

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 64 (1989)

**Artikel:** Propriétés génériques des fonctions propres et multiplicité.  
**Autor:** Besson, Gérard  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-48964>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Propriétés génériques des fonctions propres et multiplicité

*A Marcel Berger, à l'occasion de son soixantième anniversaire*

GÉRARD BESSON

### 0. Introduction

Pour une variété compacte  $X$ , l'étude des propriétés que possèdent la "majorité" des applications lisses de  $X$  dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^N$  a été clarifiée, par l'introduction d'outils puissants tel que les théorèmes de transversalité. Rappelons les résultats qui serviront de base au travail qui suit,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{si } N = 1 & \text{génériquement une telle application est de Morse ([ME])} \\ \text{si } N \geq 2 \dim(X) & \text{génériquement elle est une immersion ([WY])} \\ \text{si } N \geq 2 \dim(X) + 1 & \text{génériquement elle est un plongement ([WY]).} \end{array} \right. \quad (*)$$

Il est intéressant de restreindre la classe de fonctions considérées en tenant compte de la structure géométrique que l'on a auparavant imposé à  $X$ . Dans [G–W], il est étudié la possibilité d'obtenir des plongements d'une variété non compacte dans  $\mathbb{R}^N$  en prenant comme coordonnées des solutions de certaines équations aux dérivées partielles elliptiques.

Dans le même ordre d'idée, on peut s'intéresser aux structures riemanniennes sur  $X$  (compacte) et se limiter à l'étude des fonctions propres du Laplacien associé. Le premier pas de la démarche conduisant aux résultats (\*) a été fait par K. Uhlenbeck [UK]: génériquement dans l'espace des métriques riemanniennes toutes les valeurs propres sont simples et toutes les fonctions propres sont de Morse.

Donc, bien que l'ensemble des fonctions qui sont vecteur propre d'un Laplacien pour une métrique riemannienne ne soit pas un ouvert de l'espace des fonctions (il suffit de penser à ce que l'équation qu'elles satisfont impose sur leur développement de Taylor au voisinage d'un point où elles s'annulent), on peut leur imposer des propriétés génériques raisonnables.

Dans le texte qui suit nous proposons de parcourir les deux étapes suivantes de (\*). Plus précisément, nous désirons obtenir des plongements et des

immersions dans  $\mathbb{R}^N$  dont les coordonnées sont des fonctions propres pour une métrique donnée et relative à la *même* valeur propre  $\lambda$ . Ceci impose donc que la multiplicité de cette dernière soit au moins  $N$ , en fait dans nos exemples ce sera  $N$  exactement. On ne peut donc espérer des résultats de généricité dans  $C^\infty(X)$  compte tenu de [UK]. Il est alors raisonnable de se limiter au sous-ensemble  $W$  des métriques pour lesquelles  $\lambda$  est valeur propre avec la même multiplicité  $N$  (fixer la valeur propre n'impose pas vraiment de contrainte car on peut utiliser les homothéties). Afin d'appliquer des théorèmes de transversalité, il faut pouvoir faire de la géométrie différentielle sur cet ensemble, il est alors souhaitable de demander à ce dernier d'être une sous-variété de Banach, ou un germe de sous-variété au voisinage d'une métrique fixée.

Pour obtenir les résultats recherchés, il nous faut donc satisfaire à deux conditions:

- i) La multiplicité  $N$  doit être suffisamment grande.
- ii)  $W$  doit être une sous-variété de l'espace des métriques.

Le problème de la multiplicité de la  $k$ -ième valeur propre pour  $X$  de dimension deux a été initié dans [CG] puis [BN] où il est montré qu'elle ne peut être arbitrairement grande, la borne supérieure trouvée étant en fait linéaire en le genre de la surface; dans [B-C] on exhibe des métriques telles que la première valeur propre ait une multiplicité en racine carrée du genre.

La principale avancée récente vers une compréhension du problème est dans la suite de résultats obtenus par Y. Colin de Verdière ([CV1-4]). Utilisant une idée générale d'Arnold [AD] il montre en utilisant la théorie des perturbations que la multiplicité peut apparaître de manière non isolée si on dispose de suffisamment de paramètres. Plus précisément, on construit dans [CV2] des métriques en dimension  $\geq 3$  telle que la multiplicité de la première valeur propre soit arbitrairement grande. Le problème de la dimension 2 reste non complètement résolu. Dans [CV2], il est conjecturé que la multiplicité maximale pour la première valeur propre d'une surface riemannienne  $X$  est  $C(X) - 1$  où  $C(X)$  est le nombre chromatique de  $X$  (voir [RL]). Cette borne supérieure est atteinte par la multiplicité de la seconde valeur propre d'opérateurs de Schrödinger sur  $X$ . Dans [CV4] le problème est transporté sur les graphes, ces derniers étant les éléments de base à partir desquels on construit les métriques qui nous intéressent. Pour des résultats de type [B-C] n'utilisant pas la théorie des groupes on peut se reporter à [C-C] et [CS].

Dans [CV1] il est développé une notion de stabilité (Strong Arnold Hypothesis ou SAH) qui assure la condition ii) ci-dessus.

Dans la suite tous nos opérateurs sont auto-adjoints. Nous considérons donc différents types de variations paramétrées par un espace  $B$ , à partir et au voisinage d'une métrique  $g_0$  ( $W$  sera un germe de métrique en  $g_0$ ):

i) Perturbation du Laplacien  $\Delta_{g_0}$  (ici la métrique est fixée) par des potentiels petits

$$H = \Delta_{g_0} + V \quad \text{où} \quad V \in C^k(X) = B \quad (k \text{ grand}).$$

ii) Variation ponctuellement conforme de métriques

$$g = e^f g_0 \quad \text{où} \quad f \in C^k(X) = B.$$

iii) Variation de métriques sans restrictions

$$B = \{\text{métriques } C^k \text{ proche de } g_0\}.$$

Nous utilisons des métriques  $C^k$  afin de pouvoir appliquer les théorèmes de transversalité à des variétés de Banach et non de Fréchet (pour appliquer le théorème de transversalité 2.1 il suffit dans notre contexte de prendre  $k \geq \dim X + 3$ ; le lecteur peut se référer à [UK] pour les détails). La métrique  $g_0$  sera, toutefois, toujours de classe  $C^\infty$  avec des améliorations du résultat dans le cas où elle est analytique réelle (on peut dans ce cas se limiter à des perturbations à support dans un ouvert arbitraire).

Si  $\lambda$  est une valeur propre de multiplicité  $N$  du Laplacien de  $g_0$ , par petite perturbation l'espace propre  $E_0$  "éclate" en une somme d'espaces propres  $E_b$  pour  $b \in B$ . On peut choisir une base de  $E_b$ ,  $(u_{ib})_{1 \leq i \leq N}$  dépendant différemment de  $b \in B$ .

Le théorème type est alors

**A. THÉORÈME.** *Si  $\lambda$  est une valeur propre stable de multiplicité  $N$ , alors pour un ouvert  $W_1$  dense dans  $W$  l'application,*

$$f_b : X \rightarrow \mathbb{R}^N \\ x \mapsto (u_{ib}(x))_{1 \leq i \leq N}$$

est

- i) *une immersion si  $N \geq 2 \dim(X)$ ,*
- ii) *un plongement si  $N \geq 2 \dim(X) + 1$ .*

Notons que puisque l'on ne s'intéresse qu'à une valeur propre à la fois, la propriété recherchée est vérifiée sur un ouvert dense car  $X$  est compacte.

La seconde partie du travail consiste donc à exhiber des valeurs propres stables de grande multiplicité. Nous nous contenterons ici de vérifier que les

exemples de Colin de Verdière satisfont à cette condition. La conséquence principale est le

**B. THÉORÈME.** *Sur toute variété riemannienne compacte  $X$  de dimension  $n$  il existe une métrique riemannienne telle que  $X$  se plonge dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$  par son premier espace propre.*

Nous utilisons ici l'expression "plongement et immersion par espace propre" pour signifier que les coordonnées sont des fonctions linéairement indépendantes de  $E_b$ .

Après mise en place des notions de base (1) et la position du problème (2), nous étudions le cas des perturbations d'un Laplacien par des potentiels (3). Dans (4), nous traitons les variations conformes de métriques, et abordons ensuite (5) les premiers exemples en dimension 2 tirés de [C-C]. La dimension supérieure ou égale à 3 s'en déduit aisément (6). Les variations de métriques quelconques (7) conduisent aux cas non traités précédemment. Dans (8) quelques remarques générales permettent de comprendre les propriétés des plongements obtenus en particulier si la valeur propre est la première non nulle, tout hyperplan de  $\mathbb{R}^N$  passant par l'origine sépare l'image en *exactement* deux composantes connexes. Nous rapprochons cela de la notion de plongements tendus et donnons des arguments permettant d'apprécier la pertinence de la conjecture de Colin de Verdière sur la multiplicité maximale de la première valeur propre d'une surface riemannienne.

Je tiens ici à remercier Y. Colin de Verdière pour m'avoir suggéré le problème et pour les nombreuses conversations que nous avons eues à ce sujet.

## 1. L'hypothèse de transversalité

Rappelons les notions de stabilité faible et forte introduites par Y. Colin de Verdière dans [CV1]; elles reposent sur des éléments de théorie des perturbations que le lecteur pourra trouver dans la référence [KO].

Soit  $(H_a)_{a \in T}$  une famille d'opérateurs autoadjoints réels sur  $\mathbb{H} = \mathbb{H}_R \otimes \mathbb{C}$  le complexifié d'un espace de Hilbert réel, de même domaine  $\mathbb{D} \subset \mathbb{H}$ , dépendant continument du paramètre  $a$  variant dans l'espace topologique  $T$  (on suppose que  $0 \in T$ ).

Soit alors  $\lambda_0$  une valeur propre *isolée* de multiplicité finie  $n_0$  de  $H_0$ . Si  $D$  est un disque de rayon  $\epsilon > 0$  et de centre  $\lambda_0$  ne rencontrant le spectre de  $H_0$  qu'en  $\lambda_0$ , il existe un voisinage  $U$  de 0 dans  $T$  tel que, si  $a \in U$ ,  $H_a$  admet dans  $D$  un nombre

fini de valeurs propres dont la somme des multiplicités est  $n_0$ . Soit  $E_a$  la somme des espaces propres correspondant, lorsque  $a \rightarrow 0$ ,  $E_a \rightarrow E_0$ , ce qui permet de définir la forme quadratique  $q_a$  sur  $E_0$  (dont le spectre est  $(\text{spectre}(H_a)) \cap D$ ) par

$$q_a(f) = \langle H_a I_a f \mid I_a f \rangle$$

où  $I_a$  est l'isométrie naturelle de  $E_0$  sur  $E_a$ .

Pour les détails concernant la définition de  $I_a$  voir [CV1].

Si  $T$  est une variété de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) et que  $q_a$  est définie sur un voisinage de 0 qui est une boule  $K$  on définit

$$\Phi: K \rightarrow Q(E_0) = \{\text{formes quadratiques réelles sur } E_0\}$$

$$a \mapsto q_a.$$

Alors on a les,

1.1. DÉFINITION ([CV1]). Soit  $K$  un espace topologique,  $E$  un espace de Banach,  $y_0 \in E$ ,  $\Phi: K \rightarrow E$  continue, on dira que  $\Phi$  est essentielle sur  $(E, y_0)$  s'il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $\forall \Psi: K \rightarrow E$ , continue avec  $\|\Psi - \Phi\|_{L^\infty(K)} \leq \epsilon$  on a  $y_0 \in \Psi(K)$ .

1.2. DÉFINITION ([CV1]). La valeur propre vérifie l'hypothèse d'Arnold forte (SAH) (resp. l'hypothèse d'Arnold faible (WAH)) relativement à la famille  $(H_a)_{a \in T}$  si  $\Phi$  est une submersion en  $a = 0$  (resp.  $\Phi$  est essentielle sur  $(Q(E_0), \lambda_0(\cdot | \cdot))$ ).

### 1.3. REMARQUES

i) Il est clair que SAH implique WAH.

ii) On peut introduire, de manière analogue, les notions de stabilité d'une famille

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$$

de valeurs propres isolées de multiplicités  $n_i < \infty$  de  $H_0$  (voir [CV1])

iii) Une condition *nécessaire* pour SAH et WAH est que

$$\text{dimension}(T) \geq \sum_{i=1}^N \frac{n_i(n_i + 1)}{2}.$$

Pour la vérification de l'hypothèse SAH on a le critère suivant (dont la preuve est immédiate)

1.4. CRITÈRE. *Pour que  $\lambda_0$  vérifie SAH, il faut et il suffit que la différentielle de*

$$\Phi_2: a \mapsto \langle H_1 \cdot | \cdot \rangle \in Q(E_0),$$

soit surjective en  $a = 0$ .

Par la suite nous ne travaillerons qu'avec  $\Phi_2$  et la dénoterons donc par  $\Phi$ . Par ailleurs nous allons étudier deux types de perturbations (bien que les techniques utilisées soient valables dans des situations plus générales):

i) les opérateurs  $H_a$  sont des Laplaciens pour des métriques riemanniennes variant dans un voisinage d'une métrique de référence.

ii) ils sont du type  $\Delta + b$ , où  $\Delta$  est le Laplacien pour une métrique riemannienne fixée et  $b$  une fonction  $C^k$ .

Dans le premier cas, le domaine  $D$  des opérateurs considérés dépend de  $a$  lorsque les variations de métriques ne sont pas à volume constant, on peut toutefois les modifier par des transformations unitaires explicites pour se ramener à la théorie précédente.

## 2. Réduction du problème

Soit  $(X, g_0)$  une variété riemannienne compacte, on suppose que  $\lambda_0$  est une valeur propre du Laplacien de  $(X, g_0)$  de multiplicité  $N$  (Attention! l'indice 0 ne réfère pas à la position de la valeur propre dans le spectre mais à la métrique  $g_0$ ), vérifiant SAH, pour l'un des deux types de familles suivant:

i)  $H_b = \Delta + b$  où  $b \in C^k(X)$  (proche de  $b_0$ ),  $C^k(X)$  l'espace des fonctions de classe  $C^k$  à valeurs réelles sur  $X$ . Les opérateurs  $H_b$  sont donc des opérateurs de Schrödinger avec potentiel  $b$ .

ii)  $H_g = \Delta_g$  où  $\Delta_g$  est le Laplacien pour une métrique  $g$  (proche de  $g_0$ ) sur  $X$  de classe  $C^k$ . L'espace de ces métriques sera noté  $M^k(X)$ .

La conséquence principale de l'hypothèse SAH, et le point de départ des calculs, est l'existence d'un voisinage  $B$  de  $b_0$  dans  $C^k(X)$  (resp. de  $g_0$  dans  $M^k(X)$ ) tel que l'ensemble des éléments de  $B$  pour lesquels l'opérateur correspondant a  $\lambda_0$  comme valeur propre avec la multiplicité  $N$  est une sous-variété de  $B$ , notée  $W$ .

Nous nous proposons de donner des propriétés génériques, elles vont donc tout naturellement résulter de théorèmes de transversalité. En effet nous utiliserons le,

2.1. THÉORÈME ([AM], [QN]). *Soit  $\phi: F \times B \rightarrow E$  une application  $C^k$ ,  $F$ ,*

*B et E étant des variétés de Banach avec F et E séparables. Si 0 ( $0 \in E$ ) est valeur régulière de  $\phi$  et  $\phi_b = \phi(\cdot, b)$  est une application de Fredholm d'indice  $< k$ , alors l'ensemble  $\{b \in B; 0 \text{ est valeur régulière de } \phi_b\}$  est résiduel dans B.*

## 2.2. REMARQUES

i) Dire que 0 est valeur régulière signifie que tout point de  $\phi_b^{-1}(0)$  est point régulier ou que 0 n'est pas dans l'image de  $\phi_b$ .

ii) Dans notre cadre  $F$  et  $E$  seront des variétés de dimension finie et si  $\phi$  est différentiable,  $\phi_b$  est Fredholm d'indice inférieur ou égal à  $\dim(F) - \dim(E)$ . Dans notre cas nous aurons toujours  $\dim(E)$  supérieur à  $\dim(F)$ , on pourra donc choisir dans le théorème 2.2,  $k \geq 1$  (le lecteur peut se reporter aussi à [G-G], page 34, note 1).

iii) La technique de démonstration est une variation sur les thèmes développés dans [UK].

Soit  $(u_1, \dots, u_N)$  une base orthonormée de l'espace propre relatif à la valeur propre  $\lambda_0$  de l'opérateur  $H_0$  (0 représente le potentiel  $b_0$  ou la métrique  $g_0$ ) pour  $a$  proche de 0 dans  $W$ , la famille

$$(u_{1,a}, \dots, u_{N,a})$$

où  $u_{i,a} = I_a(u_i)$  est une base orthonormée de l'espace propre relatif à la valeur propre  $\lambda_0$  de l'opérateur  $H_a$ .

On se propose de montrer que sous l'hypothèse de transversalité, l'application

$$X \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$x \mapsto (u_{i,a}(x))_{1 \leq i \leq N} = f_a(x)$$

est un plongement si  $N \geq 2n + 1$  et une immersion si  $N \geq 2n$  pour  $a$  dans un ouvert  $W_1$  de  $W$  dense au voisinage de 0.

Le fait que  $W_1$  soit un ouvert est clair car  $X$  est compacte, il suffit donc de montrer la densité.

**a) Immersion.** On considère l'application

$$\Psi: T_1 X \times W \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$(x, \xi, a) \mapsto (d_x u_{i,a}(\xi))_{1 \leq i \leq N} = d_x f_a(\xi)$$

où  $T_1 X$  est le fibré unitaire tangent de  $X$  par rapport à la métrique de référence  $g_0$ . Si nous montrons que  $\Psi$  a 0 pour valeur régulière alors par le théorème 2.1 avec  $k \geq 1$  (voir remarque 2.2, ii), on a que  $\Psi_a = \Psi(\cdot, \cdot, a)$  a 0 pour valeur

régulière pour un ensemble générique de  $a$  et donc si  $N > 2n - 1$ , qui est la dimension de  $T_1X$ , ce n'est possible que si l'image de  $\Psi_a$  évite 0 (voir remarque 2.2, i) ce qui est équivalent à dire que  $f_a$  est une immersion.

Réduisons le problème

i) La différentielle de  $\Psi$  en  $(x, \xi, a)$  est constituée de trois parties, différentielles par rapport à chacune des variables. On ne peut pas, a priori, espérer contrôler les différentielles par rapport à  $x$  et  $\xi$  car il faudrait avoir sur les fonctions propres des renseignements qu'il est très difficile d'obtenir dans une situation générale. Nous ne travaillerons donc qu'avec

$D_3\Psi(c)$  = dérivée de  $\Psi$  au point  $(x_0, \xi_0, a_0)$  dans la direction de  $c \in T_{a_0}W$ .

ii) En fait, quitte à restreindre  $W$  à un ouvert plus petit, il suffit de montrer que  $D_3\Psi$  est surjective en  $(x_0, \xi_0, 0)$  avec

$$\Psi(x_0, \xi_0, 0) = d_{x_0}u_{i,0}(\xi_0) = 0 \text{ pour tout } i.$$

L'ensemble de tels  $(x_0, \xi_0)$ , noté  $C$  est un compact (car fermé) de  $T_1X$ .

Par continuité  $D_3\Psi$  sera donc surjective dans  $U \times V$ , où  $U$  est un voisinage de  $C$  et  $V$  un voisinage de 0 dans  $W$ .

Par ailleurs  $T_1X \setminus U$  est compact et vérifie, pour tout  $(x, \xi) \in T_1X \setminus U$ ,  $d_x f_0(\xi) \neq 0$ .

Il existe donc un voisinage  $V'$  de 0 dans  $W$  tel que ceci soit encore vrai pour  $a \in V'$ , ce qui signifie que les points  $(x, \xi) \in T_1X$ , tels que

$$d_x f_a(\xi) = 0 \text{ pour } a \in V'$$

sont dans  $U$  et donc si  $a \in V \supset V'$ ,  $D_3\Psi$  est surjective en  $(x, \xi, a)$  tel que  $d_x f_a(\xi) = 0$  (voir aussi l'appendice C pour la densité des métriques ou potentiels  $C^\infty$  dans  $W$ ).

iii) On supposera  $k$  toujours grand, dans ce cas la construction de  $I_a$  montre que celle ci dépend différentiablement de  $a$  (métrique ou potentiel  $C^k$ ) alors,

$$D_3\Psi(c) = (d_{x_0}\dot{u}_i(\xi_0))_{1 \leq i \leq N} = d_{x_0}\dot{f}(\xi_0)$$

où  $D_3\Psi(c)$  est la différentielle en  $(x_0, \xi_0, 0)$ , avec

$$\begin{cases} \dot{u}_i = \frac{d}{dt} (I_{a_t}(u_i))|_{t=0} = \dot{I}(u_i) \\ a_t \in W \left. \frac{da_t}{dt} \right|_{t=0} = c. \end{cases}$$

Si  $D_3\Psi$  n'est pas surjective il existe dans  $\mathbb{R}^N$  un vecteur  $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  non nul et orthogonal à l'image, c'est à dire, pour tout  $c$ ,

$$\sum \alpha_i d_{x_0} \dot{u}_i(\xi_0) = 0$$

en posant  $v = \sum \alpha_i u_i$ ,  $v \in E_0$ . La non surjectivité est équivalente à

(il existe  $v \in E_0 \setminus \{0\}$  tel que pour tout  $c$ ,  $d_{x_0} \dot{v}(\xi_0) = 0$ ).

Dans chaque cas particulier il faudra donc montrer que ceci est impossible.

**b) Plongement.** L'application à considérer dans ce cas est

$$\begin{aligned} \Psi : (X \times X \setminus \Delta(X)) \times W &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ (x, y, a) &\mapsto (u_{i,a}(y) - u_{i,a}(x))_{1 \leq i \leq N} = f_a(y) - f_a(x) \end{aligned}$$

où  $\Delta(X)$  désigne la diagonale de  $X \times X$  et en se plaçant en un point  $a$  (potentiel où métrique  $C^\infty$ ) proche de 0 où la propriété d'immersion est réalisée.

Le théorème 2.1 a pour conséquence que  $\Psi_a$  est génériquement un plongement si  $N \geq 2n + 1$  et si 0 est valeur régulière de  $\Psi$ .

Par une suite de réductions analogues au cas précédent on se ramène à montrer l'impossibilité d'avoir

$$\begin{aligned} \text{il existe } v \in E_0 \setminus \{0\} \text{ tel que } \dot{v}(y) - \dot{v}(x) = 0 \text{ pour tout } c \text{ et pour } x \neq y \\ \text{tels que } f_a(x) = f_a(y) \end{aligned}$$

(avec les notations précédentes).

### 3. Le cas des potentiels

Comme dans [UK] nous nous intéressons dans ce paragraphe à des perturbations d'un opérateur du type  $L = \Delta + b_0$ , où  $\Delta$  est le Laplacien associé à une métrique  $C^\infty$  et  $b_0$  une fonction également  $C^\infty$  sur  $X$ , par des fonctions  $a$  de classe  $C^k$ . Après avoir explicité la condition de stabilité nous démontrerons le théorème A.

#### A. CONDITION DE STABILITÉ

**a).** On se place donc dans le cas où  $\lambda_0$  est une valeur propre de multiplicité  $N$  de  $L$ . Par le critère 1.4, celle ci est stable si l'application  $\Phi$ , définie par:

$$\Phi(a) = \langle H_a \cdot | \cdot \rangle \in Q(E_0)$$

avec  $H_a = L + a$  et  $a \in C^k(X)$ , est une submersion en  $a = 0$ . Or pour  $c \in C^k(X)$

$$\frac{d}{dt} \Phi(tc)|_{t=0} = \langle c \cdot | \cdot \rangle = q_c$$

où  $q_c$  est la forme bilinéaire symétrique sur  $E_0$  définie par

$$q_c(u, v) = \int_X cuv$$

La stabilité de  $\lambda_0$  est équivalente au fait que les  $q_c$  engendrent un espace de dimension  $N(N+1)/2$  lorsque  $c$  parcourt  $C^k(X)$  ou à :

$$\sum \alpha_{ij} u_i(x) u_j(x) = 0 \text{ pour tout } x \in X \Leftrightarrow \alpha_{ij} = 0 \text{ pour tout } i, j.$$

où  $(u_i)$  est une base orthonormée de  $E_0$ . Définissons,

$$E_0^2 = \text{espace vectoriel engendré par les } u_i u_j$$

la stabilité de  $\lambda_0$  est donc équivalente à

$$\dim(E_0^2) = \frac{N(N+1)}{2}$$

**b).** On suppose donc que  $\lambda_0$  est stable, alors l'espace tangent à  $W$  en  $a = 0$  est défini par

$$T_0 W = \left\{ c \in C^k(X) \setminus \langle c, f \rangle = \int_X cf = 0 \forall f \in E_0^2 \right\}.$$

## B. IMMERSIONS ET PLONGEMENTS

**a) Immersion.** Comme il a été montré dans la section précédente, on est ramené à prouver qu'il n'existe pas de fonctions propre  $v \in E_0$  et de point  $(x_0, \xi_0) \in T_1 X$  tels que,

$$d_{x_0} \dot{v}(\xi_0) = 0 \text{ pour tout } c.$$

Calculons  $\dot{v}$ , si  $c \in C^k(X)$ ,  $\dot{v}$  est défini par:

$$(L - \lambda_0) \dot{v} + \dot{L}v = (L - \lambda_0) \dot{v} + cv = 0. \quad (3.1)$$

Par construction de l'isométrie canonique  $I_a$  (voir [CV1]),  $\dot{v}$  est orthogonale à  $E_0$ . L'équation (3.1) est donc équivalente à

$$\dot{v}(x_0) = - \int_X G(x_0, y) c(y) v(y) dy$$

où  $G$  est une fonction de Green modifiée pour l'opérateur  $L - \lambda_0$  (voir [UK] et appendice A pour la définition).

Choisissons en  $x_0$  un système de coordonnées en sorte que  $x_0 = 0$  et  $\xi_0$  soit la dérivation dans la direction de la première coordonnée notée  $\partial_1$ , alors

$$d_{x_0} \dot{v}(\xi_0) = \partial_1 \dot{v} = - \int_X \partial_1 G(x_0, y) c(y) v(y) dy.$$

Si cette expression est nulle pour tout  $c \in T_0 W$  alors il existe  $d \in E_0^2$  tel que,

$$\partial_1 G(x_0, y) v(y) = d(y) \tag{3.2}$$

pour tout  $y \in X$  (voir appendice A). L'opérateur a été choisi à coefficients  $C^\infty$  (bien que les perturbations se fassent par des potentiels  $C^k$ ), de telle sorte que  $d$  et  $v$  sont  $C^\infty$ . Par ailleurs  $\partial_1 G$  est singulier en  $x_0$  (voir appendice A), il vient donc que  $v(x_0) = 0$ .

Explicitons le développement des fonctions considérées en coordonnées locales ( $x_0 = 0$ ) normales,

$$v(y) = p_\alpha(y) + O(|y|^{\alpha+1}) \quad \alpha \in \mathbb{N}$$

et  $p_\alpha$  est un polynôme homogène harmonique de degré  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}^n$  (voir [BS] ou appendice A) non identiquement nul.

$$\partial_1 G(x_0, y) = y_1 \frac{C_n}{|y|^n} + o(|y|^{1-n})$$

(appendice A ou [BS]), où  $C_n$  est une constante et  $y_1$  la première coordonnée,

$$d(y) = q(y) + O(|y|^{\deg(q)+1})$$

où  $q$  est polynôme homogène. Ceci étant une conséquence du fait que  $d$  est  $C^\infty$ . L'unicité des développements asymptotiques et limites conduit à l'égalité

$$C_n y_1 p_\alpha(y) = |y|^n q(y) \tag{3.3}$$

en particulier  $n$  ne peut être que pair, en effet si  $t \in \mathbb{R}$ , l'égalité ci-dessus appliquée à  $ty$  pour  $y$  fixé conduit à

$$t^{\alpha+1} = |t|^n t^{\deg(q)}.$$

L'égalité (3.3) est donc une égalité entre polynômes. Or  $y_1$  qui est irréductible divise  $|y|^n q(y)$  mais ne divise pas  $|y|^n$ , il divise donc  $q(y)$ . Par simplification (3.3) devient

$$p_\alpha(y) = |y|^n q_1(y) \quad (q_1 \text{ est un polynôme}). \quad (3.4)$$

Enfin dans la décomposition des polynômes homogènes de degré  $\alpha$  donné, les polynômes harmoniques appartiennent à un supplémentaire de l'espace des polynômes homogènes divisibles par une puissance (paire) de  $|y|$  (voir [B-G-M] p. 160). L'égalité (3.4) est donc impossible. L'application  $\Psi$  de la section II.a a 0 pour valeur régulière.

### 3.1. REMARQUES

i) Le fait que  $L$  ait des coefficients  $C^\infty$  a été utilisé pour conclure que  $d$  est  $C^\infty$  et donc pour écrire l'égalité (3.3). En effet les développements de  $v$  et  $G$  sont valables même si les coefficients de  $L$  sont Hölder continus ([BS]). Si les coefficients de  $L$  ne sont que de classe  $C^k$ , et si  $\alpha + 1 - n$  est plus grand que  $k + 1$ , il se peut que l'on ne puisse pas écrire (3.3).

ii) Si la variété est munie d'un atlas analytique réel et les coefficients de  $L$  sont analytiques réels alors  $d$ ,  $v$  et  $\partial_1 G$  (pour  $y \neq x_0$ ) le sont, en conséquence il suffit, par l'unicité du prolongement analytique, d'avoir (3.2) sur un ouvert  $U \subset X$  quelconque. On peut se limiter dans ce cas à des perturbations par des potentiels de classe  $C^k$  et à support compact dans  $U$ .

**b) Plongement.** Un raisonnement analogue au cas précédent, montre que l'application  $\Psi$  du paragraphe précédent a 0 pour valeur critique s'il existe deux points distincts  $x_1$  et  $x_2$  de  $X$  tels que

$$(G(x_1, y) - G(x_2, y))v(y) \equiv d(y)$$

pour tout  $y$  (avec les notations précédentes).

La conclusion s'ensuit par des raisonnements similaires (et plus simples) que pour le cas de l'immersion.

Les remarques 3.1, i) et 3.1, ii) s'appliquent également dans ce cas.

En conclusion on a prouvé le

**3.2. THÉORÈME.** *Si  $\lambda_0$  est une valeur propre stable (SAH) de multiplicité  $N$  de l'opérateur  $L = \Delta + b_0$  à coefficients  $C^\infty$  sur  $X$ , alors il existe un ouvert dense dans  $W$  de potentiels, noté  $W_1$  tel que l'application  $f_a$  est pour  $a \in W_1$ ,*

- 1) *une immersion si  $N \geq 2n$*
- 2) *un plongement si  $N \geq 2n + 1$ .*

Rappelons que  $W$  est l'ensemble des potentiels  $a$  de classe  $C^k$  sur  $X$  proche de  $b_0$  tels que  $\Delta + a$  ait  $\lambda_0$  pour valeur propre avec la multiplicité  $N$ , et que  $f_a$  est l'application

$$X \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$x \mapsto f_a(x) = (u_{i,a}(x))_{1 \leq i \leq N}$$

où  $(u_{i,a})$  est une base de  $\ker(\Delta + a - \lambda_0)$ .

#### 4. Les variations conformes de métriques

Dans ce paragraphe, nous allons étudier des perturbations ponctuellement conformes de métriques riemanniennes, c'est-à-dire des métriques du type

$$g = e^f g_0$$

où  $f$  est une fonction de classe  $C^k$  sur  $X$  et  $g_0$  une métrique de référence que nous supposerons  $C^\infty$ .

Ces variations s'avèrent être les plus importantes pour le genre de résultat que nous visons.

Après l'énoncé de la condition de stabilité d'une valeur propre multiple, nous prouverons que l'application  $\Psi$  a 0 pour valeur régulière dans les deux cas étudiés (immersion et plongement).

Dans ce qui suit,  $\lambda_0$  est une valeur propre de

$$\Delta_{g_0} = \Delta = \Delta_0$$

de multiplicité  $N$ .

##### A. CONDITION DE STABILITÉ

Soit  $\varepsilon$  un réel (positif), posons

$$g_\varepsilon = e^{2\varepsilon f} g_0, \quad f \in C^k(X)$$

et

$\Delta_\varepsilon =$  Laplacien associé à  $g_\varepsilon$ .

Les opérateurs  $\Delta_\varepsilon$  n'opèrent pas sur le même espace  $L^2$ , en effet la forme volume  $\theta_\varepsilon$  de  $g_\varepsilon$  est,

$$\theta_\varepsilon = e^{n\varepsilon f} \theta_0.$$

On peut toutefois se ramener facilement à la situation décrite dans le paragraphe 1, par l'isométrie

$$\begin{aligned} L^2(X; \theta_\varepsilon) &\rightarrow L^2(X; \theta_0) \\ u &\mapsto e^{(n/2)\varepsilon f} u \end{aligned}$$

et on définit l'opérateur sur  $L^2(X; \theta_0)$

$$A(\varepsilon) = e^{(n/2)\varepsilon f} \Delta_\varepsilon e^{-(n/2)\varepsilon f}$$

auquel on va pouvoir appliquer la théorie des perturbations (voir [B-W] et [BD]). Comme précédemment

$$\Phi_\varepsilon(u, v) = \langle A(\varepsilon)u, v \rangle \quad u, v \in E_0$$

et

$$\dot{q}(u, v) = \left. \frac{d\Phi_\varepsilon}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} (u, v) = \langle \dot{A}u, v \rangle \text{ avec } \dot{A} = \left. \frac{dA(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$$

on a

$$\begin{aligned} \dot{q}(u, v) &= \frac{n}{2} \langle f \Delta u, v \rangle - \frac{n}{2} \langle \Delta(fu), v \rangle + \langle \dot{\Delta}u, v \rangle \\ &= \lambda_0 \frac{n}{2} \langle fu, v \rangle - \lambda_0 \frac{n}{2} \langle fu, v \rangle + \langle \dot{\Delta}u, v \rangle \\ &= \langle \dot{\Delta}u, v \rangle. \end{aligned}$$

Comme dans [B-W] un calcul en coordonnées locales (voir Appendice B) donne,

$$\dot{\Delta}u = -2f(\Delta u) - (n-2)(df \mid du)$$

où  $\langle df | du \rangle$  est le produit scalaire ponctuel des formes  $df$  et  $du$  par rapport à la métrique  $g_0$ . Il vient donc

$$\begin{aligned}\dot{q}(u, v) &= -2\langle f(\Delta u), v \rangle - (n-2)\langle (df | du), v \rangle \\ &= -2\lambda_0\langle fu, v \rangle - (n-2)\langle (df | du), v \rangle\end{aligned}$$

par ailleurs  $\dot{q}$  est par construction symétrique, donc

$$\begin{aligned}2\dot{q}(u, v) &= -4\lambda_0\langle fu, v \rangle - (n-2)[\langle (df | du), v \rangle + \langle (df | dv), u \rangle] \\ &= -4\lambda_0\langle fu, v \rangle - (n-2)\langle df, d(uv) \rangle \\ &= -4\lambda_0\langle fu, v \rangle - (n-2)\langle f, \Delta(uv) \rangle\end{aligned}$$

posons

$$M = \left(\frac{n-2}{2}\right) \Delta + 2\lambda_0$$

alors

$$\dot{q}(u, v) = -\langle M(uv), f \rangle.$$

La valeur propre est *non stable* pour les variations de métriques conformes s'il existe  $(\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{N(N+1)/2}$  tel que pour tout  $f$

$$\sum \alpha_{ij} \dot{q}(u_i, u_j) = 0, \quad \alpha_{ji} = \alpha_{ij}. \quad (4.1)$$

avec  $(u_i)$  une base de  $E_0$ . Posant  $d = \sum \alpha_{ij} u_i u_j$ , (4.1)  $\Leftrightarrow \langle f, M(d) \rangle = 0$  pour tout  $f$  c'est-à-dire

$$M(d) \equiv 0.$$

L'opérateur  $M$  étant inversible, ceci est équivalent à

$$d \equiv 0.$$

La condition de stabilité est ainsi la même que dans le paragraphe précédent, c'est-à-dire

$$\dim(E_0^2) = \frac{N(N+1)}{2}.$$

**B. IMMERSIONS ET PLONGEMENTS PAR ESPACE PROPRE**

Si la condition précédente est satisfaite, alors l'espace tangent à  $W$  en  $a = 0$  est

$$T_0W = \{f \in C^k(X) \mid \langle f, M(d) \rangle = 0, \forall d \in E_0^2\}$$

avec des notations maintenant classiques, on a

$$\dot{v}(x) = - \int_X G(x, y) (\dot{A}v)(y) dy$$

$$\dot{v}(x) = \int_X G(x, y) \left[ \Delta(fv) + \frac{(n-2)}{2} v(\Delta f) + \lambda_0 fv \right] (y) dy$$

(voir l'Appendice B pour le calcul de  $\dot{A}$ ).

**a) Immersion.** Il n'y a pas immersion si pour une fonction propre  $v$  de  $E_0$  et un point  $(x_0, \xi_0)$  de  $T_1X$ ,

$$\begin{aligned} 0 = d_{x_0} \dot{v}(\xi_0) &= - \int_X \partial_1 G(x_0, y) \\ &\times \left[ \Delta(fv) + \frac{(n-2)}{2} v(\Delta f) + \lambda_0 fv \right] (y) dy, \end{aligned} \quad (4.2)$$

pour tout  $f$  orthogonale à  $M(E_0^2)$ , c'est-à-dire si il existe  $d \in E_0^2$  tel que,

$$v(\Delta + \lambda_0) \partial_1 G + \frac{(n-2)}{2} \Delta(v \partial_1 G) = M(d)$$

au sens des distributions. Notons que la dérivation  $\partial_1$  porte sur la première variable alors que  $\Delta$  s'applique à la deuxième variable et qu'en conséquence ils commutent. Or,

$$(\Delta + \lambda_0)(\partial_1 G) = (\Delta - \lambda_0) \partial_1 G + 2\lambda_0 \partial_1 G$$

et

$$(\Delta - \lambda_0) \partial_1 G = \partial_1 \delta_{(x_0)} + h(x_0, y)$$

où  $\delta_{(x_0)}$  est la masse de Dirac en  $x_0$ ,  $\partial_1 \delta_{(x_0)}$  sa dérivée dans la direction  $\xi_0$  et  $h$  une fonction  $C^\infty$  (voir Appendice A), on a donc,

$$c(\Delta - \lambda_0)(\partial_1 G) = (\partial_1 v)(x_0) \delta_{(x_0)} + v(x_0) \partial_1 \delta_{(x_0)} + v(y) h(x_0, y)$$

et l'égalité

$$M(d) = M(v \partial_1 G) + (\partial_1 v)(x_0) \delta_{(x_0)} + v(x_0) \partial_1 \delta_{(x_0)} + vh$$

et,

$$d - M^{-1}(vh) = v \partial_1 G + M^{-1}((\partial_1 v)(x_0) \delta_{(x_0)} + v(x_0) \partial_1 \delta_{(x_0)}). \quad (4.3)$$

(notons que le membre de gauche est  $C^\infty$ ).

Si on dénote le noyau résolvant du Laplacien, c'est-à-dire le noyau résolvant de  $(\Delta + \mu)^{-1}$  pour  $-\mu \notin \text{Spec}(\Delta)$  par  $R(\mu; x, y)$ , (4.3) est équivalente à

$$d(y) - M^{-1}(vh)(y) = v(y) \partial_1 G(x_0, y) + \frac{2}{(n-2)} [(\partial_1 v)(x_0) R(\gamma; x_0, y) + v(x_0) \partial_1 R(\gamma; x_0, y)]$$

avec  $\gamma = 4\lambda_0/(n-2)$ , si  $n > 2$ .

Étudions les singularités dans le cas  $n > 2$ . La plus grosse contribution vient de  $\partial_1 G$  et  $\partial_1 R$  qui se comportent de manière analogue en  $x_0$ . On utilise à nouveau le système de coordonnées centré en  $x_0$ . Le terme prédominant est donc,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{(n-2)C_n v(0)y_1}{|y|^n} \text{ qui vient de } v \partial_1 G \\ -\frac{2C_n v(0)y_1}{|y|^n} \text{ qui vient de } v \partial_1 R \end{array} \right. \text{ donnant } -\frac{C_n y_1 v(0)}{|y|^n} [(n-2) + 2]$$

qui doit être nul, donc  $v(0) = 0$ , (rappelons que nous traitons ici le cas  $n > 2$ ). Ensuite on peut écrire  $v(y) = p_1(y) + O(|y|^2)$  (notations du paragraphe précédent).

Le terme prédominant est alors obtenu par

$$\left\{ \begin{array}{l} -(n-2)C_n \frac{y_1}{|y|^n} p_1(y) \text{ qui vient de } v \partial_1 G \\ + \frac{2}{(n-2)} \frac{C_n}{|y|^{n-2}} \frac{\partial p_1}{\partial y_1}(0) \text{ qui vient de } (\partial_1 v)R \end{array} \right.$$

posons

$$p_1(y) = \eta y_1 + q(y)$$

où  $q$  ne contient pas  $y_1$  et  $\eta = \partial p_1 / \partial y_1(0)$ . Le terme principal est donc

$$\frac{C_n}{|y|^{2n}} \left\{ -(n-2)[\eta y_1^2 + y_1 q(y)] + \frac{2}{(n-2)} \eta [y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2] \right\}$$

en prenant  $y_2 = y_3 = \dots = y_n = 0$ , on a

$$\frac{C_n \eta y_1^2}{|y_1|^{2n}} \left( -(n-2) + \frac{2}{(n-2)} \right)$$

ce qui implique  $\eta = 0$  si  $n > 2$ . L'égalité (4.3) devient donc

$$d - M^{-1}(vh) \equiv v \partial_1 G$$

qui est impossible (voir paragraphe précédent).

Le cas  $n = 2$  est plus simple, en effet l'opérateur  $M$  n'est que la multiplication par  $2\lambda_0$ , on est donc ramené à la situation obtenue dans le cas des perturbations par des potentiels. Les vérifications sont laissées au lecteur.

**b) Plongement.** Ce cas, plus simple, est laissé au lecteur.

Nous avons ici montré les propriétés génériques pour les fonctions propres de  $A = e^{(n/2)f} \Delta e^{-(n/2)f}$ . On peut faire de même avec les fonctions propres de  $\Delta$ , pour cela le lecteur doit se reporter à l'appendice D.

On a donc démontré le

**4.1. THÉORÈME.** *Si  $\lambda_0$  est une valeur propre stable de  $\Delta$ , pour les perturbations conformes, de multiplicité  $N$ , alors il existe un ouvert dense dans  $W$  de métriques, noté  $W_1$  tel que l'application  $f_a$  est pour  $a \in W_1$ ,*

- 1) *une immersion si  $N \geq 2n$ ;*
- 2) *un plongement si  $N \geq 2n + 1$*

#### 4.2. REMARQUES

i) Notons que dans les sections 3 et 4 nous ne nous servons de la condition de stabilité qu'au moment d'appliquer le théorème de transversalité 2.1, qui nécessite que  $W$  soit une variété de Banach. Mais la preuve montre que l'égalité (4.2) entraîne (4.3) même si  $E_0^2$  n'est pas de dimension maximale, et donc conduit à une impossibilité également.

ii) On peut s'intéresser à des variations conformes à volume constant, c'est-à-dire telle que  $\int_X f = 0$ . Dans ce cas la condition de stabilité est que l'espace engendré par  $E_0^2$  et les constantes soit de dimension maximale. Des modifications élémentaires de la preuve de 4.1 montre que celui-ci est vrai si on remplace conforme par conforme à volume fixé.

iii) En fait 4.1 est vrai pour des variations conformes avec *n'importe quel nombre fini de conditions* sur  $f$ , du type  $\langle f, v \rangle = 0$  avec  $v$  une fonction  $C^\infty$  sur  $X$ .

## 5. Où l'on décrit des exemples en dimension 2

Un des buts de ce texte étant de montrer que l'on peut immerger et plonger toute variété compacte par des espaces propres, et surtout le premier, il nous faut maintenant trouvé des valeurs propres stables de multiplicité suffisamment grande. Ces exemples reposent sur les métriques construites par Y. Colin de Verdière, B. Colbois et Y. Colin de Verdière, à grande multiplicité.

### A. LA SPHÈRE ET L'ESPACE PROJECTIF

Dans [CV1] il est montré que toutes les valeurs propres de la sphère munie de sa métrique canonique sont fortement stable (SAH), pour les variations de métriques qui sont toutes conformes.

Le premier espace propre sert déjà à plonger  $S^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ , le résultat 4.1 est donc sans intérêt dans ce cas.

Le second espace propre de la sphère canonique (voir [B–G–M] p. 160) est donné, dans les coordonnées de  $\mathbb{R}^3$ , par l'espace engendré par les fonctions sur  $S^2$ ,

$$(XY, ZX, YZ, X^2 - Y^2, X^2 - Z^2)$$

l'application  $f_0$  dans ce cas est un revêtement à deux feuillets de la surface de Véronèse  $V$  qui est un plongement (tendu) de  $P^2(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}^5$ . De plus la sphère canonique est analytique et  $5 \geq 2 \times 2 + 1$ , on a donc le

**5.1. COROLLAIRE.** *Il existe sur  $S^2$  des métriques arbitrairement proches de la métrique canonique (au sens  $C^k$  pour  $k$  grand) obtenues par perturbation de celle-ci sur des ouverts arbitrairement petits, en sorte que l'application  $f_a$ , pour le second espace propre, soit un plongement (proche de la surface de Véronèse).*

### 5.2. REMARQUES

i) En d'autres termes on peut "désingulariser"  $V$  (ce que l'on sait par les théorèmes de Whitney, voir [G–G]) mais par des plongements par le second espace propre d'une métrique aussi proche qu'on le désire de la métrique canonique.

ii) On a, bien entendu, un résultat analogue avec les perturbations par des potentiels.

### B. LE TORE $\mathbb{T}^2$

Il est prouvé dans [CV1] que toutes les valeurs propres d'un tore plat de multiplicité inférieure ou égale à 6 sont stables pour les variations quelconques de métriques. En ce qui concerne les variations conformes il existe sur le tore plat à maille carrée une première valeur propre de multiplicité 4 et des fonctions propres correspondantes vérifiant,

$$u_1^2 + u_2^2 \equiv 1 \equiv u_3^2 + u_4^2.$$

La valeur propre n'est pas stable, toutefois le premier espace propre donne dans ce cas un plongement isométrique et minimale de  $\mathbb{T}^2$  dans  $S^2$  (Tore de Clifford). Le théorème 4.1 est alors sans intérêt.

### C. LES SURFACES ORIENTABLES DE GENRE $\geq 2$

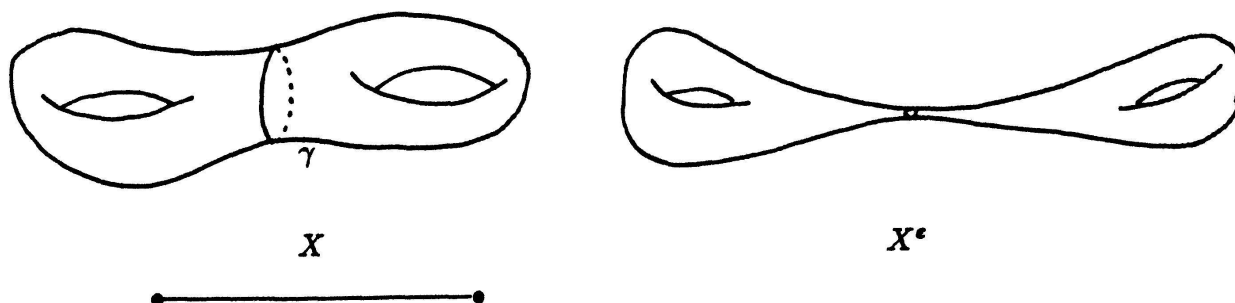
a). C'est le cas le plus intéressant. Il repose sur le travail [C-C] où des métriques à courbure constante  $-1$  sont construites avec une première valeur propre de grande multiplicité.

Rappelons la construction. On découpe la surface, munie d'une métrique à courbure constante  $-1$ ,

$$X = \bigcup \hat{X}_i \cup Z_a$$

en suivant le schéma donné par un graphe (complet dans [C-C]) où les  $\hat{X}_i$  sont des domaines correspondant aux sommets du graphe et les  $Z_a$  des cylindres hyperboliques symétriques par rapport à une géodésique périodique  $\gamma_a$  de longueur  $l_a$ , correspondant aux arêtes du même graphe. Les  $Z_a$  sont des voisinages tubulaires des géodésiques  $\gamma_a$ .

On perturbe la métrique sur  $X$  pour obtenir la surface  $X^\epsilon$  en modifiant légèrement la métrique des  $\hat{X}_i$  et en changeant celle de  $Z_a$  en sorte que la géodésique  $\gamma_a$  devienne de longueur  $\epsilon l_a$ , et que l'on obtienne une métrique  $C^\infty$  sur  $X^\epsilon$ . Définissons  $X_i$  comme la composant connexe de  $X \setminus (\bigcup \gamma_a)$  qui contient  $\hat{X}_i$ ,



alors

$$\text{Vol}(X_i) = \text{Vol}(X_i^\varepsilon).$$

L'étude du spectre se fait en injectant l'espace  $L^2$  du graphe (qui est un espace de dimension finie) dans l'espace  $H^1(X^\varepsilon)$  de la manière suivante: on définit l'espace *test*

$$F_\varepsilon = F(X^\varepsilon) = \{f \in H^1(X^\varepsilon) \mid f|_{\hat{X}_i} \equiv x_i \text{ et } f \text{ est harmonique sur } Z_a\}.$$

En choisissant les paramètres  $l_a$ , si  $\varepsilon$  est petit, on peut construire pour tout  $\varepsilon$  une métrique à courbure constante  $-1$  telle que la multiplicité de la première valeur propre non nulle soit celle du graphe muni du Laplacien combinatoire et de la mesure de dénombrement (pour les détails voir [C-C]). De plus l'espace propre est proche en un sens que l'on va préciser, de l'espace  $F_\varepsilon$ .

Nous allons prouver le

**5.3. THÉORÈME.** *Ces valeurs propres vérifient SAH pour les perturbations conformes à volume fixé et les perturbations par des potentiels d'intégrale nulle.*

*Preuve.* Soit  $E_\varepsilon$  l'espace engendré par les fonctions propres de  $X_\varepsilon$  relatives à la première valeur propre non nulle, et les constantes.

Soit  $u_i \in F_\varepsilon$  défini par

$$u_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{V_i}} & \text{sur } \hat{X}_i \text{ avec } V_i = \text{Vol}(X_i) = \text{Vol}(X_i^\varepsilon) \\ 0 & \text{sur } \hat{X}_k \text{ si } k \neq i. \end{cases}$$

(Rappelons que les éléments de  $F_\varepsilon$  sont continues et harmoniques sur les  $Z_a$ ).

Sur  $F_\varepsilon$  la norme  $L^2$  correspondant à la métrique perturbée est asymptotique lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 à

$$\sum_{i=1}^N V_i x_i^2 \text{ où } f|_{\hat{X}_i} = x_i \text{ pour } f \in F_\varepsilon$$

en particulier le système  $(u_i)_{i \in N}$  est asymptotiquement orthonormé et pour  $\varepsilon$  assez petit

$$\|u_i\|_{L^2(X^\varepsilon)} \leq 2.$$

L'espace  $E_\varepsilon$  est proche de  $F_\varepsilon$  comme dans [C-C], c'est-à-dire il existe une application linéaire  $B : F_\varepsilon \rightarrow F_\varepsilon^\perp$  telle que  $E_\varepsilon$  soit le graphe de  $B$ , et qui vérifie:

$$\|B\| = O(\varepsilon).$$

Soit  $f_i = B(u_i) + u_i$ . Supposons qu'il existe une relation du type

$$\sum \alpha_{ij} f_i f_j \equiv 0 \quad \text{avec} \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

pour  $(\alpha_{ij})$  non tous nuls et  $\sum (\alpha_{ij})^2 = 1$ . On pose

$$f_i = u_i + \varphi_i$$

avec  $\|\varphi_i\|_{L^2(X^\varepsilon)} = \|B(u_i)\| = O(\varepsilon)$ . On a alors

$$0 \equiv \sum \alpha_{ij} f_i f_j = \sum \alpha_{ij} u_i u_j + \sum \alpha_{ij} \varphi_i \varphi_j + 2 \sum \alpha_{ij} u_i \varphi_j$$

et si on pose  $h = \sum \alpha_{ij} u_i u_j$

$$\|h\|_{L^1} \leq \left\| \sum \alpha_{ij} \varphi_i \varphi_j \right\|_{L^1} + \left\| \sum \alpha_{ij} u_i \varphi_j \right\|_{L^1}$$

(normes  $L^1(X^\varepsilon)$ ), or:

$$\begin{aligned} \left\| \sum \alpha_{ij} \varphi_i \varphi_j \right\|_{L^1} &\leq \sum |\alpha_{ij}| \|\varphi_i \varphi_j\|_{L^1} \leq \sum |\alpha_{ij}| \|\varphi_i\|_{L^2} \|\varphi_j\|_{L^2} \\ &\leq O(\varepsilon^2) \left( \sum |\alpha_{ij}| \right) \leq O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

(rappelons que  $\sum (\alpha_{ij})^2 = 1$ ), de même

$$\left\| \sum \alpha_{ij} u_i \varphi_j \right\| \leq 2 \left( \sum |\alpha_{ij}| \right) O(\varepsilon) \leq O(\varepsilon).$$

on a donc

$$\|h\|_{L^1} = O(\varepsilon).$$

Nous allons montrer qu'un tel comportement asymptotique en  $\varepsilon$  est incompatible avec la définition des fonctions  $u_i$ . Il vient,

$$\int_{\hat{X}_k^\varepsilon} \left| \sum \alpha_{ij} u_i u_j \right| \leq \|h\|_{L^1} \text{ pour tout } k$$

mais sur  $\hat{X}_k$  un seul  $u_i$  n'est pas nul et c'est  $u_k$ , donc

$$|\alpha_{kk}| \frac{\text{Vol}(\hat{X}_k^\varepsilon)}{V_k} \leq \|h\|_{L^1}$$

de la construction de  $X_\varepsilon$  il résulte que  $\text{Vol}(\hat{X}_k^\varepsilon)$  est borné inférieurement d'où,

$$|\alpha_{kk}| = O(\varepsilon) \text{ pour tout } k.$$

Si  $Z_{ij}$  correspond à une arête entre  $\hat{X}_i$  et  $\hat{X}_j$ , alors

$$\int_{Z_{ij}} \left| \sum \alpha_{kl} u_k u_l \right| \leq \|h\|_{L^1}$$

sur  $Z_{ij}$  seuls  $u_i$  et  $u_j$  sont non nuls et

$$u_i = \frac{\sqrt{V_j}}{\sqrt{V_i}} \left( \frac{1}{\sqrt{V_j}} - u_j \right)$$

d'où

$$2 \int_{Z_{ij}} |\alpha_{ij} u_i u_j| - \int_{Z_{ij}} |\alpha_{ii} u_i^2 + \alpha_{jj} u_j^2| \leq \int_{Z_{ij}} |\alpha_{ii} u_i^2 + \alpha_{jj} u_j^2 + 2\alpha_{ij} u_i u_j| \leq \|h\|_{L^1}$$

$$0 \leq 2|\alpha_{ij}| \int_{Z_{ij}} |u_i u_j| \leq \|h\|_{L^1} + |\alpha_{ii}| \int_{Z_{ij}} |u_i|^2 + |\alpha_{jj}| \int_{Z_{ij}} |u_j|^2$$

donc

$$|\alpha_{ij}| \int_{Z_{ij}} |u_i u_j| = O(\varepsilon)$$

on a alors,

**5.4. LEMME.** Avec les notations ci-dessus  $\int_{Z_{ij}} |u_i u_j| = O(\varepsilon |\log \varepsilon|)$ .

*Preuve du Lemme*  $\Rightarrow$  *Théorème*. Par le lemme 5.4 on conclut que

$$|\alpha_{ij}| = O(|\log \varepsilon|^{-1}).$$

En particulier, si  $\varepsilon$  est assez petit, tous les  $|\alpha_{kl}|$  doivent être petit ce qui est contraire au choix  $\sum (\alpha_{ij})^2 = 1$ .

*Preuve du lemme*. Pour simplifier la preuve nous allons supposer que les nombres  $V_i$  (constants en  $\varepsilon$ ) sont égaux à 1 et que  $l_a = \pi$ . Alors un modèle pour  $Z_{ij}$  est, comme dans [C-C]

$$Y^\varepsilon = [-a, a] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

muni de la métrique

$$g_\varepsilon = dx^2 + l_0^2 \operatorname{ch}^2(x) d\theta^2 \text{ avec } l_0 = \pi\varepsilon \text{ et } l_0 \operatorname{ch}(a) = l > 0$$

où  $l$  est un nombre fixé.

Sous ces hypothèses simplificatrices

$$u_j = 1 - u_i = u$$

où

$$u(x) = \frac{\operatorname{Arcsin}(\operatorname{th}(x))}{2 \operatorname{Arcsin}(\operatorname{th}(a))} + \frac{1}{2} = \frac{A(x)}{2A(a)} + \frac{1}{2}$$

et

$$\int_{Y^\varepsilon} u(1-u) = \varepsilon \int_{-a}^a \left( \frac{A(x)}{2A(a)} + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{A(x)}{2A(a)} \right) \pi \operatorname{ch}(x) dx$$

il suffit donc d'étudier

$$I(\varepsilon) = \int_0^{a(\varepsilon)} \left( 1 - \frac{A^2(x)}{A^2(a(\varepsilon))} \right) \operatorname{ch}(x) dx$$

(il ne sera plus fait mention de  $\varepsilon$  dans la suite de la preuve) or,

$$A(a) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \pi/2$$

$$A(a) + A(x) \underset{\substack{a \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty}}{\sim} \pi$$

d'où

$$I(\varepsilon) = \frac{1}{A^2(s)} \int_0^a (A(a) - A(x))(A(a) + A(x))ch(x) dx \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{4}{\pi} \\ \times \int_0^a (A(a) - A(x))ch(x) dx$$

et en intégrant par parties on voit que

$$\int_0^a (A(a) - A(x))ch(x) dx = \int_0^a th(x) dx \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} a \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} |\log \varepsilon|$$

et donc

$$\int_{Y^\varepsilon} u(1-u) = O(\varepsilon |\log \varepsilon|).$$

### 5.5. REMARQUES

i) On peut exprimer ce résultat de manière plus synthétique, et cela est utile pour la suite du texte, de la manière suivante: soit l'application linéaire  $L$  définie par

$$L: \mathbb{R}^{N(N+1)/2} \rightarrow E_0^2$$

$$\alpha = (\alpha_{ij}) \mapsto \sum \alpha_{ij} f_i f_j$$

on munit  $E_0^2$  de la restriction de la forme  $L^1(X^\varepsilon)$ , alors la preuve qui précède montre qu'il existe deux constantes réelles positives telles que

$$C_2 \varepsilon |\log \varepsilon| |\alpha| \leq |L(\alpha)| \leq C_1 |\alpha|$$

en particulier  $L$  est injective, ce qui est la stabilité de la valeur propre  $\lambda_0$  par rapport aux perturbations étudiées.

ii) Si les graphes considérés ont des valeurs propres stables, et c'est le cas pour le graphe complet utilisé dans [C-C] alors la valeur propre  $\lambda_0$  est WAH (voir [CV1]) par continuité; le théorème 5.3, et surtout sa preuve, affirme que *dans ce cas* on a la propriété plus forte SAH.

**b) Applications.** Dans [C-C] il est prouvé que si  $X$  est de genre  $\geq 3$  on peut la munir d'une métrique à courbure constante  $-1$ , telle que la multiplicité de la

première valeur propre non nulle de son Laplacien soit,

$$E\left(\frac{1 + \sqrt{8\gamma + 1}}{2}\right) \geq 3, \quad \gamma = \text{genre de } X.$$

Il existe de plus une telle métrique pour chaque  $\varepsilon$  assez petit et on peut également utiliser les paramètres de Twist dans la décomposition en pantalons de  $X$ . On obtient donc les théorèmes d'immersion si  $\gamma \geq 6$  et de plongement si  $\gamma \geq 10$  à l'aide de ces métriques.

### 5.6. REMARQUES

i) La technique montre la stabilité pour les surfaces non compactes considérées dans [C-C] des valeurs propres (isolées) ainsi construites.

ii) On a prouvé qu'il n'existait aucune relation du type

$$\sum \alpha_{ij} f_i f_j \equiv 0$$

pour  $(f_i)$  une base de l'espace  $E_\varepsilon$  pour  $\varepsilon$  assez petit. La conséquence immédiate (et élémentaire) est

**5.7. COROLLAIRE.** *Les métriques  $X^\varepsilon$ , pour  $\varepsilon$  assez petit, ne se plongent pas isométriquement et minimalement dans  $S^3$  par leur premier espace propre.*

Il résulterait d'une conjecture de Yau (voir [YU]) qu'elles ne se plongent pas du tout isométriquement et minimalement dans  $S^3$ .

## 6. Exemples en dimension supérieur ou égale à 3

Dans ce paragraphe, nous allons utiliser la construction précédente, afin d'exhiber des valeurs propres stables de multiplicité arbitraire sur une variété compacte de dimension supérieure ou égale à 3.

Rappelons le résultat fondamental de [CV2].

**6.1. THÉORÈME.** *(Colin de Verdière). Si  $X$  est une variété compacte de dimension  $\geq 3$  et  $N$  un entier arbitraire, il existe sur  $X$  des métriques riemanniennes dont la première valeur propre non nulle du Laplacien est de multiplicité  $N$ .*

Par la suite nous ne nous intéresserons qu'à la première valeur propre, il est clair que les résultats se généralisent au cas d'une valeur propre quelconque (propriété  $A_N$  de [CV3]).

Comme il est suggéré dans [CV3] la technique utilisée dans [CV2] pour prouver le théorème 6.1 peut être simplifiée par l'utilisation du paragraphe 5. Décrivons la construction.

### A. CONSTRUCTION DE MÉTRIQUES À GRANDE MULTIPLICITÉ

Pour  $N$  donné choisissons une surface de Riemann  $Y$  dans la classe construite dans le paragraphe 5, en sorte que la multiplicité de sa première valeur propre soit  $N$ .

On fixe  $\varepsilon > 0$  petit et on appelle cette métrique  $g_0$ . La première valeur propre ainsi construite est SAH pour les variations conformes, c'est-à-dire pour  $\gamma \in W$  (une fonction  $C^k$  sur  $Y$ , où  $k$  est grand) la métrique

$$g_\gamma = e^\gamma g_0, \quad \gamma \in W \text{ (voir paragraphe 2)}$$

a la même première valeur propre, avec la même multiplicité et quitte à restreindre  $W$  vérifie aussi SAH.

Comme dans la remarque 5.5, i) on construit pour  $g_\gamma$ ,  $\gamma \in B$ , une application  $L_\gamma$  à l'aide d'une base  $(f_{i,\gamma,\varepsilon})$  dépendant continûment de  $\gamma$  (on utilise pour ce faire l'isométrie canonique du paragraphe 1). Si  $B$  est assez petit on a,  $\varepsilon$  étant fixé

$$0 < C_2 |\alpha| < |L_\gamma(\alpha)| < C_1 |\alpha|, \quad C_1, C_2 \text{ des constantes.}$$

Soit  $X$  la variété de dimension  $n \geq 3$ . On plonge  $Y$  dans un ouvert de  $X$  difféomorphe à  $\mathbb{R}^n$  ( $Y$  se plonge dans  $\mathbb{R}^3$  et donc dans  $\mathbb{R}^n$  pour  $n \geq 3$ ) et on choisit dans  $X$  une métrique  $h_\gamma$  dépendant différemment de  $\gamma$  pour  $\gamma \in B$  (voir paragraphe 2) qui est cylindrique au voisinage de  $Y$ .

Par cylindrique nous entendons qu'il existe un réel  $r > 0$  tel que le voisinage tubulaire de rayon  $r$  de  $Y$  dans  $(X, h_\gamma)$ , soit  $N_r = N_r(Y, \gamma)$  soit muni d'une métrique produit de  $g_\gamma$  par la métrique euclidienne sur une boule de rayon  $r$ ,  $C_r$ . ( $N_r$  est fixé, ne dépend pas de  $\gamma$ ).

Le spectre de  $(N_r, h_\gamma)$  pour le problème de Neumann est constitué de sommes de valeurs propres de  $(Y, g_\gamma)$  et de valeurs propres du problème de Neumann sur  $C_r$ . En particulier si  $r$  est assez petit la première valeur propre non nulle de  $C_r$  est grande et la première valeur propre non nulle de  $N_r$  est celle de  $(Y, g_\gamma)$  avec la même multiplicité. On fixe donc un tel  $r$ .

On applique ensuite le théorème III.1 de [CV2] p. 264, pour montrer que l'on peut construire des métriques sur  $X$  induisant  $h_\gamma$  sur  $N_r$  en sorte que le  $N$ -écart

spectral avec  $h_\gamma$  soit arbitrairement petit (voir [CV2]) uniformément en  $\gamma \in B$ . Ces métriques sont obtenues en multipliant  $h_\gamma$  par  $\eta$ , un nombre réel petit, sur  $X \setminus N_r$  et en régularisant près du bord. Le spectre de tels métriques convergent vers le spectre de Neumann de  $(N_r, h_\gamma)$  lorsque  $\eta$  tend vers 0.

Par écart spectral nous entendons en particulier des propriétés pour les fonctions propres analogues à celles utilisées dans la preuve de 5.3 (et plus, voir [CV2]).

Enfin, un lemme topologique permet de conclure à l'existence pour  $\eta$  petit d'un  $\gamma$  tel que la métrique décrite ci-dessus  $h_{\gamma,\eta}$  ait une première valeur propre avec multiplicité  $N$ .

## B. LA PROPRIÉTÉ SAH

Pour  $\varepsilon > 0$  petit on choisit  $\gamma$  en sorte que l'écart spectral entre  $g_\gamma$  et  $g_0$  soit inférieur à  $\varepsilon/2$  et  $\eta$  en sorte que le  $N$ -écart spectral entre  $h_{\gamma,\eta}$  et  $g_\gamma$  soit inférieur à  $\varepsilon/2$ . Alors l'écart spectral entre  $h_{\gamma,\eta}$  ( $N$ -écart) et  $g_0$  est inférieur à  $\varepsilon$ .

Pour rendre précis ces convergences, il faut introduire une distance bien adaptée à la situation entre sous-espaces, de dimension donnée, de  $L^2$ . C'est ce qui est fait dans [CV5], la proximité est donc à comprendre au sens de ces distances.

A l'aide de l'isométrie naturelle entre les espaces propres concernés on construit une base  $(w_i)$  de l'espace propre de  $h_{\gamma,\eta}$  à partir de la base  $(f_i)$  du théorème 5.3 telle que

$$w_i = f_i + v_i$$

et

$$\|v_i\|_{L^2(h_{\gamma,\eta})} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} O$$

$f_i$  étant prolongée à  $X$  de la manière suivante:

- constante sur les fibres de la fibration  $N_r \rightarrow Y$
- harmoniquement sur  $X \setminus N_r$

pour  $(\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{N(N+1)/2}$  avec  $\sum (\alpha_{ij})^2 = 1$ , une relation du type

$$\sum \alpha_{ij} w_i w_j \equiv 0 \quad (\alpha_{ij} = a_{ji})$$

aurait comme précédemment pour conséquence

$$\int_{N_r} \left| \sum \alpha_{ij} f_i f_j \right| = \text{vol}(C_r) \int_X \left| \sum \alpha_{ij} f_i f_j \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} O$$

et pour  $\varepsilon$  assez petit une contradiction avec la propriété de  $L$  (pour les détails de construction voir [CV2]).

## 7. Variations quelconques de métriques

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à des variations quelconques de métrique; *i.e.* sans nous limiter aux seules variations conformes.

Nous procéderons comme dans la section 4, en deux étapes.

Si  $g_t$  est famille à un paramètre réel de métriques, on pose

$$\frac{d}{dt}g_t|_{t=0} = h, \quad g_0 = g$$

alors  $h$  est un tenseur symétrique qui se décompose ponctuellement en

$$h = \tilde{h} + \frac{1}{n}(\text{trace}_g h)g \quad (n = \dim M)$$

ou  $\text{trace}_g h$  est la trace de  $h$  par rapport à la métrique  $g$  (*i.e.* le produit scalaire de  $h$  et  $g$  pour la structure euclidienne canonique sur les 2-tenseurs symétriques et  $\tilde{h}$  un tenseur à trace nulle).

Cette décomposition revient à séparer ponctuellement les variations conformes (de trace pure) des variations à forme volume fixée (à trace nulle). Elle est de plus ponctuellement orthogonale.

Nous adopterons les notations maintenant standard.

### A. CONDITION DE STABILITÉ

L'espace des paramètres est maintenant l'espace  $\mathcal{M}^k$  de toutes les métriques  $C^k$  voisines de  $g$ , et

$$T_g\mathcal{M}^k = \{h, 2\text{-tenseur symétrique}\}.$$

La valeur propre  $\lambda_0$  de multiplicité  $N$  est stable si l'application linéaire

$$d\Phi = d_g\Phi: h \mapsto \dot{q}(\cdot, \cdot) \in Q(E_0)$$

est surjective.

La non stabilité est donc équivalente à l'existence d'un vecteur  $\alpha = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{N(N+1)/2}$  non nul (on posera  $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}$ ) tel que

$$\sum \alpha_{ij} \dot{q}(u_i, u_j) = 0 \text{ pour tout } h \in T_g \mathcal{M}^k$$

où  $(u_i)$  est base de  $E_0$ .

Ceci doit être vrai en particulier pour des tenseurs  $h$  multiple de  $g$  c'est-à-dire des variations infinitésimalement conforme, d'où

$$\sum \alpha_{ij} u_i u_j \equiv 0 \text{ (voir paragraphe 4).} \quad (7.1)$$

Si maintenant  $h$  est à trace nulle, un calcul classique (voir [UK] et [BR]) donne

$$\dot{q}(u_i, u_j) = -\langle h, du_i \circ du_j \rangle$$

où  $du_i \circ du_j$  est le produit symétrique des 1-formes  $du_i$  et  $du_j$  (le produit scalaire étant au sens de la métrique  $g$ ). En se restreignant donc à de telles variations, on obtient

$$\sum \alpha_{ij} du_i \circ du_j \equiv cg. \quad (7.1.\text{bis})$$

où  $c$  est une fonction sur  $X$ . En appliquant le Laplacien à l'égalité (7.1) on trouve

$$0 = \sum \alpha_{ij} \langle du_i, du_j \rangle$$

par ailleurs (7.1.bis) donne

$$\sum \alpha_{ij} \langle du_i, du_j \rangle = \sum \alpha_{ij} \text{trace}_g (du_i \circ du_j) = nc$$

d'où la *non stabilité* implique

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \alpha_{ij} u_i u_j \equiv 0 \\ \text{et} \\ \sum \alpha_{ij} du_i \circ du_j \equiv 0. \end{array} \right. \quad (7.2)$$

Il est clair réciproquement que (7.2) avec  $\alpha$  non nul implique la non stabilité. Enfin, ces conditions sont indépendantes de la base choisie.

## B. IMMERSIONS ET PLONGEMENTS

Si la valeur propre  $\lambda_0$  est stable pour les perturbations quelconques de métriques, alors avec les notations précédentes:

$T_g W = \{h, 2\text{-tenseur symétrique}\}$

$$\frac{1}{n} \langle \text{trace}_g h, M(u_i u_j) \rangle + \langle \tilde{h}, du_i \circ du_j \rangle = 0 \text{ pour tout } i, j$$

En particulier  $T_g W$  contient tous les tenseurs du type  $fg$  où  $f$  est une fonction de classe  $C^k$  sur  $X$  vérifiant

$$\langle f, M(u_i u_j) \rangle = 0 \text{ pour tout } i, j$$

(il suffit, en effet de considérer les variations conformes  $e^{fg}$ ).

Soit  $F$  le sous-espace de  $C^k(X)$  (constitué de fonctions  $C^\infty$ ) engendré par les  $M(u_i u_j)$ . Notons que  $F$  n'est pas nécessairement de dimension maximale, c'est-à-dire  $N(N+1)/2$ .

**a) Immersion.** S'il n'y a pas immersion on a, avec les notations introduites au paragraphe 2.a)

$$0 = d_{x_0} \dot{v}(\xi_0)$$

pour toute variation. En ne l'appliquant qu'aux variations de type conforme, on obtient

$$\int_X \partial_1 G(x_0, y) \left[ \Delta(fv) + \frac{(n-2)}{2} v(\Delta f) + \lambda_0 fv \right](y) dy = 0 \quad (7.3)$$

pour tout  $f$  orthogonale à  $F$ , ce qui conduit à

$$v(\Delta + \lambda_0) \partial_1 G + \frac{(n-2)}{2} \Delta(v \partial_1 G) = M(d)$$

donc à une impossibilité comme au paragraphe 4.B.a). En effet, comme il l'a été remarqué en 4.2, i) il n'est pas nécessaire que  $F$  ait une dimension maximale pour aboutir à une contradiction à partir de (8.3).

**b) Plongement.** Ce cas se traite de manière analogue.

L'énoncé d'un théorème similaire à celui de 4.1 est laissé au lecteur.

### C. APPLICATIONS AUX SURFACES

Dans la section 5 nous avons laissé en suspens le cas des surfaces non orientables ou de petit genre, faute d'avoir pu construire par la méthode utilisée des valeurs propres stables de multiplicité au moins 4 ou 5.

Utilisant un travail récent de Y. Colin de Verdière [CV3] nous allons montrer l'existence sur les surfaces de genre  $\geq 1$  orientables ou non de premières valeurs propres stables de multiplicité 6, ce qui suffira à obtenir le théorème de plongement ou d'immersion par le premier espace propre.

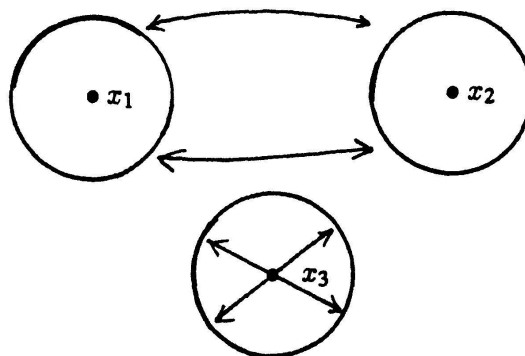
Après description de la construction de [CV3], il sera aisé comme dans le paragraphe 6 de prouver la stabilité.

Dans [CV1] il est montré que les tores plats de dimension 2 ont des valeurs propres stables pour les perturbations de métriques si et seulement si celle-ci ont des multiplicités inférieures ou égales à 6. En particulier, sur le tore plat équilatéral la première valeur propre est de multiplicité 6 (voir [B-G-M] p. 148).

La procédure de rajout d'anses ou d'éclatement est la suivante:

**a).** On considère le tore (plat, la métrique sera notée  $g_0$ ) auquel on excise un certain nombre de boules de rayon  $\varepsilon$  disjoints  $\mathbb{T}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^q B(x_i, \varepsilon) = Y_\varepsilon$  avec  $q = 2p + r$ .

**b).** On considère la surface obtenue par identification des bords de  $B(x_i, \varepsilon)$  et de  $B(x_{i+p}, \varepsilon)$  pour  $1 \leq i \leq p$  (ajout d'une anse reliant  $x_i$  à  $x_{i+p}$ ) et par identification des points antipodaux de  $\partial B(x_k, \varepsilon)$  pour  $2p + 1 \leq k \leq q$  (ajout par somme connexe d'un projectif réel de dimension 2 où plus simplement éclatement du point  $x_k$ ).



**c).** Du point de vue spectral, on considère l'extension de Friedrich de la forme quadratique  $\int_{Y_\varepsilon} |df|^2$  pour une métrique  $g$  sur  $\mathbb{T}^2$  et  $f$  dans un domaine  $D_\varepsilon$  obtenue à partir des conditions aux bords correspondantes.

i)  $f$  a la même valeur sur les points du bord de  $B(x_i, \varepsilon)$  et  $B(x_{i+p}, \varepsilon)$  ( $1 \leq i \leq p$ ) identifié;

ii)  $f$  a la même valeur sur les points antipodaux de  $\partial B(x_k, \varepsilon)$  ( $2p + 1 \leq k \leq q$ ).

Ce domaine correspond à des conditions aux limites “comprises” entre celles de Dirichlet et celle de Neumann. Pour plus de détails voir [CV3].

La proximité spectrale (voir [CV3]) est obtenue en utilisant des résultats dûs à J. Rauch et M. Taylor [R–T] et I. Chavel et E. Feldman [C–F].

On montre donc l’existence d’une métrique  $g$  telle que le Laplacien correspondant sur  $Y_\varepsilon$  (pour tout  $\varepsilon$  assez petit) ait  $\lambda_0$  pour valeur propre avec la multiplicité 6. Comme dans le paragraphe 6 on peut prendre  $g$ , arbitrairement proche de  $g_0$  quitte à diminuer  $\varepsilon$ .

Par les procédés d’adjonction d’anses et d’éclatements de points, on peut obtenir toutes les surfaces de genre  $\geq 1$  orientables ou non.

Il reste à vérifier la stabilité des valeurs propres ainsi construites. La méthode développée dans le paragraphe 6 sera utilisée ici.

Nous désignerons par  $E$  et  $Q_0$  (resp.  $E_\varepsilon$  et  $Q_\varepsilon$ ) l’espace propre pour la métrique plate sur  $\mathbb{T}^2$  et la forme quadratique de Dirichlet sur  $H^1(T^2)$  (resp. pour la variété  $Y_\varepsilon$  munie de la métrique  $g$  et la forme quadratique servant à définir le spectre décrit ci-dessus).

Tous les espaces de fonctions considérés sont plongés canoniquement (voir [CV3]) dans  $H^1(T^2)$ .

La proximité spectrale est obtenue en montrant que les hypothèses du théorème I.8 de [CV2] sont satisfaites. Rappelons-en la principale conséquence:

$E(\varepsilon)$  tend vers  $E$  dans  $H^1(T^2)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Plus précisément, il existe une constante positive  $C(\varepsilon)$  tendant vers 0 avec  $\varepsilon$ , telle que si  $(f_i)$  est une base de  $E_\varepsilon$  et  $(u_i)$  la base obtenue par projection orthogonale (pour la métrique  $g_0$ ) sur  $E$  alors

$$\|u_i - f_i\|_{L^2} \leq C(\varepsilon)$$

$$Q(u_i - f_i) = \|du_i - df_i\|_{L^2} \leq C(\varepsilon)$$

$$C(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Alors, par la stabilité de la valeur propre  $\lambda_0$  pour les perturbations de métriques à partir de  $g_0$  on sait qu’il n’y a pas de relations du type

$$\left| \sum \alpha_{ij} u_i u_j \right| + \left| \sum \alpha_{ij} du_i \circ du_j \right| \equiv 0$$

avec  $\alpha = (\alpha_{ij}) \in R^{N(N+1)/2}$  non nul (on pose  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ ).

En particulier, si on normalise  $\alpha$  par

$$|\alpha| = \sum \alpha_{ij}^2 = 1$$

on a l'existence d'une constante  $D > 0$ , telle que

$$0 < D \leq L(\alpha) = \int_{T^2} \left| \sum \alpha_{ij} u_i u_j \right| + \left| \sum \alpha_{ij} du_i \circ du_j \right| \quad (7.4)$$

( $D$  est indépendant de  $\alpha$ ).

La non stabilité pour les perturbations à partir de  $g_\varepsilon$  aurait pour conséquence l'existence d'un  $\alpha$  tel que

$$\sum \alpha_{ij} f_i f_j \equiv 0, \quad \sum \alpha_{ij} df_i \circ df_j \equiv 0 \quad \text{et} \quad |\alpha| = 1$$

or

$$\begin{aligned} \int_{T^2} \left| \sum \alpha_{ij} u_i u_j \right| &\leq \int_{T^2} \left| \sum \alpha_{ij} (u_i u_j - f_i f_j) + \sum \alpha_{ij} f_i f_j \right| \\ &= \int_{T^2} \left| \sum \alpha_{ij} (u_i u_j - f_i f_j) \right| \end{aligned}$$

d'où  $\|\sum \alpha_{ij} u_i u_j\|_{L^1} \leq C'(\varepsilon)$  avec  $C'(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$  et de même pour  $\sum \alpha_{ij} du_i \circ du_j$ , contredisant ainsi l'inégalité (7.4).

La stabilité est acquise ainsi donc que les théorèmes de plongements et immersions par le premier espace propre.

### 7.1. REMARQUE

i) Ce qui est décrit ci-dessus est valable pour toute multiplicité correspondant à une valeur propre stable pour les variations de métriques quelconques, où les variations conformes (ainsi que les variations de métrique à forme volume fixée comme on le voit dans le paragraphe 8). On peut donc faire des opérations chirurgicales préservant la multiplicité et la propriété SAH. En particulier, à partir des tores plats, on peut réaliser toutes les multiplicités paires inférieures ou égales à 6. La multiplicité 3 pouvant être atteinte en opérant la sphère et la multiplicité 5 en opérant soit le projectif réel soit la bouteille de Klein (voir [CV3]).

ii) Il serait intéressant de "forcer" la multiplicité en même temps que le genre, c'est-à-dire de rajouter une anse tout en rajoutant une unité à la multiplicité (au moins dans certains cas). On pourrait ainsi éventuellement réaliser sur des surfaces de genre  $g$  des multiplicités supérieures à

$$E\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2g + \frac{1}{4}}\right).$$

## 8. Quelques remarques générales

Dans ce paragraphe, nous allons donner, en guise de conclusion, une suite de remarques assez générales sur les techniques et résultats précédents.

### A. D'AUTRES RÉSULTATS DE TRANSVERSALITÉ

a). Dans les paragraphes précédents nous avons dû montrer que certaines applications évitent l'origine de  $\mathbb{R}^N$ , ce qui s'est ramené à prouver la transversalité de  $\Phi$  à  $\{0\} \subset \mathbb{R}^N$ . On pourrait envisager de prouver que sous certaines hypothèses sur  $N$  on a genericité de propriétés du type suivant:

$f_a$  évite une sous-variété  $V \subset \mathbb{R}^N$ .

Des démonstrations du même type doivent pouvoir conduire à de tels résultats (au moins pour certains  $V$ ). L'auteur n'ayant en vue aucune application précise, il ne lui a pas semblé nécessaire de systématiser cette démarche.

b). Le lecteur pourra également tenter de prouver des théorèmes du type Whitney pour  $f_a$  dont les coordonnées sont supposées appartenant à une somme d'espaces propres relatifs à des valeurs propres distinctes. La démonstration précédente devra être reprise et adaptée à cette situation.

c). Enfin l'auteur tient à signaler qu'il n'a pas réussi à obtenir des théorèmes du même type pour des Laplaciens combinatoires sur des graphes (voir [CV4]). La question suivante reste sans réponse:

sur un graphe connexe  $\Gamma$  fini et pour une valeur propre stable (parmi les opérateurs de Schrödinger sur  $\Gamma$ ) est-il possible d'avoir comme propriété générique: pour tout sommet, il existe un fonction propre ne s'y annulant pas?

La technique précédente repose entièrement sur l'étude de la singularité des fonctions de Green modifiées, or sur un graphe toutes les fonctions sont "de classe  $C^\infty$ ".

### B. QUE PEUT-ON DIRE DE L'IMAGE, EN CAS DE PLONGEMENT?

a). Le plongement n'est pas en général isométrique, il est donc très difficile de relier la géométrie de l'image (comme sous-variété de  $\mathbb{R}^N$ ) à celle de la variété source.

Dans [GV] il est prouvé un résultat qui permet de mieux comprendre la situation.

Introduisons quelques notations: pour une application  $f$  d'une variété riemannienne  $X$  dans  $\mathbb{R}^N$  on définit

$$\text{Dif } f = \sup_{x \neq y} \left[ \frac{d_{\mathbb{R}^N}(f(x), f(y))}{d_X(x, y)} \right] = \text{dilatation de } f$$

où  $d_X$  (resp.  $d_{\mathbb{R}^N}$ ) est la distance riemannienne sur  $X$  (resp. euclidienne sur  $\mathbb{R}^N$ ) et si  $f$  est un homéomorphisme sur son image,

$$\text{Distor } (f) = \text{distorsion de } f = (\text{dil } f)(\text{dil } f^{-1})$$

de sorte que la distorsion vaut 1 pour une application homothétique (au sens des distances).

Définissons également,

$$\text{Int } (d^2) = \iint_{X \times X} [d_X(x, y)]^2 dx dy.$$

On a alors le corollaire suivant à la proposition 8.1.A, p. 115 de [GV],

**PROPOSITION.** *Pour  $f$  un plongement par  $k$ -ième espace propre on a,*

$$[\text{distor } (f)]^2 \geq \frac{\lambda_k(\text{Int } d^2)}{2n(\text{Vol } (X))^2}.$$

## 8.2. REMARQUE

La distorsion est donc d'autant plus grande que la valeur propre est grande. En particulier pour la sphère canonique  $S^n$  chaque espace propre impair permet de plonger celle-ci isométriquement et minimalement dans  $S^{N-1}$  où  $N$  est la multiplicité de la valeur propre correspondante, il est facile de vérifier que l'application "enroule" d'autant plus  $S^n$  dans  $S^{N+1}$  que la valeur propre est grande.

Da même avec les projectifs réels canoniques.

Pour des généralisations des plongements par espace propre, le lecteur peut se référer à [B-B-G] où un plongement dans un espace de Hilbert par le noyau de la chaleur est décrit, pour toute variété riemannienne compacte.

**b).** Le théorème de Courant ([C-H]) se traduit sur l'image par une propriété intéressante pour un plongement  $f$  d'une surface  $X$  dans  $\mathbb{R}^N$  on dira que  $f$  possède la propriété **(TPO)** (resp. **(TPP)**) si tout hyperplan de  $\mathbb{R}^N$  passant par l'origine

(resp. tout hyperplan de  $\mathbb{R}^N$ ) sépare l'image en deux composantes connexes (resp. en au plus deux composantes connexes).

Dans le cas d'un plongement par le *premier espace propre* le théorème de Courant sur l'ensemble nodal d'une fonction propre est équivalent à la propriété **(TPO)**:

la propriété **(TPP)** (Two pieces property) est pour une surface *compacte sans bord*, équivalent au fait que le plongement est tendu (voir [KR1] pour une revue sur ce problème). On a alors,

**8.3. PROPOSITION.** *Si l'application  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}^N$  est un plongement tendu (au sens où il a la propriété **(TPP)** et substantiel (i.e.  $f(X)$  n'est pas contenu dans un hyperplan), on a les restrictions suivantes,*

i) ([KR2]) *si  $f$  est  $C^2$*

$$N \leq 5;$$

ii) ([BF]) *si  $f$  est polyédrale*

$$N \leq E\left(\frac{5 + \sqrt{49 - 24\chi(X)}}{2}\right) = C(X) - 1$$

où  $\chi(X)$  est la caractéristique d'Euler–Poincaré de  $X$ .

#### 8.4. REMARQUES

i) Nous avons montré qu'il existe des surfaces qui se plongent dans  $\mathbb{R}^N$ , de manière  $C^\infty$  par leur premier espace propre donc avec la propriété **(TPO)** en codimension très grande ( $\geq 3$ ). On peut vérifier que la preuve de 8.3, i) ne s'adapte pas si on remplace **(TPP)** par **(TPO)**.

ii) Il est *remarquable* que la borne figurant dans 8.3, ii) soit  $C(X) - 1$  où  $C(X)$  est le nombre chromatique de  $X$  (voir [RL]) et que si  $N$  est la multiplicité de la première valeur propre du Laplacien sur  $X$ , l'inégalité 8.3, ii) est une conjecture de Y. Colin de Verdière ([CV2]).

## Appendix A

1) Pour les opérateurs considérés, du type Laplacien pour des métriques  $C^\infty$  avec potentiel  $C^\infty$ , noté  $L$ , on définit la notion de fonction de Green modifiée

(voir [UK]). Ses propriétés les plus utiles dans notre cadre sont:

- a)  $G(y, x) = G(x, y)$ .
- b)  $\int_X G(y, x)Lf(x) dx = f(y)$  si  $\int_X u(x)f(x) dx = 0$  pour tout  $u \in \ker L$ .
- c)  $\int_X G(y, x)u(x) dx = 0$  pour  $u \in \ker L$ .

Pour un Laplacien sur une variété compacte, par exemple, si  $(\varphi_i)$  (resp.  $\lambda_i$ ) désignent les fonctions propres (resp. les valeurs propres) de  $L$  et soit  $\lambda$  un nombre réel différent de  $\lambda_i$ , on appelle  $R(\lambda; x, y)$  le noyau résolvant de  $L - \lambda$ , on a alors

$$R(\lambda; x, y) = \sum \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i - \lambda}$$

qui a un pôle en  $\lambda = \lambda_i$ . La fonction de Green modifiée pour  $L - \mu$  où  $\mu$  est une valeur propre de  $L$  est:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu} \left\{ R(\lambda; x, y) - \sum_{\lambda_i = \mu} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i - \lambda} \right\} = \sum_{\lambda_i \neq \mu} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i - \mu}.$$

En particulier, la singularité sur la diagonale de la fonction de Green modifiée est la même que celle de la résolvante. Enfin on a

$$(L - \mu)G = \delta_{(x)} - \sum_{\lambda_i = \mu} \varphi_i(x)\varphi_i(y) = \delta_{(x)} + h(x, y).$$

2) Il résulte du résultat général [BS] que pour les opérateurs considérés, si  $(x_1, \dots, x_n)$  est un système de coordonnées au voisinage de  $y_0$  centré en  $y_0$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial X_1^{\alpha_1} \dots \partial X_n^{\alpha_n}} G(0, x) \simeq \frac{\partial^\alpha}{\partial X_1^{\alpha_1} \dots \partial X_n^{\alpha_n}} J(x) \quad (\text{A1})$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est un multi-indice et  $J$  la solution fondamentale du Laplacien dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n = \dim X$ ).

Notons que si les coefficients de l'opérateur ne sont que Hölder continus, on peut toutefois écrire (A1) avec  $|\alpha| = \sum \alpha_i \leq 2$ , qui est l'ordre de l'opérateur (voir [BS]).

3) Si  $v$  est orthogonale à  $\ker(L)$  alors

$$Lv = w \Leftrightarrow v(x) = \int_X G(x, y)w(y) dy$$

par définition de  $G$ . De plus on peut dériver sous le signe intégral,

$$\partial_1 v(x) = \int_X \partial_1 G(x, y) w(y) dy.$$

## Appendix B

On se propose dans cet appendice de calculer la dérivée de l'opérateur  $A_\varepsilon$  apparaissant dans le paragraphe 4.

Rappelons que

$$A_\varepsilon = e^{(n/2)\varepsilon f} \Delta_\varepsilon e^{-(n/2)\varepsilon f}$$

où  $\Delta_\varepsilon$  est le Laplacien pour une métrique

$$q_\varepsilon = e^{2\varepsilon f} g$$

alors

$$\dot{A} = \frac{d}{d\varepsilon} A_{\varepsilon|\varepsilon=0} = \frac{n}{2} f \Delta - \frac{n}{2} \Delta \circ f + \dot{\Delta}$$

En coordonnée locale on a

$$\Delta_\varepsilon = -\frac{1}{\Theta_\varepsilon} (\partial_i (g_\varepsilon^{ij} \Theta_\varepsilon \partial_j)) \text{ avec } \Theta_\varepsilon = \sqrt{\det (g_\varepsilon^{ij})}$$

d'où

$$\Delta_\varepsilon u = -e^{-n\varepsilon f} \Theta^{-1} [\partial_i (e^{(n-2)\varepsilon f} g^{ij} \Theta \partial_j u)]$$

et donc

$$\dot{\Delta} u = -nf(\Delta u) + (n-2)f \Delta u - (n-2)(df | du)$$

$$\dot{\Delta} u = -2f(\Delta u) - (n-2)(df | du)$$

enfin,

$$\dot{A}(u) = \frac{n}{2} f(\Delta u) - \frac{n}{2} \Delta(fu) - 2f(\Delta u) - (n-2)(df | du)$$

en utilisant la formule

$$\Delta(fu) = (\Delta f)u + f(\Delta u) - 2(df | du)$$

il vient

$$\begin{aligned} \dot{A}(u) &= \frac{n}{2}f(\Delta u) - \frac{n}{2}\Delta(fu) - 2f(\Delta u) + \left(\frac{n-2}{2}\right) \\ &\quad \times [\Delta(fu) - u(\Delta f) - f\Delta u] \end{aligned}$$

et

$$\dot{A}(u) = -\Delta(fu) - f(\Delta u) - \left(\frac{n-2}{2}\right)u(\Delta f).$$

Ce calcul figure déjà dans la référence [B-W].

## Appendice C

Dans cet appendice, on se propose de montrer que les métriques de classe  $C^\infty$  sont denses dans la sous-variété  $W$  définie dans le paragraphe 2.

Plus précisément, rappelons que  $\mathcal{M}^k(X)$  est le cône des métriques riemanniennes de classe  $C^k$  sur la variété différentiable (de classe  $C^\infty$ ) compacte et connexe  $X$ . Soit  $g$  une métrique de  $\mathcal{M}^k(X)$  telle que l'opérateur de Laplace-Beltrami correspondant possède la valeur propre  $\lambda_0 > 0$  avec la multiplicité exactement  $N$ . On suppose de plus que  $\lambda_0$  est stable pour les perturbations de métriques quelconques (voir le paragraphe 7) alors au voisinage de  $g$

$$W = \{h \in \mathcal{M}^k(X), \text{ proche de } g/\lambda_0 \text{ est valeur propre de } \Delta_h \text{ avec multiplicité } N\}$$

est une sous-variété de Banach. On a alors

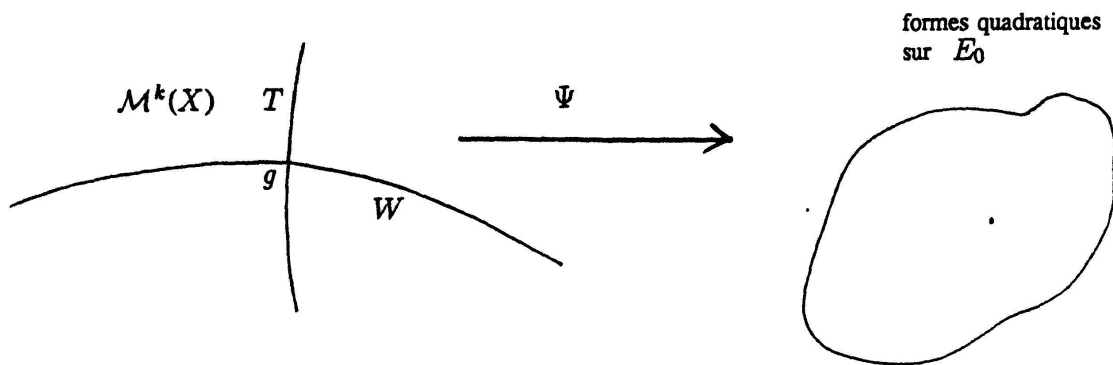
**C.1. THÉORÈME.** *L'ensemble  $W \cap \mathcal{M}^\infty(X)$  est dense dans  $W$  pour la topologie de  $\mathcal{M}^k(X)$ . Si de plus  $X$  est munie d'un atlas analytique réel alors  $W \cap \mathcal{A}(X)$  est dense dans  $W$ , où  $\mathcal{A}(X)$  désigne l'ensemble des métriques riemanniennes analytiques réelles sur  $X$ .*

C.2. REMARQUE. Un théorème désormais classique permet d'affirmer que si  $X$  est munie d'un atlas analytique réel alors  $X$  peut-être munie de métriques riemanniennes analytiques réelles.

*Preuve.* 1) Supposons l'existence d'une famille d'opérateurs de régularisation  $K_t$ , c'est-à-dire satisfaisant à:

$K_t$  est opérateur de l'espace  $\mathcal{F}^k(X)$  des tenseurs symétriques d'ordre 2 de classe  $C^k$  dans  $\mathcal{F}^\infty(X)$  (ou  $\mathcal{F}^{\text{ana}}(X)$ ) et pour tout  $h \in \mathcal{F}^k(X)$ ,  $K_t(h) \xrightarrow{t \rightarrow 0} h$  (dans  $\mathcal{F}^k(X)$ ).

Alors soit  $g \in W \cap \mathcal{M}^k(X)$ , l'application  $\Psi$  du paragraphe 1 qui à une métrique  $h \in \mathcal{M}^k$  proche de  $g$  associe la forme quadratique sur l'espace vectoriel de dimension finie  $E_0$  (espace propre de  $\Delta_g$  correspondant à la valeur propre  $\lambda_0$ ) est une submersion (car  $\lambda_0$  est stable).



De plus  $W$  est, au voisinage de  $g$ , la fibre  $\Psi^{-1}(\lambda_0(\cdot, \cdot))$ .

Choisissons une transversale  $T$  à  $W$  en  $g$ , c'est-à-dire un ouvert borné, contenant  $g$ , d'une sous-variété de dimension  $N(N + 1)/2$  transverse à  $W$  en  $g$  (par exemple un ouvert d'un sous-espace vectoriel de dimension finie, transverse à  $W$  en  $g$ ). Alors  $\Psi$  est un difféomorphisme de classe au moins  $C^1$  (on rappelle que  $k$  est très grand) de  $T$  sur un voisinage  $\mathcal{O}$  de  $\lambda_0(\cdot, \cdot)$  dans  $Q(E_0)$  (formes quadratiques sur  $E_0$ ).

Définissons alors la famille d'opérateurs

$$\Psi_t : T \rightarrow Q(E_0)$$

par

$$\Psi_t(h) = \Psi(K_t(h)).$$

Il résulte des propriétés de  $K_t$  et  $\Psi$  que

$$\Psi_t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{\text{uniformément sur } T} \Psi.$$

Le lemme topologique de [CV2] permet alors d'affirmer que, pour tout  $t$  suffisamment petit, il existe  $h_t \in T$  tel que,

$$\Psi_t(h_t) = \Psi(K_t(h_t)) = \lambda_0 \langle \cdot, \cdot \rangle$$

c'est-à-dire

$$K_t(h_t) \in W \cap \mathcal{M}^\infty(X).$$

De plus  $K_t(h_t)$  est proche de  $h_t$  si  $t$  est petit, qui est lui-même proche de  $g$  si  $T$  est une "petite transversale".

2) Il ne reste qu'à exhiber un exemple de famille  $K_t$ . La variété  $X$  peut être munie d'une métrique  $g_0$  de classe  $C^\infty$ , celle-ci définit une connexion de Levi-Civita dont les coefficients sont de classe  $C^\infty$  (dans une carte convenable). Alors, on peut

i) étendre la métrique  $g_0$  au fibré lisse dont les sections sont les tenseurs symétriques d'ordre 2, c'est-à-dire  $S^2(T^*X)$ ;

ii) étendre la connexion de Levi-Civita en une connexion  $D$ , à coefficients  $C^\infty$ , sur les sections de  $S^2(T^*X)$ .

Ceci permet de définir un Laplacien de Bochner

$$\bar{\Delta} = D^*D$$

opérant sur les sections de  $S^2(T^*X)$ , et l'opérateur  $e^{-t\bar{\Delta}}$  est infiniment régularisant et converge fortement vers Id. On prend donc,

$$K_t = e^{-t\bar{\Delta}}.$$

Le cas analytique réel se traite de manière analogue.

On fait de même avec les perturbations conformes (resp. par des potentiels) si la métrique de référence est  $C^\infty$  ou analytique réelle.

## Appendix D

Nous nous proposons dans cet appendice de montrer que les propriétés d'immersion et de plongement dans le cas conforme sont vraies si on remplace les fonctions propres des opérateurs  $e^{(n/2)f} \Delta_g e^{-(n/2)f}$  ( $g$  est la métrique  $e^{2f}g_0$ ) par celles de  $\Delta_g$ .

Le fait que les espaces  $L^2(X, v_{g_0})$  et  $L^2(X, v_g)$  ne soient pas isométriques

n'intervient que dans la détermination de la condition de stabilité. Remarquons avant de commencer que pour  $g = e^{2f}g_0$

$\Delta_g$  à  $\lambda_0$  pour valeur propre avec la multiplicité  $N$



$A_g = e^{(n/2)f} \Delta_g e^{-(n/2)f}$  à  $\lambda_0$  pour valeur propre avec la multiplicité  $N$ .

Soit  $E'$  l'espace propre correspondant pour  $A_g$  et  $E$  celui de  $\Delta_g$ . Si  $f$  est petite alors  $E$  est proche de  $E'$  qui est proche de  $E_0$ , c'est-à-dire que  $E$  est un graphe sur  $E_0$ . Notons que cette notion n'utilise pas la structure hilbertienne de  $L^2(X, v_g)$ . On peut alors choisir une isométrie canonique (pour  $L^2(X, v_{g_0})$ ) entre  $E_0$  et  $E$  comme dans la section 1.

**a) Immersion.** L'application  $\Psi$  n'a pas 0 pour valeur régulière si il existe un point  $(x_0, \xi_0) \in T_1X$  et une fonction propre  $v \in E_0$ , tels que

$$d_{x_0} u_i(\xi_0) = 0 \text{ pour tout } i$$

$(u_i)$  étant une base de  $E_0$  et,

$$d_{x_0} \dot{v}(\xi_0) = 0 \text{ pour tout } f \in T_0W.$$

Comme précédemment  $\dot{v}$  est donné par l'équation

$$\begin{cases} (\Delta - \lambda_0)\dot{v} = -\dot{\Delta}v \text{ pour tout } f \in T_0W \\ \dot{v} \text{ orthogonale à } E_0 \end{cases}$$

ce qui conduit à

$$0 = \int_X \partial_1 G(x_0, y) [2f(\Delta v) + (n-2)(df | dv)](y) dy$$

utilisant le calcul de  $\dot{\Delta}$  effectué dans l'appendice B. D'où pour tout  $f \in T_0W$

$$0 = \int_X \partial_1 G(x_0, y) \left[ 2\lambda_0 f v - \frac{(n-2)}{2} (\Delta(fv) - \lambda_0 f v - v \Delta f) \right](y) dy$$

c'est-à-dire

$$0 = \int_X \partial_1 G(x_0, y) \left[ v M(f) - \left( \frac{(n-2)}{2} \right) (\Delta - \lambda_0)(fv) \right](y) dy$$

pour tout  $f$  orthogonale à  $M(E_0^2)$ . Il existe donc  $d \in E_0^2$  tel que

$$M(v \partial_1 G) - \left(\frac{n-2}{2}\right)v(\Delta - \lambda_0)(\partial_1 G) = M(d) \quad (\text{D1})$$

au sens des distributions. Comme précédemment on a

$$(\Delta - \lambda_0) \partial_1 G = \partial_1 \delta_{(x_0)} + \partial_1 h(x_0, y) = \partial_1 \delta_{(x_0)}$$

avec les notations de la section 4. L'égalité (D1) conduit à

$$M(v \partial_1 G) - \left(\frac{n-2}{2}\right)(v(x_0) \partial_1 \delta_{(x_0)} + \partial_1 v(x_0) \delta_{(x_0)}) = M(d)$$

en simplifiant par  $(n-2)/2$  et en utilisant le fait que  $\partial_1 v(x_0) = 0$ , car  $v \in E_0$ , on obtient

$$(\Delta + \gamma)(v \partial_1 G) - v(x_0) \partial_1 \delta_{(x_0)} = k \in C^\infty(X)$$

avec  $\gamma = 4\lambda_0/(n-2)$ , si  $n > 2$ .

D'où en développant,

$$(2\lambda_0 + \gamma)v \partial_1 G - 2(dv | d \partial_1 G) = k \quad (\text{D2})$$

l'expression  $(dv | d \partial_1 G)$  est une distribution qui est  $C^\infty$  en dehors de  $x_0$  et du type valeur principale en  $x_0$  car  $\partial_1 v(x_0) = 0$  (il suffit de calculer le terme principal en coordonnées locales). En dehors de  $x_0$  le membre de gauche de (D2) doit donc être borné.

Etudions ses singularités en  $x_0$  dans le cas  $n > 2$  en prenant un système de coordonnées normales centrées en  $x_0$ , on a comme précédemment

$$\partial_1 G(0, y) \sim -\frac{(n-2)C_n}{|y|^n} y_1$$

$$v(y) = v(0) + p_1(y) + p_2(y) + o(|y|^3)$$

où  $p_i(y)$  est un polynôme homogène de degré  $i$ . On a par ailleurs ([BS]),

$$d \partial_1 G(0, y) \sim -\frac{(n-2)}{|y|^n} dy_1 + \frac{n(n-2)}{|y|^{n+2}} y_1 r dr \text{ pour } y \neq 0$$

où  $r = |y|$  et en supposant que  $C_n = 1$  pour simplifier le calcul. Enfin par hypothèse  $\partial_1 p_1(0) = 0$ .

Le terme prédominant est donc (si  $v(0) \neq 0$ )

$$-\frac{2n(n-2)}{|y|^{n+2}} y_1 p_1(y) = -\frac{2n(n-2)}{|y|^{n+2}} y_1 (r dr | p_1)$$

car  $n > 2$  et degré  $(p_1) = 1$ . Ce terme n'est borné que si

$$p_1 \equiv 0.$$

Le terme principal est alors

$$-\frac{(2\lambda_0 + \gamma)(n-2)v(0)}{|y|^n} y_1 + \frac{2(n-2)}{|y|^n} \partial_1 p_2 - \frac{2n(n-2)}{|y|^{n+2}} y_1 (2p_2)$$

soit

$$-\frac{(n-2)}{|y|^{n+2}} [(2\lambda_0 + \gamma)y_1 |y|^2 v(0) - 2|y|^2 \partial_1 p_2 + 4ny_1 p_2]$$

comme précédemment ce terme ne peut être que nul, donc

$$y_1 [(2\lambda_0 + \gamma) |y|^2 v(0) + 4np_2] = 2|y|^2 \partial_1 p_2$$

$y_1$  divise le membre de gauche et ne divise par  $|y|^2$ , il divise donc  $\partial_1 p_2$ , posons

$$\partial_1 p_2 = 2ay_1 \tag{D3}$$

on a donc en simplifiant par  $y_1$

$$v(0)(2\lambda_0 + \gamma) |y|^2 - 4a |y|^2 = -4np_2.$$

Le polynôme  $p_2$  est un multiple de  $|y|^2$ , de l'égalité (D3), on déduit que

$$p_2(y) = a |y|^2$$

par ailleurs l'équation

$$\Delta v = \lambda_0 v$$

donne

$$\Delta_E p_2 = \lambda_0 v(0) = -2na$$

où  $\Delta_E$  est le Laplacien euclidien dans  $\mathbb{R}^N$ . D'où

$$\begin{aligned} (2\lambda_0 + \gamma)v(0) &= \frac{2n}{(n-2)} \lambda_0 v(0) = -4n \frac{p_2(y)}{|y|^2} + 4a \\ &= -4a(n-1) = 2\lambda_0 v(0) \frac{(n-1)}{n} \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{n}{(n-2)} = \frac{n-1}{n} \quad \text{si } v(0) \neq 0 \quad (n > 2).$$

Cette égalité est impossible, on a donc  $v(0) = 0$ . L'égalité de départ se ramène donc à

$$v(y) \partial_1 G(0, y) \in C^\infty$$

dont on a montré l'impossibilité dans la section 3.

Le cas  $n=2$  est plus simple, en effet dans ce cas l'opérateur  $M$  est la multiplication par  $2\lambda_0$ .

**b) Plongement.** Ce cas est laissé au lecteur.

## BIBLIOGRAPHIE

- [AM] R. ABRAHAM, *Transversality in manifolds of mappings*, Bull. Amer. Math. Soc., 69 (1963), 470–474.
- [AD] V. I. ARNOLD, *Modes and quasimodes*, Functional Anal. Appl., 6 (1972), 94–101.
- [BF] TH. BANCHOFF, *Tightly embedded 2-dimensional polyhedral manifolds*, Amer. J. Math., 87 (1965), 245–256.
- [BD] P. BÉRARD, *Sur un lemme de perturbation*, dans Thèse d'Etat, Université de Paris VII, 1980.
- [BR] M. BERGER, *Sur les premières valeurs propres des variétés riemanniennes*, Compositio Math., 26 (1973), 129–149.
- [B-G-M] M. BERGER, P. GAUDUCHON et E. MAZET, *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes, n° 194, Springer N.Y., 1971.
- [BS] L. BERS, *Local Behavior of Solutions of general elliptic equations*, Comm. on Pure and Applied Math. VIII (1955), 473–496.
- [BN] G. BESSON, *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes*, Ann. Inst. Fourier, 30 (1980), 109–128.

- [B-W] D. BLEECKER et L. WILSON, *Splitting the spectrum of a Riemannian manifold*, Siam J. Math. Analysis, 11 (1980), 813–818.
- [B-C] M. BURGER et B. COLBOIS, *A propos de la multiplicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math., 300 (1985), 247–250.
- [CG] S. Y. CHENG, *Eigenfunctions and nodal sets*, Commentarii Math. Helv., 51 (1976), 43–55.
- [CS] B. COLBOIS, *Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du Laplacien des surfaces à courbure  $-1$* , Thèse Université de Lausanne, 1987.
- [C-C] B. COLBOIS et Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Multiplicité de la première valeur propre positive du Laplacien d'une surface à courbure constante*, A paraître à Commentarii Math. Helv.
- [C-H] R. COURANT et D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, Wiley-Interscience I, 1953, II 1962.
- [CV1] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur une hypothèse de transversalité d'Arnold*, Prépublication de l'Institut Fourier, n° 59, 1986.
- [CV2] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du Laplacien*, Comm. Math. Helvetici, 61 (1986), 254–270.
- [CV3] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Construction de Laplaciens dont une partie du spectre est donnée*, Prépublication de l'Institut Fourier, n° 69, 1986.
- [CV4] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité*, Prépublication de l'Institut Fourier, N° 71, 1987.
- [CV5] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Variations spectrales*, manuscrits.
- [G-G] M. GOLUBITSKY et V. GUILLEMIN, *Stable mappings and their singularities*, Graduate texts in Maths. Springer-Verlag, 1973.
- [GV] M. GROMOV, *Filling Riemannian manifolds*, J. of diff. geometry, 18 (1983), 1–147.
- [G-W] R. GREENE et H. WU, *Embedding of open Riemannian manifolds by Harmonic functions*, Ann. Inst. Fourier, 25 (1975), 215–235.
- [KO] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 132, Springer-Verlag, 1973.
- [KR1] N. KUIPER, *Tight embeddings and maps, submanifolds of geometrical class three in  $E^n$* , The Chern symposium, Proc. Int. Symp. Calif. Springer-Verlag, (1979), 97–145.
- [KR2] N. KUIPER, *Immersions with minimal total absolute curvature*, Coll. de Géométrie Diff. Bruxelles CBRM, (1958), 75–88.
- [ME] M. MORSE, *The critical points of a function of  $n$  variables*, Transactions of the A.M.S. 33 (1931), 7–91.
- [QN] F. QUINN, *Transversal approximation on Banach manifolds*, A.M.S. Proc. Sym. in Pure Math, XV (1970), 213–222.
- [RL] G. RINGEL, *Map color Theorem*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 209, Springer-Verlag, 1974.
- [UK] K. UHLENBECK, *Generic properties of eigenfunctions*, Amer. J. Math., 98 (1976), 1059–1078.
- [WY] H. WHITNEY, *Geometric Integration theory*, Princeton Math. Series 21, 1957.
- [YU] S. T. YAU, *Seminar on differential geometry*, ed. by S. T. Yau, Annals of Math. Studies N° 102, Princeton Univ. Press, 1982.

*Institut Fourier*  
 B.P. 74  
 38402 Saint Martin d'Hères Cedex  
 France

Reçu le 23 Septembre 1987