1, JU^1) > 0$. Donc $\delta = 0$ implique $\gamma = 0$; mais ceci est exclu car $V^2 \notin T_1$ (l'intersection $T_1 \cap T_2$ est de dimension un).

Le signe de la partie imaginaire $\text{im } \text{Dét}_J(T_2/T_1)$ au point de contact considéré est indépendant du choix de J , du fait de la connexité de l'espace des structures complexes adaptées à $d\alpha$.

LEMME 2. (*Pour $n = 3$*). *Sur le segment transverse σ_k , $\text{Dét}_J(T_2/T_1)$ ne prend pas la valeur $(-1)^{k+1}$.*

(Rappel: T_1 et T_2 sont orientés par une orientation du feuilletage de la sphère).

Démonstration. Choisissons un repère (orienté) (U^j, V^j) pour T_j ($j = 1, 2$). Soit M la matrice exprimant (U^2, V^2) en fonction de (U^1, V^1) , comme bases complexes de F . Alors la matrice P de p (cf. §7.3), relativement aux repères (U^2, V^2) de T_2 et (JU^1, JV^1) de JT_1 , est la partie imaginaire de M .

Supposons qu'en un point du segment transverse σ_k , on ait $\text{Dét}_J(T_2/T_1) = 1$. Alors M est de la forme:

$$M = \begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{pmatrix} \quad (A, B \in \mathbb{C})$$

et donc la matrice P est de la forme:

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Son déterminant est négatif, ce qui signifie que p inverse l'orientation. D'après le Lemme 8.1, l'indice k est alors pair.

De même, si $\text{Dét}_J(T_2/T_1) = -1$ en un point du segment transverse σ_k , alors p respecte l'orientation, et k est impair. \diamond

PROPOSITION ($n = 3$). *Le degré de $\text{Dét}_J(T_2/T_1)$ sur $\bar{\Delta}$ est déterminé par le signe de sa partie imaginaire aux points de contact et au voisinage des extrémités de $\bar{\Delta}$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer les deux lemmes précédents, en se souvenant que $\text{Dét}_J(T_2/T_1) = -1$ aux points $\varphi(S)$ et $\varphi(N)$ (cf. §§7.1, 7.2).

LEMME 3. (*en dimension générale n*). *Avec la construction de §5, la partie imaginaire de $\text{Dét}_J(T_2/T_1)$ est négative au voisinage de $\varphi(S)$ (où $\alpha = \alpha_0$), et positive au voisinage de $\varphi(N)$ (où $\alpha = \bar{\alpha}_0$).*

Démonstration. Avec les notations de §5, choisissons un repère (orienté) $(U_1^j, \dots, U_{n-1}^j)$ de T_j ($j = 1, 2$) tel qu'au point $\varphi(0, w_1, t_1) = \varphi(0, w_2, t_2)$ (avec $w_1 < 0 < w_2$) proche de $\varphi(S)$:

$$U_i^j = T\varphi(0, w_j, t_j) \frac{\partial}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} + w_j \frac{\partial}{\partial x_i}$$

pour tout $(j, i) \neq (2, 1)$, et:

$$U_1^2 = -T\varphi(0, w_2, t_2) \frac{\partial}{\partial u_1} = -\frac{\partial}{\partial u_1} - w_2 \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Les orientations de T_1 et T_2 sont ainsi induites par une orientation du feuilletage. La structure complexe J_0 (§8.1) est adaptée à $d\alpha = d\alpha_0$ au voisinage de $\varphi(S)$. Au-dessus des points de Δ , elle vérifie

$$J_0 \frac{\partial}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

La matrice $M \in Gl(n-1, \mathbb{C})$, exprimant $(U_i^2)_{i \leq n-1}$ dans la base complexe $(U_i^1)_{i \leq n-1}$, s'écrit:

$$M = \frac{(1-iw_1)(1+iw_2)}{1+w_1^2} \begin{bmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

Comme $w_1 < 0 < w_2$, la partie imaginaire du déterminant de M est négative lorsque w_1 et w_2 sont assez petits.

Au voisinage de $\varphi(N)$, nous pouvons reprendre les mêmes expressions pour les U_j^i . Mais la forme de contact est $\bar{\alpha}_0$, à laquelle est adaptée $-J_0$. Le germe de $Dét_{-J_0}(T_2/T_1)$ en $\varphi(N)$ s'obtient donc par conjugaison à partir du germe de $Dét_{J_0}(T_2/T_1)$ en $\varphi(S)$, ce qui donne une partie imaginaire positive.

COROLLAIRE. Pour les exemples de §5 dans le cas $n = 3$, soit $\varepsilon_k \in \{-1, +1\}$ le signe de la partie imaginaire de $Dét_J(T_2/T_1)$ au point de contact C_k ($k = 1, \dots, 2m$). Le degré de $Dét_J(T_2/T_1)$ sur Δ est égal à

$$1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k+1} \varepsilon_k.$$

8.3. REMARQUE. Dans le cas d'une dimension impaire $n > 3$, le calcul combinatoire du degré ne peut plus se faire comme en 8.2. En choisissant des repères convenables pour T_1 et T_2 , l'indice de T_2 par rapport à T_1 sur Λ se calcule néanmoins, et sa valeur est

$$\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k+1} \varepsilon_k$$

où $\varepsilon_k = +1$ (resp. -1) si $\alpha = \alpha_0$ (resp. $\bar{\alpha}_0$) au point de contact C_k .

§9. Etude de la trivialité d'un fibre complexe (F, J)

La dimension n est impaire.

Partons d'une forme de contact α , définie au voisinage de $\bar{\Lambda}$ comme au §5, égale à α_0 près de $\varphi(S)$ et à $\bar{\alpha}_0$ près de $\varphi(N)$. Soit J une structure complexe adaptée à $d\alpha$; nous pouvons la choisir égale à J_0 (resp. $-J_0$) au voisinage de $\varphi(S)$ (resp. $\varphi(N)$).

Supposons, pour le moment, que J se prolonge à tout le fibré F de manière à ce que le feuilletage soit *totalement réel* en tout point. Le fibré T “des $(n-1)$ -plans tangents aux feuilles” est un sous-fibré (totalement réel) du fibré φ^*F au-dessus de $S^n \setminus \{S, N\}$. Nous discutons maintenant la trivialité de F , comme fibré complexe, au-dessus de $\Sigma = \varphi(S^n)$.

La base Σ est, homotopiquement, un bouquet de sphères $S^n \vee S^2$: la sphère S^2 correspond à l'image $\varphi(D)$ d'un disque D , dans S^n , dont le bord est le cercle Γ . Comme $\pi_{n-1}(U(n-1)) = 0$ et $\pi_1(U(n-1)) = \mathbb{Z}$, il suffit d'analyser F au-dessus de $\varphi(D)$.

LEMME. *Soit F un fibré complexe de rang réel $2q$ au-dessus de S^2 . Si F contient un sous-fibré totalement réel R de rang q , alors F est trivial.*

Démonstration. Le groupe structural de F se réduit alors à $SO(q) \subset SU(q)$. Or $\pi_1(SU(q)) = 0$. \diamond

Au-dessus de $\bar{\Lambda} = \varphi(\Gamma)$, nous disposons d'un sous-fibré totalement réel de F : le sous-fibré T_1 par exemple. Nous étudions la possibilité de prolonger une telle donnée au-dessus de toute la sphère $\varphi(D)$, en la comparant à un autre sous-fibré réel connu, T , qui a l'avantage d'être prolongé, mais qui a aussi l'inconvénient d'être “multi-valué” au-dessus de Λ , et, de plus, d'être non défini au-dessus des points $\varphi(S)$ et $\varphi(N)$.

Prenons par exemple pour D le disque $[u_2 = \dots = u_{n-1} = 0; u_1 \geq 0]$ dans $S^n = [\|u\|^2 + w^2 + t^2 = 1]$. La “donnée au bord” choisie est le sous-fibré (orienté)

$R = T_1$, au-dessus de \bar{A} . On prolonge d'abord le fibré R à des voisinages de $\varphi(S)$ et de $\varphi(N)$ dans Σ , afin de pouvoir le comparer au fibré T au-dessus du bord d'un disque D' un peu plus petit que D , ne contenant pas S et N . Pour cela, il suffit de procéder par translation horizontale puis relèvement vertical dans F , car au voisinage de $\varphi(S)$ (resp. $\varphi(N)$), F est transverse à $\partial/\partial z$, et la projection verticale sur $\mathbb{R}_{u,x}^{2n-2}$ de la structure complexe J_0 (resp. $-J_0$) est invariante par translation.

Plus concrètement, le fibré T_1 peut être trivialisé par un repère (orienté) (U_1, \dots, U_{n-1}) tel qu'au point $\varphi(0, w_1, t_1)$ (où t_1 est voisin de ± 1 , $w_1 \leq 0$, $w_1^2 + t_1^2 = 1$) ce soit l'image par $T\varphi$ du repère $(\partial/\partial u_1, \dots, \partial/\partial u_{n-1})$:

$$U_i = \frac{\partial}{\partial u_i} + w_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Le fibré R qui prolonge T_1 au voisinage de $\varphi(S)$ a pour repère $(U_1^R, \dots, U_{n-1}^R)$, où U_i^R (prolongeant U_i) est défini au point (u, x, z) de l'hyperplan $[z = C^{ste}]$ contenant $\varphi(0, w_1, t_1)$ par

$$U_i^R = \frac{\partial}{\partial u_i} + w_1 \frac{\partial}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial}{\partial z}$$

Revenons sur le disque D , dans S^n . En enlevant de D les points tels que $u_1^2 + w^2 < \varepsilon^2$ ($\varepsilon < 0$ petit), on obtient une surface D' , bordée par un lacet τ , et au-dessus de laquelle T est défini. On calcule maintenant l'indice de Maslov de φ^*R par rapport à T sur le lacet $\tau = \partial D'$. Il est formé de quatre chemins, notés $\tau_1, \tau_N, \tau_2, \tau_S$:

- τ_j est tracé sur Γ_j ($j = 1, 2$)
- τ_S (resp. τ_N) est tracé près de S (resp. N), sur $[u_1^2 + w^2 = \varepsilon^2]$
- le sens de parcours de τ_1 est choisi de S vers N , ce qui détermine celui de τ .

On note de la même manière ces chemins et leurs images par φ . L'orientation de T coïncide avec celle de φ^*T_1 , au-dessus de τ_1 .

- Le long de τ_1 , on a $T = \varphi^*T_1 = \varphi^*R$, et donc $Dét_J(\varphi^*R/T) \equiv 1$.
- Le long de τ_2 , on a $T = \varphi^*T_2$ et $R = T_1$. Donc $Dét_J(\varphi^*R/T)$ est le conjugué de $Dét_J(T_2/T_1) = Dét_J(T/\varphi^*R)$ (restreint à τ_2). Remarquons que τ_2 est parcouru de N vers S .

– Le long de τ_S , il faut faire un petit calcul. Dans S^n , au-dessus de τ_S , le fibré T a pour repère $(U_1^T, \dots, U_{n-1}^T)$, avec:

$$U_1^T = -w \frac{\partial}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial}{\partial w}$$

$$U_i^T = \frac{\partial}{\partial u_i} \quad (i \geq 2).$$

La matrice M qui exprime $(T\varphi \cdot U_1^T, \dots, T\varphi \cdot U_{n-1}^T)$ en fonction de $(U_1^R, \dots, U_{n-1}^R)$ (comme bases complexes) au point $\varphi((u_1, 0, \dots, 0), w, t)$ s'écrit:

$$M = \frac{1 - iw_1}{1 + w_1^2} \begin{bmatrix} -w + i(u_1^2 - w^2) & 0 & & \\ & 1 + iw & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 + iw \end{bmatrix}$$

Dans l'expression du déterminant de M , le facteur $(1 - iw_1)^{n-1} (1 + iw)^{n-2}$ dépend de (u_1, w) ; mais, sur le chemin τ_S , son argument reste petit (de l'ordre de $(2n - 3)\varepsilon$). Par ailleurs, le facteur $-w + i(u_1^2 - w^2)$ est imaginaire pur seulement si $w = 0$; mais il est alors égal à $i \cdot u_1^2$. La projection radiale de $\det M$ sur S^1 évite donc la valeur $-i$, quand on parcourt τ_S . Elle trace sur le cercle un chemin allant d'un point proche de -1 jusqu'au point $+1$.

Ainsi, sur le chemin τ_S , la variation de l'argument de $\text{Dét}_J(T/\varphi^*R)$ est proche de $-1/2$ tour. Comme $\text{Dét}_J(\varphi^*R/T)$ parcourt le chemin conjugué, sa variation est (d'un peu plus) de $+1/2$ tour.

– Le long du chemin τ_N , on peut prendre les mêmes expressions pour les repères que sur τ_S , mais la structure complexe est $-J_0$. La matrice obtenue est donc la conjuguée de la matrice sur τ_S , et $\text{Dét}_J(\varphi^*R/T)$ décrit le chemin conjugué du chemin correspondant à τ_S ; il faut encore en inverser le sens de parcours, car sur τ_N , w varie de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$.

En conclusion, nous pouvons énoncer la

PROPOSITION. *Si le degré de $\text{Dét}_J(T_2/T_1)$ sur $\bar{\Lambda}$ est égal à -1 (en orientant $\bar{\Lambda}$ de $\varphi(S)$ vers $\varphi(N)$), alors l'indice de Maslov du sous-fibré réel φ^*R par rapport à T est nul sur $\partial D'$, et donc φ^*R se prolonge au-dessus de D' .* \diamond

D'après l'expression de ce degré donnée à la fin du §8, le prolongement est possible si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k+1} \varepsilon_k = -n - 1.$$

Il faut donc *au minimum* $2m = n + 1$ points de contact. De plus, avec $n + 1$ points de contact, la solution est unique: nécessairement, $\varepsilon_k = (-1)^k$.

§10. Prolongement de la structure complexe

10.1 Etat des lieux

Nous avons donc un fibré F au-dessus de $\varphi(S^n) = \Sigma$ (n impair), construit comme en §5 et §6, pour une forme de contact α au voisinage de $\bar{\Lambda}$ telle que $\sum_{k=1}^{2m} (-1)^k \varepsilon_k = n + 1$. Il s'agit de prolonger une structure complexe adaptée J (définie au-dessus d'un voisinage de $\bar{\Lambda}$) à tout le fibré F , de manière à laisser T réel.

Le complémentaire, dans S^n , d'un voisinage tubulaire de Γ est difféomorphe à $D^2 \times S^{n-2}$; son image (plongée) par φ dans \mathbb{R}^{2n-1} est encore notée $D^2 \times S^{n-2}$. De même, on identifie T au-dessus de $D^2 \times S^{n-2}$ et son image, en les notant de la même manière.

Soit (U_1, \dots, U_{n-1}) une trivialisation de T au-dessus de $D^2 \times S^{n-2}$: il suffit par exemple de paralléliser les feuilles de $S^n \setminus \Gamma$ qui sont proches de S (elles sont difféomorphes à $S^{n-2} \times]0, 1[$), et de procéder par homotopie.

On considère le fibré \mathcal{J} , au-dessus de $D^2 \times S^{n-2}$, dont la fibre au-dessus d'un point est l'espace des structures complexes sur F qui laissent T réel en ce point, et qui donnent à F une orientation compatible avec celle que donne J_0 , près de S . Homotopiquement, c'est un fibré principal de groupe $SO(n-1)$. Plus précisément, pour la structure complexe J que nous voulons prolonger, il existe une métrique sur F , au-dessus de $D^2 \times S^{n-2}$, telle qu'au-dessus du bord $\partial D^2 \times S^{n-2}$:

$$T \perp JT \quad \text{et} \quad \|JX\| = \|X\| \quad \text{pour tout } X \in F. \tag{1}$$

On considère le sous-fibré \mathcal{J}' de \mathcal{J} des structures complexes qui vérifient (1) dans chaque fibre de F au-dessus de $D^2 \times S^{n-2}$; c'est un fibré principal de groupe $SO(n-1)$: une structure complexe j étant donnée, on obtient les autres "en tournant" dans le sous-espace jT . L'action du groupe $SO(n-1)$ est bien définie car T est trivialisé. L'inclusion $\mathcal{J}' \hookrightarrow \mathcal{J}$ est une équivalence d'homotopie.

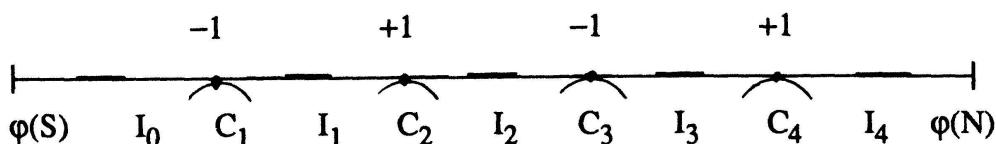
Pour $n = 3$, \mathcal{J}' est un fibré en cercles au-dessus de $D^2 \times S^1$, et \mathcal{J} est donc trivial. Mais il est aussi trivial en dimension générale n impaire, en particulier parce qu'il est homotope au fibré \mathcal{J}_0 des structures complexes sur le fibré trivial horizontal F_0 , défini par $dz = 0$ dans \mathbb{R}_{2n-1} , qui laissent réel le sous-fibré T_0 associé par φ_0 au feuilletage $dt = 0$; en effet, les images $\varphi_0([t = C^{ste}])$ sont des sphères lagrangiennes dans $\mathbb{R}_{u,x}^{2n-2} \times \{t\}$, et la structure complexe J_0 (remontée sur F_0) est donc une section de \mathcal{J}_0 au-dessus de $D^2 \times S^{n-2}$.

La donnée de J est une section du fibré \mathcal{J} au-dessus du bord $\partial D^2 \times S^{n-2}$. Nous comparons cette section J à une section globale J_1 de \mathcal{J} , que nous décrivons maintenant:

1) On part du fibré complexe (F_0, J_0) au-dessus de $\varphi_0(S^n)$, et on le restreint à $D^2 \times S^{n-2} \subset \varphi_0(S^n)$. Le fibré \mathcal{J}_0 associé au feuilletage de $D^2 \times S^{n-2}$, image par φ_0 du feuilletage $dt = 0$, admet la section globale J_0 relevée dans F_0 , qu'on note encore J_0 .

2) Il existe une homotopie qui amène (F_0, T_0) jusqu'à (F, T) , et telle qu'au-dessus du bord $\partial D^2 \times S^{n-2}$, cette homotopie induit une homotopie sur la structure complexe: la section J_0 de \mathcal{J}_0 se déforme en une section J_1 de \mathcal{J} , adaptée à la forme de contact égale à α_0 sur tout le voisinage de la courbe des points doubles, dans la construction de §5 (voir à ce sujet §4.1 Remarque, en appliquant la symétrie σ qui change z en $-z$). En effet, dans le "troisième prolongement", les points de contact peuvent être effacés par homotopie, si on a choisi $\alpha = \alpha_0$ sur toutes les boucles (§5.3, Remarque 3). L'homotopie inverse introduit donc les points de contact voulus, et peut se prolonger en une homotopie globale sur le couple (fibré, feuilletage). Par relèvement d'homotopie, la structure complexe J_1 se prolonge en une section globale de \mathcal{J} au-dessus de $D^2 \times S^{n-2}$.

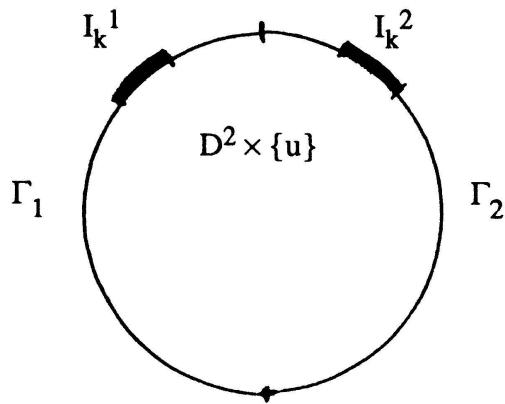
3) La section J (définie au-dessus du bord $\partial D^2 \times S^{n-2}$), s'obtient à partir de J_1 "en faisant des demi-tours". Plus précisément, sur chaque boucle de Δ où $\varepsilon_k = -1$ au point de contact C_k , nous avons remplacé α_0 par $\bar{\alpha}_0$, en faisant un "demi-tour" (en fait, un demi-tour sur la structure symplectique $d\alpha_0$) au-dessus d'un petit intervalle I_{k-1} contenu dans le segment transverse σ_{k-1} , puis un deuxième demi-tour au-dessus de $I_k \subset \sigma_k$ pour revenir à la forme de contact α_0 . Il faut encore un ultime demi-tour sur le dernier segment transverse σ_{2m} , afin d'obtenir $\bar{\alpha}_0$ au voisinage du point $\varphi(N)$ (c'est le "quatrième prolongement"). Dans le cas où $2m = n + 1$ par exemple, avec $\varepsilon_k = (-1)^k$ (c'est la solution obtenue en §9) nous avons à faire un (et un seul) demi-tour sur chacun des intervalles transverses:



Chaque demi-tour sur la forme symplectique s'accompagne d'un demi-tour sur les structures complexes adaptées, et, en fait, de *deux* demi-tours sur la section de \mathcal{J} au-dessus de $\partial D^2 \times S^{n-2}$, comme nous allons le voir.

En trivialisant \mathcal{J} par la section (globale) J_1 , la section J correspond à une application $J : \partial D^2 \times S^{n-2} \rightarrow SO(n-1)$. Nous pouvons décrire $D^2 \times S^{n-2}$ dans S^n en faisant “tourner” la surface D' bordée par τ (voir §9) autour du grand cercle Γ éclaté: on identifie S^{n-2} à la sphère $[\|u\| = \varepsilon, w = 0]$, et $D^2 \times \{(\varepsilon, 0, \dots, 0)\}$ à la surface D' de §9.

A chaque intervalle $I_k \subset \sigma_k$ correspondent deux intervalles I_k^1 et I_k^2 sur le bord disque $D^2 \times \{u\}$ ($u \in S^{n-2}$)



Le bord du disque est orienté comme $\tau = \partial D'$. Sur I_k^1 , l'application $J : \partial D^2 \times \{u\} \rightarrow SO(n-1)$ décrit un chemin de Id (identité) à $-Id$ si k est pair, et de $-Id$ à Id si k est impair. Les valeurs de J sur I_k^2 sont alors déterminées. En dehors des I_k^j , l'application est constante.

La classe d'homotopie de la restriction de J à $\partial D^2 \times \{u\}$, dans $\pi_1(SO(n-1))$, est bien sûr indépendante de u .

10.2 Calcul de la classe d'homotopie de $J|_{\partial D^2 \times \{u\}}$

Un repère (U_1, \dots, U_{n-1}) trivialisant T au-dessus de $S^n \setminus \Gamma$ fournit, par restriction à $\Gamma_j \subset D^2 \times \{u\}$ (le cercle Γ est éclaté...), un repère (orienté) $(U_1^j, \dots, U_{n-1}^j)$ de T_j (pour $j = 1, 2$). Nous pouvons supposer qu'au-dessus des I_k , $J_1 T_1 = J T_1 = \pm T_2$; l'orientation est la même si k est impair, et est inversée si k est pair (cf. §8.1 lemme).

Techniquement, le problème est le suivant: étant donnée la matrice R , exprimant $(J U_1^1, \dots, J U_{n-1}^1)$ dans la base $(J_1 U_1^1, \dots, J_1 U_{n-1}^1)$, il faut calculer la matrice S , de $(J U_1^2, \dots, J U_{n-1}^2)$ dans la base $(J_1 U_1^2, \dots, J_1 U_{n-1}^2)$, pour un paramètre t sur l'intervalle I_k .

10.2.1. Au-dessus d'un intervalle I_k avec k pair, l'orientation de T_2 est l'opposée de celle de JT_1 . La matrice A_t exprimant $(J_1 U_1^1, \dots, J_1 U_{n-1}^1)$ dans la base $(U_1^2, \dots, U_{n-1}^2)$ est donc de déterminant négatif. En revanche, lorsque k est impair, $\det A_t$ est positif au-dessus de l'intervalle I_k .

Soit R_t la matrice de $(JU_i^1)_i$ dans la base $(J_1 U_i^1)_i$. Alors $R_t A_t$ exprime $(JU_i^1)_i$ dans la base $(U_i^2)_i$, et donc $(-U_i^1)_i$ dans la base $(JU_i^2)_i$ (par linéarité de J). Finalement, la matrice $S_t = A_t^{-1} R_t^{-1} A_t$ exprime $(JU_i^2)_i$ dans la base $(J_1 U_i^2)_i$.

REMARQUE. Il est possible de modifier le repère de T au voisinage de $I_k^2 \subset \partial D^2 \times \{u\}$ de manière à avoir, si k est pair:

$$J_1 U_1^1 = -U_1^2, \quad J_1 U_i^1 = U_i^2 \quad (i \geq 2)$$

au-dessus de $I_k \subset \Delta$. Alors

$$A_t \equiv \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

et, si k est impair, $A_t \equiv Id$.

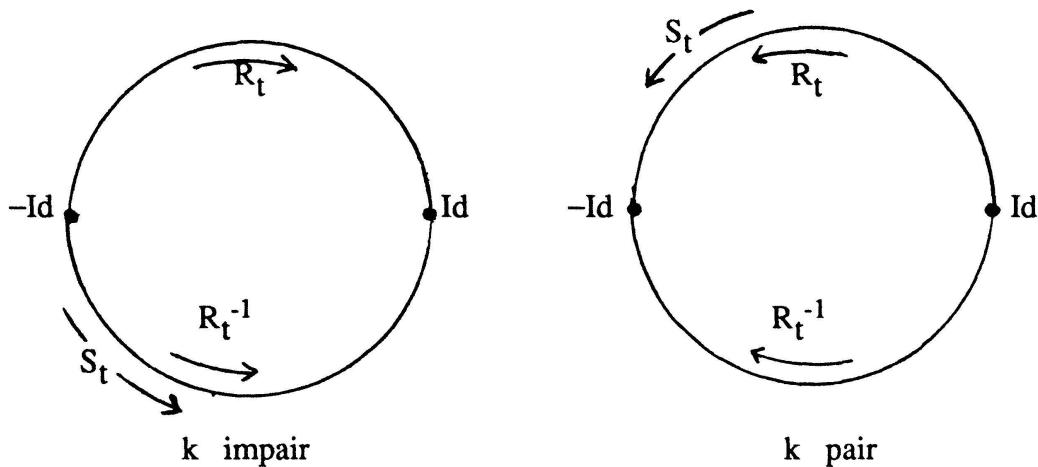
10.2.2. Le cas $n = 3$.

LEMME ($n = 3$). Si la classe de $J : \partial D^2 \times \{u\} \rightarrow SO(2)$ dans $\pi_1(SO(2))$ est nulle, alors J se prolonge à tout $D^2 \times S^1$.

Démonstration. On procède par relèvement d'homotopie, en remarquant que $\pi_2(SO(2)) = 0$. \diamond

On a $SO(2) \cong S^1$, et $\pi_1(SO(2)) \cong \mathbb{Z}$. Par construction (§5, troisième prolongement), R_t décrit un demi-cercle de $+Id$ à $-Id$ (resp. $-Id$ à $+Id$) sur $SO(2)$ quand on parcourt I_k^1 , si k est pair (resp. impair). Mais alors, R_t^{-1} décrit l'autre demi-cercle. Il faut encore conjuguer R_t^{-1} par la matrice A_t . Si k est impair, alors $A_t \in SO(2)$. Par conséquent, le chemin $A_t^{-1} R_t^{-1} A_t$ est homotope (à extrémités fixées) au chemin R_t^{-1} , dans $SO(2)$, et il doit être parcouru de $-Id$ à $+Id$.

Si k est pair, $\det A_t < 0$, et le chemin $A_t^{-1} R_t^{-1} A_t$ est le demi-tour non homotope à celui de R_t^{-1} ; il est parcouru de $+Id$ à $-Id$.



Rappelons que le sens de parcours de I_k coïncide avec celui de I_k^1 et est l'opposé de celui de I_k^2 .

En conclusion, nous pouvons énoncer le

LEMME ($n = 3$). *Dans le décompte final des demi-tours sur $SO(2) \cong S^1$, l'apport de $I_k^1 \cup I_k^2$ est nul si k est pair, et égal à ± 1 générateur de $\pi_1(SO(2))$ si k est impair.*

Considérons un exemple de §5 avec $2m$ points de contact, qui vérifie la condition de §9 (avec $n = 3$):

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \cdots - \varepsilon_{2m} = -4$$

Le nombre des points de contact C_k tels que $\varepsilon_k = -1$ est alors *pair*, et donc le nombre de demi-tours effectués sur un segment I_k d'indice k impair est pair aussi. La construction de §5 peut donc être faite de manière à ce que le degré de $J : \partial D^2 \times \{u\} \rightarrow SO(2)$ soit nul: il suffit que les deux demi-cercles de $SO(2)$ soient décrits le même nombre de fois par R_t , su la réunion des I_k^1 d'indice impair.

Exemple. Avec la construction à quatre points de contact, il faut que $\varepsilon_k = (-1)^k$ (§9). On fait un demi-tour sur chacun des cinq segments transverses $\sigma_0, \dots, \sigma_4$. Deux d'entre eux sont d'indice impair. Pour pouvoir prolonger J , les deux demi-tours sur $I_1 \subset \sigma_1$ et sur $I_3 \subset \sigma_3$ doivent être faits en sens opposé l'un de l'autre.

10.2.3. Remarque, en dimension (impaire) $n > 3$

Faisons le parallèle de la discussion précédente en dimension $n > 3$. On a, cette fois, $\pi_1(SO(n-1)) = \mathbb{Z}/2$.

Comme $SO(n - 1)$ est connexe, nous pouvons supposer (pour simplifier l'exposé) que le repère (U_1, \dots, U_{n-1}) de T est choisi tel que, au-dessus de *l'un* des disques $D^2 \times \{u\}$ ($u \in S^{n-2}$), la matrice R_t soit de la forme

$$R_t = \begin{bmatrix} r_t & & 0 \\ & r_t & \\ & & \ddots \\ 0 & & r_t \end{bmatrix}$$

$$\text{où } r_t = \begin{pmatrix} \cos \theta_t & -\sin \theta_t \\ \sin \theta_t & \cos \theta_t \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Le lacet $(R_t)_k \cdot (R_t^{-1})_k$ obtenu en suivant le chemin R_t sur I_k^1 , puis le chemin R_t^{-1} sur I_k^2 , est homotope à $(n - 1)/2$ générateurs de $\pi_1(SO(n - 1))$ (quel que soit k).

Si k est impair, $A_t \in SO(n - 1)$. Donc les chemins R_t^{-1} et $A_t^{-1}R_t^{-1}A_t$ sont homotopes (à extrémités fixées) lorsqu'on parcourt I_k^2 . En revanche, si k est pair, ils ne sont pas homotopes.

La contribution de $I_k^1 \cup I_k^2$, dans le calcul de la classe d'homotopie de $J : \partial D^2 \times \{u\} \rightarrow SO(n - 1)$, est résumée dans le tableau suivant:

	$n \equiv 1 \pmod{4}$	$n \equiv 3 \pmod{4}$
k pair	1	0
k impair	0	1

Pour les exemples de §5, la condition de trivialité de §9 impose

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon \cdots - \varepsilon_{2m} = -1 - n$$

Pour $n \equiv 1 \pmod{4}$ on a donc $\Sigma(-1)^k \varepsilon_k \equiv 2 \pmod{4}$. Le nombre des points de contact C_k tels que $\varepsilon_k = -1$ est alors impair. En tenant compte du dernier demi-tour (sur σ_{2m}) pour avoir $\bar{\alpha}_0$ près de $\varphi(N)$, on a au total un nombre pair de demi-tours sur des segments transverses d'indice pair.

Pour $n \equiv 3 \pmod{4}$, $\Sigma(-1)^k \varepsilon_k \equiv 0 \pmod{4}$. Le nombre des points de contact C_k tels que $\varepsilon_k = -1$ est alors pair. D'où un nombre pair de demi-tours sur des segments transverses d'indice impair.

Nous en concluons que dans tous les cas, la classe d'homotopie de $J : \partial D^2 \times \{u\} \rightarrow SO(n - 1)$ est nulle dans $\pi_1(SO(n - 1))$. Par relèvement d'homotopie et comme $\pi_2(SO(n - 1)) = 0$, l'application J se prolonge aux tores pleins de dimension trois $D^2 \times S^1$, où $S^1 \hookrightarrow S^{n-2}$. Les groupes d'homotopie $\pi_i(SO(n - 1))$, pour $i \geq 3$, donnent des obstructions au prolongement de J . En effet, supposons J

prolongée à un tore $D^2 \times S^1$, et considérons un disque $D \hookrightarrow S^{n-2}$ tel que $\partial D = S^1$. Comme J est imposée sur le bord $\partial D^2 \times D$ (par la donnée au bord $\partial D^2 \times S^{n-2}$), on obtient une application J définie sur $(D^2 \times \partial D) \cup (\partial D^2 \times D)$, à laquelle est associée un élément de $\pi_3(SO(n-1))$.

§11. Cas $n = 3$. Prolongement de la structure de contact

Nous nous plaçons dans le cadre décrit en §§5 et 6, pour une forme de contact α vérifiant la condition établie en §10: une structure complexe J sur le fibré $[\alpha = 0]$, adaptée à $d\alpha$, est prolongée à tout le fibré F en laissant le sous-fibré T totalement réel.

11.1. Nous pouvons supposer que J est *calibrée* par $d\alpha$, au voisinage de la courbe \bar{A} , c'est-à-dire que la forme bilinéaire $(X, Y) \mapsto d\alpha(X, JY)$ est symétrique (définie positive) sur chaque fibre.

Soit N le complémentaire d'un voisinage tubulaire de \bar{A} dans $\varphi(S^3)$, tel que la structure de contact $\alpha = 0$ définit F et tel que J soit calibrée par $d\alpha$, au-dessus d'un voisinage du bord ∂N .

La structure complexe J permet de prolonger $d\alpha$ (éventuellement restreinte à un voisinage plus petit de $\partial N \dots$) et une 2-forme différentielle β , définie en tout point de N , symplectique sur le fibré F et telle que le sous-fibré T soit lagrangien: concrètement, il suffit de choisir une trivialisation de T (au-dessus de N) par un repère (U, V) , orthonormé pour la métrique $d\alpha(\cdot, \cdot)$, et un champ de vecteurs Z (sans zéros) transverse à F et prolongeant le champ de Reeb de la forme de contact α (défini par: $\alpha Z = 1, i(Z) d\alpha = 0$), puis de définir β sur le repère (U, V, JU, JV, Z) de $T\mathbb{R}^5$ restreint à N par les conditions:

$$i(Z)\beta = 0$$

$$\beta(U, V) = \beta(JU, JV) = 0$$

$$\beta(U, JV) = \beta(JU, V) = 0$$

$$\beta(U, JU) = \beta(V, JV) = 1$$

(rappelons que $d\alpha(U, V) = 0$, du fait que T est un feuilletage . . .).

11.2. REMARQUE. Nous pouvons supposer que le champ de vecteurs Z est tangent à N , parce que la forme de contact α peut être choisie de manière à induire une forme fermée sur N . En effet, le feuilletage défini au voisinage de ∂N dans $\varphi(S^3)$ par l'équation $\alpha = 0$ a une intégrale première. Pour l'inclusion

$i : N \hookrightarrow \mathbb{R}^5$, écrivons

$$i^*\alpha = \frac{1}{g} df.$$

Comme ∂N est loin de Δ , dans \mathbb{R}^5 , il existe une fonction $G > 0$ définie sur \mathbb{R}^5 telle que $i^*(G\alpha) = df$. Le champ de Reeb de $G\alpha$ est tangent à N . Comme l'intégrale première f est définie globalement sur N , et n'y a pas de points critiques (§6), le champ de vecteurs Z peut être choisi tel que $df \cdot Z = 1$. Ainsi, quitte à remplacer α par $G\alpha$:

$$i^*\beta = 0.$$

11.3 LEMME 1. *Au voisinage de tout point de N , il existe une 1-forme γ telle que $i^*\gamma = df$ et $\beta = d\gamma|_N$. De plus, la forme γ est une forme de contact.*

Démonstration. Choisissons, au voisinage du point considéré, des coordonnées locales (u, v, x, y, t) telles que $x|_N = y|_N = 0$, $t|_N = f$ et

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_N.$$

La 2-forme β s'écrit:

$$\beta = du \wedge (A dx + B dy) + dv \wedge (C dx + D dy) + E dx \wedge dy$$

où A, B, C, D, E sont des fonctions de (u, v, t) . Soient $x^\circ = Ax + By$, $y^\circ = Cx + Dy$. Alors $\beta = du \wedge dx^\circ + dv \wedge dy^\circ + E dx \wedge dy$. Comme $\beta \wedge \beta \neq 0$, $du \wedge dv \wedge dx^\circ \wedge dy^\circ|_N \neq 0$, et donc $(u, v, x^\circ, y^\circ, t)$ sont des coordonnées locales, dans lesquelles β s'écrit: $\beta = du \wedge dx^\circ + (dv + F dx^\circ) \wedge dy^\circ$, pour une fonction $F(u, v, t)$ convenable.

La forme $\gamma = u dx^\circ + v dy^\circ + F x^\circ dy^\circ + dt$ vérifie les propriétés suivantes:

$$d\gamma|_N = \beta,$$

$$i^*\gamma = i^*dt = df,$$

$$\gamma \wedge d\gamma^2|_N = \gamma|_N \wedge \beta^2 = dt \wedge du \wedge dx^\circ \wedge dv \wedge dy^\circ \neq 0. \quad \diamond$$

Remarquons que $\gamma|_N$ n'est pas définie de manière unique: si δ est une 1-forme telle que $d\delta|_N = 0$ et $i^*\delta = 0$, alors $\gamma + \delta$ est aussi solution.

LEMME 2. *Soient (u, v, x, y, t) des coordonnées locales comme dans la démonstration du Lemme 1. On peut imposer à la forme γ de prendre des valeurs données sur $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial y$, le long de N .*

Démonstration. D'après la remarque précédente, il suffit de trouver une 1-forme δ telle que $d\delta|_N = 0$, $i^*\delta = 0$, avec

$$\delta|_N \frac{\partial}{\partial x} = h \quad \text{et} \quad \delta|_N \frac{\partial}{\partial y} = k$$

où h et k sont deux fonctions, imposées, de (u, v, t) . Il suffit de prendre $\delta = d(hx + ky)$.

LEMME 3. *Au voisinage de tout point de N , il existe une forme de contact γ telle que $i^*\gamma = df$, $d\gamma|_N = \beta$, $\gamma|_N(JU) = \gamma|_N(JV) = 0$.*

Démonstration. C'est un corollaire immédiat des Lemmes 1 et 2.

Evidemment, la forme α vérifie les propriétés du Lemme 3 sur un voisinage de ∂N , si on tient compte de la Remarque 11.2.

On peut assembler des formes de contact locales données par le Lemme 3, à l'aide d'une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement (fini) de N par des ouverts (de l'espace ambiant) convenables. La forme de contact α (éventuellement restreinte à un voisinage plus petit de \bar{A}) peut ainsi se prolonger à un voisinage de $\varphi(S^3)$, avec toutes les propriétés voulues pour la forme induite sur S^3 . Si, de plus, la condition de trivialité du fibré complexe (F, J) est satisfaite (cf. §9), cette forme de contact peut être prolongée à \mathbb{R}^5 par le h -principe de M. Gromov [G5].

REFERENCES

- [Ar1] V. I. ARNOLD, *Characteristic class entering in quantization conditions*. Funkt. Anal. i Ego Pril. 1, 1–14 (1967). Traduction.
- [Ar2] V. I. ARNOLD, *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*. Editions Mir, 1976.
- [Au] M. AUDIN, *Fibrés normaux d'immersions en dimension double, points doubles d'immersions lagrangiennes et plongements totalement réels*. Comment. Math. Helvetici 63, 593–623 (1988).
- [A-R] P. AHERN, W. RUDIN, *Totally real embeddings of S^3 in \mathbb{C}^3* . Proc. Amer. Math. Soc. 94, 460–462 (1985).
- [B-P] L. BATES, G. PESCHKE, *A remarkable symplectic structure*. Preprint, 1989.
- [B] D. BENNEQUIN, *Entrelacements et équations de Pfaff*. Thèse, Université Paris VII, 1982.
- [Ei] Y. ELIASHBERG, *Rigidity of symplectic and contact structures*. Prépublication, 1981.
- [G1] M. GROMOV, *Stable mappings of foliations into manifolds*. Izv. Akad. Nauk SSSR 33 (1969). Math. USSR Izvestiya 3, 671–694 (1969).

- [G2] M. GROMOV, *A topological technique for the construction of solutions of differential equations and inequalities*. Actes, Congrès intern. Math. 2, 1970 221–225.
- [G3] M. GROMOV, *Convex integration of differential relations*. I. Izv. Akad. Nauk SSSR 37 (1973). Math. USSR Izvestiya 7, 329–343 (1973).
- [G4] M. GROMOV, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*. Invent. Math. 82, 307–347 (1985).
- [G5] M. GROMOV, *Partial Differential Relations*. Springer-Verlag, 1986.
- [G6] M. GROMOV, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds II*. Springer-Verlag (A paraître).
- [Ha] A. HAEFLIGER, *Lectures on the theorem of Gromov*. Proc. Liverpool Singularities Symp. II. Lecture Notes in Math. 209, 128–141 (1971).
- [Ka] T. KAWASHIMA, *Some remarks on lagrangian imbeddings*. J. Math. Soc. Japan 33, 281–294 (1981).
- [L] J. A. LEES, *On the classification of Lagrange immersions*. Duke Math. J. 43, 217–224 (1976).
- [MD] D. McDUFF, *Symplectic structures on \mathbb{R}^{2n}* . Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie VI, Hermann 1987.
- [M] V. P. MASLOV, *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*. (En russe). Izdat. Moskov. Gos. Univ. 1965.
- [Mu] M. P. MULLER, *Une sphère lagrangienne plongée dans une structure symplectique complète sur \mathbb{R}^6* . Géometrie Symplectique et Mécanique, La Grande Motte 1988. Lecture Notes in Math. 1416, Springer-Verlag, 1990.
- [Si] J. C. SIKORAV, *Non-existence de sous-variété lagrangienne exacte dans \mathbb{C}^n (d'après Gromov)*. Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie VI, Hermann 1987.
- [Sm] S. SMALE, *The classification of immersions of spheres in euclidean spaces*. Ann. of Math. 69, 327–344 (1959).
- [Wei] A. WEINSTEIN, *Some problems in symplectic geometry*. Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie VI, Hermann 1987.
- [WeI] R. O. WELLS Jr., *Compact real submanifolds of a complex manifold with nondegenerate holomorphic tangent bundle*. Math. Ann. 179, 123–129 (1969).
- [Wh] H. WHITNEY, *The singularities of a smooth n-manifold in (2n-1) space*. Ann. of Math. 45, 247–293 (1944).

Université Louis Pasteur
 Département de Mathématique
 7 rue René Descartes
 F-67 084 Strasbourg cedex (France)

Received December 21, 1989