Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 63 (1988)

Artikel: Dimension des orbites d'une action de ... sur une variété compacte.
Autor: Molina, P. / Turiel, F.J.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48206

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 20.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 63 (1988) 253–258 0010-2571/88/020253-06$01.50 + 0.20/0
© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel

Dimension des orbites d'une action de $\mathbb{R}^p$ sur une variété compacte

P. MOLINO et F. J. TURIEL

La différentiabilité est entendue au sens C^∞. Rappelons que le rang $\operatorname{rk} M$ d'une variété M est le nombre maximum de champs de vecteurs commutant linéairement indépendants en tout point. Notre but est de relier ce rang à la dimension minimale $m(\varnothing)$ des orbites d'une action différentiable $\varnothing: \mathbb{R}^p \times M \to M$ de $\mathbb{R}^p$ sur M. Le résultat obtenu est le suivant:

THÉORÈME. *Si M est compacte, connexe, sans bord, de dimension m et de rang k, toute action différentiable $\varnothing: R^p \times M \to M$ a des orbites de dimension minimale strictement inférieure à $(m+k)/2$, c.à.d. $m(\varnothing) < (m+k)/2$, sauf si $M = T^m$.*

Dans [2], les auteurs ont établi cette propriété pour $k = 0$, c.à.d. si la caractéristique $\chi(M)$ de la variété est non nulle; ceci généralise le théorème d'E. Lima [1] d'après lequel deux champs de vecteurs commutant sur une surface compacte, connexe, sans bord, de caractéristique non nulle, ont un zéro commun. Le théorème démontré ici entraîne par exemple que trois champs de vecteurs commutant sur une 3-variété compacte de rang 1, par exemple S^3, sont collinéaires en un point.

On peut traduire notre résultat en utilisant des invariants introduits par R. Sacksteder [4]: suivant cet auteur, le "rang total" $\operatorname{trk} M$ de la variété M est la plus grande valeur de $m(\varnothing)$ pour toutes les actions possibles; de même, le "super-rang" $\operatorname{srk} M$ est la plus grande valeur de $m(\varnothing)$ pour toutes les actions dont les orbites ont une dimension constante [actions feuilletantes]. Dans [5], D. Simen a prouvé le théorème suivant [valable également pour les variétés non compactes si l'on remplace "action" par "action infinitésimale" dans la définition de $\operatorname{trk} M$ et $\operatorname{srk} M$]:

THÉORÈME [D. Simen]. *On a* $\operatorname{rk} M \geqslant 2 \operatorname{trk} M - \dim M$.

Notre résultat se traduit par l'inégalité stricte $\operatorname{rk} M > 2 \operatorname{trk} M - \dim M$, et améliore donc le théorème de D. Simen dans le cas des variétés compactes.

D Simen obtenait également [Théorème 3 de [5]] l'inégalité stricte dans le cas où $\operatorname{rk} M = 0$: c'est la généralisation du théorème de Lima que nous avons démontrée dans [2]. Toutefois, son argument sur ce point est incorrect, comme nous l'indiquons brièvement à la fin.

Nous remercions R. Sacksteder, qui a attiré notre attention sur le travail de D. Simen, et nous a utilement conseillé pour la rédaction définitive de cet article.

I. Rang d'une action de $\mathbb{R}^p$; propriétés de l'application d'isotropie

On considère une action de $\mathbb{R}^p$ sur M et on note V l'algèbre de Lie de $\mathbb{R}^p$. Pour $v \in V$, X_v sera le champ fondamental correspondant. On appellera *rang de l'action* le nombre maximum k' de vecteurs de V tels que les champs fondamentaux associés soient linéairement indépendants en tout point. Il existera donc un sous-espace W de V, de dimension k', dont l'action infinitésimale sur M est libre.

Pour tout entier positif r, on note Σ_r la réunion des orbites de dimension r de l'action de $\mathbb{R}^p$. Si $q \in \Sigma_r$, l'isotropie infinitésimale en q est un $(p-r)$-sous-espace I_q de V. Comme $I_q \cap W = \{0\}$, la projection I'_q de I_q sur $V' = V/W$ est aussi de dimension $(p-r)$. La correspondance $q \mapsto I'_q$ définit une application

$$h'_r : \Sigma_r \to \mathcal{G}^{p'}_{p-r},$$

où $p' = p - k'$ et où $\mathcal{G}^{p'}_{p-r}$ est la Grassmannienne des $(p-r)$-plans de V'.

Bien entendu, le rang de l'action étant k', on a $V' = \bigcup_{q \in M} I'_q$.

Une orbite de l'action est régulière si les orbites voisines ont même dimension, singulière dans le cas contraire. Par semi-continuité de la dimension de I_q, la réunion R des orbites régulières est un ouvert dense de M. On note S la réunion des orbites singulières.

PROPOSITION. (i) Pour tout r, h'_r s'étend, *au voisinage de chaque point q de Σ_r, en une application différentiable dans $\mathcal{G}^{p'}_{p-r}$.*

(ii) *Si $r > (m + k'/2)$, $\bigcup_{q \in \Sigma_r} I'_q$ est négligeable dans V'.*

(iii) *Si $r = (m + k'/2)$, $\bigcup_{q \in \Sigma_r \cap S} I'_q$ est maigre dans V'.*

La démonstration est essentiellement celle du lemme 3 dans [2]:

– Si $q \in \Sigma_r$, on choisit une base $\{v'_{k'+1}, \ldots, v'_p\}$ de V' telle que $v'_{r+1}, \ldots, v'_p$ engendrent I'_q. Si $\{v_1, \ldots, v_{k'}\}$ est une base de W et $v_{k'+1}, \ldots, v_p$ des représentants respectivement de $v'_{k'+1}, \ldots, v'_p$ dans V, on peut trouver au voisinage de q des coordonnées locales $x_1, \ldots, x_m$ telles que $X_{v_i} = \partial/\partial x_i$ pour

$i = 1, \ldots, r$. On restreindra le domaine ϑ de ces coordonnées de manière que l'image de ϑ dans la carte soit un convexe de $\mathbb{R}^m$.

Si, pour $j = r+1, \ldots, p$, on a $X_{v'_j} = \sum_{l=1}^m f_{jl}(\partial/\partial x_l)$, les fonctions f_{jl} ne dépendent pas de $x_1, \ldots, x_r$, et s'annulent au point q.

Si l'on regarde les homomorphismes de l'espace engendré par $v'_{r+1}, \ldots, v'_p$ dans l'espace engendré par $v'_{k'+1}, \ldots, v'_r$ comme un ouvert Ω de $\mathcal{G}^{p'}_{p-r}$, et si l'on munit cet ouvert de la carte définie par les bases $\{v'_{r+1}, \ldots, v'_p\}$ et $\{-v'_{k'+1}, \ldots, -v'_r\}$, alors $h'_r : \Sigma_r \cap \vartheta \to \mathcal{G}^{p'}_{p-r}$ a pour composantes les f_{jl}, où $j = r+1, \ldots, p$ et $l = k'+1, \ldots, r$. Les fonctions f_{jl} définissent alors une extension différentiable $\tilde{h}'_r$ de h'_r à ϑ. D'où le point (i).

– Le fait que les f_{jl} ne dépendent pas de $x_1, \ldots, x_r$ signifie que $\tilde{h}'_r : \vartheta \to \Omega$ se factorise en une application dans Ω d'une transversale T à l'orbite de q, définie par exemple par $x_i =$ constante pour $i = 1, \ldots, r$.

Si η' est le fibré canonique de la Grassmannienne $\mathcal{G}^{p'}_{p-r}$, l'ensemble $\bigcup_{q \in \Sigma_r \cap \vartheta} I'_q$ [respectivement $\bigcup_{q \in \Sigma_r \cap \vartheta \cap S} I'_q$] est l'image de $h'_r * \eta'|_{\Sigma_r \cap T}$ [resp. $h'_r * \eta'|_{\Sigma_r \cap T \cap S}$] par l'application $\tilde{h}'_r * \eta'|_T \to V'$ déduite de l'application canonique $\eta' \to V'$.

Si $r > (m + k'/2)$, la dimension de T est $<(m - k'/2)$ et celle de $\tilde{h}'_r * \eta'|_T < p'$, d'où le point (ii).

– Si $r = (m + k'/2)$, $\Sigma_r \cap T \cap S$ étant un fermé sans points intérieurs de T [c'est la frontière du support des fonctions f_{jl}, où $j = r+1, \ldots, p$ et $l = k'+1, \ldots, r$], $\tilde{h}'_r * \eta'|_{\Sigma_r \cap T \cap S}$ est un fermé sans points intérieurs dans la p'-variété $\tilde{h}'_r * \eta'|_T$. Le point (iii) résulte alors de ce que, si $f : N \to N'$ est une application différentiable entre variétés de même dimension, et A un fermé sans point intérieur de N, alors $f(A)$ est maigre dans N'. □

II. Dimension des orbites minimales

Le résultat annoncé sera démontré sous la forme plus précise suivante:

THÉORÈME. *Considérons une action différentiable de $\mathbb{R}^p$ sur une variété compacte, connexe, sans bord M de dimension m. Si k' est le rang de l'action, il existe des orbites de dimension $\leq (m + k')/2$. Si k est le rang de M, il existe des orbites de dimension $<(m + k)/2$, ou bien M est le tore T^m*[cas $k = m$].

Démonstration. – Le premier point résulte immédiatement de la proposition précédente, et du fait que $V' = \bigcup_{q \in M} I'_q$.

– En ce qui concerne le second point, il résulte du premier si $k' < k$. On supposera donc $k = k'$, et $m + k = 2n$. On supposera de même que $k < m$,

c'est-à-dire $(m-k)/2>0$. *On va raisonner par l'absurde* en supposant que toutes *les orbites sont de dimension* $\geq n$.

Soient

$$V_1' = \bigcup_{q \notin \Sigma_n} I_q' \quad \text{et} \quad V_2' = \bigcup_{q \in \Sigma_n \cap S} I_q'.$$

La compacité de M entraîne que V_2' est un fermé de V'. D'après la proposition précédente (iii) ce fermé est sans point intérieur. Son complémentaire V_3' est donc un ouvert dense de V'. La proposition (ii) entraîne que $V_1' \cap V_3'$ est négligeable dans V_3'.

Rappelons le lemme élémentaire suivant, démontré dans [2]:

LEMME. *Si V' est un espace vectoriel réel de dimension p', $\mathcal{G}_{q'}^{p'}$, la Grassmannienne des q'-plans de V', posons pour tout $v' \in V'$, $N_{v'}^{q'} = \{E' \in \mathcal{G}_{q'}^{p'} / v' \in E'\}$. Alors, pour tout $v' \in V' - \{0\}$, $N_{v'}^{q'}$ est une sous-variété compacte de codimension $(p'-q')$ de la Grassmannienne. Si $f: M \to \mathcal{G}_{q'}^{p'}$ est une application différentiable, l'ensemble des $v' \in V'$ pour lesquels f n'est pas transverse à $N_{v'}^{q'}$ est négligeable dans V'.*

Compte tenu de ce lemme, et des observations précédentes, on peut trouver $v_0' \in V'$ tel que

1. $v_0' \notin V_1' \cup V_2'$
2. $h_n': \Sigma_n \cap R \to \mathcal{G}_{p-n}^{p'}$ est transverse à $N_{v_0'}^{p-n}$.

Par construction, $P = (h_n')^{-1}(N_{v_0'}^{p-n})$ est une sous-variété compacte de codimension $(n-k)$ de M. Donc P est réunion finie d'orbites compactes de dimension n. Les orbites voisines ont même dimension, et l'existence de l'application h_n', de rang $(m-k)/2$ égal à la codimension de l'orbite, et constante sur chaque orbite, entraîne qu'au voisinage de P le feuilletage par les orbites est sans holonomie. On peut donc trouver un voisinage ouvert $\mathcal{P}$ de P dont chaque composante connexe soit de la forme $\mathbb{T}^n \times D^{m-n}$, où D^{m-n} est un disque centré en 0 dans $\mathbb{R}^{m-n}$, de manière que les orbites de l'action soient les tores $\mathbb{T}^n \times \{y\}$, l'orbite $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ appartenant à P.

L'idée pour achever la démonstration est la suivante: soit E le $(k+1)$-sous-espace de V, préimage de la droite $\mathbb{R}v_0'$ par la projection $V \to V'$. Alors l'action infinitésimale de E est libre sur $M - \mathcal{P}$. Il suffira donc de modifier cette action à l'intérieur de chaque composante connexe de $\mathcal{P}$ de façon que cette action devienne libre; on aboutit ainsi à une contradiction avec l'hypothèse rang $M = k$.

Soit donc $\mathcal{P}_0 = \mathbb{T}^n \times D^{m-n}$ l'une de ces composantes connexes.

Choisissons une base $\{v_1, \ldots, v_p\}$ de V telle que $v_1, \ldots, v_k$ engendrent W,

que $X_{v_1}, \ldots, X_{v_n}$ soient linéairement indépendants sur $\mathbb{T}^n \times \{0\}$, et que $v_{n+1} \in E$ appartienne à l'isotropie infinitésimale sur $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ [cette isotropie infinitésimale a nécessairement, sur P, une intersection non nulle avec E]. Au besoin en rapetissant D^{m-n}, on peut imposer que $X_{v_1}, \ldots, X_{v_n}$ restent linéairement indépendants sur $\mathcal{P}_0$. Ces champs de vecteurs définissent une action de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{P}_0$ dont les orbites sont les tores $T^n \times \{y\}$. L'isotropie de cette action définit en chaque point un réseau dans $\mathbb{R}^n$, dépendant différentiablement de y. En passant au quotient par ce réseau, on définit sur chaque orbite un paramétrage adapté à l'action. En d'autres termes, on obtient ainsi un paramétrage de $\mathcal{P}_0$ par $\theta_1, \ldots, \theta_n, y_1, \ldots, y_{m-n}$, où $\theta_i \in S^1$ et $y_j \in \mathbb{R}$, de manière que l'on ait

$$X_{v_i} = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n.$$

En particulier, la matrice $[f_{ij}(y)]_{i,j \leq n}$ est inversible pour tout $y \in D^{m-n}$.

Considérons alors une application $y \mapsto [g_{ij}(y)]_{i,j \leq n}$ de D^{m-n} dans $GL(n, \mathbb{R})$ telle que $[g_{ij}(y)]$ soit inverse de $[f_{ij}(y)]$ pour y voisin de 0, et que $[g_{ij}(y)]$ soit la matrice identité pour y voisin du bord. Pour modifier l'action de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathcal{P}_0$, on remplace pour $i = 1, \ldots, n$ le champ fondamental X_{v_i} par

$$X'_{v_i} = \sum_{j,k=1}^{n} f_{ik}(y) g_{kj}(y) \frac{\partial}{\partial \theta_j}.$$

On observe que l'on n'a pas changé, de cette manière, l'espace d'isotropie infinitésimale I_q en un point q quelconque. En rapetissant à nouveau le disque D^{m-n}, on s'est ramené au cas où, pour $i = 1, \ldots, n$, $X_{v_i} = (\partial/\partial\theta_i)$ dans $\mathcal{P}_0$.

Soit maintenant $\varphi : D^{m-n} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable nulle au voisinage du bord et valant 1 au centre. On modifie l'action infinitésimale de E à l'intérieur de $\mathcal{P}_0$ en remplaçant $X_{v_{n+1}}$ par $X_{v_{n+1}} + \varphi(y)\, \partial/\partial y_1$. Par construction, l'action modifiée est libre dans $\mathcal{P}_0$ car $\partial/\partial y_1$ est transverse aux orbites de l'action initiale. Comme l'action initiale était libre en dehors de P, on aboutit à la contradiction cherchée, ce qui démontre le théorème. □

Remarque finale. La démonstration de la première partie du théorème est une application facile du théorème de Sard, à partir du moment où on établit la différentiabilité de l'application h'_r. Au contraire, l'obtention de la majoration stricte paraît de nature assez différente, et nécessite des techniques plus fines.

Montrons que sur ce point, *la démonstration de D. Simen dans* [5], relative au cas où $k = 0$, *est incorrecte.* Reprenons en effet les notations de cet auteur: $\varnothing : \mathbb{R}^p \times M \to M$ est une action différentiable, M est de dimension $2m$ et on

suppose que $m(\varnothing) = m$. On construit alors un champ fondamental Z de l'action tel que:

(i) l'ensemble des zéros de Z est une réunion finie K d'orbites compactes de dimension minimale, qui sont des tores $\mathbb{T}^m$.

(ii) Le fibré normal $\nu(K)$ de K est trivial.

L'idée de l'auteur est de prolonger une section partout non nulle de $\nu(K)$ en un champ de vecteurs N sur M, puis d'utiliser une fonction ρ valant 1 sur K et à support dans un voisinage arbitrairement petit de K. D. Simen affirme alors que $Z + \rho N$ est sans singularités.

Cette assertion est erronée: les orbites voisines de K ne sont en effet pas nécessairement de même dimension [sauf si l'action est feuilletante], et il n'est donc pas vrai que N reste, si près que ce soit de K, transverse aux orbites de $\varnothing$.

La démonstration ne marche que si l'action est feuilletante, et donne donc le résultat plus faible suivant: si M est une $2m$-variété compacte de caractéristique non nulle, alors $\operatorname{srk} M < m$. En fait, *on a démontré dans* [2] *que sous ces hypothèses* $\operatorname{srk} M = 0$ [il n'y a pas d'action feuilletante non triviale de $\mathbb{R}^p$].

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. LIMA, *Common singularities of commuting vector fields on 2-manifolds,* Comment. Math. Helvet., *39* (1964), pp. 97–110.

[2] P. MOLINO et F. J. TURIEL, *Une observation sur les actions de $\mathbb{R}^p$ sur les variétés compactes de caractéristique non nulle,* Comment. Math. Helvet., *61* (1986), 370–375.

[3] H. ROSENBERG, *Actions of $\mathbb{R}^n$ on manifolds,* Comment. Math. Helvet., *41* (1966), 170–178.

[4] R. SACKSTEDER, *Degeneracy of Orbits of Actions of $\mathbb{R}^m$ on a manifold,* Coment. Math. Helvet., *41* (1966), pp. 1–9.

[5] D. SIMEN, *$\mathbb{R}^k$ actions on manifolds,* Amer. Jour. of Mathematics, *104*(1) (1982), pp. 1–7.

UER de Mathématiques
Université des Sc. et Tech. du Languedoc
34060, Montpellier, France

Seccion de Matematicas
Facultad de Ciencias,
Universidad de Malaga
29080, Malaga, España

Reçu le 12 janvier 1987