

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 65 (1990)

Artikel: Sur les longueurs des géodésiques d'une métrique à courbure négative dans le disque.
Autor: Otal, Jean-Pierre
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-49729>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur les longueurs des géodésiques d'une métrique à courbure négative dans le disque

JEAN-PIERRE OTAL

Soit D un disque compact C^2 , de dimension n . Si ce disque est muni d'une métrique riemannienne m , on peut définir une distance sur D : la distance entre deux points est la longueur d'un plus court chemin joignant ces deux points. Ce minimum est alors réalisé comme la longueur d'un chemin rectifiable.

On peut donc considérer la distance d_m induite sur le bord de D . On définit ainsi une application de l'ensemble des métriques sur D vers l'ensemble des fonctions distances sur ∂D . Si on remplace la métrique m par une métrique qui lui est isotope par un difféomorphisme qui est l'identité sur le bord, la distance restreinte ne change pas. On a donc défini une application \mathcal{B} de l'espace des métriques à isométrie près vers l'ensemble des fonctions distances sur ∂D .

Considérons le problème suivant:

Question. L'application \mathcal{B} est-elle injective?

F. Bonahon m'a fait remarquer que la réponse générale à ce problème était négative si l'on n'imposait pas de restrictions supplémentaires, par exemple sur la courbure sectionnelle de la métrique m . En effet, il est facile de construire des exemples de métriques m où les plus courtes géodésiques joignant le bord au bord évitent chacune une petite boule dans l'intérieur de D . Une perturbation de la métrique supportée dans l'intérieur de cette boule ne changera alors pas la distance induite d_m .

R. Michel a montré dans [Mi] le résultat suivant. Considérons deux métriques m et m' sur le disque D^2 , l'une des deux étant de courbure constante telles que $\mathcal{B}(m) = \mathcal{B}(m')$, alors $m = m'$.

Il y a aussi des résultats généraux dans une même classe conforme obtenus par R. G. Mukhometov : soient m et m' deux métriques dont le comportement des géodésiques est du type courbure négative et qui sont conformément équivalentes dans un rapport de conformité dont la régularité est C^4 jusqu'au bord de D et telles que le bord ∂D est géodésiquement convexe; $d_m = d_{m'}$ alors $m = m'$ (nous renvoyons à [Mu1] pour le cas $n = 2$ et à [Mu2] pour le cas général).

Nous nous proposons dans cette note de démontrer le Théorème 1 cidessous. On se restreint au cas où $n = 2$ et cette restriction est essentielle pour notre argument.

THÉORÈME 1. *Lorsque $n = 2$, la restriction de \mathcal{B} à l'espace des métriques C^2 à courbure strictement négative est injective: une métrique m de classe C^2 sur le disque D , de courbure strictement négative peut être reconstruite à partir de la distance d_m sur ∂D .*

Le problème de la reconstruction des métriques sur le disque à partir de la restriction de la fonction distance sur leur bord est à comparer avec celui de reconstruire une métrique de courbure négative sur une variété compacte à partir de la donnée de son *spectre marqué des longueurs* (cf. [Gr, 5.5.B]). Dans ce sens, le théorème ci-dessus est l'analogue du théorème de rigidité de [O].

D'autre part, on peut se demander si on peut améliorer les hypothèses de cet énoncé. En fait, les arguments que nous utilisons montrent aussi le résultat suivant. Si deux métriques C^2 m et m' sur le disque D , sans points focaux, vérifient: $\mathcal{B}(m) = \mathcal{B}(m')$, alors elles sont isométriques, dès que la courbure de l'une est négative et ne s'annule sur aucun ouvert.

Je tiens à remercier pour son hospitalité le MSRI où ce travail a été rédigé en Octobre 1988.

Le théorème 1 ci-dessus a été obtenu sous des hypothèses plus faibles et de façon indépendante par C. Croke dans [C].

§1. L'espace des géodésiques du disque D

Soit m une métrique C^2 à courbure négative dans le disque D .

On peut joindre deux points quelconques du bord ∂D par un chemin minimisant contenu dans D . Paramétré par longueur d'arcs, un tel chemin sera appelé une *géodésique de la distance d_m* . Le résultat suivant concerne la régularité de ces chemins.

AFFIRMATION 2. *Les géodésiques de la distance d_m sont des arcs C^1 .*

Preuve. Il nous suffit de montrer qu'un chemin rectifiable k minimisant la longueur entre ses extrémités admet en chaque point une tangente et que celle-ci varie de façon continue.

Pour cela considérons d'abord un point de k dans l'intérieur de D ; un voisinage de ce point dans k est donc une géodésique de la métrique riemannienne m et en particulier k est différentiable dans un voisinage de ce point.

De même si κ est un intervalle de k dont une extrémité p , différente d'une extrémité de k est contenue dans ∂D , alors l'arc κ a une dérivée au point p . Notons en effet que sous nos hypothèses de différentiabilité la métrique m admet un

prolongement en une métrique de classe C^2 . Donc la géodésique κ a une tangente au point p . Supposons qu'en son extrémité p la géodésique κ est transverse au bord ∂D . Alors la formule de la variation première fournit une contradiction au fait que dans un voisinage de κ , l'arc k minimise la distance entre chacuns de ses points. Donc la dérivée de κ existe au point p et cette dérivée est la tangente unitaire de ∂D en ce point.

D'autre part si κ est un intervalle d'intersection de k avec ∂D , la tangente à k existe en tout point de κ et est égale à la tangente à ∂D au point considéré.

Soit maintenant $g : t \rightarrow g(t)$ une paramétrisation par longueur d'arcs de la courbe géodésique joignant p à q . Considérons le problème de la différentiabilité du chemin g au voisinage du point $g(0) \in \partial D$. Supposons la métrique m prolongée en une métrique C^2 m' définie dans un disque contenant D dans son intérieur; cette métrique aura donc aussi une courbure strictement négative mais nous n'utiliserons pas ce résultat.

Puisque le problème est local, nous supposerons finalement que la métrique m' est définie dans l'intérieur du disque unité de \mathbb{R}^2 , de sorte que le disque D soit l'intersection du disque unité avec le demi-plan supérieur et que le point $g(0)$ corresponde à l'origine de D . Nous noterons finalement $d_{m'}$ la fonction distance associée à m' .

Nous allons montrer que lorsque t_i est une suite tendant vers 0, la limite de

$$\left(\frac{Og(t_i)}{t_i} \right)$$

existe. Pour cela considérons d'abord la cas où la suite $(g(t_i))$ appartient à ∂D .

Alors, on a:

$$d_{m'}(0, g(t_i)) \leq t_i \leq l([O, g(t_i)]),$$

le dernier terme de l'inégalité étant la longueur de l'intervalle $[0, g(t_i)]$ contenu dans ∂D . Puisque le bord ∂D est différentiable, les deux termes extrêmes de l'inégalité c-dessus sont équivalents lorsque t_i tend vers 0. Ils sont donc équivalents à celui du milieu et la suite

$$\left(\frac{Og(t_i)}{\|Og(t_i)\|} \right)$$

a bien une limite lorsque t_i tend vers 0, en vérifiant que $g(t_i) \in \partial D$: cette limite est alors le vecteur de norme 1 (pour la métrique m) à la courbe ∂D en l'origine.

Lorsqu'il n'existe pas de suite tendant vers 0 telle que $g(t_i)$ appartienne au bord ∂D , alors, un intervalle $]0, \pi]$ a une image entièrement contenue dans l'intérieur du disque D . Cette image est donc un segment géodésique de la métrique riemannienne m et ce cas a été traité précédemment.

Si ce n'est pas le cas, soit (t_i) une suite tendant vers 0; on peut encadrer cette suite entre deux suites tendant vers 0, (t'_i) et (t''_i) telles que $g(t'_i)$ et $g(t''_i)$ soient contenus dans ∂D . On déduit l'existence de la limite de

$$\left(\frac{Og(t_i)}{\|Og(t_i)\|} \right),$$

de l'existence d'une limite commune pour

$$\left(\frac{Og(t'_i)}{\|Og(t'_i)\|} \right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{Og(t''_i)}{\|Og(t''_i)\|} \right).$$

Donc la courbe k est différentiable et sa tangente varie continûment. \square

Certaines des géodésiques de la distance d_m ressemblent vraiment à des géodésiques. On obtient une telle géodésique à partir d'un vecteur dans l'intérieur D en considérant les premiers points d'intersection de la géodésique passant par ce vecteur: cette géodésique intersecte le bord ∂D en deux points, puisqu'elle est propre (courbure négative), ces deux points étant bien distincts (courbure négative). Lorsqu'on applique la même construction en un point de ∂D , dans une direction non tangente au bord, on obtient aussi une géodésique. Toutefois, il est possible que la géodésique issue d'un point du bord dans une direction tangente au bord ait son intérieur contenu dans l'intérieur de D jusqu'à son premier point de sortie. Les géodésiques de la distance d_m obtenues par la méthode précédente seront appelées des géodésiques droites: elles sont caractérisées par le fait que leur intérieur est entièrement contenu dans l'intérieur du disque D .

Lorsque le bord de D est *strictement convexe* toutes les géodésiques de la distance d_m sont des géodésiques droites et peuvent donc être décrites par la méthode précédente. Dans le cas général, où le bord n'est pas convexe, il n'en est rien.

Toutefois, on a le résultat général suivant qui traduit le fait que, même lorsque le bord de D n'est pas convexe, les géodésiques de la distance d_m s'intersectent comme des géodésiques droites.

AFFIRMATION 3. *Soit m une métrique C^2 à courbure négative définie sur le disque D . On a alors:*

- (1) *deux géodésiques de la distance d_m ont une intersection connexe ou vide;*
- (2) *pour toute paire de points distincts p et q de ∂D , il existe une unique géodésique de la distance d_m qui joint ces deux points.*

Preuve. Considérons deux géodésiques distinctes γ et γ' dont l'intersection n'est pas connexe. Il existe alors un arc k contenu dans γ et un arc k' contenu dans γ' qui s'intersectent uniquement en leurs extrémités. La réunion de ces deux arcs borde un disque contenu dans D ; la courbure de chacun des arcs k et k' est orientée vers l'extérieur de ce disque, si elle n'est pas nulle. Une telle situation est interdite par le théorème de Gauss–Bonnet puisque m est à courbure négative.

Ceci montre que l'intersection de γ et γ' est connexe.

La deuxième partie de l'assertion se déduit immédiatement de la première. \square

L'ensemble des géodésiques non-orientées de la distance d_m s'identifie naturellement avec les paires de points distincts de ∂D : cet espace sera noté $\mathcal{M}(D)$.

DÉFINITION. On définit $C(D)$ comme l'espace des mesures de Borel sur $\mathcal{M}(D)$ de masse totale finie.

Un exemple de mesure dans $C(D)$ est défini de la manière suivante. Soient p et q deux points distincts de ∂D : ces deux points s'interprètent comme un élément de $\mathcal{M}(D)$ que l'on voit à son tour comme le support d'une masse de Dirac.

Un autre exemple est la mesure de Liouville associée à une métrique à courbure négative m , que nous définissons maintenant. Soit O l'ensemble des paires de points de ∂D tels que la géodésique qui les joint est une géodésique droite, transverse en ses extrémités à ∂D . Ainsi défini, l'ensemble O est ouvert. Il correspond à un ouvert de l'espace des géodésiques de la métrique *riemannienne* du disque D . Sur cet espace de géodésiques on a une mesure, la mesure de Liouville, définie comme la valeur absolue de la 2-forme obtenue comme produit intérieur de la forme volume de Liouville sur le fibré unitaire de D par le champ de vecteurs tangent au flot.

Nous allons maintenant donner la formule de cette mesure en coordonnées. Soit k un segment géodésique de la métrique m contenu dans D ou bien un arc contenu dans ∂D , dont la concavité est tournée vers l'extérieur; munissons cet arc d'une coordonnée par longueur d'arcs.

On peut paramétrer les géodésiques de l'ouvert O qui intersectent k transversalement par leur point d'intersection avec k et par l'angle qu'elles font en ce point d'intersection avec k . Cette paramétrisation est injective pour les géodésiques de O et l'ensemble des géodésiques de O qui intersectent k est ainsi homéomorphe à un ouvert de $k \times]0, \pi[$. Sur cet ouvert, l'expression de la mesure de Liouville est $d\mu = \sin \theta \, dt \, d\theta$ (cf. [Sa, §9]).

On définit finalement la mesure de Liouville $\mu(m)$ sur $\mathcal{M}(D)$ en prolongeant la mesure ainsi définie sur O par 0 dans le complémentaire. On a ainsi défini une mesure de Borel; son support contient O , donc ce support est exactement la fermeture de O dans $\mathcal{M}(D)$. Il nous reste à voir que la masse totale de la mesure de Liouville est finie; toutefois ce dernier point découlera d'une formule générale, la formule de Crofton que nous allons maintenant expliquer. Reprenons les notations utilisées pour définir en coordonnées la mesure de Liouville. L'ensemble des géodésiques de O qui intersectent k transversalement est homéomorphe à un ouvert O_k de $k \times]0, \pi[$. On a alors:

AFFIRMATION 4. *L'ouvert O_k est de mesure pleine pour la mesure de Lebesgue sur $k \times]0, \pi[$.*

Preuve. Il nous suffit de montrer, d'après Fubini, que pour tout point $p \in k$, l'ensemble des vecteurs v au point p tels que la géodésique (de la métrique riemannienne m) issue de p dans la direction n est transverse en ses deux extrémités à la courbe ∂D est un ensemble de mesure pleine dans l'espace unitaire tangent du disque D_m au point p .

Pour cela, soit v_0 un vecteur au point p tel que la géodésique issue de p dans la direction v_0 soit tangente en son extrémité p' à la courbe ∂D . Prolongeons la métrique m sur le disque D en une métrique que nous noterons toujours m définie dans un disque D' contenant D dans son intérieur. La nouvelle métrique peut être choisie C^2 et aura une courbure sectionnelle négative quitte à restreindre le disque D' . Les géodésiques issues de p dans un voisinage de la direction v_0 fournissent un feuilletage \mathcal{F} d'un voisinage U du point p' sur le disque D' . Ce feuilletage est C^1 puisque la métrique m est C^2 , c'est-à-dire que, si k' est petit arc géodésique transverse à ∂D et contenu dans U la projection de U sur k' le long des feuilles du feuilletage \mathcal{F} est C^1 . Donc, si k'' est un arc contenu dans $\partial D \cap U$ voisinage du point p' , paramétré par longueur d'arcs, la projection de k'' sur l'arc k' est une application C^1 . Donc l'image des points critiques de cette application est un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Mais l'image de ces points critiques contient les directions v au point p telles que la géodésique issue de p dans la direction v est tangente à ∂D .

Donc, pour tout point p l'ensemble des directions au point p qui définissent des géodésiques droites contenues dans O a un complémentaire de mesure nulle.

Donc O_k est de mesure pleine. □

On en déduit immédiatement que si un arc k est soit un segment géodésique, soit un arc contenu dans ∂D dont la concavité est tournée vers l'extérieur (de sorte qu'une géodésique ayant une extrémité dans k ait son autre extrémité dans $\partial D - k$),

alors la mesure de Liouville des géodésiques de la distance d_m qui intersectent k est exactement le double de la longueur de k .

Nous allons généraliser la formule précédente mais il nous faut pour cela définir le *nombre d'intersection* entre deux éléments de $C(D)$.

Soit μ et μ' deux éléments de $C(D)$. Dans l'espace $\mathcal{M}(D) \times \mathcal{M}(D)$, on peut considérer l'ouvert formé des paires de paires de points telles que l'une des paires n'est pas contenue dans une composante connexe du complémentaire dans ∂D de l'autre paire.

L'espace $\mathcal{M}(D) \times \mathcal{M}(D)$ étant muni de la mesure produit $d\mu \times d\mu'$, la masse totale de cet ensemble sera notée $i(\mu, \mu')$ et appelée *nombre d'intersection* de μ et de μ' . Ce nombre d'intersection est symétrique.

Dans le cas où l'une des mesures, disons μ , est supportée sur une seule paire g , et disons avec masse totale 1, le nombre d'intersection de μ avec une autre mesure μ' se calcule en prenant la μ' -masse de l'ensemble des paires de points qui sont dans des composantes distinctes de $\partial D - g$.

En particulier, on a le résultat suivant, qui découle de la définition du nombre d'intersection, de l'écriture de la mesure de Liouville en coordonnées, et du fait que toute géodésique de la distance d_m est réunion disjointe d'arcs concaves contenus dans ∂D et de segments géodésiques de la métrique riemannienne m .

PROPOSITION 5. *Supposons que le disque D est muni d'une métrique à courbure négative. Soit p et q deux points distincts de ∂D . Alors la longueur de la géodésique de la métrique d_m qui joint ces deux points est égale à la moitié du nombre d'intersection de la mesure $[p, q]$ avec la mesure de Liouville $\mu(m)$.*

D'après cette proposition, il nous suffit, pour démontrer le théorème 1 de prouver que l'on peut reconstruire la métrique m à partir de la donnée des nombres d'intersection de sa mesure de Liouville $\mu(m)$ avec les masses de Dirac $[p, q]$.

Nous allons commencer par établir que l'on peut reconstruire la mesure de Liouville $\mu(m)$ à partir de ses nombres d'intersection avec les masses de Dirac. C'est un cas particulier du résultat suivant.

PROPOSITION 6. *Soient μ et μ' deux éléments de $C(D)$ tels que pour tout couple de points distincts p et q , on a: $i(\mu, [p, q]) = i(\mu', [p, q])$. Alors les mesures μ et μ' sont égales.*

Preuve par A. Douady. Soient p, p', q, q' , 4 points distincts apparaissant dans cet ordre sur le cercle ∂D . On peut supposer puisque μ est une de ces points est nulle. On a alors, si F désigne l'ensemble des géodésiques dont une extrémité est dans

l'intervalle $[p, q']$ et l'autre dans l'intervalle $[p', q]$:

$$2\mu(F) = i(\mu, [p, q]) + i(\mu, [p, q]) - i(\mu, [p, p']) - i(\mu, [q, q']).$$

On en déduit la proposition. \square

Soient maintenant m et m' deux métriques riemanniennes sur le disque telle que les distances d_m et $d_{m'}$ qui leurs sont respectivement associées sont isométriques. Soit ϕ l'application de ∂D dans lui-même qui réalise l'isométrie en question. On déduit des propositions 5 et 6 que l'homéomorphisme de $\mathcal{M}(D)$, $\tilde{\phi} = \phi \times \phi$ transporte la mesure de Liouville $\mu(m)$ sur la mesure $\mu'(m)$. En particulier cet homéomorphisme envoie le support de la première mesure sur le support de la deuxième.

Une autre conclusion est que la longueur de ∂D pour les deux métriques est la même : en effet, cette longueur n'est autre que la masse totale de la mesure de Liouville $\mu(m)$. Ce point apparaît aussi dans [Mi], où il est montré que la donnée de d_m détermine la métrique restreinte à ∂D , c'est-à-dire, dans le cas $n = 2$, la longueur d'arc.

Finalement remarquons aussi que le volume total de D pour ces deux métriques est le même : le volume n'est autre en effet, que le nombre d'intersection de la mesure $\mu(m)$ avec elle-même, à une constante près.

§2. Une obstruction à prolonger un homéomorphisme de ∂D par une homographie

DÉFINITION. Soient m et m' deux métriques de courbure négative sur D . Une *homographie* du disque riemannien D_m vers le disque riemannien $D_{m'}$ est un homéomorphisme qui transporte les géodésiques de la métrique riemannienne m sur les géodésiques de la métrique riemannienne m' .

L'existence d'une homographie entre deux métriques riemanniennes est un phénomène très rare. Nous renvoyons le lecteur intéressé au livre de G. Darboux sur les surfaces (troisième partie) dans lequel le problème de l'existence d'homographies C^2 entre deux surfaces riemanniennes est traitée en détail.

Soit ϕ un homéomorphisme de ∂D dans lui-même. Nous allons définir une obstruction à prolonger l'homéomorphisme ϕ en une homographie de D_m dans $D_{m'}$.

Soit T_m^1 le fibré unitaire du disque D_m . Soit v un vecteur et soit θ un nombre réel dans l'intervalle $]0, \pi[$. Notons $\theta.v$ le vecteur défini en tournant v dans sa fibre d'un angle θ . Il correspond aux vecteurs v et $\theta.v$ deux géodésiques droites de la métrique m , donc deux paires de points dans le cercle ∂D . A ces deux paires de points, l'homéomorphisme ϕ associe deux nouvelles paires de points de ∂D , qui ont la

propriété de se croiser (i.e. une paire n'est pas entièrement contenue dans une composante connexe du complémentaire de l'autre). Considérons alors les deux géodésiques γ'_v et $\gamma'_{\theta.v}$ de la distance d_m , que ces nouvelles paires définissent. Ces géodésiques ont une intersection non-vide. On définit la fonction $\theta(v, \theta)$ comme l'angle qui fait passer de la géodésique $\gamma'(v)$ à la géodésique $\gamma'(\theta.v)$: on a besoin pour cela d'une orientation sur le disque D_m , l'orientation sur le disque D_m étant alors choisie de sorte que l'application ϕ respecte l'orientation induite sur ∂D .

L'angle $\theta'(v, \theta)$ est aussi défini lorsque les géodésiques $\gamma'(n)$ et $\gamma'(\theta.v)$ n'ont pas une intersection transverse : toutefois il est facile de voir, puisque les géodésiques de la distance d_m sont C^1 , que l'angle de la rotation qui fait passer de $\gamma'(v)$ à $\gamma'(\theta.v)$ aux extrémités de leur intervalle d'intersection est toujours 0 ou π .

On a alors le résultat suivant:

AFFIRMATION 7. *On a:*

- (1) *pour θ fixé, la fonction $\theta'(v, \theta)$ est mesurable:*
- (2) *soit $\Theta'(\theta)$ la valeur moyenne de la fonction $\theta'(v, \theta)$ pour la mesure de Lebesgue sur le fibré unitaire T_m^1 . Alors, la fonction Θ' est une fonction continue de θ .*

Preuve. Considérons tout d'abord l'application qui associe à un vecteur de T_m^1 le point $e^+(v)$ défini comme le premier point d'intersection de la géodésique issue du vecteur v avec le cercle ∂D . L'ensemble des vecteurs v tels que la géodésique issue de v est transverse au point $e^+(v)$ à la courbe ∂D est un ouvert du fibré unitaire T_m^1 du disque D . D'après la démonstration de l'affirmation 4, cet ouvert est de mesure pleine pour la mesure de Lebesgue sur la fibre de T_m^1 au point p . Ceci est encore vrai pour l'ouvert défini de la même façon mais en considérant l'autre extrémité $e^-(v)$ de la géodésique issue du vecteur v . Donc, d'après Fubini, l'ensemble des vecteurs v tels que la géodésique issue de v est transverse en ses deux extrémités au bord ∂D est un ouvert de mesure pleine du fibré unitaire T_m^1 .

Fixons maintenant un angle θ dans l'intervalle $[0, \pi]$. L'ensemble des vecteurs v tels que les géodésiques issues de v et de $\theta.v$ sont transverses au bord ∂D en leurs extrémités est encore un ouvert O_θ de mesure pleine. L'application $\theta'(v, \theta)$ est en ces points une fonction continue du vecteur n . Ceci démontre la première partie de l'affirmation 7.

Soit maintenant (θ_i) est une suite tendant vers θ . On a pour $v \in O_\theta$ convergence de la suite $(\theta'(v, \theta_i))$ vers $\theta'(v, \theta)$. Donc du théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit la continuité de la fonction Θ' au point θ . \square

La propriété essentielle de la fonction Θ' est la suivante.

PROPOSITION 8. *L'application Θ' est une application continue croissante de $[0, \pi]$ dans lui-même telle que:*

(1) *Θ' est symétrique en $\pi - \theta$:*

$$\forall \theta, \Theta'(\pi - \theta) = \pi - \Theta'(\theta);$$

(2) *Θ' est une application sur-additive:*

$$\forall \theta_1, \theta_2 \text{ tels que } \theta_1 + \theta_2 \in [0, \pi], \text{ on a: } \Theta'(\theta_1 + \theta_2) \geq \Theta'(\theta_1) + \Theta'(\theta_2).$$

Preuve. Le fait que l'application Θ' est croissante résultera de la suradditivité, puisque Θ' prend des valeurs positives.

Montrons la première assertion. D'après Fubini, si dA désigne la mesure de Lebesgue sur la surface S_m et si $d'n$ désigne la mesure de Lebesgue sur chaque fibre f de T_m^1 , on a:

$$\Theta'(\theta) = \frac{1}{\mathcal{V}(T_m^1)} \int_{S_m} \int_f \theta'(v, \theta) d'n dA.$$

Soit f une fibre du fibré unitaire tangent T_m^1 . On a alors, pour tout θ , si $v \in f$:

$$\theta'(v, \theta) + \theta'(\theta.v, \pi - \theta) = \pi.$$

Intégrons cette égalité pour la mesure $d'v$, on obtient en utilisant l'invariance de la mesure $d'v$ par la rotation d'angle θ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_f \theta'(v, \theta) d'v + \frac{1}{2\pi} \int_f \theta'(v, \pi - \theta) d'v = \pi.$$

Si on intègre maintenant cette égalité sur le disque D_m , on obtient la symétrie en $\pi - \theta$ de Θ' .

Démontrons maintenant la deuxième assertion. Rappelons d'abord l'inégalité de Gauss–Bonnet appliquée à un triangle T contenu dans D_m , dont chaque côté du bord a une courbure géodésique négative ou nulle. Puisque la métrique m' a une courbure strictement négative, la somme des angles intérieurs de T est inférieure à π , avec égalité si et seulement si le triangle T a une aire nulle, c'est-à-dire si et seulement si triangle T est réduit à un point ou à un intervalle.

Soient alors f une fibre de T_m^1 , v un vecteur contenu dans cette fibre, et θ_1 et θ_2 deux angles dans l'intervalle $[0, \pi]$ vérifiant $\theta_1 + \theta_2 \leq \pi$. Considérons les images par la conjugaison ϕ des trois géodésiques γ_v , $\gamma_{\theta_1.v}$ et $\gamma_{(\theta_1 + \theta_2).v}$. Les trois géodésiques images définissent un triangle T de $\tilde{D}_{m'}$, éventuellement réduit à un point ou

a un intervalle contenu dans ∂D . Les angles intérieurs du triangle T sont: $\theta'(v, \theta_1)$, $\theta'(\theta_1.v, \theta_2)$, et $\pi - \theta'(v, \theta_1 + \theta_2)$. On a donc d'après Gauss-Bonnet:

$$\theta'(v, \theta_1) + \theta'(\theta_1.v, \theta_2) \leq \theta'(v, \theta_1 + \theta_2).$$

Intégrons d'abord cette inégalité sur la fibre f , pour la mesure de Lebesgue $d'v$, en utilisant l'invariance de la mesure $d'v$ par la rotation d'angle θ_1 , puis intégrons l'inégalité obtenue sur la surface D_m . On en déduit la sur-additivité de la fonction Θ' .

Ceci termine la démonstration de la proposition 8. \square

THÉORÈME 9. *L'homéomorphisme ϕ se prolonge en une homographie de D_m dans D_m si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées:*

- (1) *l'application Θ' est égale à l'identité;*
- (2) *l'application $\tilde{\phi}$ induit une bijection entre les géodésiques droites de D_m et les géodésiques droites de D_m .*

Preuve. La nécessité de la deuxième condition est claire; pour la première, remarquons seulement que l'application Θ' est alors une fonction continue et additive de l'intervalle dans lui-même.

Considérons maintenant la réciproque. Si l'application Θ' est l'identité, en particulier, elle est additive. D'après sa définition, l'application Θ' est la moyenne des applications Θ'_p , où $\Theta'_p(\theta)$ est défini comme la moyenne sur la fibre au point p de la fonction $\theta'(v, \theta)$. Maintenant, le même raisonnement que celui effectué dans la démonstration de la continuité et de la sur-additivité de l'application Θ' montre que chaque application Θ'_p est continue croissante, et sur-additive. D'autre part si la suite (p_i) converge vers le point p , la suite d'applications (Θ'_{p_i}) converge simplement vers la fonction Θ'_p , d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Puisque cette dernière application est croissante et continue, un théorème de Dini dit alors que la convergence des fonctions Θ'_{p_i} vers la fonction Θ'_p est uniforme. Donc la fonction Θ' est la moyenne pour la mesure de Lebesgue du disque D_m de la fonction Θ'_p continue en p . Ainsi, pour que Θ' soit l'identité, il est nécessaire que chaque fonction Θ'_p soit l'identité.

Fixons un point p dans le disque D et considérons la fibre f du fibré unitaire T_m^1 en ce point. L'image de chaque géodésique droite issue d'un vecteur $v \in f$ est une géodésique droite par hypothèse. Montrons que maintenant que si v_1, v_2, v_3 sont trois vecteurs deux à deux distincts de la fibre f , les trois géodésiques droites $\tilde{\phi}(\gamma_{v_i})$ passent par le même point de l'intérieur du disque D_m .

L'application qui à un vecteur v associe ses extrémités dans $\mathcal{M}(D)$ est continue sauf en un nombre dénombrable de points de f . En effet l'application $v \rightarrow e^+(v)$ est

monotone et il en est de même de l'application $v \rightarrow e^-(v)$. De plus chacune des applications $e^+(v)$ et $e^-(v)$ est continue à droite ou à gauche en tout point.

Supposons dans un premier temps que les trois vecteurs v_i sont contenus dans l'ouvert $O \cap f$; dans la preuve de l'affirmation 4, on a vu que l'ouvert $O \cap f$ était de mesure pleine, donc en particulier, dense.

Raisonnons alors par l'absurde et reprenons la démonstration de la proposition 8: l'image par $\tilde{\phi}$ des trois géodésiques γ_{v_i} est formée de trois géodésiques deux à deux transverses et l'intersection de deux quelconques d'entr'elles est contenue dans l'intérieur du disque D . Si ces trois géodésiques ne sont pas concourrantes, le triangle qu'elles définissent a une aire non nulle et donc l'inégalité de Gauss–Bonnet est stricte. Elle est stricte aussi pour des angles voisins des angles (v_i) , car les vecteurs v_i sont supposés appartenir à l'ouvert $O \cap f$, où l'application $v \rightarrow \gamma_v$ est continue. Donc d'après la démonstration de la proposition 8, la fonction Θ'_p est différente de l'identité.

On en déduit que chaque géodésique de l'ouvert $O \cap f$ a pour image une géodésique qui passe par le même point $\psi(p)$ de l'intérieur du disque $D_{m'}$.

Nous allons maintenant montrer que *toutes* les géodésiques droites passant par p ont pour image une géodésique droite passant par $\psi(p)$. Pour cela, soit v un vecteur dans la fibre f , et soit (v_i) une suite de vecteurs dans $O \cap f$ qui l'approxime, choisie de sorte que (v_i) l'approxime par la droite ou par la gauche selon que la fonction $v \rightarrow e^+(v)$ est continue à droite ou à gauche. Alors les images par $\tilde{\phi}$ des géodésiques γ_{v_i} sont des géodésiques droites g_i et la suite de géodésiques g_i converge vers une géodésique g de la distance $d_{m'}$ contenant les points $\phi(e^+(v))$ et $\psi(p)$.

Si cette géodésique a son intérieur contenu dans $D_{m'}$, alors ses extrémités sont $\phi(e^+(v))$ et $\phi(e^-(v))$ et on a bien que la géodésique γ_v a pour image une géodésique droite passant par $\psi(p)$.

Sinon, le géodésique g contient une géodésique droite dont une extrémité est $\phi(e^+(v))$ et l'autre un point $\phi(\alpha)$. Cette géodésique contient le point $\psi(p)$ dans son intérieur. Donc, d'après notre hypothèse sur ϕ la géodésique joignant les points α et $e^+(v)$ est droite et intersecte toutes les géodésiques passant par le point p dans des directions contenues dans l'ouvert $O \cap f$. Ceci n'est possible que si *toutes* les géodésiques passant par le point p rencontrent la géodésique joignant α à $e^+(v)$, auquel cas, on voit alors facilement que le point p lui-même est contenu dans cette géodésique. Mais ceci entraîne que $\alpha = e^-(v)$. Donc la géodésique droite issue de p dans la direction v a pour image une géodésique droite passant par $\psi(p)$.

Donc l'application de l'intérieur du disque D_m dans le disque $D_{m'}$ définie par $\psi(p)$ a la propriété que l'image de toute géodésique est contenue dans une géodésique.

On laisse au lecteur l'exercice de montrer que cette application se prolonge en fait en un homéomorphisme du disque D_m dans le disque $D_{m'}$. L'application

obtenue envoie les géodésiques de la métrique riemannienne m sur les géodésiques de la métrique riemannienne m' . C'est donc une homographie. \square

REMARQUE. Tout d'abord, notons que si le bord ∂D pour la métrique m est convexe, la deuxième hypothèse de l'énoncé du théorème 9 est superflue.

En outre, on peut se demander si elle n'est pas toujours superflue.

§3. Preuve du théorème 1

Nous allons d'abord montrer que si on a un homéomorphisme ϕ de ∂D qui est une isométrie de la distance d_m vers la distance $d_{m'}$, il vérifie les hypothèses du théorème 9.

Vérifions tout d'abord la deuxième hypothèse. Remarquons qu'une géodésique de la distance $d_{m'}$ qui joint les points p et q n'est pas droite si et seulement si il existe un point r sur ∂D , distinct de p et de q tel que $d_{m'}(p, q) = d_{m'}(p, r) + d_{m'}(r, q)$. Donc si un homéomorphisme ϕ induit une isométrie de la distance d_m vers la distance $d_{m'}$, l'image d'une paire de points joints par une géodésique droite est une paire de points du même type.

Donc il nous suffit de montrer que l'homéomorphisme Θ' est l'identité.

Soit F une fonction continue convexe sur l'intervalle $[0, \pi]$ à valeurs réelles. D'après l'inégalité de Jensen, on a, pour tout θ dans l'intervalle $[0, \pi]$:

$$F(\Theta'(\theta)) \leq \frac{1}{\mathcal{V}(T_m^1)} \int_{T_m^1} F(\theta'(v, \theta)) dv.$$

Remarquons que le second membre de cette inégalité est une fonction continue de θ d'après l'affirmation 7 et intégrons cette inégalité sur l'intervalle $[0, \pi]$ pour la mesure $\sin \theta d\theta$. Il vient, après application de Fubini:

$$\int_0^\pi F(\Theta'(\theta)) \sin \theta d\theta \leq \frac{1}{\mathcal{V}(T_m^1)} \int_{T_m^1} \left(\int_0^\pi F(\theta'(v, \theta)) \sin \theta d\theta \right) dv.$$

Posons $F'(v) = \int_0^\pi F(\theta'(v, \theta)) \sin \theta d\theta$. Ainsi le second membre de l'inégalité ci-dessus est la moyenne sur T_m^1 de la fonction (continue) F' .

PROPOSITION 10. *Supposons que $\tilde{\phi}$ envoie la mesure de Liouville μ_m sur la mesure de Liouville $\mu_{m'}$. Alors, pour toute fonction convexe F comme ci-dessus, on a:*

$$\int_0^\pi F(\Theta'(\theta)) \sin \theta d\theta \leq \int_0^\pi F(\theta) \sin \theta d\theta.$$

Preuve. Il nous suffit de montrer que pour toute fonction continue F , si on définit la fonction F' sur T_m^1 par: $F'(v) = \int_0^\pi F(\theta'(v, \theta)) \sin \theta \, d\theta$, alors on a:

$$\frac{1}{\mathcal{V}(T_m^1)} \int_{T_m^1} F'(v) \, dv = \int_0^\pi F(\theta) \sin \theta \, d\theta.$$

La moyenne d'une fonction sur le fibré unitaire T_m^1 pour la mesure dv est égale à la moyenne sur l'espace des géodésiques de la moyenne de cette fonction sur chaque géodésique. La mesure de Liouville peut être approximée dans la topologie vague (comme toute mesure de Radon) par une combinaison linéaire finie de masses de Dirac. Donc il nous suffit de montrer la proposition ci-dessus dans le cas particulier où la mesure sur l'espace des géodésiques est une masse de Dirac. Dans ce cas, un changement de variable donne immédiatement le résultat cherché (cf. [O, Proposition 7]). \square

L'homéomorphisme Θ' vérifie alors les hypothèses du lemma 8 de [O]; on en déduit que Θ' est l'identité.

Donc il existe une homographie ψ entre les disques D_m et $D_{m'}$. Montrons que ψ est en fait isométrie. Pour cela, considérons deux points p et q dans le disque D_m . Leur distance, pour la distance par chemin associée à la métrique riemannienne m est, d'après la formule de Crofton la mesure de Liouville de l'ensemble des géodésiques droites qui les séparent. Or l'image par ψ d'une géodésique droite qui sépare p de q est une géodésique droite du disque $D_{m'}$ qui sépare $\psi(p)$ de $\psi(q)$. Donc, en réutilisant que $\tilde{\phi}$ envoie la mesure de Liouville μ_m sur la mesure de Liouville $\mu_{m'}$, on obtient bien que ψ respecte les distances.

Ceci termine la démonstration du théorème 1.

REFERENCES

- [C] C. Croke, *Rigidity for surfaces of non-positive curvature*. Comm. Math. Helvetici 65, 150–169 (1990).
- [Gr] M. Gromov, *Filling riemannian manifolds*. Journal of Differential Geometry 18 (1983).
- [Mi] R. Michel, *Sur la rigidité imposée par la longueur des géodésiques*. Inv. Math. 65, 71 (1981).
- [Mu1] R. G. Muhometov, *The problem of recovery of a 2-dimensional Riemannian metric and integral geometry*. Soviet. Math. Dokl. 18, 27–31 (1977).
- [Mu2] R. G. Muhometov, *A problem of reconstructing a riemannian metric*. Siberian Math. J. 22, 420–433 (1981).
- [O] J. P. Otal, *Le spectre marqué des surfaces à courbure négative*. Ann. of Maths. (à paraître).
- [Sa] L. A. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability*. Encyclopedia of Math. and its Applications (Addison Wesley), 1 (1976).

Bât. 425

Université Paris-Sud

91405 Orsay Cedex

France

Received April 12, 1989

Buchanzeigen

J. C. DIAZ, **Mathematics For Large Scale Computing**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1989, 345 pages, \$85 (USA, Canada), \$102 (all other countries).

1. On the Gause-Broyden Method for Nonlinear Least-Squares (A. Griemwank and L. Shen) – 2. Parallel Adaptive Algorithms for Multiple Integrals (A. Genz) – 3. A comparison of Hypercube Implementations of Parallel Shooting (H. B. Keller and P. Nelson) – 4. An Asymptotic Induced Numerical Method for the Convection-Diffusion-Reaction Equation (J. S. Scroggs and D. C. Sorensen) – 5. The Rate of Convergence of the Modified Method of Characteristics for Linear Advection Equations in One Dimension (C. N. Dawson, T. F. Dupont, M. F. Wheeler) – 6. A Time-Discretization Procedure for a Mixed Finite Element Approximation of Contamination by Incompressible Nuclear Waste in Porous Media (R. E. Ewing, Y. Yuan, G. Li) – 7. Implementation of Finite Element Alternating-Direction Methods for Vector Computers (S. V. Krishnamachari and L. J. Hayes) – 8. Performance of Advanced Scientific Computers for the Efficient Solution of an Elastic Wave Code for Seismic Modeling (K. E. Jordan) – 9. Generalized Gray Codes and Their Properties (L. S. Barasch, S. Lakshmivarahan, S. K. Dhall) – 10. Nested Block Factorization Preconditioners for Convective-Diffusion Problems in Three Dimensions (G. K. Leaf, M. Minkoff, J. C. Diaz) – 11. Performance of the Chebyshev Iterative Method, GMRES and ORTHOMIN on a Set of Oil-Reservoir Simulation Problems (S. Gomes and J. L. Morales) – 12. A Survey of Spline Collocation Methods for the Numerical Solution of Differential Equations (G. Fairweather and D. Meade).

D. N. DIKRANJAN, I. R. PRODANOV, L. N. STOYANOV, **Topological Groups**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1989, 287 pages, \$99.75 (USA, Canada), \$119.50 (all other countries)

1. Existence of characters – 2. Applications of the Følner Theorem – 3. Pontryagin duality – 4. Quasi-torsion elements in topological groups – 5. Minimal abelian groups – 6. Minimality of products of topological abelian Groups 7. Minimal and totally minimal nonabelian groups.

CHRISTIAN BLATTER, **Lineare Algebra**, Verlag der Fachvereine, Zürich, 1989, 121 Seiten, sFr. 26.—,

1. Literatur – 2. Einführung – 3. Matrizen – 4. Koordinatentransformationen – 5. Lineare Gleichungssysteme – 6. Begriff des Vektorraums – 7. Dimension und Rang – 8. Die Determinante – 9. Lineare Abbildungen – 10. Das charakteristische Polynom – 11. Systeme von linearen Differentialgleichungen – 12. Quadratische Forme, Hauptachsentransformation – 13. Unitäre Räume

CHRISTIAN BLATTER, **Ingenieur Analysis I und II**, 2 Bde, Verlag der Fachvereine, Zürich, 1989, total 524 Seiten, sFr. 29.50/36.—. Bd. I: 1. Grundstrukturen – 2. Funktionen – 3. Differentialrechnung – Bd. II: 4. Integralrechnung – 5. Mehrdimensionale Differentialrechnung – 6. Vektoranalysis.

EMILIO O. ROXIN, **Modern Optimal Control**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1989, 437 pages, \$99.75 (USA, Canada), \$119.50 (all other countries).

1. Thirty Years of Differential Games (Leonard D. Berkovitz) – 2. Some Concepts of Optimality for Infinite Horizon Optimal Control and Their Interrelationships (Dean A. Carlson) – 3. Discontinuous Solutions of Bounded Variation to Problems of the Calculus of Variations and of Quasi-Linear Hyperbolic Differential Equations. Integrals of Serrin and Weierstrass (Lamberto Cesari) – 4. Control Problems for Abstract Volterra Functional-Differential Equations (Constantin Corduneanu) – 5. Deterministic Control of Uncertain Systems (M. Corless and George Leitmann) – 6. Explicit Estimates for