

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 63 (1988)  
  
**Artikel:** Spèctre du Laplacian, graphes et topologie de Fell.  
**Autor:** Burger, Marc  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-48205>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Spectre du Laplacien, graphes et topologie de Fell

MARC BURGER

Depuis que B. Randol ([R<sub>1</sub>]) a montré, par une utilisation astucieuse de la formule des traces de Selberg, l'existence de surfaces de Riemann dont la première valeur propre non nulle du Laplacien est arbitrairement petite, de multiples travaux ont été consacrés surtout à l'aspect géométrique de la question, montrant que la première valeur propre du Laplacien  $\lambda_1(S)$  est contrôlée par la longueur de petites géodésiques de  $S$ , pourvu que le genre de  $S$  soit fixé ([S.W.Y.], [D.P.R.S.]). Récemment, R. Brooks ([Br<sub>1</sub>]) a examiné le comportement de la première valeur propre du Laplacien de revêtements  $S_n$  d'une surface donnée  $S$  par le biais de la constante de Cheeger de  $S_n$  qu'il relie à la constante de bipartition d'un graphe associé au revêtement  $S_n \rightarrow S$ . Cette approche lui permet d'obtenir une condition nécessaire et suffisante pour que  $\lambda_1(S_n)$  tende vers 0 si  $n \rightarrow \infty$ .

Néanmoins, ce résultat pour satisfaisant qu'il paraisse ne donne pas un comportement précis de  $\lambda_1(S_n)$  en fonction des invariants combinatoires considérés et surtout n'explique pas le fait que les exemples de B. Randol sont des revêtements de  $S$  associés aux noyaux de caractères  $\chi_n$  du groupe fondamental de  $S$ , caractères qui ont la propriété de converger vers 1 pour  $n \rightarrow \infty$ .

Notre travail a pour but de donner un cadre commun à ces travaux en montrant des estimations optimales de  $\lambda_1(S_n)$  en fonction d'invariants qui relèvent à la fois de la combinatoire du revêtement  $S_n \rightarrow S$  et de propriétés des représentations du groupe de Galois de  $S_n/S$ .

Pour expliquer notre point de vue, nous allons introduire deux notions que nous utiliserons constamment par la suite.

1. Soit  $M' \rightarrow M$  un revêtement Galoisien de variétés Riemanniennes compactes. Le groupe de Galois  $H$  du revêtement agit par isométries sur  $M'$  et donc dans les espaces propres de valeur propre  $\lambda$  du Laplacien de  $M'$  soit  $\mathcal{E}_\lambda(M')$ . De cette action on déduit une représentation unitaire  $\omega_\lambda$  de  $H$  dans  $\mathcal{E}_\lambda(M')$ :

$$\omega_\lambda(h)f(x) = f(h^{-1} \cdot x) \quad \text{où} \quad h \in H \quad x \in M', \quad f \in \mathcal{E}_\lambda(M').$$

---

\* Extrait d'un travail de thèse à l'Université de Lausanne ([B<sub>2</sub>]).

On associe alors à toute représentation irréductible  $\pi$  de  $H$  un ensemble de valeurs propres du Laplacien de  $M'$ :

$$Sp(\pi) := \{\lambda \mid \pi \text{ est une sous-représentation de } \omega_\lambda\}.$$

De plus, la multiplicité de  $\lambda$  dans  $Sp(\pi)$  est le nombre de fois que  $\pi$  est contenue dans  $\omega_\lambda$ . Par la suite, nous utiliserons souvent la notation  $\lambda_0(\pi) \leq \lambda_1(\pi) \leq \dots$  pour désigner  $Sp(\pi)$ .

2. Soit  $p: M' \rightarrow M$  un revêtement de variétés Riemanniennes compactes,  $\Gamma', \Gamma$  les groupes fondamentaux respectifs,  $\tilde{M}$  le revêtement universel de  $M$  et  $q, q'$  les projections de  $\tilde{M}$  sur  $M$ , resp. sur  $M'$ . On fixe une fois pour toutes un domaine fondamental fermé  $\mathcal{F}$  de l'action de  $\Gamma$  sur  $\tilde{M}$  et  $\tilde{x}_0 \in \mathcal{F}$  un point.

Soit  $P = \{x_1, \dots, x_m\} = p^{-1}q(\tilde{x}_0)$ ,  $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m$  des relevés à  $\tilde{M}$  de  $x_1, \dots, x_m$  et  $\eta_i \in \Gamma$  tels que  $\eta_i \tilde{x}_1 = \tilde{x}_i$ , alors les fermés  $\mathcal{F}_i = q'(\eta_i \mathcal{F})$  recouvrent  $M'$ .

Nous associons deux graphes au revêtement  $M' \rightarrow M$ :

- a) Le graphe “géométrique”  $\mathfrak{G}$  est une structure de graphe sur  $P$  qu'on obtient en reliant  $x_i$  à  $x_j$  par une arête si  $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j \neq \emptyset$  et  $i \neq j$ .
- b) Le graphe “algébrique”  $\mathfrak{G}$ : soit  $A$  un système de générateurs finis de  $\Gamma$  tels que  $A = A^{-1}$ .  $\mathfrak{G}$  est le graphe de sommets  $\Gamma' \setminus \Gamma$  et dont les arêtes entre  $\Gamma' \eta_i$  et  $\Gamma' \eta_j$  sont en bijection avec  $\eta_j^{-1} \Gamma' \eta_i \cap A$ . Ce graphe est régulier de valence  $r = \text{Card } A$ .

Enfin, les opérateurs  $M_{\mathfrak{G}}$  et  $M_{\mathfrak{G}}$  associent à une fonction  $F$  en  $x$  la somme des valeurs de  $F$  sur les sommets adjacents à  $x$  pour les structures de graphes considérés.

Les invariants qui nous permettront de comprendre les petites valeurs propres de  $M'$  sont les spectres des opérateurs  $M_{\mathfrak{G}}$  et  $M_{\mathfrak{G}}$  et la distance de  $\pi$  à la représentation identité dans la topologie de Fell, quand on voit  $\pi$  comme représentation du groupe fondamental de  $M$ .

Voici le type de résultat que nous allons montrer.

**THÉORÈME A.** *Soit  $V_n \rightarrow V$  une suite de revêtements galoisiens finis de groupe  $G_n$  d'un espace  $V$  localement symétrique compact de rang un et  $\pi_n$  des représentations irréductibles de  $G_n$  qui tendent vers la représentation identité  $1_\Gamma$  dans la topologie de Fell du groupe fondamental  $\Gamma$  de  $V$ .*

*Alors, pour tout  $\lambda$  valeur propre du Laplacien de  $V$  on a:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist.}(\lambda, Sp(\pi_n)) = 0.$$

*En particulier:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_0(\pi_n) = 0.$$

Remarquons que la topologie de Fell (cf. [Fe]) permet de formaliser la condition de proximité de  $\pi$  à la représentation identité. Une autre manière de dire que  $\pi_n$  est proche de  $1_\Gamma$  est la suivante: le groupe  $G_n$  agit par automorphismes sur le graphe algébrique  $\mathcal{G}_n$  du revêtement et son action dans  $\mathbb{C}[\mathcal{G}_n]$  commute à celle de  $M_{\mathcal{G}_n}$ . Soit alors  $\mathbb{C}[\pi_n]$  la composante isotypique de  $\pi_n$  dans la représentation régulière de  $G_n$  dans  $\mathbb{C}[\mathcal{G}_n]$  et  $\lambda_0(\pi_n, \mathcal{G}_n)$  la plus petite valeur propre de la restriction de  $rI - M_{\mathcal{G}_n}$  à  $\mathbb{C}[\pi_n]$ . Alors  $\pi_n$  tend vers  $1_\Gamma$  si et seulement si  $\lambda_0(\pi_n, \mathcal{G}_n)$  tend vers 0 pour  $n \rightarrow \infty$ . Le nombre  $\lambda_0(\pi, \mathcal{G})$  contrôle également  $\lambda_0(\pi)$ . Plus précisément:

**THÉORÈME B.** *Soit  $V' \rightarrow V$  un revêtement galoisien de groupe  $G$  d'espaces localement symétriques compacts de rang un,  $\pi$  une représentation irréductible de  $G$  et  $A$  un ensemble fini de générateurs de  $\Gamma$ . Alors il existe des constantes positives  $c_1(V, A)$  et  $c_2(V, A)$  telles que:*

$$c_1 \lambda_0(\pi, \mathcal{G}) \leq \lambda_0(\pi) \leq c_2 \lambda_0(\pi, \mathcal{G}).$$

*En particulier,  $c_1 \lambda_1(\mathcal{G}) \leq \lambda_1(V') \leq c_2 \lambda_1(\mathcal{G})$  où  $\lambda_1(\mathcal{G})$  est la plus petite valeur propre non nulle de  $rI - M_{\mathcal{G}}$ .*

Nous exposerons ces résultats (et d'autres) dans les sections 1 à 3. L'objet de la section 4 sera de montrer, comme application d'une technique développée à la section 3, une borne inférieure de la première valeur propre du Laplacien d'une surface de Riemann compacte, qui améliore un résultat récent de H. Huber ([H<sub>1</sub>]).

**THÉORÈME C.** *Soit  $S$  une surface de Riemann compacte de genre  $g \geq 2$ ,  $r$  son rayon d'injectivité,  $d$  son diamètre et  $V$  son volume. Alors, on a les inégalités:*

$$\lambda_1(S) \geq c \frac{\min(1, r)}{V^2} \quad \text{et} \quad \lambda_1(S) \geq c \frac{\min(1, r)}{d \cdot V},$$

*$c$  étant une constante universelle positive.*

Les bornes inférieures du Théorème C ne font qu'intervenir des invariants



géométriques simples tels que le volume, le diamètre et le rayon d'injectivité. Mentionnons à ce propos que [D.P.R.S.] ont obtenu récemment  $\lambda_1 \geq cL_1/V^3$ , où  $L_1$  est la longueur minimale d'un ensemble de géodésiques fermées simples séparant  $S$  en deux et  $c$  une constante universelle. Néanmoins, la première borne du Théorème C est optimale en  $r$  et  $V$ ; en effet, en prenant des revêtement cycliques  $S_n$  d'une surface  $S$ , on a  $\lambda_1(S_n) \leq C/V_n^2$  (Théorème B) et le rayon d'injectivité des  $S_n$  est borné inférieurement, le Théorème C montre alors que  $\lambda_1(S_n) \geq C'/V_n^2$ .

De même, en prenant des surfaces  $S_n$  de volume fixé et ayant une géodésique séparante de longueur  $r_n \rightarrow 0$ , on sait que  $\lambda_1(S_n) \leq cr_n$  ([S.W.Y.] ou [D.P.R.S.]) et la borne inférieure du Théorème C a le même ordre de grandeur en  $r_n$ . Il est à noter qu'il existe aussi des surfaces  $S_n$  de volume fixé telles que  $r_n \rightarrow 0$  et  $\lambda_1(S_n) \geq c > 0$ .

La seconde inégalité du Théorème C est intéressante si  $d < V$ . Il résulte alors de [R<sub>2</sub>] que  $r \geq ce^{-V}$  et, donc  $\lambda_1(S) \geq ce^{-V}V^{-2}$ , en d'autres termes, si  $d < V$ , on a une borne inférieure de  $\lambda_1(S)$  ne dépendant que de  $V$ .

Je remercie Jean-Philippe Anker des nombreuses suggestions qu'il a bien voulu faire concernant ce travail, en particulier, les fonctions sphériques des groupes de rang un.

## 1. Convergence de spectres

*Notations et préliminaires:* nous supposons connus du lecteur les résultats élémentaires concernant la classification des espaces symétriques non compacts de rang un, des paires de Gelfand, des fonctions sphériques et leur relation avec les représentations de classe un. Ces résultats sont exposés dans les § 3 et 4 de ([K]) et nous les utiliserons librement.

$X$  est un espace symétrique de rang un, c'est-à-dire un espace hyperbolique  $H_{\mathbb{F}}^n$  sur les corps réels, complexes, quaternioniens ( $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{K}$ ) ou le plan des octaves de Cayley  $H_0^2$ . Les groupes d'isométries  $G$  correspondants sont  $SO(1, n)$ ,  $SU(1, n)$ ,  $Sp(1, n)$ ,  $\mathbb{F}_{4(-20)}$ .

Si  $G = KAN$  est une décomposition d'Iwasawa de  $G$ ,  $M$  le centralisateur de  $A$  dans  $K$ , les représentations de la série principale  $R_s$  sont les induites à  $G$  des caractères  $man \rightarrow e^{-st}$  du groupe  $MAN$  ( $A = \{a_t = \exp tH \mid t \in \mathbb{R}\}$ ). Le paramètre  $s$  est complexe et on sait que  $R_s$  est équivalente à une représentation unitaire irréductible si et seulement si  $s \in \Omega$ , où

$$\Omega = i\mathbb{R} \cup \{s \in \mathbb{R} \mid -\rho \leq s \leq \rho\}, \quad \text{si } G = SO(1, n), SU(1, n)$$

et

$$\Omega = i\mathbb{R} \cup \left\{ s \in \mathbb{R} \mid -\frac{m_\alpha}{2} - 1 \leq s \leq \frac{m_\alpha}{2} + 1 \text{ ou } s = \pm \rho \right\}, \quad \text{si } G = Sp(1, n), \mathbb{F}_{4(-20)}$$

$\rho$  est la demi-somme des racines positives  $\{\alpha, 2\alpha\}$  de  $G$  et  $m_\alpha$  est la multiplicité de la racine simple. Remarquons que  $R_{\pm\rho} = 1_G$ , en d'autres termes, les groupes  $Sp(1, n)$  et  $\mathbb{F}_{4(-20)}$  ont la propriété (T) de Kazhdan ([Ka] et [D-K]), alors que  $SO(1, n)$  et  $SU(1, n)$  ne l'ont pas.

Soient  $\Delta$  le Laplacien de  $X$  que nous choisirons défini positif et  $f_\lambda$  la fonction sphérique associée à  $R_s$ , alors  $\Delta f_\lambda = \lambda f_\lambda$  où  $\lambda = \rho^2 - s^2$ . Si  $C$  désigne l'opérateur de Casimir de  $G$ ,  $T$  une représentation unitaire continue de  $G$  d'espace  $E$  somme directe d'irréductibles et  $dT$  sa dérivée alors  $dT(C)$  agit scalairement dans chaque sous-espace irréductible de  $T$ . De plus, le nombre de fois que  $R_s$  est contenue dans  $T$  est égal à la dimension de l'espace des vecteurs  $T(K)$ -invariants de  $E$  dont le coefficient associé est proportionnel à la fonction sphérique  $f_\lambda$  ou, ce qui revient au même, la multiplicité de la valeur propre  $\lambda = \rho^2 - s^2$  de la restriction de  $dT(C)$  à l'espace des vecteurs  $T(K)$ -invariants.

Soient  $\Gamma$  un sous-groupe discret cocompact dans  $G$ ,  $\alpha$  une représentation unitaire de  $\Gamma$  de degré fini et d'espace  $\mathcal{H}$ .  $T = \text{Ind}_\Gamma^G \alpha$  est la représentation de  $G$  agissant par translations à droite dans  $E = L^2(\alpha, \Gamma)$  le complété pour la norme  $\int_{\Gamma \backslash G} \|F(g)\|^2 d\dot{g}$  de l'espace des fonctions continues  $F: G \rightarrow \mathcal{H}$  satisfaisant  $F(\gamma g) = \alpha(\gamma)(F(g))$ ,  $\gamma \in \Gamma$ ,  $g \in G$ . Si on choisit un système de coordonnées dans  $\mathcal{H}$  et si  $F$  est une fonction  $C^\infty$ ,  $T(K)$ -invariante dans  $E$ , on a  $dT(C)F = (\Delta f_1, \dots, \Delta f_r)$  où  $F = (f_1, \dots, f_r)$  et  $\Delta$  est la Laplacien de  $X$ . Comme  $\Gamma \backslash G$  est compact,  $T$  est somme directe d'irréductibles ([G.G.P-S]) et la discussion ci-dessus s'applique à  $T$ .

Ceci dit, venons-en aux questions de convergence de spectres.

Soient donc  $V' = \Gamma' \backslash X \rightarrow V = \Gamma \backslash X$  un revêtement Galoisien fini de groupe  $H = \Gamma' \backslash \Gamma$ ,  $V$  étant supposé compact et  $\pi$  une représentation irréductible de  $H$ . Nous allons d'abord interpréter  $Sp(\pi)$  en terme de représentation de  $G$ .

**LEMME 1.** *Soit  $\pi^*$  la contragrédiente de la relevée à  $\Gamma$  de  $\pi$ . Alors  $\lambda \in Sp(\pi)$  si et seulement si  $R_s \leq \text{Ind}_\Gamma^G \pi^*$  et la multiplicité de  $R_s$  dans  $\text{Ind}_\Gamma^G \pi^*$  est égale à la multiplicité de  $\pi$  dans  $\omega_\lambda$ .*

*Démonstration.* Soient  $\bigoplus_{i=1}^m E_i$  une décomposition orthogonale de la composante isotypique de  $\pi$  dans  $\omega_\lambda$ ,  $\{f_1^i, \dots, f_r^i\}$  une base orthonormée de  $E_i$ ,  $r$  la dimension de  $\pi$  et posons  $F_i(g) = (f_1^i(g), \dots, f_r^i(g))$  où on envisage  $f_j^i$  comme fonction sur  $G$ . Alors  $F_i$  est  $C^\infty$ ,  $T(K)$ -invariante dans  $L^2(\pi^*, \Gamma)$  et  $T(C)F_i = \lambda F_i$ . De plus,  $\{F_1, \dots, F_m\}$  est un système orthogonal. Donc  $m$  n'excède pas la multiplicité de  $R_s \leq T$ .

Réciproquement, soit  $F$  une fonction propre de  $dT(C)$  de valeur propre  $\lambda$ ,  $T(K)$ -invariante,  $F = (f_1, \dots, f_r)$ . Alors, comme  $F \in L^2(\pi^*, \Gamma)$ , la restriction de  $\omega_\lambda$  au sous-espace engendré par  $\{f_1, \dots, f_r\}$  est isomorphe à  $\pi$  de sorte que  $\{f_1, \dots, f_r\} \subset \bigoplus_{i=1}^m E_i$ . Il existe alors des matrices complexes  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$  telles que

$$F = \sum_{i=1}^m \Lambda_i (f_1^i, \dots, f_r^i)^{Tr}.$$

La relation  $F(\gamma g) = \pi^*(\gamma)F(g)$  montre alors que  $\Lambda_i$  est un entrelacement de  $\pi^*$ , donc  $\Lambda_i = \mu_i Id$ , c'est-à-dire  $F = \sum_{i=1}^m \mu_i F_i$ .  $\square$

*Remarque.* La lemme 1 appliqué à  $\pi = 1$  et  $\Gamma' = \Gamma$  montre que si  $V = \Gamma \backslash X$  est un quotient compact d'un espace hyperbolique quaternionien  $H_{\mathbb{K}}^n$  ou du plan des octaves  $H_0^2$ , alors la première valeur propre non nulle  $\lambda_1$  de  $V$  ne peut pas être petite, en fait,  $\lambda_1 \geq 8n + 8$  dans le premier cas et  $\lambda_1 \geq 96$  dans le second.

Le théorème 1 s'énonce en termes de topologie de Fell; rappelons brièvement qu'une suite de représentations unitaires irréductibles  $\alpha_n$  tend vers  $\alpha$  si pour tout vecteur  $v$  de l'espace de  $\alpha_n$  (en fait, un suffit) il existe des vecteurs  $v_n$  de l'espace de  $\alpha_n$  tels que  $\lim_n \langle \alpha_n(g)v_n, v_n \rangle = \langle \alpha(g)v, v \rangle$  uniformément sur les parties compactes de  $G$ .

**THÉORÈME 1.** Soient  $V = \Gamma \backslash X$  un espace localement symétrique compact de rang un,  $V_n \rightarrow V$  une suite de revêtements Galoisiens finis de  $V$  de groupe  $G_n$ ,  $\pi_n$  une représentation irréductible de  $G_n$  et  $\pi_n^*$  la relevée à  $\Gamma$  de la contragrédiente de  $\pi_n$ .

Si la suite  $\pi_n^*$  tend vers la représentation identité  $1_\Gamma$ , alors pour toute valeur propre  $\lambda$  du Laplacien de  $V$ , on a  $\lim_n \text{dist}(\lambda, \text{Sp}(\pi_n)) = 0$ .

**LEMME 2.** Soient  $G$  un groupe localement compact à base dénombrable et  $\{\pi_k^j\}_{1 \leq j < \infty, 1 \leq k \leq \infty}$  un ensemble de représentations unitaires irréductibles de  $G$ . Supposons que chaque coefficient de type positif de  $\pi_\infty = \bigoplus_j \pi_\infty^j$  est limite uniforme de coefficients de type positif associés aux représentations  $\pi_k = \bigoplus_j \pi_k^j$ . Alors pour chaque  $j$  il existe des suites d'entiers  $\{j_i\}_{i=1}^\infty$  et  $\{k_i\}_{i=1}^\infty$  avec  $k_1 < k_2 < \dots$  telles que  $\pi_{k_i}^{j_i}$  converge vers  $\pi_\infty^j$ .

*Démonstration.* Soient  $1 \leq j < \infty$  fixé,  $v$  un vecteur de l'espace de  $\pi_\infty^j$  avec  $\|v\| = 1$ . Il existe par hypothèse des vecteurs  $v_k^i$  dans l'espace de  $\pi_k^i$  tels que

$$p_\infty^j(g) = \langle \pi_\infty^j(g)v, v \rangle = \lim_k \sum_{i=1}^\infty \langle \pi_k^i(g)v_k^i, v_k^i \rangle.$$

Ainsi

$$p^j_\infty(g) = \lim_k \sum_i^\infty \lambda_k^i p'_k(g),$$

où

$$\lambda_k^i = \|v_k^i\|^2 / \sum_{r=1}^\infty \|v_k^r\| \quad \text{et} \quad p'_k(g) = \frac{\langle \pi'_k(g) v_k^i, v_k^i \rangle}{\|v_k^i\|^2}.$$

Soit  $P_0(G)$  l'ensemble des fonctions continues de type positif sur  $G$  valant 1 en  $e$ . Nous rappelons que

–  $P_0(G) \subset L^\infty(G)$  est une partie convexe faiblement compacte. (Topologie de dualité avec  $L^1(G)$ ).

– (Raikov) La topologie faible et la topologie de convergence uniforme sur les parties compactes coïncident sur  $P_0(G)$ .

– L'ensemble des points extrémaux de  $P_0(G)$  coïncide avec l'ensemble des  $p(g) = \langle \pi(g)v \cdot v \rangle$  où  $\|v\| = 1$  et  $\pi$  est unitaire irréductible.

Pour chaque  $1 \leq l < \infty$ , soit  $K_l$  l'adhérence dans  $P_0(G)$  de l'ensemble  $\{p_k^j\}_{1 \leq j < \infty, 1 \leq k < \infty}$  et  $A_l$  son enveloppe convexe fermée. Alors  $K_l$  et  $A_l$  sont compacts et  $K_l$  contient tous les points extrémaux de  $A_l$  ([Bo] II. §7.1), donc  $K_l$  contient  $p^j_\infty$ , ce qui montre qu'il existe une suite  $\{p_{k_i}^j\}_{i=1}^\infty$  convergeant faiblement vers  $p^j_\infty$  et donc uniformément sur les compacts.  $\square$

*Démonstration du Théorème 1.* Le théorème de continuité d'induction de Fell ([Fe]) et le lemme 2 montrent qu'il existe, pour tout  $R_s \leq \text{Ind}_F^G 1_F$ , une suite d'irréductibles  $w_m \leq \text{Ind}_F^G \pi_{j_m}^*$  avec  $\lim_m w_m = R_s$ . En particulier,  $\lim_m w_{m|K} = R_{s|K} \geq 1_K$ ; comme  $K$  est compact,  $w_m$  est de classe un pour  $m$  grand, donc de la forme  $R_{s(m)}$  pour un  $s(m) \in \Omega$ . Le Lemme 1, joint au fait que  $\lambda = \rho^2 - s^2 = \lim (\rho^2 - s(m)^2)$ , permet de conclure.  $\square$

**COROLLAIRE 1.** *Sous les hypothèses du théorème 1, on a*

$$\lim_n \lambda_0(\pi_n) = 0.$$

*Remarques.* 1) Si  $\pi_n \neq 1_F$  pour tout  $n$ , alors

$$\lambda_0(\pi_n) > 0 \quad \text{et} \quad \lim_n \lambda_1(V_n) = 0.$$

2) Les exemples de Randol sont obtenus en prenant un  $V$  dont le premier

nombre de Betti  $\beta_1$  est non nul; moyennant la projection  $\Gamma \rightarrow \mathbb{Z}^{\beta_1}$  on peut trouver une suite de caractères  $\chi_n$  de  $\Gamma$ ,  $\chi_n \neq 1$ , de noyaux d'indice fini dans  $\Gamma$  et tendant vers 1. Si  $\chi_n$  désigne encore le caractère de  $\Gamma/\text{Ker } \chi_n$ , groupe de Galois du revêtement  $V_n$  associé à  $\text{Ker } \chi_n$ , on a  $\lim_n \lambda_0(\chi_n) = 0$  et donc  $\lim_n \lambda_1(V_n) = 0$ .

3) On obtient d'autres exemples en remarquant que, pour tout  $n \geq 4$ , il existe  $\Gamma$  discret cocompact dans  $SO(n, 1)$  et une surjection de  $\Gamma$  sur le groupe libre à deux générateurs ([M]). En particulier, il existe une surjection de  $\Gamma$  sur le groupe de Heisenberg sur  $\mathbb{Z}$ :

$$\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pour  $N$  entier,  $w_N(x, y, z)f(t) = e^{2\pi i/N(z-ty)}f(-x+t)$ ,  $f \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}]$  définit une représentation irréductible de  $\Lambda$  de degré  $N$  et dont le noyau est d'indice  $N^3$  dans  $\Lambda$ . De plus,  $\lim_{N \rightarrow \infty} w_N = 1_\Lambda$  dans la topologie de Fell. Si  $\pi_N$  est la relevée à  $\Gamma$  de  $w_N$ ,  $V_N$  le revêtement associé à  $\text{Ker } \pi_N$ , alors  $\lambda_0(\pi_N)$  comme valeur propre du Laplacien de  $V_N$  aura une multiplicité au moins égale à  $N$ , et  $\lim_N \lambda_0(\pi_N) = 0$ .

Remarquons à ce propos que les méthodes de ([B-C]) permettent de montrer que si  $G = SO(2, 1)$ , il existe pour tout  $N$  une métrique hyperbolique sur  $V_N$  telle que  $\lambda_0(\pi_N)$  soit la première valeur propre du Laplacien de  $V_N$ .

4) Des méthodes analogues permettent de montrer que si  $V = \Gamma \backslash X$  est un quotient de volume fini d'un produit d'espaces symétriques de rang un,  $V_n$  des revêtements Galoisien finis de groupes  $H_n$  et  $\pi_n$  des représentations irréductibles de  $H_n$ , si  $\pi_n^*$  tend vers  $1_\Gamma$  pour  $n \rightarrow \infty$ , alors il existe  $n_0$  tel que, pour  $n \geq n_0$ ,  $\lambda_0(\pi_n)$  soit valeur propre du Laplacien de  $V_n$  correspondant à une fonction propre de carré intégrable, et  $\lim_n \lambda_0(\pi_n) = 0$ .

Certains groupes discrets n'ont pas la propriété (T), néanmoins la représentation identité est isolée dans une large classe de représentations. La remarque 4 permet de produire de tels exemples:

**COROLLAIRE 2.** *Soit  $K$  un corps de nombres distinct de  $\mathbb{Q}$  ayant au moins une place réelle et 0 l'anneau des entiers de  $K$ , soit  $\Gamma = SL(2, 0)$ . Alors la représentation  $1_\Gamma$  est isolée dans l'ensemble des représentations unitaires dont le noyau est d'indice fini dans  $\Gamma$ .*

*Démonstration.* Soient  $r_1$  le nombre de places réelles,  $r_2$  le nombre de places complexes de  $K$ . Alors  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de covolume fini dans

$SL(2, \mathbb{R})^r \times SL(2, \mathbb{C})^2$ . Soit  $\tau \neq 1_\Gamma$  une représentation irréductible de  $\Gamma$  dont le noyau  $\Gamma'$  est d'indice fini dans  $\Gamma$  et  $V'$  le revêtement associé. Comme  $r_1 \geq 1$  et  $K \neq \mathbb{Q}$ ,  $\Gamma$  possède la propriété des sous-groupes de congruence ([Se]), donc  $\Gamma \supset \Gamma(\alpha)$ , où  $\alpha$  est un idéal de  $\mathcal{O}$ . Par ailleurs, M. F. Vignéras ([V]) a montré que la première valeur propre du Laplacien du revêtement associé à  $\Gamma(\alpha)$  est supérieure à  $3(r_1 + 4r_2)/16$ , en particulier,  $\lambda_0(\pi) \geq 3(r_1 + 4r_2)/16$  ainsi, en vertu de la remarque 4,  $\pi$  ne peut pas être trop proche de  $1_\Gamma$ .  $\square$

Considérons maintenant un revêtement  $V' \rightarrow V$  qui ne soit pas nécessairement Galoisien. Soit  $\mathcal{G}$  le graphe de  $\Gamma' \backslash \Gamma$  par rapport à un système de générateurs  $A$  de  $\Gamma$ , tels que  $A = A^{-1}$ . (cf. Introduction).

La forme hermitienne

$$Q(f) = \frac{1}{2} \sum_{a=b} |f(a) - f(b)|^2 = \langle (rI - M_{\mathcal{G}})f, f \rangle,$$

$f \in \mathbb{C}[\mathcal{G}]$ , est semi-définie positive et n'annule que les fonctions constantes. Désignons par  $0 < \lambda_1(\mathcal{G}) \leq \lambda_2(\mathcal{G}) \leq \dots \leq \lambda_{m-1}(\mathcal{G})$  le spectre de  $rI - M_{\mathcal{G}}$ ,  $m$  est le degré du revêtement. Le lemme suivant relie le comportement de  $\lambda_1(\mathcal{G})$  à celui de certaines représentations.

**LEMME 3.** *Soient  $\Gamma$  un groupe discret,  $\Gamma_n < \Gamma$  des sous-groupes d'indice fini,  $\mathcal{G}(n)$  le graphe de  $\Gamma_n \backslash \Gamma$  par rapport à un ensemble de générateurs  $A = A^{-1}$  de  $\Gamma$  et  $\alpha_n$  la restriction de la représentation quasi-régulière de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{C}[\Gamma_n \backslash \Gamma]$  à l'orthogonal des fonctions constantes. Alors, 1 est limite d'une suite de coefficients de type positif associés aux représentations  $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ , si et seulement si  $\lim_n \lambda_1(\mathcal{G}(n)) = 0$ .*

*Démonstration.* Si  $f \in \mathbb{C}[\Gamma_n \backslash \Gamma]$  est orthogonale aux constantes et de norme un, alors l'inégalité

$$\lambda_1(\mathcal{G}(n)) \leq \sum_{s \in A} (1 - \operatorname{Re} \langle \alpha_n(s)f, f \rangle)$$

montre un sens de l'équivalence.

Réciproquement, notons  $M_n = M_{\mathcal{G}(n)}$  et  $f \in \mathbb{C}[\Gamma_n \backslash \Gamma]$ , alors

$$r^k \langle f, f \rangle - \operatorname{Re} \langle M_n^k f, f \rangle = \frac{1}{2} \sum_{s_1, \dots, s_k \in A} \|f - \alpha_n(s_1, \dots, s_k)f\|^2.$$

Si  $\|\gamma\|$  est la longueur d'un élément  $\gamma \in \Gamma$  par rapport à  $A$ , on aura:

$$\sup_{\|\gamma\| \leq k} \|f - \alpha_n(\gamma)f\|^2 \leq 2 \operatorname{Re} \langle (r^k - M_n^k)f, f \rangle.$$

Si on choisit  $f = f_n$ , fonction propre de  $M_n$  de valeur propre  $r - \lambda_1(\mathcal{G}(n))$ , on verra que pour chaque  $k$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|\gamma\| \leq k} \|f_n - \alpha_n(\gamma)f_n\| = 0. \quad \square$$

Soit  $V' \rightarrow V$  un revêtement. On appellera spectre générique de  $V'$  l'ensemble  $\operatorname{Spg}(V') = \{\lambda \mid \lambda \text{ est valeur propre du Laplacien de } V' \text{ et } \dim \mathcal{E}_\lambda(V') > \dim \mathcal{E}_\lambda(V)\}$ .

**THÉORÈME 2.** *Soit  $V_n \rightarrow V$  une suite de revêtements de degré fini de  $V$  et  $\mathcal{G}(n)$  les graphes "algébriques" associés. Supposons que  $\lim \lambda_1(\mathcal{G}(n)) = 0$ . Alors, pour toute valeur propre  $\lambda$  du Laplacien de  $V$ , on a :*

$$\lim_n \operatorname{dist}(\operatorname{Spg}(V_n), \lambda) = 0.$$

*Démonstration.* On applique le théorème d'induction par étage:

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma_n}^G 1_{\Gamma_n} = \operatorname{Ind}_\Gamma^G \operatorname{Ind}_{\Gamma_n}^\Gamma 1_{\Gamma_n} = \operatorname{Ind}_\Gamma^G 1_\Gamma \oplus \operatorname{Ind}_\Gamma^G \alpha_n.$$

Le lemme montre que  $\alpha_n \rightarrow 1_\Gamma$ , en vertu du lemme 2 on conclut que pour chaque  $R_s \leq \operatorname{Ind}_\Gamma^G 1_\Gamma$  il existe une suite  $R_{s(m)} \leq \operatorname{Ind}_\Gamma^G \alpha_m$  telle que  $R_{s(m)} \rightarrow R_s$ .

On remarquera que  $-s(m)^2 + \rho^2 \in \operatorname{Spg}(V_m)$ .  $\square$

*Remarque.* Dans ces conditions,  $\lim_n \lambda_1(V_n) = 0$ .

## 2. Bornes supérieures

Soit  $\alpha$  une représentation unitaire de  $\Gamma$ ,  $d$  la distance Riemannienne sur  $X$ ,  $x_0$  le point fixé par  $K$ . Il est naturel de mesurer la distance de  $\alpha$  à la représentation identité par la quantité:

$$J(\alpha, r) = \inf_{\|v\|=1} \sup_{d(\gamma x_0, x_0) \leq r} (1 - \operatorname{Re} \langle \alpha(\gamma)v, v \rangle).$$

En effet, si  $r \geq 2D$  où  $D = \text{diam}(V)$ , l'ensemble  $\{\gamma \in \Gamma \mid d(\gamma x_0, x_0) \leq r\}$  engendre  $\Gamma$ , ainsi  $\lim_n \alpha_n = 1$  dans la topologie de Fell si et seulement si  $\lim_n J(\alpha_n, r) = 0$  pour un  $r \geq 2D$ , et donc pour tous les  $r \geq 0$ .

Soient  $\mu_0(\alpha) \leq \mu_1(\alpha) \leq \dots$  le spectre de la restriction de  $dT(C)$  à l'espace des vecteurs  $T(K)$  invariants de  $L^2(\alpha, \Gamma)$ ,  $T = \text{Ind}_\Gamma^G \alpha$ , et  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  le spectre du Laplacien de  $V = \Gamma \backslash X$ .

La proposition suivante donne une borne de  $\mu_k(\alpha)$  en fonction de  $\lambda_k$  pourvu que ces deux quantités soient petites:

**PROPOSITION 1.** a) *Supposons que  $\max(\mu_k(\alpha), \lambda_k) \leq \rho^2$ . Alors il existe une constante  $E(D) > 0$  telle que:*

$$\mu_k(\alpha) < \lambda_k + E(D)(k+1)J(\alpha, 3D).$$

b) *Supposons que  $\mu_0(\alpha) < \rho^2$ . Alors, pour tout  $\beta$ ,  $0 < \beta \leq \rho$  tel que  $\mu_0(\alpha) \leq \rho^2 - (\rho - \beta)^2$  et tout  $r > \ln c(\rho - \beta)/\beta$ , on a:*

$$\mu_0(\alpha) \leq J(\alpha, r + 2D) \left\{ \beta(2\rho - \beta) + \frac{2\rho}{r - \frac{\ln c(\rho - \beta)}{\beta}} \right\}.$$

*Remarque.*  $c$  est la fonction d'Harish-Chandra de  $X$  (cf. lemme 2 ci-dessous).

La proposition 1 nous permet de montrer une partie du théorème B (avec les hypothèses et notations du théorème B).

**THÉORÈME 3.** *Il existe une constante  $C(V, A) > 0$  telle que*

$$\lambda_0(\pi) \leq C \cdot \lambda_0(\pi, \mathcal{G}).$$

Enfin, l'analogie du théorème 3 dans le cas non Galoisien s'énonce comme suit:

**THÉORÈME 4.** *Soient  $V' \rightarrow V$  un revêtement d'espaces localement symétriques compacts de rang un,  $\mathcal{G}$  le graphe "algébrique" associé, alors il existe  $C(V, A) > 0$  tel que*

$$\lambda_1(V') \leq C \cdot \lambda_1(\mathcal{G}).$$

*Remarque.* On choisit, bien sûr, un système de générateurs  $A$  de  $\Gamma$  une fois



pour toutes, nous prendrons ici

$$A = \{\gamma \in \Gamma \mid d(\gamma x_0, x_0) \leq 3D\}.$$

Nous ferons précéder la démonstration de ces résultats d'un préliminaire concernant les fonctions sphériques.

Rappelons que nous notons  $f_\lambda$  la fonctions sphérique associée à la représentation  $R_s$ ,  $\rho^2 - s^2 = \lambda$ ;  $G = KAK$  la décomposition de Cartan de  $G$ ,  $A = \{a_t = \exp tJ \mid t \in \mathbb{R}\}$ ,  $J$  étant un générateur de norme un de l'algèbre de Lie de  $A$ . Alors  $f_\lambda(g) = f_\lambda(a_t)$ , où  $g = ka_tk'$  et  $f_\lambda(a_t) = f_\lambda(a_{-t})$ , nous supposons donc toujours  $t \geq 0$ .

LEMME 1. Soit  $\rho$  la demi-somme des racines positives de  $G$  et  $\lambda$  réel non négatif.

- a)  $f_\lambda(a_t) > 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \lambda \leq \rho^2$
- b)  $f_{\lambda_2}(a_t) \leq f_{\lambda_1}(a_t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \rho^2$
- c)  $|f_\lambda(a_t)| \leq f_{\rho^2}(a_t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \geq \rho^2$ .

LEMME 2.  $0 \leq \lambda < \rho^2$ ,  $\rho^2 - s^2 = \lambda$ ,  $s > 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$

$$f_\lambda(a_t) < c(s)e^{(s-\rho)|t|},$$

où

$$c(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{dn}{2}\right)\Gamma(s)}{\Gamma\left(\frac{dn - \rho + s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho + s}{2}\right)}$$

est la fonction d'Harish-Chandra de  $X$  et  $d = 1, 2, 4, 8$  suivant que  $X = H_{\mathbb{F}}^n$ ,  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{K}$  ou  $0$ .

Remarques. 1) Ces deux lemmes sont classiques. Le premier peut se démontrer en utilisant l'équation différentielle que satisfait  $f_\lambda$  (cf. [H<sub>2</sub>] pour le cas  $G = SL(2, \mathbb{R})$ ), le second se démontre en utilisant la représentation de  $f_\lambda$  comme intégrale sur  $\tilde{N}$ .

2) La fonction  $c$  apparaît dans l'estimation de  $\mu_0(\alpha)$  et dans la condition  $r > \ln c(\rho - \beta)/\beta$  (cf. Proposition 1). Voici son comportement sur l'intervalle  $[0, \rho]$ :

–  $X$  est hyperbolique réel ou complexe,  $c$  est strictement décroissante sur  $[0, \rho]$  et  $c(\rho) = 1$ , en particulier  $c(s) > 1$  si  $0 < s < \rho$ ; de plus  $c(s) \rightarrow \infty$ , si  $s \rightarrow 0$ .

–  $X$  est hyperbolique quaternionien ou octonien, alors il existe  $k$ ,  $(m_\alpha/2) + 1 < k < \rho$ , tel que  $c$  soit strictement décroissante sur  $[0, k]$ , strictement croissante sur  $[k, \rho]$  et  $c(m_\alpha/2) + 1 = c(\rho) = 1$ .

En particulier, pour  $s \in [0, \rho]$ ,  $c(s) \geq 1$ , si et seulement si  $R_s$  est équivalente à une représentation unitaire.

LEMME 3. a) Soit  $\beta > 0$  et  $\rho - \beta \leq s \leq \rho$ , alors

$$f(a_t) \leq [f_{\beta(2\rho-\beta)}(a_t)]^{(\rho-s)/\beta}$$

b) Soit  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \rho^2$  et

$$y(t) = \frac{f\lambda_2(a_t)}{f\lambda_1(a_t)},$$

alors

$$y(t) \leq 1 - (\lambda_2 - \lambda_1)h(t)$$

où

$$h(t) = \int_0^t \frac{du}{\delta(u)} \int_0^u \delta(v) f_{\rho^2}^2(a_v) dv,$$

$\delta(u)$  étant le volume de la sphère de rayon  $u$ .

*Démonstration.* a) On utilise la représentation de  $f_\lambda$  comme intégrale sur  $K$  ([K]) p. 20, 3.22) que l'on écrit comme suit:

$$f_\lambda(a_t) = \int_K u(e^{-H(a_{-t}, k)dk}) \quad \text{où} \quad u(x) = x^{\rho-s/\beta}.$$

Comme  $u$  est concave pour  $\rho - \beta \leq s \leq \rho$ , on peut appliquer l'inégalité de Jensen, ce qui permet de conclure.

b) Si  $\delta(t)$  est la superficie de la sphère de rayon  $t$  dans  $X$  et  $\phi_1(t) = f_{\lambda_1}(a_t)$ ,  $\phi_2(t) = f_{\lambda_2}(a_t)$ , on sait que  $\phi_i$  satisfait à l'équation différentielle  $-(\phi_i' \delta)' = \lambda_i \phi_i \delta$ ,

d'où on conclut que  $y$  vérifie:

$$(y' \delta \phi_1^2)' = \delta \phi_1 \phi_2 (\lambda_1 - \lambda_2)$$

en intégrant deux fois on obtient:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - (\lambda_2 - \lambda_1) \int_0^t \frac{du}{\delta(u) \phi_1^2(u)} \int_0^u dv \delta(v) \phi_1(v) \phi_2(v) \\ &\leq 1 - (\lambda_2 - \lambda_1) h(t), \end{aligned}$$

en utilisant le lemme 1.  $\square$

Le reste de la section est consacré à la démonstration des propositions 1, Théorèmes 3 et 4.

LEMME 4. a) Soit  $v \in \mathcal{H}$ ,  $\phi$  continue à support compact sur  $G$  et

$$F_{v,\phi}(g) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \pi(\gamma^{-1})(v) \phi(\gamma g),$$

alors  $F_{v,\phi} \in L^2(\alpha, \Gamma)$ , de plus  $\|F_{v,\phi}\| \leq c \|\phi\|_2 \|v\|$ , où  $c$  ne dépend que du support de  $\phi$ .

b) Soient  $\phi$  et  $\psi$  des fonctions de carré intégrable et à support compact sur  $G$ ,  $v, w \in \mathcal{H}$ , alors:

$$\langle T(g)F_{v,\phi}, F_{w,\psi} \rangle = \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle \alpha(\gamma)v, w \rangle \int_G dh \phi(hg) \overline{\psi(\gamma h)}.$$

c) Soit  $\{F_n\}_{n \geq 1}$  un système orthonormé complet de fonctions propre de  $d T(C)$ ,  $T(K)$ -invariantes et  $\phi, \psi$  des fonctions de carré intégrable, à support compact sur  $G$  et  $K$ -invariantes à droite. Alors:

$$\langle T(g)F_{v,\phi}, F_{w,\psi} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \bar{d}_n f_{\mu_n(\alpha)}(a_r),$$

où

$$r = d(gx_0, x_0), \quad c_n = \langle F_{v,\phi}, F_n \rangle, \quad d_n = \langle F_{w,\psi}, F_n \rangle.$$

Les calculs démontrant le lemme 4 sont classiques dans les questions relatives à la formule des traces de Selberg, et nous les omettons.

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine fondamental de l'action à gauche de  $\Gamma$  sur  $G$ . Nous prendrons pour  $\mathcal{D}$  la préimage dans  $G$  de l'ensemble  $\{x \in X \mid d(x_1, x_0) \leq d(x_1 \gamma, x_0) \text{ p.t. } \gamma \in \Gamma, \gamma \neq e\}$  par la projection  $G \rightarrow X$ ,  $x_0$  étant fixé par les éléments de  $K$ . On remarquera que  $\mathcal{D}$  est  $K$ -invariant à droite.

LEMME 5. Soit  $q: G \rightarrow V = \Gamma \backslash G / K$  la projection canonique,  $\{f_n \mid n \geq 0\}$  un système orthonormé complet de fonctions propres réelles du Laplacien de  $V$ ,  $\phi_n(g) = (f_n \circ q)(g) \chi_{\mathcal{D}}(g)$ , où  $\chi_{\mathcal{D}}$  est la fonction caractéristique de  $\mathcal{D}$  et

$$C_g = \{\gamma \in \Gamma \mid d(\gamma x_0, x_0) \leq 2D + d(gx_0, x_0)\}.$$

Alors:

- a)  $\langle F_{v, \phi_n}, F_{v, \phi_m} \rangle = \delta_{n,m}$ ,  $v \in \mathcal{H}$ ,  $\|v\| = 1$ .
- b)  $|\langle T(g)F_{v, \phi_n}, F_{v, \phi_m} \rangle - \delta_{n,m} f_{\lambda_n}(g)| \leq \sup_{\gamma \in C_g} (1 - \operatorname{Re} \langle \alpha(\gamma)v, v \rangle)$ .

*Démonstration.* a) Le résultat est immédiat en appliquant le lemme 1b).

b) On a:

$$\begin{aligned} \langle T(g)F_{v, \phi_n}, F_{v, \phi_m} \rangle &= \sum_{\gamma \in \Gamma} (\operatorname{Re} \langle \alpha(\gamma)v, v \rangle - 1) \int_G \phi_n(hg) \phi_m(h) dh \\ &\quad + \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_G \phi_n(hg) \phi_m(\gamma h) dh. \end{aligned}$$

Ce dernier terme de la somme vaut évidemment:  $\int_G \phi_n(h) f_m(hg^{-1}) dh$ .

On vérifie que cette fonction de  $g$  est bi- $K$ -invariante, fonction propre du Laplacien pour la valeur propre  $\lambda_m$  et valant  $\delta_{n,m}$  en  $g = e$ . Il suit que cette intégrale vaut:

$$\delta_{n,m} f_{\lambda_m}(g).$$

La valeur absolue du premier terme de la somme s'estime par

$$\sup_{\gamma \in C_g} (1 - \operatorname{Re} \langle \alpha(\gamma)v, v \rangle) \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_G |\phi_n(hg)| |\phi_m(\gamma h)| dh,$$

et cette dernière somme sur  $\Gamma$  vaut:

$$\int_{\Gamma/G} dhu_n(hg)u_m(h) \leq \|u_n\|_2 \|u_m\|_2 = 1$$

où

$$u_n(h) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_{\mathcal{D}}(\gamma h) |f_n \circ q(h)| = |f_n(h)|$$

presque partout.  $\square$

LEMME 6. Si  $\max(\lambda_k, \mu_k(\alpha)) \leq \rho^2$ , alors:

$$f_{\mu_k(\alpha)}(a_r) \geq f_{\lambda_k}(a_r) - (k+1)J(\alpha, r+2D).$$

(Rappelons que  $D = \text{diam}(V)$ ).

*Démonstration.* Soit  $a_0, \dots, a_k$  des nombres complexes non tous nuls tels que la somme  $F = \sum_{n=0}^k a_n F_{v, \phi_n}$  soit orthogonale à  $F_0, \dots, F_{k-1}$  et de norme 1. Alors:

$$|\langle T(g)F, F \rangle| \leq \sum_{n=k}^{\infty} |c_n|^2 |f_{\mu_n(\alpha)}(g)| \leq f_{\mu_k(\alpha)}(g)$$

en vertu des lemmes 1c) et 4c). Par ailleurs:

$$\langle T(g)F, F \rangle = \sum_{n,m=0}^k a_n \bar{a}_m \langle T(g)F_{v, \phi_n}, F_{v, \phi_m} \rangle;$$

en vertu du lemme 5, on a alors:

$$\begin{aligned} |\langle T(g)F, F \rangle| &\geq \sum_{n=0}^k |a_n|^2 f_{\lambda_n}(g) \\ &\quad - \sum_{n,m=0}^k |a_n a_m| |\langle T(g)F_{v, \phi_n}, F_{v, \phi_m} \rangle - \delta_{n,m} f_{\lambda_n}(g)| \\ &\geq f_{\lambda_k}(g) - \sup_{\gamma \in \mathcal{C}_g} (1 - \text{Re} \langle \alpha(\gamma)v, v \rangle) \left( \sum_{n=0}^k |a_n| \right)^2, \end{aligned}$$

mais  $(\sum_{n=0}^k |a_n|)^2 \leq k+1$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 1.* a) Appliquons le lemme 6:  $r = D$ , on aura

donc:

$$\frac{f_{\mu_k(\alpha)}(a_D)}{f_{\lambda_k}(a_D)} \geq 1 - \frac{(k+1)J(\lambda, 3D)}{f_{\lambda_k}(a_D)},$$

on peut bien sûr supposer  $\mu_k(\alpha) \geq \lambda_k$ . Le lemme 3b) montre alors que

$$\begin{aligned} \mu_k(\alpha) - \lambda_k &\leq (k+1)J(\alpha, 3D)[h(D)f_{\lambda_k}(a_D)]^{-1} \\ &\leq (k+1)J(\alpha, 3D)[h(D)f_{\rho^2}(a_D)]^{-1}. \end{aligned}$$

b) En vertu du lemme 6:

$$f_{\mu_0(\alpha)}(a_r) \geq 1 - J(\alpha, r + 2D).$$

Les lemmes 2 et 3a) montrent que

$$f_{\mu_0(\alpha)}(a_r) \leq c(\rho - \beta)^{(\rho-s)/\beta} e^{(s-\rho)r}, \quad \text{où } \rho^2 - s^2 = \mu_0(\alpha).$$

Supposons d'abord  $J(\alpha, r + 2D) < 1$ . Alors

$$\frac{1}{1 - J(\alpha, r + 2D)} \geq (e^r / c(\rho - \beta)^{1/\beta})^{\rho-s}$$

en supposant  $r > \ln c(\rho - \beta)/\beta$  et en prenant le logarithme des deux côtés, on trouve:

$$A = (\rho - s) \left( r - \frac{\ln c(\rho - \beta)}{\beta} \right) < \frac{J(\alpha, r + 2D)}{1 - J(\alpha, r + 2D)},$$

ou, encore,  $A/(1+A) < J$ . Remarquons que cette inégalité est trivialement vérifiée si  $J(\alpha, r + 2D) \geq 1$ . On en conclut que:

$$(\rho - s) < J(\alpha, r + 2D) \left\{ \frac{1}{r - \frac{\ln c(\rho - \beta)}{\beta}} + (\rho - s) \right\}$$

en multipliant par  $\rho + s$  et en utilisant l'inégalité  $\rho^2 - s^2 = \mu_0(\alpha) \leq \beta(2\rho - \beta)$ , on obtient le résultat.  $\square$

*Démonstration du Théorème 3.* Soit  $\pi_1^*$  la relevée à  $\Gamma$  de la contragrédiente de  $\pi$ , alors  $\lambda_k(\pi) = \mu_k(\pi_1^*)$  (Lemme 1, sect. 1). Par ailleurs,  $\mu_0(\pi_1^*) \leq E(D)J(\pi_1^*, 3D)$  et

$$J(\pi_1^*, 3D) = J(\pi_1, 3D) = \inf_{\|v\|=1} \sup_{\gamma \in A} (1 - \operatorname{Re} \langle \pi(\gamma)v, v \rangle) \\ \leq \frac{1}{2} \inf_{\|v\|=1} \sum_{\gamma \in A} \|\pi(\gamma)v - v\|^2 = \frac{1}{2} \lambda_1(\pi, \mathcal{G}). \quad \square$$

*Démonstration du Théorème 4.* On applique la même démonstration que pour le Théorème 3 en remarquant que si  $\alpha$  est la restriction à l'orthogonal des fonctions constantes de la représentation quasi régulière de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{C}[\Gamma' \setminus \Gamma]$ , alors:

$$\mu_0(\alpha) \geq \lambda_1(V'). \quad \square$$

### 3. Bornes inférieures

Nous allons maintenant borner inférieurement les petites valeurs propres du Laplacien d'un revêtement de variétés Riemanniennes compactes en termes de spectre du graphe géométrique  $\mathfrak{H}$  associé (cf. introduction).

En fait, nous ne ferons que citer ce résultat (Théorème 5), l'ayant déjà montré ailleurs (cf. [B<sub>1</sub>]), d'autant plus que la méthode d'estimation sera reprise un peu modifiée à la section 4. Nous énonçons également le pendant du théorème 5 dans le cas galoisien et dans celui où  $M'$  est de volume infini, les méthodes de démonstration étant les mêmes. Nous obtiendrons quelques corollaires, en particulier des résultats de R. Brooks ([Br<sub>1</sub>], [Br<sub>2</sub>]) et un phénomène de bicontinuité de l'induction pour la topologie de Fell.

Soit  $v(x)$  la fonction valence du graphe  $\mathfrak{H}$ , i.e. le nombre d'arêtes émanant de  $x$ . Soit encore

$$A = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset, \gamma \in \Gamma, \gamma \neq e\}$$

et

$$r = \operatorname{Card} A \quad \text{alors} \quad v(x) \leq r.$$

Soit  $B = (L_v - M_{\mathfrak{H}})L_h(L_{v+2} + M_{\mathfrak{H}})$  où  $M_{\mathfrak{H}}$  est l'opérateur de moyenne du graphe  $\mathfrak{H}$  (cf. introduction),  $L_a$  l'opérateur de multiplication par une fonction

$a \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}]$  et  $h(x) = [(r+1)(v(x)+1)]^{-1}$ . Alors  $B$  est un opérateur symétrique semi-défini positif qui n'annule que les constantes. Nous verrons que son spectre est relié à celui de  $L_v - M_{\mathfrak{S}}$  (cf. preuve du corollaire 1), cet opérateur jouant le rôle du Laplacien combinatoire de  $\mathfrak{S}$ .

Soit  $0 < \lambda_1(B) \leq \lambda_2(B) \leq \dots \leq \lambda_{m-1}(B)$  son spectre,  $m$  étant le degré du revêtement  $M' \rightarrow M$ .

**THÉORÈME 5.** *Soit  $0 < \lambda_1(M') \leq \lambda_2(M') \leq \dots$  le spectre du Laplacien de  $M'$ . Alors il existe une constante  $c = c(M) > 0$  telle que*

$$\lambda_k(M') \geq c \cdot \lambda_k(B) \quad 0 \leq k \leq m-1.$$

Si d'aventure le revêtement  $M' \rightarrow M$  est galoisien de groupe  $H$  et  $\pi$  est une représentation irréductible de  $H$ , alors  $B$  agit dans  $\mathbb{C}[\pi, \mathfrak{S}]$ , la composante isotypique de  $\pi$  dans  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}]$ ; soit alors  $\lambda_0(B, \pi) \leq \lambda_1(B, \pi) \leq \dots$  le spectre de cette restriction.

**THÉORÈME 6.** *Il existe une constante  $c = c(M) > 0$  telle que*

$$\lambda_k(\pi) \geq c \cdot \lambda_k(B, \pi) \quad 0 \leq k \leq (\deg \pi)^2 - 1.$$

**COROLLAIRE 1.** a) *Soit  $\mathcal{G}$  le graphe algébrique de  $\Gamma' \backslash \Gamma$  déduit du système de générateurs  $A$  de  $\Gamma$ . Alors:*

$$\lambda_1(M') \geq c(M) \lambda_1(\mathcal{G}).$$

b) *Si  $M' \rightarrow M$  est galoisien de groupe  $H$  et  $\pi$  une représentation irréductible de  $H$ , alors:*

$$\lambda_0(\pi) \geq c(M) \lambda_0(\pi, \mathcal{G}).$$

**Démonstration.** a)  $L_h(L_{v+2} + M_{\mathfrak{S}})$  est un opérateur symétrique préservant les fonctions constantes, donc leur orthogonal, et dont le spectre est borné inférieurement par  $2/(1+r)^2$ , donc  $\lambda_1(B) \geq 2/(1+r)^2 \lambda_1(\mathfrak{S})$ ; par ailleurs on tire de  $v(x) \leq r$  que  $\lambda_k(\mathfrak{S}) \leq \lambda_k(\mathcal{G}) \leq r \lambda_k(\mathfrak{S})$ , ce qui montre a).

b) C'est le même raisonnement: dans le cas galoisien  $v$  est constante et  $L_h(L_{v+2} + M_{\mathfrak{S}})$  commute à l'action de  $H$ .  $\square$

Le corollaire 1 achève donc la démonstration du théorème B modulo la



remarque suivante: dans la section 2 nous avons montré l'inégalité

$$\lambda_1(V') \leq c \cdot \lambda_1(\mathcal{G}),$$

où  $\mathcal{G}$  est le graphe de  $\Gamma' \backslash \Gamma$  par rapport au système de générateurs  $A = \{\gamma \in \Gamma \mid d(\gamma x_0, x_0) \leq 3D\}$  où  $D = \text{diam}(V)$ . Mais  $A, A'$  étant des systèmes de générateurs de  $\Gamma$ ,  $\mathcal{G}_A, \mathcal{G}_{A'}$  les graphes correspondants sur  $\Gamma' \backslash \Gamma$ , on vérifie facilement que

$$\lambda_1(\mathcal{G}_A) \leq c(A, A') \lambda_1(\mathcal{G}_{A'}), \quad \lambda_0(\mathcal{G}_A, \pi) \leq c(A, A') \lambda_0(\mathcal{G}_{A'}, \pi),$$

si  $H = \Gamma' \backslash \Gamma$  est un groupe et  $\pi$  une représentation irréductible de celui-ci.

Il est facile de montrer à l'aide du minimax que  $\lambda_m(M') \geq c(M)$ ; en fait le même phénomène se passe pour  $\lambda_{m-1}(M')$ :

**COROLLAIRE 2.** *Soit  $M' \rightarrow M$  un revêtement galoisien de degré  $m$  de variétés Riemanniennes compactes connexes, alors il existe  $c(M) > 0$  tel que*

$$\lambda_{m-1}(M') \geq c(M).$$

*Démonstration.*

$$\lambda_{m-1}(M') \geq \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k(M') \geq \frac{c(M)}{m} \text{tr } B \geq \frac{c(M)}{(r+1)}.$$

En effet,

$$\text{tr } B = \frac{1}{(r+1)} \sum_{x \in P} v(x) \geq \frac{m}{(r+1)}. \quad \square$$

**THÉORÈME 7.** *Soit  $M' \rightarrow M$  un revêtement de variétés Riemanniennes connexes,  $M$  étant compact et  $\lambda_0(M')$  l'infimum du  $L^2$ -spectre du Laplacien de  $M'$ . Alors il existe une constante  $c(M) > 0$  telle que*

$$\lambda_0(M') \geq c \cdot \lambda_0(\mathcal{G}).$$

*Remarque.* Dans le cas où le graphe associé au revêtement est infini son laplacien combinatoire est un opérateur symétrique borné positif sur l'espace des fonctions de carré sommable.

Voici un corollaire qu'on peut lire dans [Br<sub>1</sub>], Théorème 3:

**COROLLAIRE 3.** *Supposons que  $\Gamma = \pi_1(M)$  ait la propriété (T), alors il existe une constante  $c = c(M) > 0$  telle que:*

- a) *Si  $M'$  est un revêtement fini de  $M$ , alors  $\lambda_1(M') > c$ .*
- b) *Si  $M'$  est un revêtement infini de  $M$ , alors  $\lambda_0(M') > c$ .*

*Démonstration.* a) Découle directement du Corollaire 1 du Théorème 5 et du lemme 3, section 1.

b) Il suffit de minorer  $\lambda_0(\mathcal{G})$ . Mais si  $\lambda_0(\mathcal{G}) = 0$ , cela signifie qu'il existe une suite de coefficients de type positif de la représentation quasi régulière  $\omega$  de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{C}[\Gamma' \setminus \Gamma]$  qui tend vers 1; par ailleurs,  $\Gamma' \setminus \Gamma$  étant infini,  $\omega$  ne contient pas l'identité, d'où une contradiction avec le fait que  $\Gamma$  possède la propriété (T).  $\square$

Le corollaire suivant peut se lire dans [Br<sub>2</sub>]:

**COROLLAIRE 4.** *Soit  $\Gamma$  un groupe opérant de manière totalement discontinue sans points fixes sur une variété Riemannienne  $N$  telle que  $\Gamma \setminus N$  soit compact. Alors  $\Gamma$  est moyennable si et seulement si l'infimum du  $L^2$ -spectre de  $N$  est nul.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{G}$  le graphe de  $\Gamma$  par rapport au système de générateurs  $A = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma\mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset\}$ ,  $\mathcal{F}$  étant un domaine fondamental fermé de l'action de  $\Gamma$  sur  $N$ .

Si  $\Gamma$  est moyennable, il possède la propriété de Følner ou, ce qui revient au même,  $\inf_{B \subset N} |\partial B|/|B| = 0$ , l'infimum étant pris sur toutes les parties  $B$  de  $\mathcal{G}$ ,  $\partial B$  désignant le bord de  $B$ , c'est-à-dire le nombre d'arêtes reliant  $B$  à son complémentaire. Il est alors clair, en considérant des parties de  $N$  de la forme  $\bigcup_{\gamma \in B} \gamma\mathcal{F}$  que

$$\inf_{B \subset N} \frac{\text{Vol}(\partial B)}{\text{Vol}(B)} = 0 \quad \text{ou encore} \quad \lambda_0(N) = 0.$$

Réciproquement, si  $\lambda_0(N) = 0$ , en vertu du théorème 7, on a  $\lambda_0(\mathcal{G}) = 0$ , donc il existe une suite de coefficients de type positif de la représentation régulière  $\omega$  de  $\Gamma$  dans  $L^2(\Gamma)$  qui converge vers 1, en d'autres termes,  $1_\Gamma$  adhère à  $\omega$  dans la topologie de Fell, ce qui est équivalent à la moyennabilité de  $\Gamma$ .  $\square$

Voici enfin l'application à la bicontinuité de l'induite:

**THÉORÈME 8.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret cocompact de  $G = SO(n, 1)$  ou*

$SU(n, 1)$  et  $\{\pi_k\}_{k=1}^\infty$ , une suite de représentations irréductibles de  $\Gamma$  de noyaux d'indice fini dans  $\Gamma$ .

Si  $1_G$  adhère à la suite  $\{\text{Ind}_\Gamma^G \pi_k\}$ , alors  $\pi_k$  tend vers  $1_\Gamma$  dans la topologie de Fell de  $\Gamma$ .

*Démonstration.* Il existe en vertu du lemme 2, section 1, une suite de représentations irréductibles  $\omega_k \subset \text{Ind}_\Gamma^G \pi_k$  avec  $\lim_k \omega_k = 1_G$ ; on peut donc supposer  $\omega_k = R_{s(k)}$ ,  $s(k) \in \Omega$ . Donc  $s(k) \rightarrow \rho$  pour  $k \rightarrow \infty$ ; par ailleurs, on a aussi (lemme 1, section 1) que  $\rho^2 - s^2(k)$  est dans  $Sp(\pi_k^*)$  où on envisage  $\pi_k^*$  comme représentation de  $\Gamma_k \backslash \Gamma$ ,  $\Gamma_k = \text{Ker } \pi_k$ . Soit  $V_k = \Gamma_k \backslash X$ , alors, en vertu du corollaire 1 du théorème 6, on a  $\rho^2 - s^2(k) \geq \lambda_0(\pi_k^*) \geq c(\Gamma \backslash X) \cdot \lambda_0(\pi_k^*, \mathcal{G}_k)$ . Donc, puisque  $\lambda_0(\pi_k^*, \mathcal{G}_k) \rightarrow 0$  si  $k \rightarrow \infty$ , on en conclut, comme au lemme 3 section 1, que  $\pi_k^* \rightarrow 1_\Gamma$ , et donc  $\pi_k \rightarrow 1_\Gamma$ .  $\square$

#### 4. Bornes inférieures de la première valeur propre du Laplacien d'une surface de Riemann

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème C.

Nous utiliserons un résultat de Peter Buser ([Bu<sub>1</sub>]) qui montre que l'on peut trianguler convenablement une surface de Riemann  $S$ . Nous estimerons ensuite  $\lambda_1(S)$  par la première valeur propre du graphe associé à cette triangulation. Enfin, des bornes inférieures de la première valeur propre du graphe donneront le résultat annoncé.

Nous décrivons d'abord la triangulation de  $S$  d'après ([Bu<sub>1</sub>]):

Soient  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  les géodésiques fermées simples de  $S$  de longueurs  $l_i \leq 2 \ln 2$ .  $Z_i = \{x \in S \mid d(x, \gamma_i) \leq d_i\}$  le cylindre autour de  $\gamma_i$  où  $d_i = \text{Arc sh}(\text{cosech } l_i/2)$ .

On munit alors  $Z_i$  du système de coordonnées  $(x, y)$  où  $0 \leq x < l_i$  et  $-d_i \leq y \leq d_i$  et on distingue quatre points

$$A_i = (0, -d_i + \ln 2/2), \quad B_i = \left(\frac{l_i}{2}, -d_i + \frac{\ln 2}{2}\right),$$

$$A'_i = \left(0, d_i - \frac{\ln 2}{2}\right), \quad B'_i = \left(\frac{l_i}{2}, d_i - \frac{\ln 2}{2}\right).$$

On joint  $A_i, B_i$  par les deux géodésiques de longueur minimale  $\sigma_i, \bar{\sigma}_i$ , de même  $A'_i, B'_i$  par  $\sigma'_i$  et  $\bar{\sigma}'_i$ . On obtient alors deux trigones  $W_i$  et  $W'_i$  dont les côtés sont

respectivement  $\sigma_i$ ,  $\bar{\sigma}_i$ ,  $\gamma_i$  et  $\sigma'_i$ ,  $\bar{\sigma}'_i$ ,  $\gamma'_i$ . La longueur des géodésiques  $\sigma_i$ ,  $\bar{\sigma}_i$ ,  $\bar{\sigma}'_i$ ,  $\sigma'_i$  est comprise entre  $\ln 2$  et  $\frac{4}{3} \ln 2$ , enfin leur volume est compris entre  $\pi/3$  et  $2\pi/3$ .

Sois  $S'$  le complémentaire dans  $S$  de l'intérieur de  $\bigcup_{i=1}^m (W_i \cup W'_i)$ . Alors il existe une triangulation de  $S'$  par des triangles géodésiques  $T$  dont la longueur des côtés est comprise entre  $\ln 2$  et  $2 \ln 2$  et le volume entre  $\pi - 6 \operatorname{Ar} \sin \sqrt{2/3}$  et  $\pi/2$ .

Notons  $\mathcal{D}$  l'ensemble des triangles et trigones. Le graphe  $\mathcal{G}$  que nous considérons a pour sommets les éléments de  $\mathcal{D}$  et deux sommets sont reliés par une arête si les triangles ou trigones correspondants ont un côté en commun.

LEMME 1. Soit  $t \in \mathcal{D}$  et  $B_t$  l'union de  $t$  et des triangles ou trigones adjacents à  $t$ .

Alors il existe une constante  $c_1 > 0$  telle que si  $\mu_1(B_t)$  est la première valeur propre non nulle du problème de Neumann de  $B_t$ , on a:

- a)  $\mu_1(B_t) \geq c_1$ , si  $t$  est un triangle.
- b)  $\mu_1(B_t) \geq c_1 l_i$ , si  $t$  est un trigone  $W_i$  ou  $W'_i$ .

*Démonstration.* a) Si  $t$  est un triangle,  $B_t$  contient au plus un trigone. S'il n'en contient pas, les informations sur la longueur des côtés et le volume des triangles jointes à l'inégalité de Cheeger montrent le lemme. S'il contient un trigone  $W_i$  ou  $W'_i$ , on remarque simplement que la longueur d'une courbe  $\eta$  homotope à  $\gamma_i$  est minorée par le volume du trigone compris entre  $\eta$  et  $\gamma_i$  (cf. [Bu<sub>2</sub>] lemme 1.13).

b) On procède exactement comme dans la preuve du théorème 1.1', du §5 de [D.P.R.S.].  $\square$

LEMME 2. Soient  $a(t)$  le volume de  $t \in \mathcal{D}$  et

$$\Lambda_1(\mathcal{G}) = \inf_{t=t'} \sum \left( \frac{F(t)}{a(t)} - \frac{F(t')}{a(t')} \right)^2,$$

l'infimum étant pris sur toutes les fonctions

$$F: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

telles que

$$\sum_t F(t) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_t \frac{F(t)^2}{a(t)} = 1.$$

Alors, il existe  $c_2 > 0$ , constante universelle telle que  $\lambda_1(S) \geq c_2 \cdot r \cdot \Lambda_1(\mathcal{G})$ ,  $r$  étant le rayon d'injectivité de  $S$ .

*Remarque.* On notera que  $\Lambda_1(\mathcal{G})$  est la première valeur propre non nulle d'un Laplacien combinatoire sur un graphe dont les sommets sont pondérés.

*Démonstration.* Soient  $f \in C^\infty(S)$ ,  $t \in \mathcal{D}$ ,  $a(B_t)$  le volume de  $B_t$ . On a, en vertu du lemme 1:

$$\int_{B_t} \|\nabla f(y)\|^2 dy \geq c_1 \cdot r \left\{ \int_{B_t} f(y)^2 dy - \frac{1}{a(B_t)} \left( \int_{B_t} f(y) dy \right)^2 \right\}.$$

En sommant sur  $t \in D$ , on obtient:

$$4 \int_S \|\nabla f(y)\|^2 dy \geq c_1 \cdot r \left\{ 4 \int_S f(y)^2 dy - \sum_t \frac{1}{a(B_t)} \left( \int_{B_t} f(y) dy \right)^2 \right\}.$$

Divisions par  $4 \int_S f(y)^2 dy$  et remarquons que:

$$\int_S f(y)^2 dy = \sum_t \int_t f(y)^2 dy \geq \sum_t \frac{1}{a(t)} \left( \int_t f(y) dy \right)^2.$$

En posant  $F(t) = \int_t f(y) dy$ , on obtient que le quotient de Rayleigh de la fonction  $f$  est minoré par:

$$c_1 \cdot r \cdot \frac{\sum_t \left\{ \frac{F(t)^2}{a(t)} - \frac{[(I+M)F(t)]^2}{4(I+M)a(t)} \right\}}{\sum_t \frac{F(t)^2}{a(t)}},$$

où

$$MF(t) = \sum_{t' \neq t} F(t').$$

On applique l'identité:

$$\begin{aligned} \frac{b_1^2}{a_1} + \frac{b_2^2}{a_2} + \frac{b_3^2}{a_3} + \frac{b_4^2}{a_4} - \frac{(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)^2}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \\ = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^{-1} \sum_{i \neq j} a_i a_j \left( \frac{b_i}{a_i} - \frac{b_j}{a_j} \right)^2, \end{aligned}$$

où  $b_1 = F(t)$ ,  $a_1 = a(t)$ ,  $b_i = F(t')$ ,  $a_i = a(t')$ ,  $2 \leq i \leq 4$ ,  $t' \equiv t$ . Le numérateur de la fraction ci-dessus vaut alors:

$$\frac{1}{8} \sum_i \frac{b(t)}{(I+M)a(t)},$$

où

$$b(t) = \sum_{z,t} a(z)a(y) \left( \frac{F(z)}{a(z)} - \frac{F(y)}{a(y)} \right)^2,$$

la somme étant sur les couples  $z, y$  adjacents ou égaux à  $t$ . Il s'ensuit que:

$$b(t) \geq 2 \sum_{t' \equiv t} a(t)a(t') \left( \frac{F(t)}{a(t)} - \frac{F(t')}{a(t')} \right)^2.$$

On obtient le lemme en remarquant que  $c_3 \leq a(t) \leq c_4$ ,  $c_3$  et  $c_4$  étant des constantes universelles.  $\square$

**LEMME 3.** *Si  $|\mathcal{G}|$  est le nombre de sommets de  $\mathcal{G}$ ,  $D(\mathcal{G})$  le diamètre de  $\mathcal{G}$ , alors il existe  $c_5 > 0$  telle que:*

$$\Lambda_1(\mathcal{G}) \geq \frac{c_5}{D(\mathcal{G}) |\mathcal{G}|}.$$

*Démonstration.* Soit  $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , fonction de norme 1 de moyenne 0 réalisant le minimum de la forme quadratique du lemme 2.

Soient  $u, u' \in \mathcal{G}$  et  $t_0 = u, t_1, t_2, \dots, t_k = u'$ , une suite de sommets tels que  $t_i \equiv t_{i+1}$  pour  $0 \leq i \leq k-1$  et  $k = d(u, u')$ , la distance de  $u$  à  $u'$  dans  $\mathcal{G}$ . Alors:

$$\left( \frac{F(u)}{a(u)} - \frac{F(u')}{a(u')} \right)^2 = \left( \sum_{i=0}^{k-1} \frac{F(t_i)}{a(t_i)} - \frac{F(t_{i+1})}{a(t_{i+1})} \right)^2 \leq d(u, u') \cdot \Lambda_1(\mathcal{G}).$$

Donc:

$$\sum_{u, u'} a(u)a(u') \left( \frac{F(u)}{a(u)} - \frac{F(u')}{a(u')} \right)^2 \leq c_4 \cdot \Lambda_1(\mathcal{G}) D(\mathcal{G}) \cdot |\mathcal{G}|^2.$$

Par ailleurs, la somme de gauche vaut:

$$2 \sum_u a(u) \geq 2c_3 |\mathcal{G}|, \text{ d'où le résultat. } \square$$

**COROLLAIRE.** Soient  $S$  une surface de Riemann compacte de genre  $g \geq 2$ ,  $d$  son diamètre,  $V$  son volume et  $r$  son rayon d'injectivité.

Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que:

$$\text{a) } \lambda_1(S) > \frac{c \cdot \min(r, 1)}{d \cdot V},$$

$$\text{b) } \lambda_1(S) > \frac{c \cdot \min(r, 1)}{V^2}.$$

*Démonstration.* Il est clair qu'il existe une constante universelle  $c_6 > 0$  telle que

$$D(\mathcal{G}) \leq c_6 d.$$

Par ailleurs:  $c_3 D(\mathcal{G})$  et  $c_3 |\mathcal{G}|$  sont inférieures à  $V$ . Les lemmes 2 et 3 permettent alors de conclure.  $\square$

## RÉFÉRENCES

- [B<sub>1</sub>] M. BURGER, *Estimation de petites valeurs propres du Laplacien d'un revêtement de variétés Riemanniennes compactes*. C.R.A.S. Paris, t. 302, Série I, no 5 (1986) p. 191–194.
- [B<sub>2</sub>] M. BURGER, *Petites valeurs propres du Laplacien et Topologie de Fell*. Thèse, Lausanne 1986.
- [B–C] M. BURGER et B. COLBOIS, *A propos de la multiplicité de la première valeur propre du Laplacien d'une surface de Riemann*. C.R.A.S. Paris, t. 300, Série I, no 8 (1985) p. 247–249.
- [Bo] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, chap. 1–5, Masson Paris, 1981.
- [Br<sub>1</sub>] R. BROOKS, *The spectral geometry of a tower of coverings*. J. of Diff. Geom. 23 (1986) p. 97–107.
- [Br<sub>2</sub>] R. BROOKS, *The fundamental group and the spectrum of the Laplacian*. Comm. Math. Helv. 56 (1981) p. 581–598.
- [Bu<sub>1</sub>] P. BUSER, *Cubic graphs and the first eigenvalue of a Riemann surface*. Math. Z. 162 (1978) p. 87–99.
- [Bu<sub>2</sub>] P. BUSER, *On Cheeger's inequality  $\lambda_1 \geq h^2/4$* . Proc. Symp. Pure Math. 36 (1980) p. 49–77.
- [D–K] C. DELAROCHE et A. KIRILLOV, *Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés*. Sémin. Bourbaki, 20<sup>ème</sup> année, no 334 (1967–68).
- [D.P.R.S] J. DODZIUK, T. PIGNATARO, B. RANDOL et D. SULLIVAN, *Estimating small eigenvalues of Riemann surfaces*. Preprint.
- [Fe] J. M. G. FELL, *Weak containment and induced representation of groups*. Canad. J. Math. 14 (1962) p. 257–268.

- [G.G.P-S] I. M. GELFAND, M. I. GRAEV et I. PIATETSKII-SHAPIRO, *Representation Theory and Automorphic Functions*. W. B. Saunders 1969.
- [H<sub>1</sub>] H. HUBER, *Untere Schranken für den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen*. Comm. Math. Helv. 61 (1986) p. 46–59.
- [H<sub>2</sub>] H. HUBER, *Ueber die Eigenwerte des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen*. Comm. Math. Helv. 51 (1976) p. 215–231.
- [K] T. H. KOORNWINDER, *Jacobi functions and analysis on non compact Lie groups in: Special functions: group theoretical aspects and applications*.
- [Ka] D. A. KAZHDAN, *Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups*. Funct. Anal. Appl. 1 (1968) p. 63–65.
- [M] J. MILLSON, *On the first Betti number of a constant negatively curved manifold*. Ann. Math. 104 (1976) p. 235–247.
- [R<sub>1</sub>] B. RANDOL, *Small eigenvalues of the Laplace operator on compact Riemann surfaces*. Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974) p. 996–1000.
- [R<sub>2</sub>] B. RANDOL, *Cylinders in Riemann surfaces*. Comm. Math. Helv. 54 (1979) p. 1–5.
- [Se] J.-P. SERRE, *Le problème des groupes de congruence pour  $SL_2$* . Ann. Math. 92 (1970) p. 489–527.
- [V] M.-F. VIGNÉRAS, *Quelques remarques sur la conjecture  $\lambda_1 \geq \frac{1}{4}$* . Séminaire de théorie des nombres, Delange-Pisot-Poitou. Paris (1981–82) p. 321–343.

Mathematisches Institut  
 Rheinsprung 21  
 CH-4051 Basel  
 (Schweiz)

Reçu le 4 november 1986