

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 63 (1988)

Artikel: Feuilletages riemanniens à croissance polynomiale.
Autor: Carrière, Yves
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-48192>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Feuilletages riemanniens à croissance polynômiale

YVES CARRIÈRE

Introduction

A un feuilletage riemannien \mathcal{F} d'une variété compacte est associé de manière naturelle son *algèbre de Lie structurale* \mathfrak{g} . Cet invariant "algébrique" a été introduit par P. Molino (cf. [Mo]) et joue un rôle essentiel dans l'étude de la topologie de l'adhérence des feuilles de \mathcal{F} (on fera à la section 0 un petit rappel sur ce point). Le but de cet article est de mieux comprendre l'interaction existant entre \mathfrak{g} et la géométrie (riemannienne à quasi-isométrie près) des feuilles de \mathcal{F} .

Le premier résultat que nous avons eu dans ce sens est que si \mathcal{F} est un flot riemannien (i.e. $\dim \mathcal{F} = 1$), alors \mathfrak{g} est abélienne (cf. [CC]–[C1] ou [C2]). Il semblait alors raisonnable de conjecturer que ce résultat pouvait se généraliser au cas où \mathcal{F} est encore supposé à croissance linéaire mais avec maintenant $\dim \mathcal{F} > 1$. Malheureusement, les démonstrations que nous possédions utilisaient fortement l'hypothèse $\dim \mathcal{F} = 1$. En fait, la généralisation recherchée dépendait directement de la conjecture suivante: \mathcal{F} est à croissance polynômiale si et seulement si \mathfrak{g} est nilpotente [CG]. Nous répondons ici positivement à ces deux conjectures après avoir caractérisé, grâce à un résultat récent de R. Zimmer [Z], les feuillets riemanniens ayant une algèbre de Lie structurale résoluble.

Avant d'énoncer notre résultat, faisons un bref rappel (qui sera développé à la section 0). Une variété riemannienne L est dite *Følner* (ou d'invariant isopérimétrique de Cheeger nul ou fermée à l'infini cf. [Br], [Gr1]) s'il existe une suite de sous-variétés à bord K_n telle que $\lim \text{vol}(\partial K_n)/\text{Vol}(K_n) = 0$. C'est le cas lorsque L est à *croissance polynômiale* (de degré d), c'est-à-dire lorsque le volume $\text{Vol}(B(x, n))$ de la boule de rayon n centrée en un point x fixé de L croît comme un polynôme (de degré d) en n . Ces deux propriétés étant invariantes par quasi-isométrie, on peut donner la définition suivante: une feuille L d'un feuilletage \mathcal{F} d'une variété compacte M est *Følner* (resp. à *croissance polynômiale*) si elle vérifie la propriété correspondante pour la métrique induite par une (et donc par toute) métrique riemannienne sur M . On dira que \mathcal{F} est *Følner* (resp. à *croissance polynômiale*) si toutes les feuilles de \mathcal{F} le sont. On notera $d(\mathcal{F})$ le *degré de croissance* de \mathcal{F} (i.e. la borne supérieure des degrés de croissance des feuilles de \mathcal{F}):

THÉORÈME. *Soit \mathcal{F} un feuilletage riemannien d'une variété compacte et \mathfrak{g} son algèbre de Lie structurale. Alors:*

- i) \mathcal{F} est Følner si et seulement si \mathfrak{g} est résoluble
- ii) \mathcal{F} est à croissance polynômiale si et seulement si \mathfrak{g} est nilpotente
- iii) Si \mathfrak{g} est nilpotente et si $\delta(\mathfrak{g})$ désigne son degré de nilpotence, alors on a: $\delta(\mathfrak{g}) \leq d(\mathcal{F})$; en particulier, si la croissance de \mathcal{F} est linéaire, \mathfrak{g} est abélienne.

On obtient comme corollaire direct de iii) le résultat de [C1 ou C2]:

COROLLAIRE A. *L'algèbre de Lie structurale d'un flot riemannien (i.e. d'un feuilletage riemannien de dimension 1) sur une variété compacte est abélienne.*

Le point ii) joint au résultat de A. Haefliger (Corollaire 4.4 de [H2]), démontré antérieurement dans [MS] pour le cas des flots riemanniens, donne immédiatement le

COROLLAIRE B. *Un feuilletage riemannien \mathcal{F} à croissance polynômiale sur une variété compacte M est minimalisable (i.e. il existe une métrique riemannienne sur M telle que toutes les feuilles de \mathcal{F} sont minimales) si et seulement si la cohomologie basique de \mathcal{F} est non nulle en degré maximum.*

On ne sait pas encore si ce critère de minimalisabilité s'étend ou non à tous les feuilletages riemanniens des variétés compactes.

La démonstration du théorème est organisée de la façon suivante. A la section 0, nous faisons un certain nombre de rappels sur la croissance, la condition Følner et la construction de l'algèbre de Lie structurale à l'issue desquels nous montrons que la démonstration du théorème se réduit sans difficulté à celle du

THÉORÈME AUXILIAIRE. *Soit \mathcal{F} un G -feuilletage de Lie à feuilles denses sur une variété compacte. Alors:*

- i) \mathcal{F} est Følner si et seulement si G est résoluble
- ii) \mathcal{F} est à croissance polynômiale si et seulement si G est nilpotent.
- iii) Si G est nilpotent et si $\delta(G)$ désigne son degré de nilpotence, alors on a: $\delta(G) \leq d(\mathcal{F})$; en particulier, si la croissance de \mathcal{F} est linéaire, G est abélien.

Les sections 1, 2 et 3 sont exclusivement consacrées à la démonstration de ce théorème auxiliaire. Rappelons qu'un G -feuilletage de Lie \mathcal{F} sur une variété M est donné localement par des submersions à valeurs dans un groupe de Lie G , les changements de cartes transverses étant des translations à gauche de G (on peut

aussi décider de les prendre à droite comme dans [Gh]). Un tel feuilletage relevé dans le revêtement universel \tilde{M} de M (supposée compacte) est défini par une fibration D de \tilde{M} sur G appelée *application développante*, équivariante par rapport à la représentation *d'holonomie* h de $\pi_1(M)$ dans G . L'image Γ de cette représentation est appelée le *groupe d'holonomie* de \mathcal{F} (cf. par exemple [C1], [E], [Gh], [HH] ou [T] pour des détails sur toutes ces notions).

Lorsque M est compacte, les propriétés d'être à croissance polynômiale ou Følner sont des propriétés transverses. D'après A. Haefliger [H1], ces propriétés peuvent être lues sur le seul groupe d'holonomie Γ agissant à gauche sur G . A la section 1, nous montrons comment faire ceci concrètement. Le point i) du théorème auxiliaire se déduit alors de [CG] et d'un théorème de R. Zimmer [Z] résolvant une conjecture de A. Connes et D. Sullivan. Nous pouvons ainsi réduire la démonstration de ii) au cas où G est résoluble. Cette démonstration occupe la section 2 et constitue le coeur de notre article. Tous nos efforts ont pour but de produire de la croissance de type surpolynômial dans le cas où le centre $C(\Gamma)$ est discret. Malgré une apparente ressemblance entre notre problème et celui traité dans [Gr2], les difficultés que nous rencontrons sont d'une autre nature. Le groupe de type fini Γ étudié est déjà un sous-groupe (dense) d'un groupe de Lie G , mais en contrepartie, nous savons seulement que la croissance "locale" de Γ dans G est polynômiale (cf. définition 2.2.1) ce qui est loin d'entraîner trivialement que la croissance habituelle de Γ est polynômiale. A la section 3, nous démontrons iii) en utilisant la théorie de Malcev ([Ma], [R]). Nous concluons par un exemple montrant qu'il n'est pas possible d'améliorer le résultat pour les feuilletages de Lie définis par une action libre de \mathbb{R}^p .

La démonstration que nous donnons ici se passe exclusivement au niveau "transverse" et il nous semble qu'elle doit permettre d'obtenir un énoncé analogue pour un pseudo-groupe d'isométries locales à génération compacte (cf. [H2]). Seule la section 1 serait à modifier, mais nous n'avons cependant pas fait une vérification rigoureuse des détails. De toute façon, nous tenions à rester dans le cadre "géométrique" des feuilletages qui, nous l'espérons, est plus accessible au lecteur.

Je remercie Etienne Ghys pour les nombreuses discussions que j'ai pu avoir avec lui sur ce problème. La collaboration que nous avons eue dans [CG] a relancé ma volonté d'en venir à bout, l'article de R. Zimmer [Z] m'en a donné les moyens.

0. Préliminaires et réduction au théorème auxiliaire

Pour commencer, indiquons comment P. Molino introduit l'algèbre structurale \mathfrak{g} d'un feuilletage riemannien \mathcal{F} d'une variété compacte M (cf. [Mo] pour

les détails). Dire que \mathcal{F} est *riemannien* revient à dire qu'il existe sur M une métrique riemannienne g dont la partie orthogonale à \mathcal{F} est invariante par holonomie. On dit alors que g est *quasi-fibrée* (bundle like). Pour une telle métrique, on considère \hat{M} la variété fibrée sur M dont la fibre au-dessus d'un point x est constituée des repères orthonormés de $T_x(\mathcal{F})^\perp$. Cette variété est un O_q -fibré principal ($q = \text{codim } \mathcal{F}$) que l'on appelle aussi *variété des repères orthonormés transverses à \mathcal{F}* . La propriété de g permet de construire un feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ de \hat{M} relevé de \mathcal{F} et ayant même dimension. Si l'on voit \mathcal{F} comme localement engendré par des flots $\varphi_i^1, \dots, \varphi_i^p$, alors $\hat{\mathcal{F}}$ est localement engendré par les différentielles $D\varphi_i^1, \dots, D\varphi_i^p$ agissant sur les repères orthonormés transverses à \mathcal{F} . Par construction, $\hat{\mathcal{F}}$ est invariant par l'action de O_q sur \hat{M} et se projette sur \mathcal{F} .

0.1. THÉORÈME [Mo]. *Le feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ est transversalement parallélisable complet; en particulier, les adhérences des feuilles de $\hat{\mathcal{F}}$ fibrent \hat{M} et la restriction de $\hat{\mathcal{F}}$ à l'une de ces adhérences est un \mathfrak{g} -feuilletage de Lie.*

Nous allons essayer de donner une idée de la façon dont apparaît l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Dire que $\hat{\mathcal{F}}$ est transversalement parallélisable complet revient à dire qu'il existe des champs de vecteurs complets $X_1, \dots, X_{q'}$ ($q' = \text{codim } \hat{\mathcal{F}}$) transverses à $\hat{\mathcal{F}}$ qui en chaque point de \hat{M} forment une base du fibré normal de $\hat{\mathcal{F}}$ et dont les flots associés sont des automorphismes de $\hat{\mathcal{F}}$. Etant donné un champ de vecteurs X , appelons \bar{X} sa partie normale à $\hat{\mathcal{F}}$. On vérifie que les $[X_i, X_j]$ ont des coefficients en les \bar{X}_i qui sont des fonctions *basiques* (i.e. constantes sur les feuilles) de $\hat{\mathcal{F}}$ et sont donc constants en restriction à l'adhérence \bar{L} d'une feuille L . Les parties des \bar{X}_i tangentes à \bar{L} engendrent par conséquent une algèbre de Lie de dimension finie \mathfrak{g} qui fait de $\hat{\mathcal{F}}_{|\bar{L}}$ un \mathfrak{g} -feuilletage de Lie. L'algèbre de Lie \mathfrak{g} est (à automorphisme d'algèbre de Lie près) un invariant du feuilletage riemannien \mathcal{F} que l'on appelle *l'algèbre de Lie structurale de \mathcal{F}* . L'invariance par rapport au choix de \bar{L} provient du fait que les flots associés aux champs $X_1, \dots, X_{q'}$ engendrent un groupe *transitif* d'automorphismes de $\hat{\mathcal{F}}$. Ceci signifie qu'étant donné deux feuilles L_1 et L_2 de $\hat{\mathcal{F}}$, il existe un difféomorphisme φ de \hat{M} préservant les feuilles de $\hat{\mathcal{F}}$ et envoyant L_1 sur L_2 . En particulier, les feuilletages $\hat{\mathcal{F}}_{|L_1}$ et $\hat{\mathcal{F}}_{|L_2}$ sont conjugués, d'où l'invariance de \mathfrak{g} à automorphisme d'algèbre de Lie près. D'autre part, pour une métrique riemannienne quelconque de \hat{M} , le difféomorphisme φ est une quasi-isométrie car \hat{M} est compacte. Il s'en suit que munies des métriques induites, L_1 et L_2 sont quasi-isométriques, d'où le

0.2 LEMME. *Pour les métriques induites par une quelconque métrique riemannienne sur \hat{M} , toutes les feuilles de $\hat{\mathcal{F}}$ sont quasi-isométriques. En*

particulier, toutes les feuilles ont la même croissance et sont Følner si et seulement si l'une d'entre elles l'est.

Pour pouvoir réduire la démonstration du théorème à celle du théorème auxiliaire, il nous reste à comparer les invariants de quasi-isométrie (croissance et condition Følner) de \mathcal{F} et de $\hat{\mathcal{F}}$. La variété M étant munie de la métrique g , on munit \hat{M} d'une métrique \hat{g} "relevée" de g au sens suivant: la projection $p: \hat{M} \rightarrow M$ réalise une isométrie locale entre les feuilles de $\hat{\mathcal{F}}$ et celles de \mathcal{F} . Autrement dit, si \hat{L} est une feuille de $\hat{\mathcal{F}}$ et $L = p(\hat{L})$ la feuille de \mathcal{F} projetée, $p|_{\hat{L}}: \hat{L} \rightarrow L$ est un revêtement riemannien. En particulier, le degré de croissance de L est dominé par celui de \hat{L} et on vérifie que L est Følner si \hat{L} l'est. On constate par ailleurs sans difficulté que le revêtement $p|_{\hat{L}}$ est trivial si et seulement si L est une feuille dont l'holonomie agit trivialement sur les repères orthonormés transverses. Comme il est bien connu que tout feuilletage d'une variété compacte a au moins une feuille sans holonomie, on peut choisir une feuille \hat{L}_0 de $\hat{\mathcal{F}}$ telle que $L_0 = p(\hat{L}_0)$ est sans holonomie. Alors $p|_{\hat{L}_0}$ est une isométrie. Ces remarques et le lemme 0.2 conduisent au

0.3 LEMME. *Les degrés de croissance $d(\mathcal{F})$ et $d(\hat{\mathcal{F}})$ sont égaux et \mathcal{F} est Følner si et seulement si $\hat{\mathcal{F}}$ l'est.*

Par conséquent, démontrer le théorème pour \mathcal{F} revient à le démontrer pour $\hat{\mathcal{F}}$ et on peut même se contenter de le faire pour la restriction de $\hat{\mathcal{F}}$ à l'adhérence d'une feuille, c'est-à-dire pour un \mathfrak{g} -feuilletage de Lie à feuilles denses. Il reste à vérifier qu'il revient au même de se donner un \mathfrak{g} -feuilletage de Lie ou de se donner un G -feuilletage de Lie (au sens de l'introduction) où G est le groupe de Lie (simplement connexe) dont l'algèbre de Lie est \mathfrak{g} . La démonstration du théorème se réduit ainsi à celle du théorème auxiliaire.

Avant de commencer la démonstration proprement dite, faisons encore quelques rappels sur les invariants de quasi-isométrie qui nous intéressent. On trouvera des détails dans [Br], [CG], [Gr1], [HH] et [P]. Soit \mathcal{F} un feuilletage (non nécessairement riemannien) sur une variété compacte M . Etant donné une transversale T coupant toutes les feuilles, on considère le pseudo-groupe d'holonomie (associé à cette transversale) \mathcal{H}_T qui est constitué des difféomorphismes locaux donnés par les applications de premier retour sur T en suivant les feuilles de \mathcal{F} . Une propriété de \mathcal{F} est *transverse* si elle peut être lue sur \mathcal{H}_T et ne dépend pas de la transversale T choisie (pour des détails et des définitions précises cf. [H1]). Les propriétés d'être à croissance polynômiale ou d'être Følner sont transverses. De manière précise, comme M est compacte, le pseudo-groupe \mathcal{H}_T est engendré par un nombre fini de difféomorphismes locaux h_1, \dots, h_n de T . Pour un x de T , le *type de croissance* de l'orbite $\mathcal{H}_T.x$ est le type

de croissance de la fonction $f_x(m)$ égale au nombre de points obtenus à partir de x en appliquant au plus m fois les h_i . Le type de croissance de la feuille L passant par un point x de T est celui de l'orbite $\mathcal{H}_T.x$ (cf. [P] ou [HH] par exemple). En particulier, on voit que pour \mathcal{F} la propriété d'être à croissance polynômiale est transverse. La condition Følner est aussi transverse et se lit sur \mathcal{H}_T de la façon suivante. Considérons toujours L la feuille passant par un point x de T . Etant donné un sous-ensemble fini S de l'orbite $\mathcal{H}_T.x$, on note ∂S (le bord de S) c'est-à-dire l'ensemble des points de S envoyés par au moins un h_i à l'extérieur de S . La feuille L est Følner si et seulement si $\mathcal{H}_T.x$ est Følner, c'est-à-dire s'il existe une suite d'ensembles finis S_n tels que $\lim \text{Card } \partial S_n / \text{Card } S_n = 0$ (cf. [Br]).

Pour terminer ces préliminaires, notons que si un feuilletage \mathcal{F} est donné par une action localement libre d'un groupe de Lie K , \mathcal{F} est Følner si K est Følner (par exemple si K est résoluble et admet un sous-groupe discret uniforme); \mathcal{F} est à croissance polynômiale si K est à croissance polynômiale (en particulier si K est nilpotent, cf. [J] pour la description générale des groupes de Lie à croissance polynômiale).

1. Comment lire les invariants de quasi-isométrie de \mathcal{F} sur Γ

Soit \mathcal{F} un G -feuilletage de Lie sur une variété compacte M . Nous appellerons $D: \tilde{M} \rightarrow G$ l'application développante, h la représentation d'holonomie et Γ le groupe d'holonomie de \mathcal{F} (cf. [C1], [E], [Gh], [HH], [T]). Nous allons construire un pseudo-groupe d'holonomie transverse particulier du feuilletage \mathcal{F} .

Choisissons sur M un bon recouvrement U_i (cf. [HH], [P]) $i = 1, \dots, m$. Les plaques P sont les composantes connexes des intersections d'un U_i et d'une feuille de \mathcal{F} . On peut toujours supposer que les U_i sont assez petits pour être des ouverts trivialisants du revêtement universel $\tilde{M} \rightarrow M$. Choisissons des relevés \tilde{U}_i des U_i dans \tilde{M} . Chaque plaque P_i de U_i se relève en une plaque \tilde{P}_i de \tilde{U}_i . Notons $T_i = D(\tilde{U}_i)$. Via l'identification entre \tilde{U}_i et U_i , l'application $D: \tilde{U}_i \rightarrow T_i$ induit une carte $f_i: U_i \rightarrow T_i$. Les changements de cartes sont donnés par les translations à gauche par γ_{ij} où $\gamma_{ij} = h(c_{ij})$ avec $c_{ij} \in \pi_1(M)$ tel que $c_{ij}\tilde{U}_j \cap \tilde{U}_i \neq \emptyset$. On a donc obtenu un cocycle feuilleté définissant \mathcal{F} (cf. [C1], [HH]) et le pseudo-groupe Γ_T ayant pour support la réunion disjointe T des T_i et engendré par les transformations $\gamma_{ij}: T_i \rightarrow T_j$ est l'un des pseudo-groupes transverses de \mathcal{F} . La croissance des feuilles de \mathcal{F} est celle des orbites de Γ_T .

1.1. DÉFINITION. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des éléments de G et V un ouvert $V \subset G$. Nous noterons $\Gamma(V, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ le pseudo-groupe ayant pour support V et engendré par les translations α_i restreintes au départ et à l'arrivée à V .

On voit que les orbites de $\Gamma(V, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sont celles des éléments de V par les translations $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ qui “vivent à tout moment dans V ”.

1.2. LEMME. Si $V = \bigcup_{i=1}^m T_i$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des éléments quelconques de Γ alors le type de croissance des orbites de $\Gamma(V, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est dominé par celui de \mathcal{F} .

Démonstration. Pour chaque $x \in V$, choisissons une plaque $\tilde{P}(x) \subset \bigcup_{i=1}^m \tilde{U}_i$ (il peut y avoir au-dessus de x plusieurs ouverts \tilde{U}_i et donc plusieurs plaques mais on en choisit une). Appelons $P(x)$ la plaque projetée dans M .

Etant donné un point $x_0 \in V$ il lui correspond une feuille $L(x_0)$ de \mathcal{F} dans M . Soit x un point de V dans l'orbite de x_0 par $\Gamma(V, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ à une distance d de x_0 (relativement au système de générateurs $\alpha_1, \dots, \alpha_n$). La plaque $P(x)$ est une plaque de $L(x_0)$. Il s'agit d'estimer la distance $\delta(P(x_0), P(x))$ dans $L(x_0)$ entre les plaques $P(x_0)$ et $P(x)$ en fonction de d (une métrique riemannienne a été choisie sur M et relevée dans \tilde{M}). Pour ceci, il nous suffit d'estimer la distance $\delta(P(y), P(\alpha_i \cdot y))$ dans $L(y)$ pour un $y \in V$ tel que $\alpha_i \cdot y \in V$.

Choisissons $a_1, \dots, a_n \in \pi_1(M)$ tels que $h(a_i) = \alpha_i$. On remarque que la distance $\delta(P(y), P(\alpha_i \cdot y))$ dans $L(y)$ est plus petite que la distance $\tilde{\delta}(a_i \cdot \tilde{P}(y), \tilde{P}(\alpha_i \cdot y))$ dans $D^{-1}(\alpha_i \cdot y)$. Mais si on appelle \tilde{U} l'ouvert relativement compact constitué par la réunion des \tilde{U}_i et des $a_j \cdot \tilde{U}_i$, les diamètres des ensembles $D^{-1}(z) \cap \tilde{U}$ sont évidemment bornés (on utilise le fait que D est une fibration et un argument de continuité élémentaire). On en déduit l'existence d'un nombre K tel que pour tout i :

$$\delta(P(y), P(\alpha_i \cdot y)) \leq \tilde{\delta}(a_i \cdot \tilde{P}(y), \tilde{P}(\alpha_i \cdot y)) \leq K.$$

En conclusion, si x est un point dans l'orbite de x_0 par $\Gamma(V, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ à la distance d relativement au système générateur $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, on a:

$$\delta(P(x_0), P(x)) \leq Kd.$$

Comme la fonction $x \rightarrow P(x)$ est injective, on obtient la conclusion désirée. ■

1.3. LEMME. Si V désigne un ouvert relativement compact quelconque de G et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Gamma$, alors le type de croissance des orbites de $\Gamma(V, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est dominé par celui de \mathcal{F} .

Démonstration. Le domaine $\bigcup_{i=1}^m T_i$ rencontre toutes les orbites de l'action de

Γ sur G . Par la compacité relative de V , il existe un nombre fini d'éléments $\beta_1, \dots, \beta_n \in \Gamma$ tels que $V \subset V' = \bigcup_{j=1}^p \beta_j \cdot (\bigcup_{i=1}^m T_i) = \bigcup_{i,j} \beta_j \cdot T_i$. On choisit alors pour chaque β_j un élément b_j dans $\pi_1(M)$ tel que $\beta_j = h(b_j)$ et à un point $x \in V'$ on associe une plaque \tilde{P} dans l'un des ouverts $b_j \cdot \tilde{U}_i$ au-dessus de x , puis la plaque $P(x)$ projetée dans M . On peut alors reprendre point par point la démonstration du lemme précédent, le seul changement étant que l'application $x \rightarrow P(x)$ n'est plus nécessairement injective mais à fibres finies, ce qui permet encore de conclure que la croissance des orbites de $\Gamma(V', \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est dominée par celle de \mathcal{F} . Comme $V \subset V'$, il est clair qu'il en va de même pour la croissance des orbites de $\Gamma(V, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$. ■

1.4. LEMME. *Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ est un système générateur de Γ , il existe un ouvert relativement compact $V \subset G$ tel que le type de croissance d'au moins une orbite de $\Gamma(V, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est celui de \mathcal{F} .*

Démonstration. Il est clair que la croissance des orbites de $\Gamma(\bigcup_{i=1}^m T_i, \gamma_{11}, \dots, \gamma_{mm})$, où les γ_{ij} sont les changements de cartes transverses choisis au début, est celle des feuilles de \mathcal{F} . Comme $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ est un système générateur, il existe un nombre l tel que chaque γ_{ij} s'exprime par un mot en les α_i de longueur au plus l . Considérons un point x de $\bigcup_{i=1}^m T_i$ qui est dans l'orbite par $\Gamma(\bigcup_{i=1}^m T_i, \gamma_{11}, \dots, \gamma_{mm})$ d'un point $x_0 \in \bigcup_{i=1}^m T_i$ à une distance d relativement au système $\gamma_{11}, \dots, \gamma_{mm}$. En remplaçant dans le morceau d'orbite qui joint x_0 à x , γ_{ij} par un mot en les α_i de longueur au plus l , on obtient un morceau d'orbite dans $\Gamma(V, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de longueur au plus ld joignant x_0 à x , où l'on désigne par V l'ouvert relativement compact

$$\bigcup_{\substack{i_1, \dots, i_k \leq n \\ k \leq l}} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k} \cdot \left(\bigcup_{i=1}^m T_i \right).$$

Il est alors clair que le type de croissance des orbites de $\Gamma(V, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ domine celui de \mathcal{F} . Par le lemme précédent, il y a égalité des types de croissance. ■

On sait à présent comment lire la croissance de \mathcal{F} à partir de la seule donnée de Γ dans G :

1.5. PROPOSITION. *Soit \mathcal{F} un G -feuilletage de Lie d'une variété compacte. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ est un système générateur de son groupe d'holonomie Γ , alors pour tout ouvert relativement compact $V \subset G$, le type de croissance des orbites de $\Gamma(V, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (cf. 1.1) est dominé par celui de \mathcal{F} . De plus, si V est choisi suffisamment grand, il y a égalité. En particulier, le type de croissance de \mathcal{F} ne dépend que de l'action de Γ sur G [H1].*

On retrouve le fait que la croissance de \mathcal{F} est dominée par celle de Γ [B]. En particulier, si G est nilpotent alors \mathcal{F} est à croissance polynômiale. Toute la difficulté sera à la section suivante d'établir la réciproque lorsque Γ est dense. Notons qu'il y a un cas où le type de croissance de \mathcal{F} est égal à celui de Γ , le cas où G est compact (on peut alors prendre $V = G$ tout entier).

Voyons maintenant comment on lit la condition que \mathcal{F} est Følner à partir de la seule donnée de Γ dans G . Par application directe du théorème 4 de [CG] on a:

1.6. PROPOSITION. \mathcal{F} est Følner $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ est moyennable.

Reprenons le pseudo-groupe transverse Γ_T de \mathcal{F} construit au début du paragraphe. Dire que \mathcal{F} est moyennable revient à dire que la relation d'équivalence mesurable \mathcal{R}_T induite par les orbites de Γ_T sur T est moyennable. Nous renvoyons à [CG], [HK] pour les définitions et une bibliographie sur ces notions. Soit \mathcal{R} la relation d'équivalence mesurable sur G induite par l'action à gauche de Γ sur G . La relation d'équivalence $\mathcal{R}_{|T}$ restriction de \mathcal{R} , à $T \subset G$ s'identifie à \mathcal{R}_T . Il est important de noter que ceci ne serait pas nécessairement vrai si Γ n'était pas un groupe d'holonomie. On obtient alors sans difficulté le fait suivant: \mathcal{F} moyennable $\Rightarrow \forall g \in G, \mathcal{R}_{|T \cdot g}$ est moyennable. Recouvrant maintenant un ouvert relativement compact quelconque $V \subset G$ par un nombre fini de $T \cdot g_i$, il vient que $\mathcal{R}_{|V}$ est encore moyennable dès que \mathcal{F} l'est. Soit alors V_n une suite croissante de tels ouverts recouvrant G tout entier, on a $\mathcal{R} = \lim_n \mathcal{R}_{|V_n}$. Donc si \mathcal{F} est moyennable, il en est de même de \mathcal{R} obtenue comme limite de relations moyennables. Réciproquement, si \mathcal{R} est moyennable, il en est de même de $\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_{|T}$ obtenue de \mathcal{R} par restriction, donc \mathcal{F} est moyennable. On a ainsi la

1.7. PROPOSITION. \mathcal{F} est moyennable $\Leftrightarrow \mathcal{R}$ est moyennable, où \mathcal{R} est la relation d'équivalence induite sur G par l'action de Γ à gauche.

On a le théorème suivant dû à R. Zimmer, d'abord démontré dans [CG] pour le cas $\dim G = 3$.

1.8. THÉORÈME (R. Zimmer [Z]). Soit Γ un sous-groupe dénombrable dense d'un groupe de Lie G . Alors la relation d'équivalence mesurable \mathcal{R} induite par l'action à gauche de Γ sur G est moyennable si et seulement si G est résoluble.

Avec les deux propositions précédentes on obtient le point i) du théorème auxiliaire.

1.9. PROPOSITION. Si \mathcal{F} est à feuilles denses (i.e. Γ est dense dans G), on a:

\mathcal{F} Følner $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ moyennable $\Leftrightarrow G$ résoluble.

2. Croissance polynômiale

Le but de cette section est de démontrer la partie ii) du théorème auxiliaire. Puisque l'hypothèse de croissance polynômiale implique la condition Følner, d'après le point i) déjà démontré à la section précédente *nous pourrions supposer que G est résoluble.*

Dans tout ce qui suit, un groupe de Lie G sera toujours implicitement muni d'une distance d associée à une métrique riemannienne invariante à gauche. La norme correspondante $\|\cdot\|$ est définie par $\|g\| = d(e, g)$ où e désigne l'élément neutre de G . Ces notations seront conservées même si on change de groupe de Lie. La boule ouverte de centre e et de rayon R dans G sera notée $D_R(G)$. Rappelons que l'application commutateur $(g_1, g_2) \in G \times G \rightarrow [g_1, g_2] \in G$ ayant de façon évidente une différentielle triviale en (e, e) , on a la propriété suivante signalée dans [T] par exemple:

2.0. PROPRIÉTÉ–DÉFINITION. *Pour tout c , $0 < c < 1$, il existe $R(c) > 0$ tel que*

$$\forall R < R(c), \quad \|[g_1, g_2]\| \leq c \|g_1\| \|g_2\|, \quad \forall g_1, g_2 \in D_R(G).$$

On dit alors que $D_R(G)$ est un domaine de contraction de commutateurs pour la constante c .

2.1. Croissance locale d'un sous-groupe de type fini d'un groupe de Lie.

Soit Γ un sous-groupe d'un groupe de Lie G muni d'un système générateur $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, soit m un mot $m = \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_l}$, $1 \leq i_k \leq n$; $k = 1, \dots, l$.

Nous dirons que $r(m) = \sup_{k=1, \dots, l} \|\alpha_{i_k}\|$ est le *rayon d'action du mot m dans le groupe de Lie G* , le nombre $l(m) = l$ est la *longueur de m au sens usuel*. Etant donné un nombre $R > 0$, nous désignerons par $B_{L,R}(\Gamma)$ la boule de centre e et de rayon L dans l'orbite de e par le pseudo-groupe $\Gamma(D_R(G), \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ défini en 1.1. La boule $B_{L,R}(\Gamma)$ n'est autre que l'ensemble des éléments de Γ qui peuvent être décrits par un mot de longueur $\leq L$ en les lettres $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et dont le rayon d'action est $< R$. On vérifie facilement que la définition suivante est indépendante du système générateur choisi dans Γ .

2.1.1. DÉFINITION. *Le type de croissance local de Γ est la donnée pour tout $R > 0$ du type de croissance en L de la fonction $f_R(L) = \text{Card}(B_{L,R}(\Gamma))$. Si pour tout $R > 0$ ce type de croissance est polynômial, on dira que Γ a une croissance locale polynômiale.*

Si Γ est le groupe d'holonomie d'un G -feuilletage de Lie \mathcal{F} d'une variété compacte, d'après la proposition 1.5, le type de croissance de $f_R(L)$ est dominé par celui de \mathcal{F} pour tout $R > 0$. De plus, pour R suffisamment grand, ce type de croissance est exactement celui de \mathcal{F} . Ainsi, la démonstration du point ii) du théorème auxiliaire est ramenée à celle de la

2.1.2. PROPOSITION. *Soit G un groupe de Lie résoluble et Γ un sous-groupe dense de G , engendré par $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Si Γ a une croissance locale polynômiale, alors G est nilpotent.*

La démonstration de cette proposition est un peu délicate. Le lecteur peut, s'il le souhaite, en faire une première lecture en supposant que

$$G = GA = \{f(x) = ax + b, a \in \mathbb{R}^{+*}, b \in \mathbb{R}\}$$

le groupe des transformations affines de la droite réelle (qui est le groupe de Lie résoluble non-nilpotent le plus simple). Ce groupe a pour groupe dérivé G' le groupe des translations de la droite réelle et vérifie la propriété suivante:

$$\forall g \notin G', \quad [g, h] \neq e, \quad \forall h \in G' - \{e\}$$

qui rend le lemme 2.2.1. évident. Les lemmes 2.1.3 et 2.2.2. sont aussi dans ce cas plus faciles à lire, ce qui permet d'arriver assez vite à la démonstration du lemme 2.2.3. et à celle de la proposition 2.3.1. qui conclut.

L'idée de la démonstration est de montrer que sous les hypothèses de la proposition, le centre de Γ est non-discret, ce qui forcera G à avoir un centre de dimension > 1 . On conclura par récurrence. Pour ceci, il faut avant tout pouvoir contrôler comment se comporte la croissance locale de Γ lorsqu'on passe de G à un quotient H :

2.1.3. LEMME DE RELÈVEMENT. *Soit $\varphi : G \rightarrow H$ un morphisme surjectif de groupes de Lie tel que:*

- 1) $K = \text{Ker } \varphi$ est abélien.
- 2) $\Gamma \cap K$ est uniforme dans K (i.e. $K/\Gamma \cap K$ est quasi-compact).

Alors

$$\forall R > 0, \quad \exists R' > 0, \quad a \in \mathbb{N} \text{ tels que } : B_{L,R}(\varphi(\Gamma)) \subseteq \varphi(B_{aL,R'}(\Gamma)), \quad \forall L \in \mathbb{N}$$

où l'on a choisi pour système générateur de $\varphi(\Gamma)$ l'image $\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_n)$ du système générateur $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de Γ . Autrement dit, le type de croissance locale de $\varphi(\Gamma)$ est dominé par celui de Γ .

Démonstration. Choisissons $R_1 > 0$ tel que $D_R(H) \subset \varphi(D_{R_1}(G))$. Puisque $\Gamma \cap K$ est uniforme dans K abélien, il existe $\tau_1, \dots, \tau_k \in \Gamma \cap K$ engendrant un réseau de K . Il existe un nombre $R_2 > 0$ tel que tout point de K est à une distance au plus R_2 d'un point de ce réseau. Posons alors

$$R_3 = R_1 + R_2 + \sup_{i=1, \dots, n} \|\alpha_i\|$$

Ceci étant, considérons un point $g \in D_{R_3}(G)$ tel que $\varphi(g) \in D_R(H)$, comme $D_R(H) \subset \varphi(D_{R_1}(G))$, $\exists g_1 \in D_{R_1}(G)$ tel que $\varphi(g_1) = \varphi(g)$. On a donc:

$$g^{-1}g_1 \in K \quad \text{et} \quad \|g^{-1}g_1\| < 2R_3$$

Il existe donc un mot γ_1 en τ_1, \dots, τ_k de longueur au plus α dépendant de R_3 tel que $\|\gamma_1^{-1}g^{-1}g_1\| < R_2$; en utilisant l'inégalité triangulaire, on en déduit que $\|g\gamma_1\| < R_1 + R_2$ de sorte que:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \|g\gamma_1\alpha_i\| < R_3.$$

Prenant un mot $\varphi(\alpha_{i_1}) \cdots \varphi(\alpha_{i_l})$ dont le rayon d'action est $< R$, on le relève en un mot $\alpha_{i_1}\gamma_{i_1}\alpha_{i_2}\gamma_{i_2} \cdots \alpha_{i_l}$ où à chaque étape de la construction on a:

- 1) γ_{i_s} est un mot de longueur au plus a en τ_1, \dots, τ_k .
- 2) $g_s = \alpha_{i_1}\gamma_{i_1} \cdots \alpha_{i_s} \in D_{R_3}(G)$.

le mot obtenu a un rayon d'action d'au plus $R' = R_3 + a \sup_{i=1, \dots, k} \|\tau_i\|$. ■

2.2. Préparatifs à la production d'une croissance surpolynômiale.

2.2.1. LEMME. Soit Γ un sous-groupe dense d'un groupe de Lie résoluble G . Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que: $\forall \varepsilon > 0, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \exists A \subset D_\varepsilon(G) \cap \Gamma, A \neq \{e\}$ tel que $\forall \gamma \in D_\varepsilon(G) \cap \Gamma$:

- 1) $[\gamma, A] \subset A$.
- 2) $[\gamma, A] = \{e\}$ ou $[\gamma, \tau] \neq e, \forall \tau \in A - \{e\}$.

Démonstration. Choisissons $\varepsilon_0 > 0$ tel que $D_{\varepsilon_0}(G)$ est un domaine de contraction des commutateurs (voir 2.0). Soit $G' = [G, G], \Gamma' = [\Gamma, \Gamma]$. Le groupe G' est nilpotent, considérons le dernier groupe non trivial de la suite centrale dérivée de G' :

$$G'_p = [G', [\cdots [G', G'] \cdots]] (p \text{ commutateurs}), \quad G'_{p+1} = \{e\}.$$

Comme Γ est dense dans G , on vérifie qu'il en est de même pour Γ' dans G' ainsi que pour chaque terme Γ'_q de la suite centrale de Γ' dans le terme correspondant G'_q . Ainsi Γ'_p est dense dans $G'_p \subset C(G')$ le centre de G' . Soit $g \in G$, appelons $c(g)$ l'application de G'_p dans G'_p définie par $c(g)(h) = [g, h]$, on constate que:

- a) $\forall g \in G$, $c(g)$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel G'_p
- b) $\forall g, g' \in G$, $c(g)$ et $c(g')$ commutent
- c) $\gamma \in \Gamma \Rightarrow c(\gamma)$ préserve Γ'_p
- d) $\forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0: \gamma \in D_\varepsilon(G) \cap \Gamma \Rightarrow c(\gamma)$ préserve $D_\varepsilon(G) \cap \Gamma'_p$.

Fixons-nous un $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Soit \mathcal{A} la famille des ensembles $A \subset D_\varepsilon(G) \cap \Gamma'_p$, $A \neq \{e\}$ vérifiant l'hypothèse 1) du lemme. D'après d) et le fait que Γ'_p est dense dans G'_p , $D_\varepsilon(G) \cap \Gamma'_p \in \mathcal{A}$. Choisissons $A_0 \in \mathcal{A}$ tel que l'espace vectoriel V_0 engendré par A_0 dans G'_p soit de dimension minimale.

Soit alors $\gamma \in D_\varepsilon(G) \cap \Gamma$ et supposons que $A = c(\gamma)(A_0) \neq \{e\}$, c'est-à-dire que $V = c(\gamma)(V_0) \neq \{0\}$. Alors d'après b), $A \in \mathcal{A}$ et l'espace vectoriel engendré par A est $V \subset V_0$. D'après la définition de A_0 , $V = V_0$ et donc $c(\gamma)(\tau) \neq e, \forall \tau \in A, \tau \neq e$. ■

2.2.2. LEMME. *Soit Γ un sous-groupe dense de type fini de \mathbb{R}^k pourvu d'un système générateur $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Soit H un sous-groupe fermé de \mathbb{R}^k , $H \neq \mathbb{R}^k$. Alors $\exists R > 0, a \in \mathbb{N}$:*

$$\forall L \in \mathbb{N}, \quad \exists \beta_1, \dots, \beta_L \in B_{aL,R}(\Gamma), \quad \beta_i \beta_j^{-1} \in H \Rightarrow i = j.$$

Démonstration. Grâce au lemme de relèvement 2.1.3, on peut sans difficulté se ramener au cas où $H \cap \Gamma = \{0\}$. Il s'agit alors de constater que pour R assez grand, la croissance de $\text{Card}(B_{L,R}(\Gamma))$ est au moins linéaire. Ce qui est bien vrai puisqu'il s'agit de la croissance d'un certain feuilletage linéaire à feuilles denses sur un tore (voir §.3). ■

Le lemme suivant résume ce dont nous aurons besoin pour produire de la croissance locale surpolynômiale dans le cas où $C(\Gamma)$ est discret.

2.2.3. LEMME. *Soit Γ dense dans un groupe de Lie résoluble G . On suppose que le centre $C(\Gamma)$ est discret. Si Γ est de type fini et a pour système générateur $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, alors: $\exists \varepsilon > 0, R > 0, a \in \mathbb{N}$, $A \subset D_\varepsilon(G) \cap \Gamma$, $A \neq \{e\}$ et une suite $\gamma_L \in B_{aL,R}(\Gamma)$ telle que $\forall L \in \mathbb{N}$:*

- 1) $[\gamma_L, A] \subset A$ et $[\gamma_L, \tau] \neq e, \forall \tau \in A - \{e\}$.
- 2) $\|\gamma_L\| \leq \frac{b}{L^{1/q}}$ où $b > 0$ et $q = \dim G$.

Démonstration. On obtient ce lemme en appliquant le lemme 2.2.1 pour ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ tel que $C(\Gamma) \cap D_\varepsilon(G) = \{e\}$. L'ensemble A donné par ce même lemme a un centralisateur $C(A)$ dans G contenant G' et distinct de G . Soit $\varphi: G \rightarrow G/G' = \mathbb{R}^k$, on appelle H le groupe de Lie $\varphi(C(A))$ et on applique le lemme 2.2.2 puis le lemme de relèvement 2.1.3. pour obtenir une constante $a' \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $L \in \mathbb{N}$, $\exists \beta_1, \dots, \beta_L \in B_{a'L, R}(\Gamma)$, $\beta_i \beta_j^{-1} \in C(A) \Rightarrow i = j$.

Le principe des tiroirs de Dirichlet appliqué à $D_R(G)$ nous dit alors qu'il existe une constante $b > 0$ indépendante de L telle que l'on peut choisir $i \neq j \in \{1, \dots, L\}$ avec $\|\beta_i \beta_j^{-1}\| \leq \frac{b}{L^{1/q}}$ où $q = \dim G$.

L'élément $\gamma_L = \beta_i \beta_j^{-1}$ ainsi construit vérifie alors 1) et 2) en prenant $2a'$ pour valeur de a . ■

2.3. Fin de la démonstration du théorème auxiliaire ii)

La proposition 2.2.2 et donc le point ii) du théorème auxiliaire ressortiront via le lemme de relèvement 2.1.3. et une récurrence de la

2.3.1. PROPOSITION. *Soit Γ un sous-groupe de type fini, dense dans un groupe de Lie résoluble G . Si le centre $C(\Gamma)$ est discret alors la croissance locale de Γ est surpolynômiale.*

Démonstration. Nous gardons les notations du lemme 2.2.3. En particulier, γ_L désigne une suite de mots dont l'existence est garantie par ce lemme. Rappelons que le rayon d'action $r(\gamma_L)$ est plus petit que R et $\|\gamma_L\| \leq b/L^{1/q}$ où R et b sont des constantes positives et $q = \dim G$. Partons de $\delta_1 \in A - \{e\}$ de longueur L_1 et de rayon d'action R_1 . Soit alors la suite $\delta_i \in \Gamma$ définie par la relation de récurrence: $\delta_i = [\gamma_{i^{2q}}, \delta_{i-1}]$, $\forall i > 1$. Il est essentiel de remarquer que l'assertion 1) du lemme 2.2.3. assure que $\delta_i \neq e$, $\forall i$. D'autre part on peut supposer, quitte à diminuer $\varepsilon > 0$ dans les lemmes préparatoires, que γ_i et δ_i sont dans un domaine de contraction des commutateurs pour la constante $c = 1/b$ par exemple (cf. 2.0). On a alors pour tout i, j , $1 \leq j < i$:

$$\|\delta_i\| \leq \frac{1}{i^2} \|\delta_{i-1}\| \leq \dots \leq \left(\frac{(i-j)!}{i!}\right)^2 \|\delta_{i-j}\| \leq \dots \leq \frac{1}{i!^2} \|\delta_1\| \quad (1)$$

De ces inégalités, on obtient pour tout i :

$$r(\delta_i) \leq \sup \left(r(\delta_{i-1}) + \frac{b}{i^2} + \frac{1}{i!^2} \|\delta_1\|, R + \frac{1}{(i-1)!^2} \|\delta_1\| \right)$$

d'où l'on tire pour tout i :

$$r(\delta_i) \leq R + R_1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b}{s^2} + \frac{1}{s!^2} \|\delta_1\| = R_2 < \infty \quad (2)$$

Considérons maintenant les éléments de Γ de la forme $\delta_1^{k_1} \cdots \delta_i^{k_i}$ avec $\forall j \leq i : 0 \leq k_j < j$. Nous disons que, quitte à choisir δ_1 assez petit en norme (par exemple en remplaçant δ_1 par δ_N pour N assez grand), deux suites (k_1, \dots, k_i) et (k'_1, \dots, k'_i) distinctes donnent des éléments distincts. En effet, on aurait sinon une équation de la forme:

$$\delta_i^{k_i - k'_i} = \delta_{i+1}^{k'_{i+1}} \cdots \delta_i^{k'_i} \delta_i^{-k_i} \cdots \delta_{i+1}^{-k'_{i+1}}$$

où t est le premier indice (nécessairement $t > 1$) tel que $k_t \neq k'_t$. De l'inégalité triangulaire et de (1) on déduirait alors:

$$\|\delta_i^{k_i - k'_i}\| \leq 2 \sum_{s=t+1}^i (s-1) \left(\frac{t!}{s!}\right)^2 \|\delta_t\| < 2 \sum_{s=1}^{\infty} (s-1) \left(\frac{t!}{s!}\right)^2 \|\delta_t\| < \|\delta_t\|$$

la dernière inégalité provenant d'une majoration élémentaire de la somme de la série considérée pour tout $t > 1$. Comme $\|\delta_t\| < \|\delta_1\|$, ceci est impossible dès que $\|\delta_1\|$ est suffisamment petit du fait que la différentielle de l'exponentielle du groupe de Lie G est une isométrie à l'origine.

Pour ce choix de δ_1 , il y a $i!$ éléments distincts de la forme $\delta_1^{k_1} \cdots \delta_i^{k_i}$ avec $\forall j \leq i : 0 \leq k_j < j$. D'après (2), pour un tel élément, on a:

$$r(\delta_1^{k_1} \cdots \delta_i^{k_i}) \leq \sum_{s=0}^i k_s \|\delta_s\| + R_2 \leq \sum_{s=1}^i \frac{s}{s!^2} + R_2 \leq \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s}{s!^2} + R_2 = R_3 < \infty$$

D'autre part

$$\forall i > 1, \quad l(\delta_i) \leq 2l(\delta_{i-1}) + 2l(\gamma_{i^{2q}}) \leq 2l(\delta_{i-1}) + 2ai^{2q} \leq \cdots \leq 2l(\delta_1) + a2^i i^{2q}$$

ce qui donne

$$l(\delta_1^{k_1} \cdots \delta_i^{k_i}) \leq \sum_{s=1}^i k_s l(\delta_s) \leq \sum_{s=1}^i (s-1)l(\delta_s) \leq (i-1)il(\delta_1) + a \sum_{s=1}^i 2^s s^{2q+1}$$

et donc

$$l(\delta_1^{k_1} \cdots \delta_i^{k_i}) \leq (i-1)il(\delta_1) + a2^{i+1}i^{2q+1} \leq (a + l(\delta_1))2^{i+1}i^{2q+1} = L(i).$$

Par conséquent, on a $\text{Card}(B_{L(i),R_3}(\Gamma)) \geq i!$ qui croît plus vite que n'importe quel polynôme en $L(i)$. La croissance de $f_{R_3}(L) = \text{Card}(B_{L,R_3}(\Gamma))$ est donc surpolynômiale en L . ■

Nous n'avons pas réussi à produire une croissance de type exponentiel. Si \mathcal{F} est un G -feuilletage de Lie à feuilles denses sur une variété compacte et si G n'est pas résoluble, alors d'après le théorème auxiliaire i) \mathcal{F} n'est pas Følner et donc \mathcal{F} est à croissance exponentielle. La question suivante reste cependant ouverte:

2.3.2. *Question.* Existe-t-il un G -feuilletage de Lie \mathcal{F} à feuilles denses sur une variété compacte tel que la croissance de \mathcal{F} n'est ni polynômiale ni exponentielle? S'il existe un tel exemple, G est nécessairement résoluble non-nilpotent.

3. Feuilletages de Lie nilpotents

Pour démontrer le théorème auxiliaire iii), nous sommes ramenés à étudier le cas où G est nilpotent. On peut aussi supposer (cf [C1]) que G est simplement connexe de sorte qu'il reste à établir la

3.1. PROPOSITION. *Soit \mathcal{F} un G -feuilletage de Lie à feuilles denses sur une variété compacte. On suppose que G est nilpotent simplement connexe. On a alors $\delta(G) \leq d(\mathcal{F})$ où $\delta(G)$ est le degré de nilpotence de G et $d(\mathcal{F})$ est le degré de croissance de \mathcal{F} .*

Démonstration. Le groupe d'holonomie Γ de \mathcal{F} est nilpotent de type fini et sans torsion comme sous-groupe de G nilpotent simplement connexe. D'après Malcev [Ma], Γ peut être réalisé comme sous-groupe discret uniforme d'un groupe de Lie nilpotent H tel qu'il existe un morphisme $h: H \rightarrow G$ dont la restriction à Γ est l'identité. Comme Γ est uniforme dans G , h est surjectif. Posons $K = \text{Ker } h$; remarquons que $\dim K \geq 1$ car Γ est dense dans G . L'action de K sur H à droite passe au quotient pour donner un feuilletage \mathcal{F}' sur la variété compacte $M' = \Gamma \backslash H$; \mathcal{F}' est transversalement de Lie G et a pour groupe d'holonomie Γ , il a donc en particulier même croissance que \mathcal{F} . Cette croissance n'est autre que celle de K . Le feuilletage \mathcal{F}' est un classifiant de \mathcal{F} au sens de A. Haefliger [H1]. Sa construction est aussi indiquée dans [C2], [Gh] et [H1]. Il nous reste à prouver le

3.2. LEMME. *La proposition est vraie pour \mathcal{F}' .*

Démonstration. Faisons une récurrence sur $q = \dim G$. Si $q = 1$, il n'y a rien à démontrer. Supposons le lemme vrai pour $\dim G < q$, montrons le pour $\dim G = q$. Comme Γ est uniforme discret dans H , $\Gamma \cap C(H)$ l'est encore dans le centre $C(H)$ de H (cf [R]). Soit $\gamma \in \Gamma \cap C(H) \setminus \{e\}$, alors le groupe à un paramètre X engendré par γ vérifie $X \cap K = \{e\}$ car $\Gamma \cap K = \{e\}$. On a la suite exacte:

$$1 \rightarrow K \rightarrow H_1 = H/X \rightarrow G_1 = G/h(X) \rightarrow 1$$

le groupe $\Gamma_1 = \Gamma / \langle \gamma \rangle$ est discret uniforme dans H_1 et s'envoie sur un sous-groupe dense de G_1 . Le lemme pour $\dim G_1 = q - 1$ donne $\delta(G_1) \leq d(\mathcal{F})$. Si $\delta(G_1) = \delta(G)$ pour au moins un $\gamma \in \Gamma \cap C(H) \setminus \{e\}$ on a terminé. Sinon $h(C(H))$ est le dernier groupe non-trivial de la suite centrale dérivée de G . On considère alors la suite exacte:

$$1 \rightarrow K_1 = K/K \cap C(H) \rightarrow H_2 = H/C(H) \rightarrow G_1 \rightarrow 1$$

Comme K est normal dans H nilpotent, $\dim(K \cap C(H)) \geq 1$ et donc $\dim K_1 < \dim K$ ce qui implique que le degré de croissance de K_1 est $\leq d(\mathcal{F}) - 1$. Le groupe $\Gamma_2 = \Gamma / \Gamma \cap C(H)$ est discret uniforme dans H_2 et s'envoie sur un sous-groupe dense de G_1 . On applique encore une fois le lemme pour $\dim G_1 = q - 1$ ce qui donne $\delta(G_1) = \delta(G) - 1 \leq d(\mathcal{F}) - 1$ soit $\delta(G) \leq d(\mathcal{F})$. ■

On peut se demander si la proposition ne peut pas s'améliorer lorsque \mathcal{F} est donné par une action libre de \mathbb{R}^p : est-ce que dans ce cas G ne serait pas nécessairement abélien? Nous allons voir qu'il n'en est rien dès que $p \geq 2$. Si \mathcal{F} est un G -feuilletage de Lie donné par une action libre de \mathbb{R}^2 sur une variété compacte et si les feuilles sont denses, nous venons de voir que $\delta(G) \leq 2$, c'est-à-dire que G (et donc H) est abélien ou méta-abélien. Nous allons donner un exemple où G et H sont non-abéliens.

Il s'agit tout d'abord de construire un groupe de Lie nilpotent et méta-abélien ayant un sous-groupe discret uniforme Γ . D'après Malcev ([Ma], [R]), il suffit de construire une algèbre nilpotente \mathfrak{S} méta-abélienne ayant une base rationnelle. On pose $\mathfrak{S} = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^q$ où le facteur \mathbb{R}^2 est dans le centre de \mathfrak{S} . On a alors:

$$\forall Y, Z \in \mathbb{R}^q, \quad [Y, Z] = c(Y, Z) \in \mathbb{R}^2$$

où c est une forme bilinéaire antisymétrique à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Se donner \mathfrak{S} revient donc à se donner le 2-cocycle c de \mathbb{R}^q à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Dire que \mathfrak{S} admet une base rationnelle revient à dire qu'il existe des bases de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^q dans lesquelles c a des coefficients entiers. On peut toujours supposer que la base

entière choisie sur \mathbb{R}^q est la base canonique et noter les vecteurs de \mathbb{R}^q comme vecteurs colonnes. Soit X_1, X_2 la base choisie sur \mathbb{R}^2 alors:

$$c(Y, Z) = ({}^tYA_1Z)X_1 + ({}^tYA_2Z)X_2$$

où A_1 et $A_2 \in M_q(\mathbb{Z})$ et sont antisymétriques.

3.3. LEMME. *Supposons qu'il existe $A_1, A_2 \in M_q(\mathbb{Z})$, antisymétriques, $\lambda \in \mathbb{R}$ irrationnel et $Z \in \mathbb{R}^q$ irrationnel (i.e. les composantes de Z sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q}) tels que:*

$$(A_1 - \lambda A_2)Z = 0 \quad \text{et} \quad A_1 - \lambda A_2 \neq 0$$

Alors il existe une action libre de \mathbb{R}^2 sur une variété compacte, dont le feuilletage associé est à feuilles denses et transversalement de Lie G un groupe non-abélien.

Démonstration. Avec les notations précédentes, on a alors:

$$\forall Y \in \mathbb{R}^q, \quad [Y, Z] = ({}^tYA_2Z)(\lambda X_1 + X_2)$$

par conséquent $X = \lambda X_1 + X_2$ et Z engendrent un idéal \mathfrak{A} de \mathfrak{G} . Soit K et H les groupes de Lie correspondants à \mathfrak{A} et \mathfrak{G} . Le groupe discret uniforme $\Gamma = \exp(\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^q)$ de H ne rencontre pas K (irrationnalité de λ et de Z) et donne un sous-groupe isomorphe dense dans $G = H/K$ (même raisons). La condition $A_1 - \lambda A_2 \neq 0$ assure que G n'est pas abélien. On a ainsi une action libre de $K = \mathbb{R}^2$ sur la variété compacte $M = \Gamma \backslash H$ dont le feuilletage associé est transversalement de Lie G à feuilles denses avec G non-abélien. ■

3.4. LEMME. *Si $q = 4$, il existe λ, A_1, A_2 et Z vérifiant les hypothèses du lemme 3.3.*

Démonstration. Soient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A_1 - \lambda A_2)Z = 0 \quad \text{où} \quad {}^tZ = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

équivalent à

$$z_2 - \lambda z_4 = 0; \quad z_1 + (\lambda - 3)z_3 = 0; \quad (\lambda - 3)z_2 + z_4 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda z_1 - z_3 = 0$$

ce système a des solutions non-triviales si $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$, les solutions sont alors:

$$Z = \left(z_1, z_2, \lambda z_1, \frac{z_2}{\lambda} \right), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{R}$$

Comme λ est algébrique de degré 2, il est irrationnel. De plus on vérifie que si z_1 et z_2 sont choisis linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}[\lambda]$, les composantes de Z sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} . Il est clair que $A_1 - \lambda A_2 \neq 0$. ■

On peut vérifier qu'une telle construction est impossible si $q \leq 3$ ce qui conduit à la proposition que nous donnons sans démonstration:

3.5. PROPOSITION. *Soit \mathcal{F} un G -feuilletage de Lie à feuilles denses défini par une action libre de \mathbb{R}^2 sur une variété compacte M . Si $\dim M \leq 5$, G est abélien et M a le type d'homotopie du tore de même dimension.*

Comme dans [C1] on en tire le

3.6. COROLLAIRE. *Si \mathcal{F} est un feuilletage riemannien d'une variété compacte de dimension 4 défini par une action libre de \mathbb{R}^2 , l'algèbre structurale de \mathcal{F} est abélienne. Dans l'adhérence d'une de ses feuilles, \mathcal{F} est un feuilletage de Lie abélien.*

Conclusion

Le problème majeur qui subsiste concernant les feuilletages riemanniens à croissance polynômiale sur les variétés compactes est celui de leur classification topologique. D'après notre travail, il est essentiellement ramené à la classification des feuilletages de Lie nilpotents à feuilles simplement connexes. Il est raisonnable de penser qu'un tel feuilletage \mathcal{F} est conjugué à son classifiant \mathcal{F}' (cf. 3.1). Nous savons démontrer ce résultat si $\dim \mathcal{F} = 1$ par une méthode suggérée par E. Ghys. Pour le cas général, on est confronté à un problème non-résolu même en codimension 1. La clef du problème est alors la question suivante laissée ouverte dans [S]: Existe-t-il sur un tore une forme fermée non singulière totalement irrationnelle qui soit non linéarisable?

BIBLIOGRAPHIE

- [B] R. BLUMENTHAL, *Transversaly homogeneous foliations*, Ann. Inst. Fourier 29, 4 (1979), 143–158.
- [Br] R. BROOKS, *Some riemannian and dynamical invariants of foliations*, in Differential Geometry, Proceed. Maryland, 1981–82, Progress in Math. 32, Birkhäuser p. 56–72.
- [CC] P. CARON et Y. CARRIÈRE, *Flots transversalement de Lie \mathbb{R}^n , flots de Lie minimaux*, CRAS 280, 477–478, (1980).
- [C1] Y. CARRIÈRE, *Flots riemanniens*, Astérisque 116, 31–52, (1984) *Flots riemanniens et feuilletages géodésibles de codimension un*, Thèse de 3^{ème} cycle, Université de Lille I (1981).
- [C2] Y. CARRIÈRE, *Les propriétés topologiques des flots riemanniens retrouvées à l'aide du théorème des variétés presque plates*, Math. Zeitschrift 186, 393–400, (1984).
- [CG] Y. CARRIÈRE et E. GHYS, *Relations d'équivalences moyennables sur les groupes de Lie*, CRAS 300, 677–680, (1985).
- [E] D. B. A. EPSTEIN, *Transversaly hyperbolic 1-dimensional foliations*, Astérisque 116, 53–69, (1984).
- [Gh] E. GHYS, *Groupes d'holonomie des feuilletages de Lie*, Proc. Kon. Nederl. Acad. Sci. A, 2, 88 (1985), 173–182.
- [Gr1] M. GROMOV, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu, Cedic-Nathan 1981.
- [Gr2] M. GROMOV, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Publications de l'IHES n° 53, 53–78, (1981).
- [H1] A. HAEFLIGER, *Groupoïdes d'holonomie et classifiants*, Astérisque 116, 70–97 (1984).
- [H2] A. HAEFLIGER, *Pseudogroups of local isometries*, in Differential Geometry, Santiago de Compostella, sept. 1984, 174–197, LA Cordero Editor, Research Notes 131, Pitman 1985.
- [HH] G. HECTOR et U. HIRSCH, *Introduction to the geometry of foliations*, part B, Aspects of Math. Vieweg (1983).
- [HK] S. HURDER et A. KATOK, *Ergodic theory and Weil measures for foliations*, Preprint MSRI, Berkeley (1985).
- [J] J. W. JENKINS, *Growth of connected locally compact groups*, J. of Funct. Analysis 12, 113–127, (1973).
- [Ma] A. I. MALCEV, *On a class of homogeneous spaces*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. 13, 9–32, (1949); Amer. Math. Soc. Transl. 9, 276–307, (1951).
- [Mo] P. MOLINO, *Géométrie globale des feuilletages riemanniens*, Proc. Kon. Nederl. Acad., Ser. A, 1, 85, (1982), 45–76.
- [MS] P. MOLINO et V. SERGIESCU, *Deux remarques sur les flots riemanniens*, Manuscripta Math. 51, 145–161, (1985).
- [P] J. F. PLANTE, *Foliations with measure preserving holonomy*, Ann. of Math. 102, 327–361, (1975).
- [R] M. S. RAGHUNATHAN, *Discrete subgroups of Lie groups*, Ergebnisse der Mathematik (68), Springer-Verlag, Berlin 1972.
- [S] J. C. SIKORAV, *Formes différentielles fermées sur le n -tore*, Commentarii Helvetici 57, 79–106 (1982).
- [T] W. P. THURSTON, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Preprint, Princeton University.
- [Z] R. J. ZIMMER, *Amenable actions and dense subgroups of Lie groups*, J. Funct. Anal. 72, 58–64 (1987).

UA au CNRS n° 751
 Université de Lille I
 U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
 59655, Villeneuve D'Ascq Cedex (France)

nouvelle adresse
 Institut Fourier
 B.P. 74
 38402-Saint-Martin D'Hères Cedex (France)