

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 63 (1988)

**Artikel:** Sous-groupes maximaux de groupes classiques associés à certaines  $C^*$ -algèbres.  
**Autor:** Griener-Guillod, Sylvie  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-48194>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Sous-groupes maximaux de groupes classiques associés à certaines $C^*$ -algèbres

SYLVIE GRIENER-GUILLOD

*Résumé.* Dans cet article, nous étudions la maximalité de certains sous-groupes de l'ensemble des éléments inversibles (ou unitaires) d'une  $C^*$ -algèbre ou d'un facteur.

### Introduction

E. B. Dynkin est l'un des initiateurs de la description des sous-groupes maximaux des groupes classiques comme  $GL_n(\mathbb{C})$  et  $U_n(\mathbb{C})$  ([Dy]).

Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre avec unité,  $G = GL(A)^0$  (resp.  $U = U(A)^0$ ) la composante connexe neutre du groupe formé des éléments inversibles (resp. unitaires) de  $A$ . Nous nous intéressons à montrer la maximalité de sous-groupes paraboliques et de certains autres sous-groupes de  $G$  et de  $U$ .

On dit que deux projecteurs  $p$  et  $q$  de  $A$  sont *équivalents* lorsqu'il existe  $v, w \in A$  avec  $p = vw$ ,  $q = wv$ ,  $v = pvq$  et  $w = qwp$ . Cette relation d'équivalence est notée  $p \sim q$  (sa négation  $p \not\sim q$ ).

Plus précisément, soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs non nuls de  $A$  de somme 1. Pour tout  $x \in A$  nous avons  $x = pxp + pxq + qxp + qxq$  (l'écriture a été introduite par C. S. Peirce en 1870) que nous noterons  $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$  avec  $x_1 = pxp$ ,  $x_2 = pxq$ ,  $x_3 = qxp$ ,  $x_4 = qxq$ .

Dans le chapitre 1 nous étudions d'abord des sous-groupes paraboliques de  $G$  et démontrons:

**THÉORÈME 1.1.** *Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre simple avec unité et  $p, q$  deux projecteurs non nuls de  $A$ , de somme 1. Alors  $G' = \{x \in G; qxp = 0, qx^{-1}p = 0\}$  est un sous-groupe maximal dans  $G$ .*

Rappelons qu'une  $C^*$ -algèbre avec unité est *simple* si elle ne possède pas d'idéal bilatère non trivial.

Soit  $\alpha_{p,q}$  l'automorphisme intérieur de  $A$  défini par:  $\alpha_{p,q}(x) = JxJ^{-1}$  pour tout  $x \in A$ , où  $J$  est l'involution  $p - q$ .

Considérons les sous-groupes formés des points fixes de  $\alpha_{p,q}$ :

$$G^\alpha = \{x \in G; \alpha_{p,q}(x) = x\},$$

$$U^\alpha = G^\alpha \cap U.$$

Désignons par  $N_G(G^\alpha)$  (resp.  $N_U(U^\alpha)$ ) le normalisateur de  $G^\alpha$  dans  $G$  (resp. de  $U^\alpha$  dans  $U$ ). Nous démontrons alors:

**THÉORÈME 1.2.** *Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre simple avec unité,  $p$  et  $q$  deux projecteurs équivalents de  $A$  de somme 1. Alors  $G^\alpha$  est d'indice 2 dans  $N_G(G^\alpha)$  et  $N_G(G^\alpha)$  est un sous-groupe maximal dans  $G$ .*

Par contre lorsque les projecteurs  $p$  et  $q$  sont non équivalents,  $N_G(G^\alpha) = G^\alpha$  (Prop. 1.1) est contenu dans le groupe parabolique  $G'$  du théorème 1.1 et n'est donc pas un sous-groupe maximal de  $G$ . Les théorèmes 1.1 et 1.2 auront une généralisation au cas où l'algèbre  $A$  n'est plus simple.

Dans le chapitre 2 nous nous intéressons à la maximalité du groupe unitaire des points fixes par l'automorphisme  $\alpha_{p,q}$  dans  $U$ .

Rappelons que si  $A$  est un facteur de type  $I_\infty$ , tous les automorphismes  $\alpha$  involutifs (i.e.  $\alpha^2 = 1$ ) de  $A$  sont conjugués à des automorphismes de la forme  $\alpha_{p,q}$  ([H], lemme 5).

Quelle est la position du groupe des points fixes par un automorphisme involutif (modulo les opérateurs compacts) dans le groupe unitaire d'un facteur de type  $I_\infty$ ?

Si  $K$  désigne l'idéal bilatère maximal de  $A$  et  $U_K^\alpha = \{x \in U; \alpha_{p,q}(x) - x \in K\}$ , les théorèmes suivants donnent en particulier une réponse à cette question:

**THÉORÈMES 2.1 et 2.2.** *Soient  $A$  un facteur,  $p$  et  $q$  deux projecteurs non nuls de somme 1.*

*Si  $p \sim q$ :  $U_K^\alpha$  est d'indice 2 dans  $N_U(U_K^\alpha)$  et  $N_U(U_K^\alpha)$  est un sous-groupe maximal du groupe unitaire  $U$  de  $A$ .*

*Si  $p \not\sim q$ :  $N_U(U^\alpha) = U^\alpha$  est un sous-groupe maximal dans  $U$ .*

Le chapitre 3 est consacré à l'étude de la position du groupe unitaire dans le groupe des éléments inversibles d'un facteur.

En définissant:  $G(U + K) = \{x \in G; x = u + k \text{ avec } u \in U \text{ et } k \in K\}$ , nous obtenons alors le résultat suivant:

**THÉORÈME 3.1.** *Soit  $A$  un facteur, alors  $N_G(G(U + K)) = \mathbb{C}^*G(U + K)$  est un sous-groupe maximal dans  $G$ .*

Dans l'appendice nous donnons de nouvelles preuves de la simplicité de certains groupes.

Je remercie les personnes qui m'ont permis de mener à bien ce travail, A. Robert, R. Bader, P. de la Harpe.

Ce travail a été réalisé en partie grâce au soutien du Fonds national suisse de la recherche scientifique (requête n° 2.717-0.85).

## Chapitre 1. Quelques sous-groupes maximaux du groupe des inversibles d'une $C^*$ -algèbre

### 1.1. Lemmes préliminaires

Nous désignons par  $\langle S_1, S_2, \dots \rangle$  le sous-groupe d'un groupe  $G$  engendré par les parties  $S_1, S_2, \dots$  de  $G$ . Si  $p$  est un projecteur d'une algèbre  $A$ , la *réduite* de  $A$  par  $p$  est l'algèbre  $pAp$  notée  $A_p$ .

LEMME 1.1. *Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre avec unité,  $p$  et  $q$  deux projecteurs non nuls de somme 1. Posons*

$$\begin{aligned} G_1 &= \{x \in G; x - 1 \in qAp\}, & G_2 &= \{x \in G; x - 1 \in pAq\}, \\ G_3 &= \{x \in G; qxp = pxq = 0\}, \end{aligned}$$

alors  $\langle G_1, G_2, G_3 \rangle = G$ .

*Preuve.* Soit  $z \in G$  avec  $\|z - 1\| < \frac{1}{2}$ ; on a

$$z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ z_3 z_1^{-1} & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_4 - z_3 z_1^{-1} z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & z_1^{-1} z_2 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

qui appartient à  $\langle G_1, G_2, G_3 \rangle$ . Le groupe  $G$  étant connexe nous obtenons la conclusion cherchée.

LEMME 1.2. *Soient  $B$  un anneau simple avec unité,  $p$  et  $q$  deux idempotents non nuls de  $B$ , alors  $qBp$  est non nul et simple comme  $B_q \otimes B_p^{\text{opp}}$ -module à gauche ( $B_p^{\text{opp}}$  dénote l'anneau opposé).*

*Remarques.* (1) Si  $B$  est une  $C^*$ -algèbre simple alors  $B_p$  l'est aussi.

(2) Si  $B$  est une  $C^*$ -algèbre simple alors  $qBp$  est simple comme  $GL(B_q)^0 \otimes$

$GL(B_p^{\text{opp}})^0$ -module à gauche (car tout élément de  $B_q$  est somme de deux éléments de  $GL(B_q)^0$ ).

*Preuve.* Soit  $I$  l'idéal engendré par  $p$ , comme  $B$  est simple nous avons  $I = B$ . Il existe donc  $a_i, b_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) appartenant à  $B$  tels que  $1 = \sum_{i=1}^N a_i p b_i$  donc  $0 \neq q = \sum_{i=1}^N q a_i p b_i$ . Il existe alors  $i \in \{1, \dots, N\}$  tel que  $q a_i p \neq 0$ , d'où  $q B p \neq 0$ . Montrons que  $q B p$  est simple: Soient  $Y$  un  $B_q \otimes B_p^{\text{opp}}$ -sous module non nul de  $q B p$  et  $y \in Y$ ,  $y$  non nul. Comme  $B$  est simple, l'idéal bilatère engendré par  $y$  est égal à  $B$ . Donc pour tout  $x \in B$ , il existe des éléments  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) appartenant à  $B$  tels que  $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i y \beta_i$ . En particulier si  $x \in q B p$ , en posant  $a_i = q \alpha_i q \in B_q$  et  $b_i = p \beta_i p \in B_p$ , on a  $x = q x p = \sum_{i=1}^k a_i y b_i \in Y$  donc  $Y = q B p$ .

**LEMME 1.3.** Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre avec unité,  $a, b \in A$  et  $k \in \mathbb{R}_+^*$ . Si  $a u b = 0$  pour tout  $u \in U$  avec  $\|u - 1\| < k$  alors  $a z b = 0$  pour tout  $z \in A$ . Si de plus  $A$  est simple ou  $A$  est un facteur alors:  $a = 0$  ou  $b = 0$ .

*Preuve.* Il existe  $\delta > 0$  suffisamment petit tel que, pour tout  $x = x^* \in A$  avec  $\|x\| < \delta$ , on ait  $u = -ix + (1 - x^2)^{1/2} \in U$  et  $\|u - 1\| < k$ . On a donc  $a x b = a(1/2i)(u^* - u)b = 0$ .

Tout élément de  $A$  étant somme de deux éléments autoadjoints de  $A$  nous avons  $a z b = 0$ , pour tout  $z \in A$ . Si  $A$  est simple le lemme 8.1 de [H-S, 2] nous donne  $a = 0$  ou  $b = 0$ . Si  $A$  est un facteur: Supposons  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ . Il existe  $r$  et  $s \in A$  tels que  $a a^* r$  et  $s b^* b$  soient des projecteurs non nuls. Soient deux projecteurs  $e$  et  $f$  non nuls équivalents tels que  $e \leq a a^* r$ ,  $f \leq s b^* b$ . Il existe donc  $v, w \in A$  avec  $e = v w$ ,  $f = w v$ ,  $v = e v f$ ,  $w = f w e$ . Soit  $x = a^* r v s b^*$  on a  $a x b = a a^* r v s b^* b = v \neq 0$  ce qui contredit l'hypothèse du lemme.

## 1.2. Maximalité de $G'$

**THÉORÈME 1.1.** Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre simple avec unité et  $p, q$  deux projecteurs non nuls de  $A$ , de somme 1. Alors  $G' = \{x \in G; q x p = 0, q x^{-1} p = 0\}$  est un sous-groupe maximal dans  $G$ .

*Preuve.* Soit  $g \in G - G'$  et montrons que  $\langle G', g \rangle = G$ ; on peut supposer  $q g p \neq 0$  (sinon on considère  $g^{-1}$ ). Comme pour tout  $r \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $(1/r)g \in \langle G', g \rangle$ , nous pouvons supposer de plus que  $g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}$  avec  $\|g_i\| < 1$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$ . Soit  $N = \{y \in q A p; 1 + y \in \langle G', g \rangle\}$ . L'égalité:

$$\begin{pmatrix} (p + g_1)^{-1} & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p + g_1 & g_2 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'_1 & g'_2 \\ g'_3 & g'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ g_3 & q \end{pmatrix}$$

où  $g^{-1} = \begin{pmatrix} g'_1 & g'_2 \\ g'_3 & g'_4 \end{pmatrix}$ , implique  $g_3 \in N$ , avec  $g_3 \neq 0$ .  $N$  a les propriétés suivantes:

(a)  $N \pm N \subset N$ .

(b) Pour tout  $x \in N$  pour tout  $a \in GL(A_p)^0$  on a  $xa \in N$  car:

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ x & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ xa & q \end{pmatrix}.$$

De même  $bx \in N$  pour tout  $x \in N$  et  $b \in GL(A_q)^0$ .  $N$  est donc un  $GL(A_q)^0 \otimes GL(A_p^{\text{opp}})^0$ -sous module à gauche non nul de  $qAp$ , donc  $N = qAp$  par la remarque (2) suivant le lemme 1.2. Par suite tout élément  $x \in G$  avec  $x - 1 \in qAp$  appartient à  $\langle G', g \rangle$ . Comme les groupes  $G_1, G_2, G_3$  définis au lemme 1.1 appartiennent à  $\langle G', g \rangle$  nous obtenons  $G = \langle G', g \rangle$ .

### 1.3. Étude des normalisateurs

LEMME 1.4. Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre avec unité,  $p$  et  $q$  deux projecteurs non nuls de somme 1. On a les équivalences suivantes:

(a)  $p \sim q$ ;

(b) il existe un élément  $x$  inversible dans  $qAp + pAq$ .

*Preuve.* (a)  $\Rightarrow$  (b). Il existe  $v, w \in A$  tels que  $p = vw$  et  $q = wv$  avec  $v = pvq$ ,  $w = qwp$ ; alors  $x = v + w$  convient.

(b)  $\Rightarrow$  (a). Soit  $\begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix}$  un élément inversible dans  $qAp + pAq$  et d'inverse  $\begin{pmatrix} 0 & x'_2 \\ x'_3 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors  $x_2x'_3 = p$  et  $x'_3x_2 = q$ , donc  $p$  et  $q$  sont équivalents.

Dans la proposition suivante, étant donnés deux projecteurs  $p$  et  $q$  de somme 1 dans la  $C^*$ -algèbre  $A$ , on note:

$$G^\alpha = \{x \in G; pxq = 0; qxp = 0\}; U^\alpha = U \cap G^\alpha,$$

$$TG^\alpha = \{x \in G; pxp = 0; qxq = 0\}; TU^\alpha = U \cap TG^\alpha.$$

S'il existe une isométrie partielle  $E_{pq}$  de projecteur initial  $q$  et de projecteur final  $p$ , on peut aussi écrire  $TG^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & E_{pq} \\ E_{qp} & 0 \end{pmatrix} G^\alpha$ .

PROPOSITION 1.1. Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre simple avec unité ou un facteur et soient  $p, q$  deux projecteurs non nuls de  $A$  de somme 1. Alors:

(a)  $N_G(G^\alpha) = G^\alpha \cup TG^\alpha; N_U(U^\alpha) = U^\alpha \cup TU^\alpha$ .

- (b) Si  $p \sim q$ , alors  $TG^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & E_{pq} \\ E_{qp} & 0 \end{pmatrix} G^\alpha$  comme ci-dessus; Si  $p \not\sim q$ , alors  $TG^\alpha = \phi$ .
- (c)  $N_G(N_G(G^\alpha)) = N_G(G^\alpha)$ ;  $N_U(N_U(U^\alpha)) = N_U(U^\alpha)$ .

*Preuve.* (a) Soit  $g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} \in N_G(G^\alpha)$  et posons  $g^{-1} = \begin{pmatrix} g'_1 & g'_2 \\ g'_3 & g'_4 \end{pmatrix}$ . Pour tout  $a \in U(A_p)^0$  et  $d \in U(A_q)^0$  on a  $g(a \pm d)g^{-1} \in G^\alpha$ , donc  $g_3ag'_1, g_4dg'_3, g_1ag'_2, g_2dg'_4$  sont tous nuls. Le lemme 1.3 nous donne deux possibilités pour  $g$ :

- Soit  $g_2 = 0$  et  $g_3 = 0$ ; c'est-à-dire  $g \in G^\alpha$ .
- Soit  $g_1 = 0$  et  $g_4 = 0$ ; c'est-à-dire  $g \in TG^\alpha$ ,

donc  $N_G(G^\alpha) \subset G^\alpha \cup TG^\alpha$ . L'inclusion inverse étant triviale on a l'égalité. La démonstration est identique pour  $N_U(U^\alpha) = N_G(G^\alpha) \cap U$ .

(b) Résulte du lemme 1.4.

(c) Se déduit du lemme 1.5 ci-dessous.

**LEMME 1.5.** *Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre simple avec unité ou un facteur,  $p$  et  $q$  deux projecteurs non nuls de  $A$  de somme 1. Soient  $g \in G$  et  $\delta \in \mathbb{R}$  avec  $0 < \delta < 1/\|g\| \|g^{-1}\|$ . Si  $g(a + d)g^{-1} \in N_G(G^\alpha)$  pour tout  $a \in U(A_p)^0$  et  $d \in U(A_q)^0$  tels que  $\|a - p\| < \delta, \|d - q\| < \delta$ , alors  $g \in N_G(G^\alpha)$ .*

*Preuve.* Soit  $g \in G$  avec  $g(a + d)g^{-1} \in N_G(G^\alpha) = G^\alpha \cup TG^\alpha$  (Prop 1.1) pour tout  $a$  et  $d$  comme dans l'énoncé. Alors  $g(a + d)g^{-1}$  appartient à la composante connexe de 1 dans  $N_G(G^\alpha)$  c'est-à-dire  $g(a + d)g^{-1} \in G^\alpha$ . On a donc  $g_3ag'_1 + g_4dg'_3 = 0$  et  $g_1ag'_2 + g_2dg'_4 = 0$  pour tout  $a$  et  $d$  comme dans l'énoncé  $\left(g^{-1} = \begin{pmatrix} g'_1 & g'_2 \\ g'_3 & g'_4 \end{pmatrix}\right)$ .

Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $\varphi \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$  on ait  $\|ae^{i\varphi} - p\| < \delta$ . Nous avons donc

$$\begin{aligned} g_3ae^{\pm i\varphi}g'_1 + g_4dg'_3 &= 0, \\ g_1ae^{\pm i\varphi}g'_2 + g_2dg'_4 &= 0, \end{aligned}$$

ce qui implique:

$$\begin{aligned} g_3ag'_1 &= 0, & g_4dg'_3 &= 0, \\ g_1ag'_2 &= 0, & g_2dg'_4 &= 0. \end{aligned}$$

Comme dans la démonstration de la proposition 1.1 on déduit que  $g \in G^\alpha$ , ou que  $g \in TG^\alpha$ . Le lemme 1.4 et la proposition 1.1 nous permettent de conclure.

*Remarque.* Nous pouvons remplacer dans l'énoncé du lemme 1.5  $G$  par  $U$  et  $G^\alpha$  par  $U^\alpha$ .

#### 1.4. Maximalité de $N_G(G^\alpha)$ lorsque $p \sim q$

**THÉORÈME 1.2.** *Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre simple avec unité,  $p$  et  $q$  deux projecteurs équivalents de  $A$  de somme 1. Alors  $G^\alpha$  est d'indice 2 dans  $N_G(G^\alpha)$  et  $N_G(G^\alpha)$  est un sous-groupe maximal dans  $G$ .*

*Preuve.* La première affirmation résulte de la proposition 1.1. Soit  $g \in G - N_G(G^\alpha)$  (non vide par le lemme 1.2). Pour tout  $0 < \delta < 1/\|g\| \|g^{-1}\|$ , il existe par le lemme 1.5 deux unitaires  $a \in U(A_p)^0$ ,  $d \in U(A_q)^0$  avec  $\|a - p\| < \delta$ ,  $\|d - q\| < \delta$  tels que  $\tilde{g} = g(a + d)g^{-1} \in \langle N_G(G^\alpha), g \rangle - N_G(G^\alpha)$ . Si  $(p\tilde{g}p)_p^{-1}$  désigne l'inverse de  $p\tilde{g}p$  dans  $pAp$ , l'élément  $\tilde{g}((p\tilde{g}p)_p^{-1} + (q\tilde{g}q)_q^{-1}) = p + p\tilde{g}q(q\tilde{g}q)_q^{-1} + q\tilde{g}p(p\tilde{g}p)_p^{-1} + q$  appartient à  $\langle N_G(G^\alpha), g \rangle - N_G(G^\alpha)$ . En prenant  $\delta$  suffisamment petit, on peut donc supposer a priori que  $g$  est un élément de la forme  $\begin{pmatrix} p & g_2 \\ g_3 & q \end{pmatrix}$  avec  $\|g - 1\|$  petit. Soit  $N = \{y \in qAp \text{ tel que } 1 + y \in \langle N_G(G^\alpha), g \rangle\}$ .

1) Montrons que  $N$  est non nul.

*1<sup>er</sup> cas.* Si  $g_2 = 0$ ; alors  $g_3 \in N$  et  $g_3 \neq 0$  (car  $g \notin N_G(G^\alpha)$ ).

*2<sup>ème</sup> cas.* Si  $g_3 = 0$ ;  $p$  et  $q$  étant des projecteurs équivalents, il existe  $v, w \in A$  tels que  $p = vw$ ,  $q = wv$ ,  $v = pvq$ ,  $w = qwp$ . Comme

$$\begin{pmatrix} 0 & v \\ w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & g_2 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & v \\ w & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ wg_2w & q \end{pmatrix},$$

appartient à  $\langle N_G(G^\alpha), g \rangle$  alors  $0 \neq wg_2w \in N$  (car  $g \notin N_G(G^\alpha)$ ).

*3<sup>ème</sup> cas.* Si  $g_2 \neq 0$  et  $g_3 \neq 0$ ; alors

$$\begin{pmatrix} p & g_2 \\ g_3 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}p & 0 \\ 0 & (q + g_3g_2)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & g_2 \\ g_3 & q \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix},$$

où  $x = -\frac{1}{2}(p + g_2g_3) + 2g_2(q + g_3g_2)^{-1}g_3$  est inversible dans  $A_p$

$z = q - g_3g_2$  est inversible dans  $A_q$ ,

$y = -\frac{1}{2}g_3(p + g_2g_3) + 2(q + g_3g_2)^{-1}g_3 \neq 0$ ,

(sinon  $(q + g_3g_2)g_3(p + g_2g_3) = 4g_4$  et donc  $g_3 = 0$ ).

On a alors

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ yx^{-1} & q \end{pmatrix} \in \langle N_G(G^\alpha), g \rangle,$$

ce qui implique  $yx^{-1} \in N$  où  $yx^{-1} \neq 0$ .

2) Montrons que  $N = qAp$ .

De même que dans la démonstration du théorème 1.1,  $N$  est un  $GL(A_q)^0 \otimes GL(A_p^{\text{opp}})^0$ -sous module à gauche de  $qAp$  et par le point 1)  $N$  est non nul. La remarque (2) suivant le lemme 1.2 nous permet de conclure  $N = qAp$ .

Les projecteurs  $p$  et  $q$  étant équivalents nous voyons donc que les trois groupes  $G_1, G_2, G_3$  définis au lemme 1.1 appartiennent à  $\langle N_G(G^\alpha), g \rangle$  et donc  $G = \langle N_G(G^\alpha), g \rangle$ .

### 1.5. Une généralisation aux $C^*$ -algèbres non simples

Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre avec unité,  $K$  un idéal bilatère de  $A$  tel que  $A/K$  soit une  $C^*$ -algèbre simple non nulle,  $\pi : A \rightarrow A/K$  la projection canonique ( $\pi(1) = 1$ ),  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $A-K$  de somme 1. Soient

$$G'_K = \{x \in G; qxp \in K, qx^{-1}p \in K\},$$

$$G_K^\alpha = \{x \in G; pxq \in K, qxp \in K\}; \quad U_K^\alpha = G_K^\alpha \cap U.$$

L'exemple type est celui où  $A$  est un facteur de type  $I_\infty$ ,  $K$  l'idéal des opérateurs compacts,  $A/K$  l'algèbre de Calkin, et où les projecteurs  $p, q$  sont de rang infini.

*Remarque.* On a  $pAq \not\subset K$  (lemme 1.2).

LEMME 1.6. Avec les notations ci-dessus:

$$GL(\pi(A))^0 = \pi(GL(A))^0;$$

$$U(\pi(A))^0 = \pi(U(A))^0.$$

*Preuve.* Tout  $x \in GL(\pi(A))^0$  suffisamment proche de 1 a une décomposition polaire de la forme  $e^y e^s$  où  $y, s \in \pi(A)$  avec  $y^* = -y, s^* = s$ . Soient  $r, t \in A$  tels que  $r^* = -r, t^* = t, \pi(r) = y, \pi(t) = s$ , alors  $x = \pi(e^r e^t) \in \pi(GL(A))^0$ . L'inclusion inverse est facile. La preuve vaut pour  $U$ .

PROPOSITION 1.2. Soient  $A, K, \pi$  comme ci-dessus. Si  $H$  est un sous-groupe de  $GL(A)^0$  contenant  $\{x \in GL(A)^0; x - 1 \in K\}$  tel que  $\pi(H)$  soit un

*sous-groupe maximal dans  $GL(\pi(A))^0$  alors  $H$  est un sous-groupe maximal dans  $GL(A)^0$ .*

*Preuve.* Il y a une correspondance bijective entre les sous-groupes de  $GL(\pi(A))^0$  et ceux de  $GL(A)^0$  contenant le noyau de  $\pi : GL(A)^0 \rightarrow GL(\pi(A))^0$  ([Bo], Alg IV, Livre II, Ch. 1, §6, n° 13, Th. 6).

**GÉNÉRALISATION 1.1.** *Soient  $A$  et  $K$  comme ci-dessus,  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $A$  de somme 1 et  $n$  n'appartenant pas à  $K$ . Alors  $G'_K$  est un sous-groupe maximal dans  $G$ .*

*Preuve.* Résulte du théorème 1.1 appliqué à  $\pi(A)$ , du lemme 1.6 et de la proposition 1.2.

**GÉNÉRALISATION 1.2.** *Soient  $A$ ,  $K$ ,  $\pi$  comme ci-dessus,  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $A$  de somme 1 tels que  $\pi(p) \sim \pi(q)$ . Alors  $G_K^\alpha$  est d'indice 2 dans  $N_G(G_K^\alpha)$  et  $N_G(G_K^\alpha)$  est un sous-groupe maximal dans  $G$ .*

*Preuve.* Résulte de la proposition 1.1 et du théorème 1.2 appliqués à  $\pi(A)$ , ainsi que du lemme 1.6 et de la proposition 1.2.

## Chapitre 2. Quelques sous-groupes maximaux du groupe unitaire d'un facteur

### Notations

Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre avec unité,  $p$  et  $q$  deux projecteurs non nuls de  $A$  de somme 1.

- Si  $p$  est équivalent à  $q$  dans  $A$  alors il existe un élément dans  $pAq$  que nous notons  $E_{pq} = (E_{qp})^*$  tel que  $p = E_{pq}(E_{pq})^*$  et  $q = (E_{pq})^*E_{pq}$  (pour l'existence d'un tel élément: [Go] Prop.19.1, p. 147).
- $p < q$  signifie que  $p$  est équivalent dans  $A$  à un sous-projecteur de  $q$ .
- $G(p) = GL(A_p)^0$  et  $U(p) = U(A_p)^0$ .
- $U(p) \times U(q) = \{x \in U(p+q); x = u+v, u \in U(p), v \in U(q)\}$ .

### 2.1. Lemmes préliminaires

Dans ce paragraphe  $A$  est une  $C^*$ -algèbre avec unité,  $p$  et  $q$  deux projecteurs non nuls,  $U^\alpha = \{x \in U; qxp = 0, pxq = 0\}$ .

**LEMME 2.1.** *Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $A$  de somme 1,  $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in U$  avec  $x_1 \in G(p)$ ,  $x_4 \in G(q)$ . Alors il existe deux unitaires  $u \in U(p)$ ,*

$v \in U(q)$  tels que:

$$\begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & v^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p - x_3^* x_3)^{1/2} & -x_3^* \\ x_3 & (q - x_3 x_3^*)^{1/2} \end{pmatrix},$$

appartienne au groupe engendré par  $U^\alpha$  et  $x$ .

NOTATION. Si  $p + q = 1$ ,  $y \in qAp$  avec  $\|y\| < 1$  nous désignons par  $V(y)$  où parfois  $V_{pq}(y)$  l'unitaire:

$$\begin{pmatrix} (p - y^* y)^{1/2} & -y^* \\ y & (q - y y^*)^{1/2} \end{pmatrix}.$$

*Preuve.* L'élément  $x$  étant unitaire on a  $x_1^* x_1 = p - x_3^* x_3$  et comme  $x_1$  est inversible il existe  $u \in U(p)$  tel que  $x_1 = u(x_1^* x_1)^{1/2} = u(p - x_3^* x_3)^{1/2}$ . De même il existe  $v \in U(q)$  tel que  $x_4 = v(q - x_2^* x_2)^{1/2}$ . L'égalité  $q = x_3 x_3^* + x_4 x_4^* = x_3 x_3^* + v(q - x_2^* x_2)v^*$  implique  $x_2^* x_2 = v^* x_3 x_3^* v$ . La relation  $x_2^* x_1 + x_4^* x_3 = 0$  nous donne (en pensant au développement en série entière):

$$\begin{aligned} x_2 &= -(x_1^{-1})^* x_3^* x_4, \\ &= -u(p - x_3^* x_3)^{-1/2} x_3^* v(q - (x_3^* v)^*(x_3^* v))^{1/2}, \\ &= -u(p - x_3^* x_3)^{-1/2} (p - (x_3^* v)(x_3^* v)^*)^{1/2} \quad x_3^* v = -u x_3^* v, \end{aligned}$$

et

$$x_4 = v(q - x_2^* x_2)^{1/2} = v(q - v^* x_3 x_3^* v)^{1/2} = (q - x_3 x_3^*)^{1/2} v.$$

On a alors:

$$\begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & v^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p - x_3^* x_3)^{1/2} & -x_3^* \\ x_3 & (q - x_3 x_3^*)^{1/2} \end{pmatrix}.$$

LEMME 2.2. Soient  $p$  et  $q$  des projecteurs de  $A$  de somme 1, alors  $\langle U^\alpha, V(E_{qp}(1/\sqrt{2})) \rangle = U$ .

*Preuve.* Soit  $\tilde{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} p & iE_{pq} \\ E_{qp} & -iq \end{pmatrix} = \sigma(p - iq)$  où  $\sigma = V(E_{qp}(1/\sqrt{2}))$ .

1) Soit  $x$  un élément autoadjoint de  $A_p$  de norme strictement inférieure à 1

alors  $u = (p - x^2)^{1/2} + ix \in U(p)$  et

$$\tilde{\sigma}^{-1} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & E_{qp} u^* E_{pq} \end{pmatrix} \tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} (p - x^2)^{1/2} & -x E_{pq} \\ E_{qp} x & E_{qp} (p - x^2)^{1/2} E_{pq} \end{pmatrix} = V(E_{qp} x),$$

appartient à  $\langle U^\alpha, \sigma \rangle$ .

2) Soit  $y \in A_p$  avec  $\|y\| < 1/\sqrt{2}$ , alors

$$\tilde{\sigma} V(E_{qp} y) \tilde{\sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} a & c E_{pq} \\ E_{qp} b & E_{qp} a^* E_{pq} \end{pmatrix},$$

où

$$a = \frac{1}{2}((p - y^* y)^{1/2} + iy + iy^* + (p - yy^*)^{1/2}) \in G(p) \quad \text{car} \quad \|y\| < \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$b = \frac{1}{2}((p - y^* y)^{1/2} - iy + iy^* - (p - yy^*)^{1/2}) = b^*, \quad \|b\| < 1,$$

$$c = \frac{1}{2}((p - y^* y)^{1/2} + iy - iy^* - (p - yy^*)^{1/2}).$$

Le lemme 2.1 donne l'existence de deux unitaires  $u \in A_p$ ,  $v \in A_q$  tels que

$$\begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c E_{pq} \\ E_{qp} b & E_{qp} a^* E_{pq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & v^* \end{pmatrix} = V(E_{qp} b).$$

Comme  $b$  est autoadjoint le point 1) implique  $V(E_{qp} b) \in \langle U^\alpha, \sigma \rangle$  et donc  $V(E_{qp} y) \in \langle U^\alpha, \sigma \rangle$ . Le lemme 2.1 montre alors que tout élément unitaire suffisamment proche de l'identité appartient à  $\langle U^\alpha, \sigma \rangle$ . Le groupe  $U$  étant connexe nous avons la conclusion  $\langle U^\alpha, \sigma \rangle = U$ .

**LEMME 2.3.** Soient  $p$  et  $q$  des projecteurs équivalents de  $A$  de somme 1. Soient  $e$  un sous-projecteur non nul de  $p$  ( $e \in A$ ) et  $c$  un élément inversible dans  $A_e$  tel que  $\|c\| < \frac{2}{3}$ , alors:

$$V\left(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}} e\right) \in \langle U^\alpha, V(E_{qp} c) \rangle.$$

*Preuve.* Soit  $c = ux$  la décomposition polaire de  $c$ , où  $u \in U(A_e)$  et  $x = (c^* c)^{1/2} \in A_e$  avec  $\|x\| < \frac{2}{3}$ . On a:

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & E_{qp}(u^* + p - e)E_{pq} \end{pmatrix} V(E_{qp} c) \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & E_{qp}(u + p - e)E_{pq} \end{pmatrix} = V(E_{qp} x),$$

qui appartient à  $\langle U^\alpha, V(E_{qp}c) \rangle$ . Soit  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $v = \sin(\pi/4m)$  et  $ve < 4x(p-x^2)^{1/2}$ . Alors  $a = \frac{1}{2}(x)_e^{-1}(p-x^2)^{-1/2}[(4x^2(p-x^2) - v^2e)^{1/2} + ive] + p - e$  est un unitaire de  $A_p$ . On a:

$$-iV(E_{qp}x) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & E_{qp}a^*E_{pq} \end{pmatrix} [V(E_{qp}x)]^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & \beta E_{pq} \\ E_{qp}\gamma & E_{qp}\delta^*E_{pq} \end{pmatrix},$$

où

$$\delta = -i((p-x^2)^{1/2}a(p-x^2)^{1/2} + xa^*x) \in G(p),$$

$$\gamma = -i(xa(p-x^2)^{1/2} - (p-x^2)^{1/2}a^*x) = \sin \frac{\pi}{4m} e \in A_e.$$

Le lemme 2.1 montre que  $V(E_{qp} \sin(\pi/4m)e) \in \langle U^\alpha, V(E_{qp}c) \rangle$  et donc

$$V\left(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}} e\right) = \left[ V\left(E_{qp} \sin \frac{\pi}{4m} e\right) \right]^m \in \langle U^\alpha, V(E_{qp}c) \rangle.$$

**LEMME 2.4.** Soient  $p, q', q''$  trois projecteurs non nuls de  $A$ , orthogonaux et de somme 1 tels que  $p \sim q'$  et soit  $H = \langle U(p) \times U(q' + q''), U(p + q') \times U(q'') \rangle$ , alors  $H = U$ .

*Preuve.* Soit  $q = q' + q''$ . Grâce au lemme 2.1 et à la connexité de  $U$  il suffit de montrer que  $V(z)$  appartient à  $H$ , ceci pour tout  $z \in qAp$  où  $\|z\|$  est petit. Soient  $x = q'zp$ ,  $y = q''zp$ ,  $t = y(p-x^*x)_p^{-1/2}$  et  $X, Y, W$  comme suit (dans la décomposition  $p + q' + q'' = 1$ ):

$$X = \begin{pmatrix} (p-x^*x)^{1/2} & -x^* & 0 \\ x & (q' - xx^*)^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & q'' \end{pmatrix} \in H,$$

$$Y = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & E_{q'p}(p-t^*t)^{1/2}E_{pq'} & -E_{q'p}t^* \\ 0 & tE_{pq'} & (q'' - tt^*)^{1/2} \end{pmatrix} \in H,$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & E_{pq'} & 0 \\ E_{q'p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q'' \end{pmatrix} \in H.$$

Donc

$$WYW^*X = \begin{pmatrix} * & * & * \\ x & * & * \\ y & * & * \end{pmatrix} \in H,$$

et dans la décomposition  $p + q = 1$ :

$$WYW^*X = \begin{pmatrix} * & * \\ z & * \end{pmatrix},$$

est un élément de  $H$  qui est proche de 1 si  $\|z\|$  est petit. Grâce au lemme 2.1 nous pouvons conclure que  $V(z)$  appartient à  $H$ .

## 2.2. Sous-groupes maximaux de groupe unitaire d'un facteur

Dans ce paragraphe,  $M$  désigne un facteur (à préduel séparable),  $U$  le groupe unitaire de  $M$  ( $U$  est connexe, [Ru] Th. 12.37),  $p$  et  $q$  deux projecteurs non nuls de  $M$  de somme 1.

### DÉFINITIONS.

1. Si  $M$  est un facteur infini semi-fini muni d'une trace  $\tau$  normale semi-finie fidèle, soient:

$$F = \{x \in M; \text{il existe un projecteur } E \in M \text{ tel} \\ \text{que } \tau(E) < \infty \text{ et } x = ExE\},$$

$F$  est l'idéal des éléments de rang fini dans  $M$

$$K = \begin{cases} 0 \text{ si } M \text{ est un facteur de type } I_n, II_1 \text{ ou } III \\ \text{adhérence normique de } F \text{ si } M \text{ est un facteur} \\ \text{de type } I_\infty \text{ ou } II_\infty \end{cases}$$

$K$  est l'idéal bilatère maximal formé des éléments compacts de  $M$ . L'algèbre  $M/K$  est simple.

2. Si  $g \in M$ ,  $\text{Sp}(g)$  désigne le *spectre* de  $g$  et  $\text{Sp}_e(g)$  désigne le *spectre essentiel* de  $g$ , c'est-à-dire le spectre de la projection de  $g$  dans l'algèbre de Calkin  $M/K$ .

3.  $U^\alpha = \{x \in U; pxq = 0, qxp = 0\}$ ,  
 $U_K^\alpha = \{x \in U; pxq \in K, qxp \in K\}$ ,  
 $N_U(U_K^\alpha)$  le normalisateur de  $U_K^\alpha$  dans  $U$ .

2.2.1. Etude de normalisateur de  $U_K^\alpha$ 

**PROPOSITION 2.1.** *Soient  $M$  un facteur,  $p$  et  $q$  deux projecteurs non nuls de  $M$ , équivalents et de somme 1, alors*

$$N_U(U_K^\alpha) = U_K^\alpha \cup TU_K^\alpha,$$

où

$$TU_K^\alpha = \{x \in U; pxp \in K, qxq \in K\}.$$

*Preuve.* C'est en fait un corollaire de la proposition 1.1.

2.2.2. Maximalité de  $N_U(U_K^\alpha)$  lorsque  $p \sim q$ 

**LEMME 2.5.** *Soient  $M$  un facteur et  $e$  un projecteur de  $M$  tel que  $e \neq 1$  et  $e \notin K$ . Alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  et des projecteurs  $e_i$  non nuls orthogonaux équivalents de  $M$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) tels que  $1 - e_0 = \sum_{i=1}^N e_i$ , avec  $e_0 \leq e$ ,  $e_0 \notin K$  et  $1 - e_0 \notin K$ .*

*Preuve.* (1) Si  $M$  est de type  $I_n$  ou  $II_1$  muni d'une trace  $\tau$  normale finie fidèle normalisée: Il existe  $m \in \mathbb{N}$  ( $m = n$  si  $M$  est de type  $I_n$ ) et un sous-projecteur  $e_0$  de  $e$  tel que  $\tau(e_0) = \tau(1)/m < \tau(e)$ . Nous avons  $\tau(1 - e_0) = (m - 1)(\tau(1)/m)$  donc  $1 - e_0$  est la somme de  $m - 1$  projecteurs orthogonaux  $e_i$  de trace  $\tau(1)/m$  donc équivalents à  $e_0$  ( $N = m - 1$ ).

(2) Si  $M$  est de type  $I_\infty$  ou  $II_\infty$ : Le projecteur  $e$  est la somme de deux projecteurs équivalents orthogonaux  $e_0$  et  $e'_0$  où  $e_0, e'_0 \notin K$  ([Di] Ch. III, §1, n° 2, Cor. 3). Nous avons  $e'_0 \leq 1 - e_0$  donc  $1 - e_0 \notin K$  et  $1 - e_0$  est alors un projecteur équivalent à  $e_0$ , car tous deux de trace infinie ([Di] Ch. III, §8, n° 6, Cor. 5).

(3) Si  $M$  est de type  $III$ : On peut choisir  $e_0 = e$  et comme  $1 - e_0 = 1 - e \neq 0$  nous avons donc  $1 - e_0 \sim e_0$  ( $N = 1$ ).

**LEMME 2.6.** *Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs équivalents de somme 1 d'un facteur  $M$ , et  $e$  un sous-projecteur non nul de  $p$  vérifiant  $e \notin K$ , alors  $\langle U^\alpha, V(E_{qp}(1/\sqrt{2})e) \rangle = U$ .*

*Preuve.* Si  $e = p$ ; le lemme 2.2 permet de conclure. Si  $e \neq p$ ; soient  $N$  et  $e_0, e_1, \dots, e_N$  comme au lemme 2.5 (appliqué à  $M_p$ ). Le lemme 2.2 appliqué à  $M_{e+E_{qp}eE_{pq}}$  implique:

$$\left\langle U^\alpha, V\left(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}} e\right) \right\rangle \supset U(e + E_{qp}eE_{pq}) \times U(p - e) \times U(E_{qp}(p - e)E_{pq}).$$

Nous avons alors:

$$V\left(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}} e_0\right) \in \left\langle U^\alpha, V\left(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}} e\right) \right\rangle.$$

Soient  $E_{0j} = (E_{j0})^*$  des isométries partielles de  $M$  reliant  $e_0$  et  $e_j$ , et

$$W_j = E_{0j} + E_{j0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N E_{ii} + E_{qp} \left( E_{0j} + E_{j0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N E_{ii} \right) E_{pq},$$

qui appartient à  $U^\alpha$  ( $j = 1, \dots, N$ ). Alors

$$V\left(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}} e_0\right) W_1 V\left(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}} e_0\right) W_1^* \cdots W_N V\left(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}} e_0\right) W_N^* = V\left(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}} e\right),$$

appartient aussi à  $\langle U^\alpha, V(E_{qp}(1/\sqrt{2})e) \rangle$ . Grâce au lemme 2.2 nous obtenons la conclusion cherchée.

**LEMME 2.7.** *Soit  $M$  un facteur et  $z = z^* \in M - K$  avec  $\|z\| < 1$ . Alors il existe un projecteur  $e \in M - K$  tel que  $ze(1 - z^2)^{1/2}$  soit un élément inversible dans  $M_e$ .*

*Preuve.* Soient  $z = \int_{\text{Sp}(z)} \lambda dE(\lambda)$  la décomposition spectrale de  $z$  et  $\lambda'$  la plus grande valeur spectrale (essentielle si  $M$  est de type  $I_\infty$  ou  $II_\infty$ ) en module de  $z$ . Soient  $\varepsilon > 0$  tel que  $0 < |\lambda' - \varepsilon| < |\lambda'| < |\lambda' + \varepsilon| < 1$  et  $e = E([\lambda' - \varepsilon, \lambda' + \varepsilon])$ . L'élément  $ze(1 - z^2)^{1/2} = \int_{|\lambda' - \varepsilon, \lambda' + \varepsilon|} \lambda(1 - \lambda^2)^{1/2} dE(\lambda)$  est inversible dans  $M_e$ .

**LEMME 2.8.** *Soient  $M$  un facteur,  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $M$  équivalents de somme 1,  $z = z^* \in M_p$  avec  $z \notin K$  et  $\|z\| < \frac{1}{3}$ , alors  $\langle U^\alpha, V(E_{qp}z) \rangle = U$ .*

*Preuve.* Soient  $e$  comme au lemme 2.7 et  $J = 1 - 2e \in U^\alpha$ . Le produit  $JV(E_{qp}z)J^{-1}[V(E_{qp}z)]^{-1}$  s'écrit:

$$\begin{pmatrix} a & bE_{pq} \\ E_{qp}c & E_{qp}dE_{pq} \end{pmatrix},$$

où  $a$  et  $d$  sont inversibles dans  $M_p$  car  $\|z\| < \frac{1}{3}$  et  $c = -2ze(1 - z^2)^{1/2}$  est aussi inversible dans  $M_e$ . Par le lemme 2.1 on a  $V(E_{qp}c) \in \langle U^\alpha, V(E_{qp}z) \rangle$  et les lemmes 2.3 et 2.6 nous permettent de conclure.

**LEMME 2.9.** *Soient  $M$  un facteur,  $p$  et  $q$  deux projecteurs équivalents de  $M$  de*

somme 1. Si  $x \in M_p$  vérifie  $x \notin K$  et  $\|x\| < \frac{1}{6}$ , il existe  $z \in M_p$  avec  $z = z^* \notin K$  et  $\|z\| < \frac{1}{3}$  tel que  $V(E_{qp}z) \in \langle N_U(U_K^\alpha), V(E_{qp}x) \rangle$ .

*Preuve.* Soient  $J = E_{pq} - E_{qp}$ ,  $L = E_{pq} + E_{qp}$  et

$$Z_1 = V(E_{qp}x)JV(E_{qp}x)J^*, \quad Z_2 = iV(E_{qp}x)LV(E_{qp}x)L^* \quad (J, L \in N_U(U_K^\alpha)).$$

Nous avons:  $\|Z_1 - 1\| < 2 \|V(E_{qp}x) - 1\| < 1$  car  $\|x\| < \frac{1}{6}$ , de même  $\|Z_2 - 1\| < 1$ .  
Alors:

$$qZ_1p = E_{qp}((p - xx^*)^{1/2}x^* + x(p - xx^*)^{1/2}) = E_{qp}z_1,$$

$$qZ_2p = E_{qp}(-i(p - xx^*)^{1/2}x^* + ix(p - xx^*)^{1/2}) = E_{qp}z_2,$$

où  $z_j = z_j^* \in M_p$  avec  $\|z_j\| < \frac{1}{3}$  ( $j = 1, 2$ ). Nous ne pouvons avoir  $z_1$  et  $z_2$  dans  $K$  sinon  $z_1 - iz_2 = 2x(p - xx^*)^{1/2} \in K$  ce qui implique  $x \in K$ . Il existe donc  $Z \in \langle N_U(U_K^\alpha), V(E_{qp}x) \rangle$  ( $Z$  est soit  $Z_1$  soit  $Z_2$ ) de la forme  $\begin{pmatrix} * & * \\ E_{qp}z & * \end{pmatrix}$  avec  $\|Z - 1\| < 1$ ,  $z = z^* \notin K$  et  $\|z\| < \frac{1}{3}$ .

Le lemme 2.1 nous permet de conclure  $V(E_{qp}z) \in \langle N_U(U_K^\alpha), V(E_{qp}x) \rangle$ .

**THÉORÈME 2.1.** Soient  $M$  un facteur,  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $M$ , équivalents de somme 1. Alors  $U_K^\alpha$  est d'indice 2 dans  $N_U(U_K^\alpha)$  et  $N_U(U_K^\alpha)$  est un sous-groupe maximal du groupe unitaire  $U$  de  $M$ .

*Preuve.* La proposition 1.1 donne la première affirmation. Soient  $g \in U - N_U(U_K^\alpha)$  et  $\pi$  la projection canonique  $M \rightarrow M/K$  ( $\pi(A)$  est alors une  $C^*$ -algèbre simple et  $U(\pi(A))^0 = \pi(U(A))$  par le lemme 1.6). Le lemme 1.5 appliqué à  $\pi(A)$  montre l'existence de  $a \in U(p)$  et  $d \in U(q)$  avec  $\|a - p\| < \frac{1}{6}$  et  $\|d - q\| < \frac{1}{6}$  tels que  $x = g(a + d)g^{-1} \in \langle N_U(U_K^\alpha), g \rangle - N_U(U_K^\alpha)$ .

Alors  $x$  est un élément de la forme  $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$  où  $\|x - 1\| < \frac{1}{6}$ , et on peut supposer de plus que  $x_3 \notin K$  (sinon on considère  $x^*$ ). Le lemme 2.1 donne alors  $V(x_3) \in \langle U^\alpha, x \rangle$ . Comme  $x_3 \notin K$  et  $\|x_3\| < \frac{1}{6}$  nous pouvons appliquer successivement les lemmes 2.9 et 2.8, d'où  $\langle N_U(U_K^\alpha), V(x_3) \rangle = U$ .

### 2.2.3. Maximalité de $U^\alpha$ lorsque $p \nmid q$

**LEMME 2.10.** Soient  $M$  un facteur fini et  $c \in M$ , alors il existe un unitaire  $u \in M$  tel que  $cu$  soit un élément autoadjoint.

*Preuve.* Soit  $c = v|c|$  la décomposition polaire de  $c$  où  $v, |c| \in M$ . Les projecteurs finis  $v^*v$  et  $vv^*$  étant équivalents, il existe une isométrie partielle  $w \in M$  telle que  $w^*w = 1 - v^*v$ ,  $ww^* = 1 - vv^*$  ([Di], Ch. III, §2, n° 3, Prop. 6). Soit l'unitaire  $u = v^* + w^* \in M$  alors  $cu = u^*c^*$ .

**LEMME 2.11.** *Soient  $M$  un facteur semi-fini continu (resp. discret) muni d'une trace  $\tau$  normale semi-finie fidèle (resp. avec la trace des projecteurs minimaux valant 1), un projecteur  $q$  non nul de  $M$ , un opérateur positif  $P$  de  $M_q$  tel que  $P \neq q$ .*

*Soit  $d$  un nombre réel (resp. entier) tel que  $0 < d \leq \tau(q)$ , alors il existe un sous-projecteur  $q'$  de  $q$ , commutant à  $P$  tel que  $\tau(q') = d$  et  $q'Pq' \neq q'$ .*

*Preuve.* Soient  $(q_j)_{j=1 \dots n}$  des projecteurs orthogonaux équivalents de somme  $q$ , commutant à  $P$  tels que  $\tau(q_j) \leq d$  ( $n$  pouvant être infini). Si  $q'Pq' = q'$  pour tout projecteur  $q'$  commutant à  $P$  avec  $\tau(q') = d$  alors  $\bar{q}P\bar{q} = \bar{q}$  pour tout projecteur  $\bar{q}$  commutant à  $P$  avec  $\tau(\bar{q}) \leq d$ . On a donc  $q_jPq_j = q_j$  ( $\forall j = 1, \dots, n$ ) ce qui implique  $qPq = q$  contrairement à l'hypothèse.

**THÉORÈME 2.2.** *Soient  $M$  un facteur,  $p$  et  $q$  deux projecteurs non nuls de  $M$ , non équivalents et de somme 1. Alors  $N_U(U^\alpha) = U^\alpha$  est un sous-groupe maximal du groupe unitaire  $U$ .*

*Preuve.* L'égalité  $N_U(U^\alpha) = U^\alpha$  résulte de la Proposition 1.1. Comme  $p \not\sim q$  nous supposons par exemple  $p < q$ . Soit  $g \in U - U^\alpha$ . On montre comme dans la preuve du théorème 2.1 qu'il existe  $y = qyp \in M$  avec  $0 < \|y\| < \frac{1}{6}$  et  $V(y) \in \langle U^\alpha, g \rangle$ . L'opérateur  $(q - yy^*)^{1/2}$  étant positif ( $\neq q$ ) il existe un sous-projecteur  $q'$  de  $q$ , équivalent à  $p$ , commutant à  $(q - yy^*)^{1/2}$  tel que  $q'(q - yy^*)^{1/2} q' \neq q'$  (lemme 2.11). Soient  $q'' = q - q'$ ,  $y_1 = q'yp$ ,  $y_2 = q''yp$

$$d_1 = q'(q - yy^*)^{1/2} q', \quad d_2 = q''(q - yy^*)^{1/2} q''.$$

L'élément  $V(y)$  dans la décomposition  $p + q' + q'' = 1$  a la forme:

$$V(y) = \begin{pmatrix} (p - y_1^*y_1 - y_2^*y_2)^{1/2} & -y_1^* & -y_2^* \\ y_1 & d_1 & 0 \\ y_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Les conditions d'unitarité de  $V(y)$  donnent:

$$\begin{aligned} d_1 &= (q' - y_1 y_1^*)^{1/2}, \\ d_2 &= (q'' - y_2 y_2^*)^{1/2}, \\ y_2 y_1^* &= 0. \end{aligned}$$

Remarquons que  $y_1 \neq 0$  car  $d_1 \neq q'$ . Soit  $J = p + q' - q'' \in U^\alpha$ . Grâce aux conditions d'unitarité, nous avons:

$$\begin{aligned} V(y)JV(y)J^* &= \begin{pmatrix} p - 2y_1^* y_1 & -2(p - y_1^* y_1)^{1/2} y_1^* & 0 \\ 2y_1(p - y_1^* y_1)^{1/2} & q' - 2y_1 y_1^* & 0 \\ 0 & 0 & q'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ E_{q'p}c & * & 0 \\ 0 & 0 & q'' \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec  $\|V(y)JV(y)J^* - 1\| \leq 2\|V(y) - 1\| < 1$  et  $c = E_{pq} \cdot 2y_1(p - y_1^* y_1)^{1/2} \neq 0$ ,  $\|c\| < \frac{1}{3}$ . Soit  $u \in U(M_p)$  tel que  $z = cu$  soit un élément autoadjoint de  $M_p$  (lemme 2.10). Nous avons alors:

$$V(y)JV(y)J^*(u + q' + q'') = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ E_{q'p}z & * & 0 \\ 0 & 0 & q'' \end{pmatrix} \in \langle U^\alpha, g \rangle,$$

et grâce au lemme 2.1:

$$Z = \begin{pmatrix} (p - z^2)^{1/2} & -zE_{pq'} & 0 \\ E_{q'p}z & E_{q'p}(p - z^2)^{1/2}E_{pq'} & 0 \\ 0 & 0 & q'' \end{pmatrix} \in \langle U^\alpha, g \rangle,$$

où  $z = z^* \in M_p$ ,  $z \neq 0$ ,  $\|z\| < \frac{1}{3}$ . Par le lemme 2.8 on a:  $\langle U^\alpha, Z \rangle \supset U(p + q') \times U(q'')$ . Donc  $U(p + q') \times U(q'')$  et  $U(p) \times U(q' + q'')$  sont des sous-groupes de  $\langle U^\alpha, g \rangle$ ; ils engendrent  $U$  (lemme 2.4), et  $\langle U^\alpha, g \rangle = U$ .

### Chapitre 3. Position du groupe unitaire dans le groupe des inversibles d'un facteur

Nous reprenons les mêmes notations qu'au chapitre 2.

### 3.1. Etude du normalisateur de $U$ dans $G$

Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre avec unité,  $K$  un idéal bilatère de  $A$  tel que  $A/K$  soit une  $C^*$ -algèbre simple non nulle,  $\pi:A \rightarrow A/K$  la projection canonique. Nous notons:

$$G(1 + K) = \{x \in G; x - 1 \in K\},$$

$$G(U + K) = \{x \in G; x = u + k \text{ avec } u \in U, k \in K\} = U \cdot G(1 + K).$$

*Remarque.* Si  $K = 0$  on a  $G(1 + K) = 1$  et  $G(U + K) = U$ .

LEMME 3.1. Avec les notations ci-dessus:

$$N_G(G(U + K)) = C^*G(U + K).$$

*Preuve.* Soit  $g \in N_G(G(U + K))$ . Alors pour tout  $u \in U$  on a  $gug^{-1} \in G(U + K)$ , c'est-à-dire  $gug^{-1}g^{-1}u^*g^* - 1 \in K$  et donc  $g^*gu - ug^*g \in K$ . Comme tout élément de  $A$  est une combinaison linéaire de 4 unitaires,  $\pi(g^*g)$  appartient au centre de  $\pi(A)$  donc à  $\mathbb{C}$  (car  $\pi(A)$  est une  $C^*$ -algèbre simple avec unité). Nous obtenons donc  $g \in C^*G(U + K)$ .

### 3.2. Lemmes préliminaires

LEMME 3.2. Soit  $T$  un espace compact et  $GL(2, T)$  (resp.  $U(2, T)$ ) le groupe des fonctions continues de  $T$  dans  $GL_2(\mathbb{C})$  (resp.  $U_2(\mathbb{C})$ ). Soit  $F \in GL(2, T)$  de la forme:  $F(t) = \begin{pmatrix} f(t) & 0 \\ 0 & f(t)^{-1} \end{pmatrix}$  avec  $f(t) > 1$  pour tout  $t \in T$ . Alors pour tout

$H \in GL(2, T)$  de la forme  $\begin{pmatrix} h(t) & 0 \\ 0 & h(t)^{-1} \end{pmatrix}$  tel que  $h(t) \geq 1$  pour tout  $t \in T$ , on a  $H \in \langle U(2, T), F \rangle$ .

*Preuve.* Soient  $F$  et  $H$  comme dans l'énoncé. Par compacité de  $T$  il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $h(t) < f(t)^{4n}$  pour tout  $t \in T$ . Posons

$$\theta(t) = \arcsin \frac{h(t)^{1/2} - h(t)^{-1/2}}{f(t)^{2n} - f(t)^{-2n}},$$

( $\theta$  est une fonction continue sur  $T$ ), et soient:

$$R_{\theta(t)} = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} S(t) &= F(t)^n R_{\theta(t)}^{-1} F(t)^{-n} F(t)^{-n} R_{\theta(t)} F(t)^n, \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta(t) + f(t)^{4n} \sin^2 \theta(t) & \sin \theta(t) \cos \theta(t) [f(t)^{2n} - f(t)^{-2n}] \\ \sin \theta(t) \cos \theta(t) [f(t)^{2n} - f(t)^{-2n}] & \cos^2 \theta(t) + f(t)^{-4n} \sin^2 \theta(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'élément  $S$  appartient à  $\langle U(2, T), F \rangle$ ,  $S(t)$  est positif de déterminant 1 pour tout  $t \in T$  et trace  $S(t) = 2 + \sin^2 \theta(t)(f(t)^{2n} - f(t)^{-2n})^2 = h(t) + h(t)^{-1}$ . L'élément  $S(t)$  a donc  $h(t)$  et  $h(t)^{-1}$  pour valeurs propres. Soient

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{2 \cos \theta(t)}{h(t)^{1/2} + h(t)^{-1/2}}, \\ \alpha(t) = \frac{1}{2} \arcsin x(t). \end{cases}$$

Si

$$V(t) = \begin{pmatrix} \cos \alpha(t) & -\sin \alpha(t) \\ \sin \alpha(t) & \cos \alpha(t) \end{pmatrix},$$

alors  $V \in U(2, T)$  et on vérifie par un calcul simple mais fastidieux l'égalité

$$\begin{pmatrix} h(t) & 0 \\ 0 & h(t)^{-1} \end{pmatrix} = V(t)S(t)V(t)^{-1},$$

qui donne la condition cherchée.

**LEMME 3.3.** *Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre avec unité, des projecteurs  $p_1, p_2, p_3$  orthogonaux de  $A$  de somme 1 tels que  $p_1 \sim p_2 \neq 0$ . Si  $a$  est un opérateur positif de  $A_{p_1}$  avec  $\text{Sp}(a) \subset ]1, +\infty[$  alors pour tout  $\gamma \geq 1$ , on a:*

$$\Gamma = \left( \begin{array}{ccc} \gamma p_1 & & \\ & \gamma^{-1} p_2 & \\ & & p_3 \end{array} \right) \in \left\langle U, \left( \begin{array}{ccc} a & & \\ & E_{12}^* a^{-1} E_{12} & \\ & & p_3 \end{array} \right) \right\rangle,$$

( $\text{Sp}(a)$  désigne le spectre de  $a$ . Nous notons  $E_{12} = E_{21}^*$  une isométrie partielle reliant  $p_1$  et  $p_2$ ).

*Preuve.* La  $C^*$ -algèbre avec unité engendrée par  $a$  peut être identifiée à l'espace  $C(T)$  des fonctions continues sur le spectre  $T$  de  $a$ . Soit  $\varphi$  l'isomorphisme de  $GL_2(C(T))$  sur une sous-algèbre de  $G(p_1 + p_2)$  défini par:

$$\varphi: \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \mapsto x + yE_{12} + E_{12}^*z + E_{12}^*wE_{12}.$$

Grâce au lemme 3.2, si  $H(t) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix}$  pour tout  $t \in T$  et  $\gamma \geq 1$  alors

$H \in \langle U(2, T), \varphi^{-1}(a + E_{12}^* a E_{12}) \rangle$  donc

$$\begin{pmatrix} \gamma p_1 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} p_2 \end{pmatrix} \in \left\langle U(p_1 + p_2), \begin{pmatrix} a & \\ & E_{12}^* a^{-1} E_{12} \end{pmatrix} \right\rangle,$$

d'où la conclusion cherchée.

**LEMME 3.4.** *Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre avec unité, des projecteurs  $p_1, p_2, p_3$  orthogonaux de  $A$  de somme 1, tels que  $p_1 \sim p_2 \neq 0$  et soit  $\gamma > 1$ . Alors pour tout  $x, y \in G(p_1)$ ,*

$$\begin{pmatrix} x & & \\ & E_{12}^* x^{-1} E_{12} & \\ & & p_3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} xyx^{-1}y^{-1} & & \\ & p_2 & \\ & & p_3 \end{pmatrix},$$

appartiennent à

$$\left\langle U, \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma p_1 & & \\ & \gamma^{-1} p_2 & \\ & & p_3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

*Preuve.* Soit  $b \in G(p_1)$  positif inversible. Identifions la  $C^*$ -algèbre avec unité engendrée par  $b$  à l'espace des fonctions continues sur  $T$ . En appliquant le lemme 3.2 à

$$F = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix} \text{ et } H = \varphi^{-1} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & E_{12}^* b^{-1} E_{12} \end{pmatrix},$$

où  $\varphi$  est défini comme dans le lemme 3.3 nous obtenons:

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & E_{12}^* b^{-1} E_{12} \end{pmatrix} \in \left\langle U(p_1 + p_2), \begin{pmatrix} \gamma p_1 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} p_2 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

et donc

$$\begin{pmatrix} b & & \\ & E_{12}^* b^{-1} E_{12} & \\ & & p_3 \end{pmatrix} \in \langle U, \Gamma \rangle.$$

Pour tout  $x \in G(p_1)$ , soit  $x = ub$  sa décomposition polaire ( $b = |x|$ ) alors

$$\begin{pmatrix} x & & \\ & E_{12}^* x^{-1} E_{12} & \\ & & p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & & \\ & p_2 & \\ & & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & & \\ & E_{12}^* b^{-1} E_{12} & \\ & & p_3 \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} p_1 & & \\ & E_{12}^* u^* E_{12} & \\ & & p_3 \end{pmatrix},$$

appartient à  $\langle U, \Gamma \rangle$  et donc pour tout  $x, y \in G(p_1)$ :

$$\begin{pmatrix} xyx^{-1}y^{-1} & & \\ & p_2 & \\ & & p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & & \\ & E_{12}^* x^{-1} E_{12} & \\ & & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & & \\ & E_{12}^* y^{-1} E_{12} & \\ & & p_3 \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} (yx)^{-1} & & \\ & E_{12}^* yx E_{12} & \\ & & p_3 \end{pmatrix},$$

appartient aussi à  $\langle U, \Gamma \rangle$ .

### 3.3. Maximalité de $N_G(G(U + K))$ dans le groupe des inversibles d'un facteur

Dans ce paragraphe  $M$  désigne un facteur (à préduel séparable). Nous désignons par  $K$  l'idéal bilatère maximal de  $M$  défini au paragraphe 2.2 dont nous reprenons les notations.

LEMME 3.5. Soit  $M$  un facteur de type  $I_\infty$ , II ou III. Pour tout  $g \in G - N_G(G(U + K))$ , il existe un système d'unités matricielles  $\{E_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$  et un opérateur positif  $a \in M_{E_{11}}$  avec  $\text{Sp}(a) \subset ]1, +\infty[$  tels que

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & E_{12}^* a^{-1} E_{12} & \\ & & E_{33} \end{pmatrix} \in \langle N_G(G(U + K)), g \rangle.$$

*Preuve.* Soit  $g \in G - N_G(G(U + K))$  et  $g = ux$  sa décomposition polaire ( $x = |g|$ ). Le lemme 3.1 implique  $x \notin \mathbb{C}^*G(1 + K)$ . On a  $\langle N_G(G(U + K)), g \rangle = \langle N_G(G(U + K)), x \rangle$ . Le spectre (resp. le spectre essentiel si  $M$  est de type  $I_\infty$  ou  $II_\infty$ ) de  $x$  contient deux points  $\lambda$  et  $\mu$  avec  $0 < \lambda < \mu$ . Soit  $E(\cdot)$  la mesure spectrale associée à la décomposition de  $x = \int_{\text{Sp}(x)} t dE(t)$ . Si  $\varepsilon > 0$  vérifie  $\lambda + \varepsilon < \mu - \varepsilon$ , alors les projecteurs  $E([\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon])$  et  $E([\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon])$  sont orthogonaux.

Considérons les cas suivants:

(a) Le facteur  $M$  est de type  $I_\infty$ ,  $II_\infty$  ou  $III$ . Le projecteur  $E([\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon])$  étant infini ([Ka], Prop. 3.8), il est la somme de deux projecteurs  $E_{11}$  et  $F$  orthogonaux, équivalents et commutant à  $x$ . Soient

$$E_{22} = E([\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon]) \quad \text{et} \quad E_{33} = 1 - E_{11} - E_{22}.$$

$\{E_{ii}\}_{i=1,2,3}$  forment une partition de l'unité de  $M$  que l'on complète en un système d'unités matricielles (s.u.m.)  $\{E_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$ . Alors  $x = x_1 + x_2 + x_3$  où  $x_i = E_{ii}x E_{ii}$  ( $i = 1, 2, 3$ ),

$$\text{Sp}(x_1) \subset [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon] \cap \text{Sp}(x),$$

$$\text{Sp}(x_2) = [\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon] \cap \text{Sp}(x).$$

Soit l'unitaire  $V = E_{12} + E_{21} + E_{33}$ , alors  $B = VXV^{-1}X^{-1}$  est un opérateur inversible de  $\langle N_G(G(U + K)), x \rangle$  de la forme

$$\begin{pmatrix} b & & \\ & E_{21}b^{-1}E_{12} & \\ & & E_{33} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad b = E_{12}x_2E_{21}x_1^{-1} \in M_{E_{11}}.$$

Soit  $b = wa$  la décomposition polaire de  $b$  ( $a = |b|$ ). Alors

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & E_{21}a^{-1}E_{12} & \\ & & E_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^* & & \\ & E_{22} & \\ & & E_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & & \\ & E_{21}b^{-1}E_{12} & \\ & & E_{33} \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} E_{11} & & \\ & E_{21}wE_{12} & \\ & & E_{33} \end{pmatrix},$$

appartient à  $\langle N_G(G(U + K)), x \rangle$  et

$$\|a^{-1}\| < \|x_1\| \|x_2^{-1}\| \leq \frac{\lambda + \varepsilon}{\lambda - \varepsilon} < 1 \quad \text{donc} \quad \text{Sp}(a) \subset ]1, +\infty[.$$

(b) Le facteur  $M$  est de type  $II_1$ , muni d'une trace normale finie fidèle normalisée  $\tau$ . Il existe  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 1$  et un sous-projecteur  $E_{11}$  (resp.  $E_{22}$ ) de  $E([\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon])$  (resp. de  $E([\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon])$ ) commutant à  $x$  et de trace  $1/3k$  ([Di], Ch. III, §2, Prop. 14). Soient  $E_{33}$  un sous-projecteur de  $1 - E_{11} - E_{22}$  de

trace  $1/3k$ , commutant à  $x$  et  $E_{12} = (E_{21})^*$  une isométrie partielle reliant  $E_{11}$  et  $E_{22}$ . Soient  $F = 1 - E_{11} - E_{22} - E_{33}$  et  $x = x_1 + x_2 + x_3 + y$  où  $x = E_{ii}xE_{ii}$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $y = FxF$ . En construisant les éléments  $V = E_{12} + E_{21} + E_{33} + F$  et  $B = VxV^{-1}x^{-1}$ , comme au point  $a$ ) nous obtenons un élément de la forme

$$h = \begin{pmatrix} a & & & \\ & E_{21}a^{-1}E_{12} & & \\ & & E_{33} & \\ & & & F \end{pmatrix} \text{ appartenant à } \langle N_G(U), x \rangle,$$

et où  $\text{Sp}(a) \subset ]1, +\infty[$ . Comme  $\tau(F) = 3(k-1)/3k$ , on peut décomposer  $F$  en somme de  $3(k-1)$  projecteurs orthogonaux, commutant à  $x$  et de trace  $1/3k$ . En effectuant un produit de  $k-1$  conjugués (par des unitaires) de  $h$  nous obtenons la conclusion cherchée.

**LEMME 3.6.** *Soit  $M$  un facteur, alors tout opérateur inversible de  $M$  est un multiple scalaire d'un produit fini de commutateurs multiplicatifs.*

*Preuve.* Si  $M$  est de type  $I_\infty$ ,  $II_\infty$  ou  $III$ , voir [Ha], Prob. 192, si  $M$  est de type  $II_1$  voir [F-H], Prop. 2.5 et si  $M$  est de type  $I_n$  il est bien connu que le groupe dérivé de  $GL_n(\mathbb{C})$  est  $SL_n(\mathbb{C})$ . ([Ar], Ch. IV, Th. 4.7.).

**THÉORÈME 3.1.** *Soit  $M$  un facteur, alors  $N_G(G(U+K)) = \mathbb{C}^*G(U+K)$  est un sous-groupe maximal dans  $G$ .*

*Preuve.* Si  $M$  est un facteur de type  $I_n$ , la démonstration est faite dans [No]. Supposons donc que  $M$  est un facteur  $I_\infty$ ,  $II$  ou  $III$ . Soit  $g \in G - N_G(G(U+K))$ , alors les lemmes 3.5 et 3.3 donnent l'existence d'un s.u.m.  $\{E_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$  tel que

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma E_{11} & & \\ & \gamma^{-1} E_{22} & \\ & & E_{33} \end{pmatrix},$$

appartient à  $\langle N_G(G(U+K)), g \rangle$  pour tout  $\gamma > 1$ . Nous allons montrer que  $\langle N_G(G(U+K)), \Gamma \rangle = G$ . Soit  $a \in G$  et  $a = vB$  sa décomposition polaire où  $v \in U$ ,  $B = (a^*a)^{1/2}$ . Il existe un s.u.m.  $\{\tilde{E}_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$  tel que

$$B = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 & & \\ & \tilde{b}_2 & \\ & & \tilde{b}_3 \end{pmatrix},$$

avec  $\bar{b}_j = \tilde{E}_{jj} B \tilde{E}_{jj}$  pour  $j = 1, 2, 3$  et des isométries partielles  $U_j$  telles que  $U_j U_j^* = E_{jj}$ ,  $U_j^* U_j = \tilde{E}_{jj}$  pour  $j = 1, 2, 3$ . Soit l'unitaire  $U = U_1 + U_2 + U_3$  alors  $UBU^*$  a la forme

$$\begin{pmatrix} b_1 & & \\ & b_2 & \\ & & b_3 \end{pmatrix},$$

dans le s.u.m.  $\{E_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$ . Grâce au lemme 3.6 il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tel que  $b_1 = \lambda b'_1$  où  $b'_1 \in M_{E_{11}}$  est un produit fini de commutateurs multiplicatifs. Donc

$$\begin{pmatrix} b_1 & & \\ & E_{22} & \\ & & E_{33} \end{pmatrix} = \lambda^{1/3} \begin{pmatrix} b'_1 & & \\ & E_{22} & \\ & & E_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{1/3} E_{11} & & \\ & \lambda^{-1/3} E_{22} & \\ & & E_{33} \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} \lambda^{1/3} E_{11} & & \\ & E_{22} & \\ & & \lambda^{-1/3} E_{33} \end{pmatrix},$$

appartient à  $\langle N_G(G(U+K)), \Gamma \rangle$  (lemme 3.4). Comme  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  et  $E_{33}$  sont des projecteurs équivalents,

$$\begin{pmatrix} E_{11} & & \\ & b_2 & \\ & & E_{33} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} E_{11} & & \\ & E_{22} & \\ & & b_3 \end{pmatrix} \text{ et donc } \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & b_2 & \\ & & b_3 \end{pmatrix},$$

appartiennent à  $\langle N_G(G(U+K)), \Gamma \rangle$ . Nous avons la conclusion cherchée car  $B$  et donc aussi  $a$  sont des éléments de  $\langle N_G(G(U+K)), \Gamma \rangle$ .

## Appendice

Nous allons déduire du théorème 1.1 de nouvelles preuves de la simplicité de certains groupes. Considérons à titre d'exemple un facteur  $A$  de type III (à préduel séparable) et le groupe  $G$  des éléments inversibles de  $A$ . Le résultat suivant est essentiellement dû à Kaplansky ([Kap]).

**COROLLAIRE.** *Avec les notations ci-dessus le groupe  $G/\mathbb{C}^*$  est simple.*

*Preuve.* Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs équivalents de somme 1, soient  $G'$

comme au théorème 1.1 et  $W = \{x \in G; x - 1 \in pAq\}$  qui est un sous-groupe normal abélien de  $G'$ .

(1) La réunion des conjugués de  $W$  engendre  $G$ : cela résulte par exemple d'identités classiques avec matrices élémentaires ([Mi]) et de la perfection de  $G$  ([H-S, 1]).

(2) L'intersection des conjugués de  $G'$  dans  $G$  est réduite à  $\mathbb{C}^*$ : On voit facilement qu'un élément de  $\bigcap_{x \in G} xG'x^{-1}$  ne peut être que de la forme  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$  avec  $a \in G(A_p)$ ,  $d \in G(A_q)$ . Pour tout  $c \in qAp$  nous devons donc avoir

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ c & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ c & q \end{pmatrix}^{-1} \in G' \text{ ce qui implique}$$

$d = E_{qp} a E_{pq}$  (où  $E_{qp} = (E_{pq})^*$  est une isométrie partielle reliant  $p$  et  $q$ ) et  $a$  commute alors à tous les éléments de  $A_p$ , donc est scalaire.

Le corollaire résulte alors de la maximalité de  $G'$  dans  $G$  par un argument général "bien connu" ([Bo], Groupes et Alg. de Lie, Chap. IV, §2, Ex. 28).

Nous obtenons de la même manière des résultats analogues sur la simplicité lorsque  $A$  est un facteur d'un autre type.

## BIBLIOGRAPHIE

- [Ar] E. ARTIN, *Algèbre géométrique*, Gauthier-Villars, Paris, (1962).
- [Bo] N. BOURBAKI, Hermann, Paris, (1964).
- [Di] J. DIXMIER, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris, (1957).
- [Dy] E. B. DYNKIN, *The maximal subgroups of the classical groups*, Amer. Math. Soc. Transl. Série 2, 6 (1957), 245-378.
- [F-H] T. FACK et P. DE LA HARPE, *Sommes de commutateurs dans les algèbres de von Neumann finies continues*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 30, 3 (1980), 49-73.
- [Go] K. R. GOODEARL, *Notes on real and complex C\*-algebras*, Shiva Publishing Limited, Nantwich, (1982).
- [H] P. DE LA HARPE, *Simplicity of the projective unitary groups defined by simple factors*, Comment. Math. Helvetici, 54 (1979), 334-345.
- [H-S, 1] P. DE LA HARPE et G. SKANDALIS, *Produits finis de commutateurs dans les C\*-algèbres*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 34, 4 (1984), 169-202.
- [H-S, 2] P. DE LA HARPE et G. SKANDALIS, *Sur la simplicité essentielle du groupe des inversibles et du groupe unitaire dans une C\*-algèbre simple*, J. Funct. Anal., 62, 3 (1985), 354-378.
- [Ha] P. R. HALMOS, *A. Hilbert space problem book*, von Nostrand Company, INC, Princeton, (1967).
- [Ka] V. KAFTAL, *On the theory of compact operators in von Neumann algebras I*, Indiana Univ. Math. J., 26 (1977), N° 3, 447-457.
- [Kap] I. KAPLANSKY, *Rings of operators*, Benjamin (1968).
- [Mi] J. MILNOR, *Introduction to algebraic K-Theory*, Princeton University Press, (1971).

- [No] W. NOLL, *Proof of the maximality of the orthogonal group in the unimodular group*, Arch. Rational. Mech. Anal., 18 (1965), 100–102.
- [Ru] W. RUDIN, *Functional analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, (1973).

*Université de Neuchâtel*  
*Chantemerle 20*  
*CH-2000 Neuchâtel*

Reçu le 18 mars 1986