Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 65 (1990)

Artikel: Classes caractéristiques pour les cônes projectifs et homologie d'intersection.

Autor: Brasselet, J.-P. / Fieseler, K.-H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-49744

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 18.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 65 (1990) 581–602 0010-2571/90/040581-22$1.50 + 0.20/0
© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel

Classes caractéristiques pour les cônes projectifs et homologie d'intersection

JEAN-PAUL BRASSELET, KARL-HEINZ FIESELER et LUDGER KAUP

En hommage à Jean Louis Verdier

1. Le problème

L'étude des variétés singulières a fait de récents progrès dans deux directions: d'une part les constructions, en homologie, des classes de Chern des ensembles analytiques complexes, dues à M. H. Schwartz et à R. MacPherson; d'autre part la définition de l'homologie d'intersection (M. Goresky et R. MacPherson), dans laquelle l'intersection de deux cycles est encore un cycle. Ainsi, si on veut définir des nombres de Chern pour des ensembles analytiques complexes, il faut pouvoir relever les classes de Chern en homologie d'intersection. Des résultats négatifs ont été obtenus. Dans [BrGo2], on donne de tels exemples, inspirés de J. L. Verdier et de M. Goresky, construits comme cônes projectifs sur une surface projective lisse, donc comme espaces à singularités isolées. On considère, ici, ces constructions d'une manière plus systématique. Pour des exemples à singularités non isolées d'un côté, et des théorèmes de permanence d'un autre côté, nous démontrons d'abord le résultat suivant permettant le calcul des classes de Chern des cônes projectifs itérés pour l'homologie à coefficients entiers:

(1.1) THÉORÈME. *Soit* $Y \hookrightarrow \mathbb{P}_N$, *variété projective, et* $\iota : Y \hookrightarrow KY$ *l'inclusion canonique dans* KY, *le cône projectif sur* Y, *de sommet* $\{s\}$. *En notant également* $K : H_\bullet(Y) \to H_{\bullet+2}(KY)$ *le "cône projectif homologique"* (2.1), *on a*

$$(1.2)\quad c_j(KY) = \iota_\bullet c_j(Y) + Kc_{j-1}(Y),$$

où $Kc_{-1}(Y)$ *désigne la classe* $[s] \in H_0(KY)$.

Considérons maintenant l'homologie d'intersection $I_{\mathfrak{p}}H_\bullet(Y)$, définie comme l'hypercohomologie $\mathbb{H}^{2\dim Y-\bullet}(Y, \mathscr{P}^\bullet_{\mathfrak{p}})$ du complexe de Deligne $\mathscr{P}^\bullet_{\mathfrak{p}}$. Pour deux

perversités $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ on pose $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{P}^{\bullet}_{\mathfrak{o}} \arrow[dl, "\mu_{\mathfrak{o}\mathfrak{p}}"'] \arrow[dr, "\mu_{\mathfrak{o}\mathfrak{q}}"] & \\ \mathscr{P}^{\bullet}_{\mathfrak{p}} \arrow[rr, "\mu_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}"] & & \mathscr{P}^{\bullet}_{\mathfrak{q}} \end{tikzcd}$$

avec les morphismes canoniques de comparaison $\mu_{\mathfrak{o}\mathfrak{p}}$ et $\mu_{\mathfrak{o}\mathfrak{q}}$. Cette relation dépend de la pseudovariété et des coefficients en question; pour les détails voir [FiKp 3, §2]. L'ordre partiel $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ est une extension naturelle de l'ordre partiel $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{q}$; il est compatible avec l'identification des perversités suivant "quasi-isomorphie".

(1.3) THÉORÈME. *Soit* $\mathfrak{p}$ *une perversité telle que* $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$. *Si les classes de Chern de Y sont dans l'image de l'homologie d'intersection à coefficients rationnels pour la perversité* $\mathfrak{p}$, *il en est de même des classes de Chern de KY.*

Ce résultat sera démontré dans §6, dans une situation plus générale.

(1.4) COROLLAIRE. *Si Y est une variété homologique rationnelle, les classes de Chern d'un cône itéré de Y sont dans l'image de l'homologie d'intersection à coefficients rationnels pour chaque perversité* $\mathfrak{p}$ *telle que* $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$.[1]

Démonstration. Comme une variété homologique rationelle est irréductible en chaque point, on a des isomorphismes

$$H^{2\dim Y - j}(Y, \mathbb{Q}) \cong I_{\mathfrak{o}}H_j(Y, \mathbb{Q}) \cong I_{\mathfrak{p}}H_j(Y, \mathbb{Q}) \cong I_{\mathfrak{t}}H_j(Y, \mathbb{Q}) \cong H_j(Y, \mathbb{Q}).$$

Donc $c_{\bullet}(Y)$ est dans l'image de l'homologie d'intersection à coefficients rationnels, quelque soit la perversité $\mathfrak{p}$, et le résultat découle de (1.3). □

2. Le cône projectif homologique

Pour toute application de variétés projectives algébriques complexes $f: X \to Y$, nous noterons $f_{\bullet}$ l'application induite en homologie et f_* l'application induite sur

---

[1]) Ce résultat démontre, dans un cas particulier, la conjecture suivant laquelle, pour les coefficients rationnels, les classes de Chern des variétés algébriques sont dans l'image de l'homologie d'intersection. D'après Goresky et MacPherson, cette conjecture se ramène à la démonstration d'un "Moving Lemma" relatif au cycles d'intersection.

les fonctions constructibles. L'application f_* est définie par la condition

$$f_*(1_V)(y) = \chi(f^{-1}(y) \cap V)$$

pour toute fonction caractéristique 1_V d'un sous-ensemble ouvert $V \subset X$. Dans [MPh, Prop. 1], MacPherson démontre l'existence d'une unique transformation naturelle $c_\bullet$ du foncteur "fonctions constructibles" dans le foncteur "homologie entière" telle que:

(1) $c_\bullet(\alpha + \beta) = c_\bullet(\alpha) + c_\bullet(\beta)$;
(2) $f_\bullet c_\bullet(\alpha) = c_\bullet(f_*\alpha)$;
(3) $c_\bullet(X) = P(X)(c^\bullet(X))$,

si X est une variété lisse de classe de Chern cohomologique $c^\bullet(X)$ et où $P(X)$ désigne la dualité de Poincaré sur X.

Considérons Y, variété projective de dimension (complexe) n, plongée dans $\mathbb{P}_N$ et notons L la restriction du fibré hyperplan de $\mathbb{P}_N$ à Y. On appelle E le complété projectif de l'espace total de L, c'est-à-dire $\mathbb{P}(L \oplus 1_Y)$ où 1_Y est le fibré trivial de rang (complexe) 1 sur Y. La projection canonique $p : E \to Y$ admet deux sections, nulle et infinie, d'images $Y_{(0)}$ et $Y_{(\infty)}$. Le cône projectif KY s'obtient par quotient de E en contractant $Y_{(\infty)}$ en un point $\{s\}$. KY est l'espace de Thom associé au fibré L, de base Y.

En regardant $p : E \to Y$ comme un fibré en sphères S^2, sous-fibré d'un fibré $\bar{p} : \bar{E} \to Y$ en boules B^3, on a une classe de Thom $\vartheta_E \in H^3(\bar{E}, E)$ et une suite exacte de Gysin

$$\cdots \to H_{j+1}(Y) \to H_{j-2}(Y) \xrightarrow{\gamma} H_j(E) \xrightarrow{p_j} H_j(Y) \to \cdots;$$

dans laquelle le morphisme de Gysin γ est la composition de

$$H_{j-2}(Y) \xrightarrow{(\bar{p}_{j-2})^{-1}} H_{j-2}(\bar{E}) \xrightarrow{(\cap \vartheta_E)^{-1}} H_{j+1}(\bar{E}, E) \xrightarrow{\partial} H_j(E)$$

et s'explicite comme suit: Si ζ est un cycle représentant une classe $[\zeta]$ de $H_{j-2}(Y)$, $\gamma([\zeta])$ est la classe du cycle $p^{-1}(\zeta)$ dans $H_j(E)$.

Soit π la projection canonique $\pi : E \to KY$.

(2.1) DÉFINITION. On appelle cône projectif homologique, et on note encore K, l'application composée $K = \pi_\bullet \gamma : H_{j-2}(Y) \to H_j(KY)$ pour $j \geq 2$. Pour $0 = H_{-2}(Y)$, on pose $K(0) := [s] \in H_0(KY)$.

Remarquons que K est homomorphisme, sauf pour $j = 0$.

Le Théorème (1.1) est une conséquence directe de la proposition suivante (démontrée au paragraphe 5):

(2.2) PROPOSITION. *Les classes de Chern de E et de Y sont liées par la relation*

$$c_\bullet(E) = (1 + \eta_0 + \eta_\infty) \cap \gamma(c_\bullet(Y)),$$

où $\eta_j := c^1(\mathcal{O}(Y_{(j)})) \in H^2(E)$ *pour* $j = 0, \infty$, *et* $\cap$ *désigne le cap-produit usuel.*

(2.3) REMARQUE. Si Y est irréductible en chaque point, et si $\bullet$ désigne le produit d'intersection entre les groupes d'homologie d'intersection $I_0H_\bullet(E)$ et $I_tH_\bullet(E) \cong H_\bullet(E)$, on a

$$c_\bullet(E) = ([E] + [Y_{(0)}] + [Y_{(\infty)}]) \bullet \gamma(c_\bullet(Y)).$$

Démonstration du Théorème (1.1) à partir de la Proposition (2.2): Soit $\mathbf{1}_E$ la fonction constructible, constante, égale à 1 sur E, alors on a

$$\pi_*(\mathbf{1}_E)(x) = \begin{cases} \chi(Y), & \text{si } x = s \\ 1, & \text{sinon,} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\pi_*(\mathbf{1}_E) = \mathbf{1}_{KY} + (\chi(Y) - 1)\mathbf{1}_{\{s\}}.$$

Puisque

$$\pi_\bullet c_\bullet(\mathbf{1}_E) = c_\bullet(\pi_*(\mathbf{1}_E))$$

on en déduit

$$(2.4)\quad \pi_\bullet c_\bullet(E) = c_\bullet(KY) + (\chi(Y) - 1)[s].$$

D'autre part, l'image par $\pi_\bullet$ de l'équation de la Proposition (2.2) s'écrit:

$$(2.5)\quad \pi_\bullet c_\bullet(E) = \pi_\bullet\gamma(c_{\bullet-1}(Y)) + \pi_\bullet(\eta_0 \cap \gamma(c_\bullet(Y))) + \pi_\bullet(\eta_\infty \cap \gamma(c_\bullet(Y))).$$

Soient $\iota_0 : Y \hookrightarrow E$ et $\iota_\infty : Y \hookrightarrow E$ les inclusions de Y comme sections nulle et infinie de E, respectivement. Par définition de γ, on a, pour tout cycle ζ de Y et pour $j = 0$

ou ∞

$$\eta_j \cap \gamma([\zeta]) = (\iota_j)_\bullet([\zeta])$$

donc

$$\pi_\bullet(\eta_j \cap \gamma(c_\bullet(Y))) = \pi_\bullet \iota_{j\bullet} c_\bullet(\mathbf{1}_Y) = \pi_\bullet c_\bullet(\mathbf{1}_{Y_{(j)}}) = c_\bullet \pi_*(\mathbf{1}_{Y_{(j)}}).$$

Si $\iota = \pi \circ \iota_0 : Y \hookrightarrow KY$ désigne l'inclusion naturelle de Y dans KY, alors

$$\pi_*(\mathbf{1}_{Y_{(0)}}) = \mathbf{1}_{\iota(Y)} \quad \text{et} \quad \pi_*(\mathbf{1}_{Y_{(\infty)}}) = \chi(Y)\mathbf{1}_{\{s\}}.$$

Donc nous obtenons

$$\pi_\bullet(\eta_0 \cap \gamma(c_\bullet(Y))) = c_\bullet(\mathbf{1}_{\iota(Y)}) = \iota_\bullet c_\bullet(Y),$$

et

$$\pi_\bullet(\eta_\infty \cap \gamma(c_\bullet(Y))) = \chi(Y) c_\bullet(\mathbf{1}_{\{s\}}) = \chi(Y)[s],$$

où $[s]$ est la classe du sommet s dans $H_0(KY)$. La comparaison de (2.4) et de (2.5) nous donne alors:

$$c_\bullet(KY) = \iota_\bullet c_\bullet(Y) + \pi_\bullet \gamma c_{\bullet-1}(Y) + [s],$$

d'où le Théorème (1.1). □

3. Exemples de cônes projectifs

(1) *Espaces de Thom associés à des plongements.*

La construction précédente associe, canoniquement, un espace de Thom au plongement d'une variété lisse Y dans $\mathbb{P}_N$. A titre d'exemple considérons l'image du plongement de Segre $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_3$, défini en coordonées homogènes par

$$(x_0 : x_1) \times (y_0 : y_1) \mapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1),$$

et l'image du plongement de Veronese $\mathbb{P}_2 \hookrightarrow \mathbb{P}_5$ défini par

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2).$$

Avec la construction précédente, KY est l'espace de Thom associé au fibré L, de rang (complexe) 1 et restriction à Y du fibré hyperplan de $\mathbb{P}_N$. Les classes de Chern et l'homologie d'intersection de ces exemples ont été calculés dans [BrGo 1]: Dans le cas du plongement de Segre, soient d_1 et d_2 deux droites fixées appartenant chacune à un système de génératrices de la quadrique $Y = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. Notons ω le générateur canonique de $H^2(\mathbb{P}_1)$, il vient $c^\bullet(\mathbb{P}_1) = 1 + 2\omega$ et

$$\begin{aligned} c_\bullet(Y) &= c_\bullet(\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1) = ([Y] + 2[d_1]) \bullet ([Y] + 2[d_2]) \\ &= [Y] + 2([d_1] + [d_2]) + 4[a] \end{aligned}$$

où a est un point de Y et où $\bullet$ désigne l'intersection des cycles ou des classes d'homologie. On a donc

$$K(c_\bullet(Y)) = [KY] + 2([Kd_1] + [Kd_2]) + 4[Ka].$$

Notons $\sim$ l'homologie des cycles. Dans KY, on a [BrGo 1, §3] $Y \sim Kd_1 + Kd_2$, $d_1 \sim d_2 \sim Ka$ et $a \sim s$, d'où avec (1.1)

$$c_\bullet(KY) = \underbrace{[KY]}_{H_6(KY)} + \underbrace{3([Kd_1] + [Kd_2])}_{H_4(KY)} + \underbrace{8[Ka]}_{H_2(KY)} + \underbrace{5[s]}_{H_0(KY)},$$

ce qui est conforme au résultat de [BrGo 1].

Dans le cas du plongement de Veronese, soit d une droite projective (hyperplan) de $Y := \mathbb{P}_2$, on a: $c^\bullet(\mathbb{P}_2) = 1 + 3\omega + 3\omega^2$ où ω est le générateur canonique de $H^2(\mathbb{P}_2)$, dual par isomorphisme de Poincaré de la classe $[d] \in H_2(\mathbb{P}_2)$. Il vient, par dualité de Poincaré

$$c_\bullet(Y) = [Y] + 3[d] + 3[a]$$

où a est un point de Y. On a donc

$$K(c_\bullet(Y)) = [KY] + 3[Kd] + 3[Ka]$$

avec, dans KY, [BrGo 1, §3.b] $Y \sim 2Kd$, $d \sim 2Ka$ et $a \sim s$. Donc

$$c_\bullet(KY) = \underbrace{[KY]}_{H_6(KY)} + \underbrace{5[Kd]}_{H_4(KY)} + \underbrace{9[Ka]}_{H_2(KY)} + \underbrace{4[s]}_{H_0(KY)}. \qquad \square$$

(2) *Cônes projectifs itérés.*

Notons K^2Y le cône sur KY, de sommet $\tilde{s}$. Il vient, dans le cas du plongement de Segre

$$K(c_\bullet(KY)) = [K^2Y] + 3([K^2d_1] + [K^2d_2]) + 8[K^2a] + 5[Ks]$$

et donc

$$c_\bullet(K^2Y) = [K^2Y] + 4([K^2d_1] + [K^2d_2]) + 14[K^2a] + 13[Ks] + 6[\tilde{s}].$$

Dans le cas du plongement de Veronese, on a

$$K(c_\bullet(KY)) = [K^2Y] + 5[K^2d] + 9[K^2a] + 4[Ks]$$

et donc

$$c_\bullet(K^2Y) = [K^2Y] + 7[K^2d] + 19[K^2a] + 13[Ks] + 5[\tilde{s}]$$

etc . . .

(3) Considérons une variété algébrique projective X de dimension m, homéomorphe à un cône itéré sur une hypersurface lisse de degré g dans $\mathbb{P}_d$ [FiKp 1]. On sait que X est homéomorphe à la variété

$${}_mX_d^g := \left\{[z] \in \mathbb{P}_{m+1} : \sum_{i=0}^{d} z_i^g = 0\right\},$$

et que le lieu singulier de ${}_mX_d^g$ est $\{[z]; (0, \ldots, 0, z_{d+1}, \ldots, z_{m+1})\} \cong \mathbb{P}_{m-d}$.

Le calcul des groupes d'homologie d'intersection de ${}_mX_d^g$ a été fait dans [FiKp 1, (2.1)]. Ici, on s'intéresse aux classes caractéristiques de ${}_mX_d^g$:

Si $d = m + 1$, alors, $Z := {}_mX_{m+1}^g$ est lisse. On a pour les fibrés tangents

$$T\mathbb{P}_{m+1}|_Z = TZ \oplus N$$

où le fibré normal N est isomorphe à $L^{\otimes g}|_Z$ (L est la restriction à Z du fibré hyperplan de $\mathbb{P}_{m+1}$). Soient ω le générateur canonique de $H^2(\mathbb{P}_{m+1})$ et $\tilde{\omega}$ son image dans $H^2(Z)$ par l'inclusion $Z \hookrightarrow \mathbb{P}_{m+1}$; on a

$$c^\bullet({}_mX_{m+1}^g) = \iota^\bullet c^\bullet(\mathbb{P}_{m+1})/c^\bullet(gH) = (1 + \tilde{\omega})^{m+2}/(1 + g\tilde{\omega}).$$

Les classes de Chern cohomologiques de ${}_mX_{m+1}^g$ s'expriment en fonction de $\tilde{\omega}$ et de ses puissances, c'est-à-dire qu'en homologie, et en notant H un hyperplan générique,

elles s'expriment en fonction de la classe duale $[{}_mX^g_{m+1} \cap H]$ de $\tilde{\omega}$, de la classe duale $[{}_mX^g_{m+1} \cap H \cap H']$ de $\tilde{\omega}^2$, où H' est un autre hyperplan générique transverse à H, etc...

Si $d = m$, alors, ${}_mX^g_m$ est un cône projectif sur la variété lisse ${}_{m-1}X^g_m$. On est dans la situation du Théorème (1.1). Pour calculer les classes de Chern homologiques de ${}_mX^g_m \cong K({}_{m-1}X^g_m)$, il faut donc déterminer les relations liant, en homologie, $[{}_{m-1}X^g_m]$ et $[K({}_{m-1}X^g_m \cap H)]$ ainsi que celles liant $[{}_{m-1}X^g_m \cap H]$ et $[K({}_{m-1}X^g_m \cap H \cap H')]$, etc...

Par exemple, si $Z \hookrightarrow \mathbb{P}_3$ est lisse et de degré g, il vient, à l'aide de (4.3):

$$H_j(KZ) \cong \begin{cases} H_4(Z) & j=6 \\ H_2(Z) & j=4 \\ H_0(Z) & j=2 \\ \mathbb{Z} & j=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad H_j(K^2Z) \cong \begin{cases} H_4(Z) & j=8 \\ H_2(Z) & j=6 \\ H_0(Z) & j=4 \\ \mathbb{Z} & j=2 \\ \mathbb{Z} & j=0 \end{cases}$$

modulo ces isomorphismes, les classes de Chern des cônes KZ et K^2Z sont données par:

$$c_j(KZ) = \begin{cases} [Z] & j=6 \\ (5-g)[H] & j=4 \\ g(g^2-5g+10)\{pt\} & j=2 \\ 1+g(g^2-4g+6) & j=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad c_j(K^2Z) = \begin{cases} [Z] & j=8 \\ (6-g)[H] & j=6 \\ g(g^2-6g+15)\{pt\} & j=4 \\ 1+g(2g^2-9g+16) & j=2 \\ 2+g(g^2-4g+6). & j=0 \end{cases}$$

4. Autre expression du Théorème (1.1)

Notons $L' = L \setminus Y_{(0)}$, le fibrè en droites complexes L privé de la section nulle. Si $\vartheta_L \in H^2(L, L')$ désigne la classe de Thom de L, et $q := p|_L : L \to Y$ la projection de L sur Y, on a une composition d'isomorphismes notée K', pour $i \geq 2$

$$H_{i-2}(Y) \xleftarrow{q_{i-2}} H_{i-2}(L) \xleftarrow{\cap \vartheta_L} H_i(L, L') \xrightarrow{\alpha} H_i(KY, KY \setminus Y_{(0)}) \xleftarrow{\beta} H_i(KY, s) \leftarrow H_i(KY)$$

où α est l'isomorphisme d'excision et β est induit par l'inclusion $(KY, \{s\}) \subset (KY, KY \setminus Y_{(0)})$.

(4.1) PROPOSITION. *Le morphisme composé K' s'identifie à K.*

Cela vient, essentiellement, de ce que ϑ_E est image de ϑ_L par l'application composée:

$$H^2(L, L') \cong H^2(L \cup Y_{(\infty)}, L' \cup Y_{(\infty)}) \to H^2(L \cup Y_{(\infty)}) = H^2(E) \xrightarrow{\partial} H^3(\bar{E}, E). \qquad \square$$

(4.2) COROLLAIRE. *Soit ζ un cycle de dimension au moins deux de Y, sous-variéte de $\mathbb{P}_N$. Son image $\iota_\bullet(\zeta)$ dans le cône projectif KY est homologue à $K(\zeta \cap c^1(L))$.*

Démonstration. Grace à (4.1), il suffit de vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_j(Y) & \xleftarrow{\cong} & H_j(L) = H_j(KY\backslash s) \\ \downarrow{\scriptstyle \cap c^1(L)} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_j} \\ H_{j-2}(Y) & \xrightarrow{K'} & H_j(KY) \end{array}$$

commute. □

Il est facile de calculer l'homologie de KY: Etant donnée une décomposition cellulaire de Y, on en déduit une décomposition cellulaire de KY en faisant correspondre à chaque cellule σ de Y la cellule $K\sigma$, cône sur σ, et en ajoutant le sommet s comme cellule de dimension 0. En homologie, il vient

(4.3) PROPOSITION

$$H_j(KY) \cong \begin{cases} H_{j-2}(Y), & j \geq 2 \\ 0, & j = 1 \\ R, & j = 0. \end{cases}$$

On en déduit à l'aide du Théorème (1.1):

(4.4) PROPOSITION. *Les classes de Chern du cône KY sont égales à*

$$c_j(KY) = K(c_j(Y) \cap c^1(L) + c_{j-1}(Y)) \quad \textit{pour } j > 0$$

et

$$c_0(KY) = \iota_\bullet c_0(Y) + [s].$$

Dans le cas des variétés qui sont irréductibles en chaque point, on peut remplacer le cap-produit entre l'homologie et la cohomologie par le produit d'intersection, en homologie, plus géométrique:

(4.5) REMARQUE. Soit $Y \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ irréductible en chaque point et H un hyperplan générique de $\mathbb{P}_N$.

(1) Soit ζ un cycle de dimension ≥ 2 de Y, et $\iota_\bullet(\zeta)$ son image dans le cône projectif $KY \hookrightarrow \mathbb{P}_{N+1}$. Alors $\iota_\bullet(\zeta)$ est homologue à $K(\zeta \cap H)$ dans KY.

(2) Pour les classes de Chern, il vient

$$c_j(KY) = K(c_j(Y) \bullet H + c_{j-1}(Y)) \text{ pour } j > 0$$

et

$$c_0(KY) = \iota_\bullet c_0(Y) + [s].$$

5. Démonstration de la Proposition (2.2)

(a) *Cas où Y est lisse.*

Supposons Y lisse, de dimension complexe n. Le fibré tangent vertical T_v de $p : E \to Y$ est défini par la suite exacte:

$$0 \to T_v \to TE \to p^*TY \to 0.$$

On en déduit, dans $H^\bullet(E)$

$$(5.1) \quad c^\bullet(E) = c^\bullet(T_v) \cup c^\bullet(p^*(TY)).$$

Le faisceau des sections du fibré T_v est le faisceau canoniquement associé au diviseur $Y_{(0)} + Y_{(\infty)}$, noté $\mathcal{O}_E(Y_{(0)} + Y_{(\infty)})$. Par isomorphisme de Poincaré, dans Y, le diviseur $[Y_{(j)}] \in H_{2n}(E)$ s'identifie à la classe $\eta_j \in H^2(E)$. La classe de Chern de T_v est donc

$$c^\bullet(T_v) = 1 + \eta_0 + \eta_\infty.$$

D'après la définition de l'homomorphisme de Gysin γ, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^i(Y) & \xrightarrow{\cap[Y]} & H_{2n-i}(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle p^i} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ H^i(E) & \xrightarrow{\cap[E]} & H_{2n+2-i}(E). \end{array}$$

D'où, par dualité de Poincaré

$$(5.2)\quad c^{\bullet}(p^{*}(TY)) \cap [E] = p^{\bullet}(c^{\bullet}(TY)) \cap [E]$$
$$= \gamma(c^{\bullet}(TY) \cap [Y])$$
$$= \gamma(c_{\bullet}(Y)).$$

Des formules (5.1) et (5.2), on déduit

$$c_{\bullet}(E) = (1 + \eta_0 + \eta_\infty) \cap \gamma(c_{\bullet}(Y))$$

ce qui est la Propositon (2.2) □

(b) *Démonstration dans le cas où Y est singulier.*
Considérons une résolution des singularités

$$\rho_Y : \tilde{Y} \to Y.$$

et supposons données des stratifications $\boldsymbol{Y}$ de Y:

$$Y_0 \subset \cdots \subset Y_n = Y$$

et $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ de $\tilde{Y}$ telles que ρ_Y soit une application stratifiée. Chaque strate $S_j = Y_j \setminus Y_{j-1}$ de Y se décompose sous la forme $S_j = \bigcup_{k=1}^{r_j} S_{jk}$ en composantes connexes. On pose $Y_{jk} := \bar{S}_{jk}$ et on note σ_{jk} l'inclusion de Y_{jk} dans Y. On pose

$$\tilde{E} := (\rho_Y)^{*}(E) \quad \text{et} \quad E_{jk} := (\sigma_{jk})^{*}(E),$$

ce qui fournit deux diagrammes de fibrés image réciproque:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} & \xrightarrow{\rho_E} & E \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{p}} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \tilde{Y} & \xrightarrow{\rho_Y} & Y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} E_{jk} & \xrightarrow{\tau_{jk}} & E \\ \downarrow{\scriptstyle p_{jk}} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y_{jk} & \xrightarrow{\sigma_{jk}} & Y. \end{array}$$

(5.3) LEMME. *Il existe des entiers μ_{jk} tels que*

$$(*)\quad (\rho_Y)_{*}\mathbf{1}_{\tilde{Y}} = \mathbf{1}_Y + \sum_{j<n} \sum_{k=1}^{r_j} \mu_{jk} \mathbf{1}_{Y_{jk}},$$

$$(**)\quad (\rho_E)_{*}\mathbf{1}_{\tilde{E}} = \mathbf{1}_E + \sum_{j<n} \sum_{k=1}^{r_j} \mu_{jk} \mathbf{1}_{E_{jk}}.$$

Démonstration. Pour la fonction constructible $\mathbf{1}_{\tilde{Y}}$, égale à 1 sur $\tilde{Y}$, on peut définir les entiers μ_{jk} satisfaisant (*), par récurrence décroissante sur j, de la facon

suivante. Posons $\mu_{nk} = 1$ quelque soit k. On a

$$(\rho_Y)_*(\mathbf{1}_{\bar{Y}})(y) = \chi(\rho_{\bar{Y}}^{-1}(y)) = 1 \text{ pour } y \in S_{nk},$$

et, pour $j < n$ et $y \in S_{jk}$, on pose:

$$\mu_{jk} := \chi(\rho_{\bar{Y}}^{-1}(y)) - \sum_{j < j' \leq n, k'} \mu_{j'k'}$$

où la sommation est étendue aux strates $S_{j'k'}$ telles que $S_{jk} \subset \bar{S}_{j'k'}$.—Si $e \in p^{-1}(y)$, on trouve

$$(\rho_E)_*(\mathbf{1}_{\bar{E}})(e) = \chi(\rho_{\bar{E}}^{-1}(e)) = \chi(\rho_{\bar{Y}}^{-1}(y)),$$

d'où la formule (**). □

Soit Z une variété projective et $\varphi : Z \to Y$ une application (continue). On note φ^*E le fibré image réciproque de E par φ. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \varphi^*E & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & E \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{p}} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Z & \xrightarrow{\varphi} & Y. \end{array}$$

Comme les fibres du fibré φ^*E sur Z sont des sphères S^2, on a un morphisme de Gysin

$$\tilde{\gamma} : H_{j-2}(Z) \to H_j(\varphi^*E)$$

satisfaisant

(5.4) $\tilde{\varphi}_\bullet \tilde{\gamma} = \gamma \varphi_\bullet$;

on en déduit le lemme:

(5.5) LEMME. *Soit $a \in H^\bullet(E)$ et $b \in H_\bullet(Z)$, on a, dans $H_\bullet(E)$*

$$\tilde{\varphi}_\bullet(\tilde{\varphi}^\bullet(a) \cap \tilde{\gamma}(b)) = a \cap \gamma(\varphi_\bullet(b)).$$ □

Nous utiliserons ce lemme dans deux cas particuliers:

(1) si φ est l'application $\rho_Y : \tilde{Y} \to Y$, $a := (1 + \eta_0 + \eta_\infty)$ et $b := c_\bullet(\tilde{Y})$:

$$(5.6)\quad (\rho_E)_\bullet((1 + \tilde{\eta}_0 + \tilde{\eta}_\infty) \cap \tilde{\gamma}(c_\bullet(\tilde{Y}))) = (1 + \eta_0 + \eta_\infty) \cap \gamma((\rho_Y)_\bullet(c_\bullet(\tilde{Y})))$$

avec (pour $j = 0, 1$)

$$\tilde{\eta}_j := c^1(\mathcal{O}(\tilde{Y}_{(j)})) = (\rho_E)^\bullet(c^1(\mathcal{O}(Y_{(j)}))) = (\rho_E)^\bullet(\eta_j);$$

(2) si φ est l'application $\sigma_{jk} : Y_{jk} \hookrightarrow Y$, $a := (1 + \eta_0 + \eta_\infty)$ et $b := c_\bullet(Y_{jk})$:

$$(5.7)\quad (\tau_{jk})_\bullet((1 + \eta_{0jk} + \eta_{\infty jk}) \cap \gamma_{jk}(c_\bullet(Y_{jk}))) = (1 + \eta_0 + \eta_\infty) \cap \gamma((\sigma_{jk})_\bullet(c_\bullet(Y_{jk}))),$$

où (par exemple)

$$\eta_{0jk} := (\tau_{jk})^\bullet(\eta_0) = (\tau_{jk})^\bullet(c^1(\mathcal{O}(Y_0))) = c^1(\mathcal{O}(Y_0 \cap Y_{jk})).$$

Fin de la démonstration de la Proposition (2.2):

La proposition se démontre par récurrence croissante sur n. Si $n = 0$, elle est évidente. Supposons la formule vraie pour toute variété (singulière) de dimension strictement inférieure à $n = \dim Y$ et montrons qu'elle est vraie pour Y:

Comme $\tilde{E}$ est lisse, on a d'après le cas (a)

$$c_\bullet(\tilde{E}) = (1 + \tilde{\eta}_0 + \tilde{\eta}_\infty) \cap \tilde{\gamma}(c_\bullet(\tilde{Y})).$$

En prenant les images par $(\rho_E)_\bullet$, et en utilisant la Formule (5.6), il vient

$$(5.8)\quad (\rho_E)_\bullet c_\bullet(\tilde{E}) = (1 + \eta_0 + \eta_\infty) \cap \gamma((\rho_Y)_\bullet(c_\bullet(\tilde{Y})))$$

où

$$(\rho_E)_\bullet c_\bullet(\tilde{E}) = (\rho_E)_\bullet c_\bullet(\mathbf{1}_{\tilde{E}}) = c_\bullet((\rho_E)_* \mathbf{1}_{\tilde{E}})$$

et

$$(\rho_Y)_\bullet c_\bullet(\tilde{Y}) = (\rho_Y)_\bullet c_\bullet(\mathbf{1}_{\tilde{Y}}) = c_\bullet((\rho_Y)_* \mathbf{1}_{\tilde{Y}}).$$

Donc, d'après le Lemme (5.3), la Formule (5.8) devient:

$$c_\bullet(E) + \sum_{j<n} \sum_{k=1}^{r_j} \mu_{jk}(\tau_{jk})_\bullet(c_\bullet(E_{jk}))$$
$$= (1+\eta_0+\eta_\infty) \cap \gamma\left(c_\bullet(Y) + \sum_{j<n} \sum_{k=1}^{r_j} \mu_{jk}(\sigma_{jk})_\bullet(c_\bullet(Y_{jk}))\right).$$

Par hypothèse de récurrence, pour $j<n$, on a

$$c_\bullet(E_{jk}) = (1+\eta_{0jk}+\eta_{\infty jk}) \cap \gamma_{jk}(c_\bullet(Y_{jk})),$$

d'où la proposition, en utilisant (5.7). □

6. Théorèmes de permanence

Soit Y une variété projective algébrique de dimension complexe n et R un anneau principal de caractéristique nulle (on considérera, en fait, les cas $R=\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$). La formule de la Proposition (4.3) donnant l'homologie de KY reste valable pour l'anneau R. La situation est plus compliquée pour l'homologie d'intersection. Pour un plongement $Y \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ donné, soit $c^1(L) \in H^2(Y, R)$ la classe d'Euler du fibré L, restriction du fibré L, restriction du fibré hyperplan de $\mathbb{P}_N$ à Y. Elle définit une classe d'homologie d'intersection dans $I_0H_{2n-2}(Y, R)$, encore notée $c^1(L)$. Pour chaque perversité $\mathfrak{p}$, posons

$$\nu := 2\dim(KY) - 1 - \mathfrak{p}(2\dim(KY)).$$

On sait [FiKp 2, 3.5]:

(6.1) PROPOSITION. *L'homologie d'intersection du cône KY se calcule comme ci-dessous*:

$$I_\mathfrak{p}H_j(KY, R) \cong \begin{cases} I_\mathfrak{p}(H_{j-2}(Y, R), & j>\nu \\ \operatorname{Im}(I_\mathfrak{p}H_j(Y, R) \xrightarrow{\cap c^1(L)} I_\mathfrak{p}H_{j-2}(Y, R)), & j=\nu \\ I_\mathfrak{p}H_j(Y, R), & j<\nu. \end{cases}$$

Pour toute perversité $\mathfrak{p}$ on a un homomorphisme de comparaison naturel

$$\omega_Y^\mathfrak{p} : I_\mathfrak{p}H_j(Y, R) \to I_\mathfrak{t}H_j(Y, R) \to H_j(Y, R);$$

il est surjectif pour $j = 0$ et dans ce cas, le Théorème (1.3) est évident. Il suffit donc de considérer les degrés $j \geq 1$.

Dans tout ce qui suit, nous fixons un entier $j \geq 1$.

(6.2) LEMME. *Supposons qu'il existe, pour* $i = j - 1$ *et* j, *des éléments* $\xi_i \in I_{\mathfrak{p}} H_{2i}(Y)$ *tels que* $\omega_Y^{\mathfrak{p}}(\xi_i) = c_i(Y)$. *Alors, on a*

$$c_j(KY) = K\omega_Y^{\mathfrak{p}}(\xi_j \cap c^1(L) + \xi_{j-1}) \in \operatorname{Im} K\omega_Y^{\mathfrak{p}}.$$

Démonstration. On a un diagramme commutatif à coefficients dans R

$$\begin{array}{ccc} I_{\mathfrak{p}} H_{2j}(Y) & \xrightarrow{\omega_Y^{\mathfrak{p}}} & H_{2j}(Y) \\ \downarrow \cap c^1(L) & & \downarrow \cap c^1(L) \\ I_{\mathfrak{p}} H_{2j-2}(Y) & \xrightarrow{\omega_Y^{\mathfrak{p}}} & H_{2j-2}(Y) \end{array}$$

d'où, dans $H_{2j-2}(Y)$,

$$c_j(Y) \cap c^1(L) = \omega_Y^{\mathfrak{p}}(\xi_j) \cap c^1(L) = \omega_Y^{\mathfrak{p}}(\xi_j \cap c^1(L)).$$

D'autre part, on utilise le résultat (4.4) pour $j > 0$:

$$\begin{aligned} c_j(KY) &= K(c_j(Y) \cap c^1(L) + c_{j-1}(Y)) \\ &= K(\omega_Y^{\mathfrak{p}}(\xi_j \cap c^1(L)) + \omega_Y^{\mathfrak{p}}(\xi_{j-1})) \\ &= K\omega_Y^{\mathfrak{p}}(\xi_j \cap c^1(L) + \xi_{j-1}). \end{aligned}$$

□

Les résultats de permanence pour la classe de Chern c_j dépendent de la relation entre j et v:

(a) Si $2j > v$, on a l'égalité $K\omega_Y^{\mathfrak{p}} = \omega_{KY}^{\mathfrak{p}} K$. En effet, la Proposition (6.1) induit un isomorphisme encore noté K (toujours à coefficients dans R),

$$K : I_{\mathfrak{p}} H_{2j-2}(Y) \to I_{\mathfrak{p}} H_{2j}(KY)$$

et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} I_{\mathfrak{p}} H_{2j-2}(Y) & \xrightarrow{\omega_Y^{\mathfrak{p}}} & H_{2j-2}(Y) \\ \downarrow K & & \downarrow K \\ I_{\mathfrak{p}} H_{2j}(KY) & \xrightarrow{\omega_{KY}^{\mathfrak{p}}} & H_{2j}(KY). \end{array}$$

On en déduit à l'aide de (6.2):

(6.3) PROPOSITION. *Si* $2j > v$ *et si* $c_{j-1}(Y)$, $c_j(Y) \in \operatorname{Im} \omega_Y^{\mathfrak{p}}$, *alors*

$c_j(KY) \in \operatorname{Im} \omega_{KY}^{\mathfrak{p}}$. □

Notons σ l'homomorphisme

$$\sigma : I_{\mathfrak{p}} H_{2j}(Y) \xrightarrow{\cap c^1(L)} I_{\mathfrak{p}} H_{2j-2}(Y).$$

(b) Si $2j = v$, alors (6.1) induit un isomorphisme $K : \operatorname{Im} \sigma \to I_{\mathfrak{p}} H_{2j}(Y)$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Im} \sigma & \xrightarrow{\omega_Y^{\mathfrak{p}}} & H_{2j-2}(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle K} & & \downarrow{\scriptstyle K} \\ I_{\mathfrak{p}} H_{2j}(KY) & \xrightarrow{\omega_{KY}^{\mathfrak{p}}} & H_{2j}(KY). \end{array}$$

Pour ξ_{j-1}, ξ_j comme dans (6.2), si on suppose $\xi_{j-1} \in \operatorname{Im} \sigma$, alors

$$\xi_j \cap c^1(L) + \xi_{j-1} \in I_{\mathfrak{p}} H_{2j-2}(Y)$$

est dans $\operatorname{Im} \sigma$. Dans ce cas, le Lemme (6.2) et l'égalité $K\omega_Y^{\mathfrak{p}} = \omega_{KY}^{\mathfrak{p}} K$ pour les éléments de $\operatorname{Im} \sigma$ montrent que $c_j(KY) \in \operatorname{Im} \omega_{KY}^{\mathfrak{p}}$. □

(c) Si $2j < v$, la Proposition (6.1) fournit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} I_{\mathfrak{p}} H_{2j}(Y) & \xrightarrow{\cap c^1(L)} & I_{\mathfrak{p}} H_{2j-2}(Y) & \xrightarrow{\omega_Y^{\mathfrak{p}}} & H_{2j-2}(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_{2j}} & & & & \downarrow{\scriptstyle K} \\ I_{\mathfrak{p}} H_{2j}(KY) & & \xrightarrow{\omega_{KY}^{\mathfrak{p}}} & & H_{2j}(KY). \end{array}$$

Supposons qu'il existe un $\eta_j \in I_{\mathfrak{p}} H_{2j}(Y)$ tel que $\eta_j \cap c^1(L) = \xi_{j-1}$. Alors,

$$c_j(KY) = K(\omega_Y^{\mathfrak{p}}((\xi_j + \eta_j) \cap c^1(L)) = \omega_{KY}^{\mathfrak{p}}(\iota_{2j}(\xi_j + \eta_j)).$$

Donc nous avons montré, par les deux derniers cas:

(6.4) PROPOSITION. *Pour* $2j \leq v$, *si* $c_{j-1}(Y) \in \operatorname{Im}(\omega_Y^{\mathfrak{p}} \circ \sigma)$ *et* $c_j(Y) \in \operatorname{Im} \omega_Y^{\mathfrak{p}}$, *alors* $c_j(KY) \in \operatorname{Im} \omega_{KY}^{\mathfrak{p}}$. □

La Proposition (6.3) s'applique aux cônes projectifs itérés $K^m Y$. A titre d'exemple nous montrons:

(6.5) COROLLAIRE. *Si la variété Y est une R-variété homologique, $m \geq 0$ et j tel que $2j > 2(n+m) - 1 - \mathfrak{p}(2n+2)$, alors il vient*

$$c_j(K^m Y) \in \operatorname{Im} \omega^{\mathfrak{p}}_{K^m Y}.$$

Nous faisons la démonstration par récurrence sur m. L'énoncé est évident pour $m = 0$, puisque $\omega^{\mathfrak{p}}_Y$ est un isomorphisme pour la variété homologique $Y = K^0 Y$. Soit $m \geq 1$ et supposons le résultat déjà établi pour $m - 1$. Par hypothèse de récurrence, les classes $c_{j-1}(K^{m-1}Y)$ et $c_j(K^{m-1}Y)$ sont dans $\operatorname{Im} \omega^{\mathfrak{p}}_{K^{m-1}Y}$ pour tout j tel que $2(j-1) > 2(n+m-1) - 1 - \mathfrak{p}(2n+2)$; alors, la Proposition (6.3) montre que

$$c_j(K^m Y) \in \operatorname{Im} \omega^{\mathfrak{p}}_{K^m Y}$$

pour tout j tel que

$$2j > \max\,(2(n+m) - 1 - \mathfrak{p}(2n+2), v) = 2(n+m) - 1 - \mathfrak{p}(2(n+2)),$$

puisque

$$v = 2(n+m) - 1 - \mathfrak{p}(2(n+m)) \leq 2(n+m) - 1 - \mathfrak{p}(2n+2). \qquad \square$$

Les Propositions (6.3) et (6.4) et le corollaire montrent, que, si σ est surjectif et si $c_j(Y) \in \operatorname{Im} \omega^{\mathfrak{p}}_Y$, alors $c_j(KY) \in \operatorname{Im} \omega^{\mathfrak{p}}_{KY}$. Il nous reste donc à énoncer des conditions, pour que l'homomorphisme

$$\sigma : I_{\mathfrak{p}} H_{2j}(Y) \xrightarrow{\cap c^1(L)} I_{\mathfrak{p}} H_{2j-2}(Y)$$

soit surjectif. Ceci est vrai, par exemple, dans la situation du Théorème (1.3), comme le montre la

Démonstration du Théorème (1.3): Soient $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ deux perversités telles que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, on a une factorisation

$$(6.6)\quad \omega^{\mathfrak{q}}_{KY} : I_{\mathfrak{q}} H_\bullet(KY) \xrightarrow{\mu_{\mathfrak{q}\mathfrak{p}}} I_{\mathfrak{p}} H_\bullet(KY) \xrightarrow{\omega^{\mathfrak{p}}_{KY}} H_\bullet(KY);$$

Donc, pour $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$, il suffit de considérer le cas $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, où l'on a $v = n + 1$. Pour $2j > n + 1$ la Proposition (6.3) montre $c_j(KY) \in \operatorname{Im} \omega^{\mathfrak{m}}_{KY}$. Pour $2j \leq n + 1$ on vérifie

l'hypothèse $\xi_{j-1} \in \operatorname{Im} \sigma$ de (6.4) à l'aide du théorème de Lefschetz difficile [BeBeDe]:

(6.7) THÉORÈME. *Pour $k \geq 1$ l'homomorphisme*

$$\cap c^1(L)^k : I_{\mathfrak{m}} H_{n+k}(Y, \mathbb{Q}) \to I_{\mathfrak{m}} H_{n-k}(Y, \mathbb{Q})$$

est un isomorphisme.

En particulier, pour $2j \leq n+1$ la décomposition

$$I_{\mathfrak{m}} H_{2n-2j+2}(Y, \mathbb{Q}) \to I_m H_{2j}(Y, \mathbb{Q}) \to I_{\mathfrak{m}} H_{2j-2}(Y, \mathbb{Q})$$

de l'homomorphisme $\cap c^1(L)^{n+2-2j}$ montre que l'homomorphisme

$$\sigma : I_{\mathfrak{m}} H_{2j}(Y) \xrightarrow{\cap c^1(L)} I_{\mathfrak{m}} H_{2j-2}(Y)$$

est surjectif. □

Le Théorème (1.3) ne traite pas les petites perversités. On peut, cependant, réduire ce cas aux propriétés d'un homomorphisme, appelé encore *homomorphisme de Gysin* [FiKp 2]

$$\gamma_i^{\mathfrak{p}} := \gamma_i : I_{\mathfrak{p}} H_i(Y, R) \to I_{\mathfrak{p}} H_{i-2}(A, R)$$

qui, pour une section hyperplane générique A d'une variété $Y \hookrightarrow \mathbb{P}_N$, associe à chaque classe ζ l'intersection $\zeta \cap A$.

(6.8) REMARQUE. Soit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m} + \mathbf{1}$ et j tel que $2j \leq \min(v, n+1)$. Si $c_{j-1}(Y)$, $c_j(Y) \in \operatorname{Im} \omega_Y^{\mathfrak{p}}$ et si l'homomorphisme de Gysin $\gamma_{2j} : I_{\mathfrak{p}} H_{2j}(Y) \to I_{\mathfrak{p}} H_{2j-2}(A)$ est surjectif, alors

$$c_j(KY) \in \operatorname{Im} \omega_{KY}^{\mathfrak{p}}.$$

Démonstration. On a une factorisation de σ dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} I_{\mathfrak{p}} H_{2j}(Y) & \xrightarrow{\cap [A]} & I_{\mathfrak{p}} H_{2j-2}(Y) \\ \downarrow \gamma_{2j} & & \uparrow \lambda_{2j-2} \\ I_{\mathfrak{p}} H_{2j-2}(A) & = & I_{\mathfrak{p}} H_{2j-2}(A) \end{array}$$

où $\lambda_{2j-2} = \lambda^{\mathfrak{p}}_{2j-2}$ désigne l'homomorphisme de Lefschetz en homologie d'intersection associé à l'inclusion $A \hookrightarrow Y$. Comme $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m} + \mathbf{1}$ et $Y \backslash A$ est un espace de Stein, le Théorème (2.1). de [FiKp 2] montre que λ_i est surjectif pour $i \leq n-1$, donc en particulier pour $i = 2j-2$. Le résultat est alors une conséquence directe de (6.4) □

En échangeant les rôles de λ et de γ, on trouve d'une manière tout à fait analogue:

(6.9) REMARQUE. Soit $\mathfrak{m} - \mathbf{1} \subset \mathfrak{p}$ et j tel que $n+2 \leq 2j$. Si $c_{j-1}(Y)$, $c_j(Y) \in \operatorname{Im} \omega^{\mathfrak{p}}_Y$ et si l'homomorphisme de Lefschetz

$$\lambda_{2j-2} : I_{\mathfrak{p}} H_{2j-2}(A) \to I_{\mathfrak{p}} H_{2j-2}(Y)$$

est surjectif, alors $c_j(KY) \in \operatorname{Im} \omega^{\mathfrak{p}}_{KY}$. □

A titre d'exemple, nous appliquons ces remarques à l'homomorphisme (de dualité singulière) de Poincaré:

$$P_\bullet(Y) : H^{2n-\bullet}(Y) \to H_\bullet(Y).$$

(6.10) COROLLAIRE. *Supposons que Y soit en chaque point irréductible et topologiquement intersection complète; soit $c_\bullet(Y) \in \operatorname{Im} P_\bullet(Y)$. Si les homomorphismes $\gamma^{\mathfrak{o}}_{2j}$ sont surjectif pour $2j \leq n+1$, et si $\lambda^{\mathfrak{o}}_n$ est surjectif (pourvu que n soit un nombre pair), alors $c_\bullet(KY) \in \operatorname{Im} P_\bullet(KY)$.*

Démonstration. Comme Y est topologiquement normal, pour $Z := Y$ ou KY l'homomorphisme de comparaison

$$\omega^{\mathfrak{o}}_Z : I_{\mathfrak{o}} H_\bullet(Z) \to H_\bullet(Z)$$

n'est rien d'autre que l'homomorphisme (de dualité) de Poincaré

$$P_\bullet(Z) : H^{2n-\bullet}(Z) \to H_\bullet(Z),$$

donc, $c_\bullet(Y) \in \operatorname{Im} \omega^{\mathfrak{p}}_Y$ quelque soit $\mathfrak{p}$. D'autre part, pour les intersections localement topologiquement complètes, les perversités $\mathfrak{o}$ et $\mathfrak{m} - \mathbf{1}$ sont quasi-isomorphes [FiKp 1, 1.4]. Donc on peut choisir $\mathfrak{p} := \mathfrak{m} - \mathbf{1}$, de sorte que $v = n+2$. D'après (6.3) le résultat est acquis pour $2j > v$. Si $2j = v$, on applique le Remarque (6.9) à $c_j(KY)$. Enfin, pour $2j < v$ le résultat découle de (6.8). □

(6.11) EXEMPLE. Soit Y une intersection complète dans $\mathbb{P}_N$, et R-variété homologique à un nombre fini de singularités irréductibles près. Alors $c_j(KY) \in \operatorname{Im} \omega^{\mathfrak{p}}_{KY}$ pour $2j \notin [n-1, n+2]$, quelque soit la perversité $\mathfrak{p}$.

Démonstration. Comme Y est une intersection complète, il en est de même de KY. En particulier, les perversités $\mathfrak{o}$ et $\mathfrak{m} - \mathbf{1}$ sont quasi-isomorphes pour Y de même que pour KY, donc $\mathfrak{m} - \mathbf{1} \subset \mathfrak{p}$. D'aprés le Main Lemma [FiKp 3, 3.1], les homomorphismes $\omega^{\mathfrak{p}}_{Y,i}$ sont surjectifs pour $2n - i \leq a^R(\mathfrak{p}, \mathfrak{t})$ et $2n - i \geq 2n - 1 - b^R(\mathfrak{p}, \mathfrak{t})$, où les invariants $a^R(\mathfrak{p}, \mathfrak{t})$ et $b^R(\mathfrak{p}, \mathfrak{t})$ sont au moins égaux à $n-2$, puisque Y est une intersection complète à singularités isolées [FiKp 1, 1.2]. Donc $c_j(Y) \in \operatorname{Im} \omega^{\mathfrak{p}}_Y$ pour $2j \neq n, n+1$.

D'après la preuve de (6.10), il suffit de considérer le cas où $2j \leq n-2$.

Pour pouvoir utiliser la Remarque (6.8) (avec $\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$), il faut vérifier que γ_{2j} est surjectif. Dans notre situation on peut interpréter cet homomorphisme comme celui associé à l'inclusion $A \hookrightarrow Y$

$$\gamma^{2n-2j} : H^{2n-2j}(Y) \to H^{2n-2j}(A).$$

L'inclusion $\iota_Y : Y \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ induit un diagramme commutatif

$$(6.12)\quad \begin{array}{ccc} H^{2n-2j}(\mathbb{P}_N) & \xrightarrow{\cong} & H^{2n-2j}(\mathbb{P}_{N-1}) \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_Y^{2n-2j}} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_A^{2n-2j}} \\ H^{2n-2j}(Y) & \xrightarrow{\gamma^{2n-2j}} & H^{2n-2j}(A), \end{array}$$

où il faut analyser les homomorphismes ι^{2n-2j}. On a un deuxième diagramme commutatif

$$(6.13)\quad \begin{array}{ccc} H^{2n-2j}(\mathbb{P}_N) & \xrightarrow{\iota_Y^{2n-2j}} & H^{2n-2j}(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \cap[Y]} & & \downarrow{\scriptstyle \cap[Y]} \\ H_{2j}(\mathbb{P}_N) & \xleftarrow{\iota_{Y,2j}} & H_{2j}(Y), \end{array}$$

où la première flèche verticale est la multiplication par $g := \deg Y$, puisque $[Y]$ est homologue $g \cdot [\mathbb{P}_n]$ dans $\mathbb{P}_N$, et où la deuxième flèche verticale est l'homomorphisme de Poincaré et donc un isomorphisme pour $2j \leq n-1$ [Kp, 1.1]. D'après le théorème de Lefschetz facile, l'homomorphisme ι_{2j} est bijectif pour $2j \leq n-2$. En particulier, ι_Y^{2n-2j} est la multiplication par g pour $2j \leq \dim Y - 2$. La situation est plus facile pour ι_A^{2n-2j}: la variété A est une intersection complète de degré g dans $\mathbb{P}_{N-1}$ et une R-variété homologique; donc ι_A^{2n-2j} est la multiplication par g, y compris pour $2j \leq n$. Par conséquent, l'homomorphisme γ^{2n-2j} est une surjection. □

Même pour une surface normale $Y \hookrightarrow \mathbb{P}_3$ le classe de Chern $c_\bullet(Y)$ n'est pas forcément dans l'image de $\omega_Y^{\mathfrak{p}}$ pour $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, cf. [Fi]. Nous considérons pour les valeurs $2j$ restantes le cas le plus simple:

(6.14) EXEMPLE. Soit Y une intersection complète dans $\mathbb{P}_N$, qui est une R-variété homologique et telle que pour

n pair: $H_n(A) \to H_n(Y)$ est surjectif,

$H^n(Y) \to H^n(A)$ est surjectif si $b_n(Y, R) \neq 1$,

n impair: $H^{n-1}(Y) \to H^{n-1}(A)$ est surjectif.

Alors $c_\bullet(KY) \in \operatorname{Im} \omega_{KY}^{\mathfrak{p}}$ quelque soit la perversité $\mathfrak{p}$.

Démonstration. D'après l'exemple précédent il suffit de considérer les valeurs j telles que $2j \in [n-1, n+2]$. Pour $2j = n+2$, on peut appliquer la Remarque (6.9) grâce à $\mathfrak{p}_Y \cong \mathfrak{t}_Y$, tandis que, si $2j = n+1$, on se sert de la Remarque (6.8). Supposons maintenant que $2j \leq n$. Dans le Diagramme (6.13) l'homomorphisme $\cap[Y] : H^{2n-2j}(Y) \to H_{2j}(Y)$ est bijectif. Donc, ι_Y^{2n-2j} est la multiplication par g, pour $2j = n-1$; si $b_n(Y) \leq 1$, ce résultat s'étend à ι_Y^n, puisque ι_n est toujours surjectif. On a donc vérifié que γ^{2n-2j} est surjectif, et la Proposition (6.8) avec $\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ donne le résultat. □

BIBLIOGRAPHIE

[BeBeDe] BEILINSON, A.A., BERNSTEIN, J. et DELIGNE, P., Faisceaux pervers, Astérisque 100, (1982).

[Bo] BOREL, A., Intersection Cohomology. Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart 1984.

[BrGo 1] BRASSELET, J.-P. et GONZALEZ-SPRINBERG, G., *Espaces de Thom et contre-exemples de J. L. Verdier et M. Goresky*. Bol. Soc. Bras. Mat. vol. 17, n.2 (1986).

[BrGo 2] BRASSELET, J.-P. et GONZALEZ-SPRINBERG, G., *Sur l'homologie d'intersection et les classes de Chern des variétés singulières, avec un appendice de Jean-Louis Verdier: Un calcul triste.* Travaux en cours n° 23, 5–11 Hermann (1987).

[Fi] FIESELER, K.-H., *A signature formula for normal compact complex surfaces.* (Manuscript) 1988.

[FiKp 1] FIESELER, K.-H. et KAUP, L., *The vanishing invariants in intersection homology of complex spaces.* In *Singularities.* Banach Center Publ. *20*, 195–205 (1988).

[FiKp 2] FIESELER, K.-H. et KAUP, L., *Theorems of Lefschetz type in intersection homology, I. The hyperplane section theorem.* Revue roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées *33*, 175–195 (1988).

[FiKp 3] FIESELER, K.-H. et KAUP, L., *Quasi-isomorphic perversities and obstruction theory for pseudomanifolds.* In *Singularities.* Banach Center Publ. *20*, 165–193 (1988).

[GoMPh 1] GORESKY, M. et MACPHERSON, R., *Intersection Homology Theory.* Topology *19*, 135–162 (1980).

[GoMPh 2] GORESKY, M. et MACPHERSON, R., *Intersection homology II*. Invent. Math. *71*, 77–129 (1983).

[Kp] KAUP, L., *Zur Homologie projektiv algebraischer Varietäten*. Sc. norm. sup. Pisa *26*, 479–518 (1972).

[MPh] MACPHERSON, R., *Chern classes for singular algebraic varieties*. Annals of Maths. *100*, 423–432 (1974).

[Sc] SCHWARTZ, M.-H., *Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe*. CRAS *260*, 3262–3264, 3535–3537 (1965).

[St] STEENBRINK, J. H. M., *Mixed Hodge Structure on the Vanishing Cohomology*. In *Real and complex singularities*, Oslo 1976. (Per Holm, Ed.), pp. 525–563. Sijthoff & Noordhoff, 1977.

J. P. B.
URA au CNRS 751
Géométrie et Topologie Différentielle
USTL Flandres-Artois
F-59650 Villeneuve d'Ascq Cedex
e-mail: brassele@frcitl81.bitnet

K. H. F. et L. K.
Fakultät für Mathematik
Universität Konstanz
Postfach 5560
D-7750 Konstanz
e-mail address: makaup@dknkurz1.bitnet

Received November 21, 1989