

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 63 (1988)

Artikel: Sur la multiplicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann à courbure constante.
Autor: Colbois, B., Colin de Verdière de
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-48203>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur la multiplicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann à courbure constante

B. COLBOIS* et Y. COLIN DE VERDIÈRE

Introduction

Dans [CV1] on montre que pour tout entier N une variété compacte M de dimension ≥ 3 admet toujours une métrique g_0 telle que la multiplicité de la première valeur propre non nulle du Laplacien de (M, g_0) soit N .

On sait qu'il n'en est pas de même pour les surfaces. Un résultat général de Besson [BN], améliorant une estimation précédente de Cheng [CG] montre que la multiplicité de la $k^{\text{ième}}$ valeur propre λ_k est inférieure ou égale à $4g + 2k - 1$. Dans [BC] on montre que, pour tout p premier, il existe des surfaces de Riemann compactes de genre $g = p(p - 1) + 1$, ayant leur première valeur propre non nulle de multiplicité $p - 1$.

Dans [CS] on étudie le comportement asymptotique des valeurs propres d'une surface de Riemann X séparée en N parties disjointes $(X_i)_{i=1}^N$, à bord géodésique de longueur tendant vers 0. On associe à chaque surface un graphe pondéré dont le spectre permet d'estimer les valeurs propres de la surface tendant vers 0.

Il se trouve que la réunion de [CV1] et [CS] permet d'obtenir des exemples de surfaces de Riemann avec première valeur propre non nulle de grande multiplicité. Plus précisément, on a:

THÉORÈME. *Pour tous $g \geq 3$, $p \geq 0$ entiers, il existe une surface de Riemann X à courbure -1 , de genre g , avec p cusps telle que la multiplicité de sa première valeur propre non nulle soit:*

$$E \left[\frac{1 + \sqrt{8g + 1}}{2} \right] \quad (E = \text{partie entière}).$$

L'idée de la démonstration est la suivante. On considère le graphe complet C_N muni d'un Laplacien combinatoire dont la première valeur propre non nulle est

* Durant la rédaction de cet article, le premier auteur bénéficiait d'une bourse de la fondation Pierre Mercier.

de multiplicité $N - 1$. On associe à C_N une famille à un paramètre de surfaces X_0^ε , comme indiqué dans [CS], que l'on fait dégénérer vers le graphe. On perturbe la famille X_0^ε dans l'espace de Teichmüller en X_θ^ε .

On utilise alors l'outil fondamental de la preuve, le Lemme des petites valeurs propres, dû à Colin de Verdière et utilisant les techniques de [CV1]. Il permet de comparer la restriction q_E^ε à l'espace $E(X_\theta^\varepsilon)$ engendré par les N premières fonctions propres de X_θ^ε de l'intégrale de Dirichlet sur $H^1(X_\theta^\varepsilon)$ avec sa restriction à un espace test $E_0(X_\theta^\varepsilon)$, ce dernier espace étant étroitement relié aux fonctions sur le graphe. Dans un sens qui sera précisé, q_E^ε converge vers une forme quadratique sur le graphe, ce qui permet de conclure par un argument topologique. Notons que le Lemme des petites valeurs propres permet entre autre de redémontrer [CS] de façon plus conceptuelle. Le résultat prouvé au §V permet une simplification notable de [CV1], (voir [CV2] pour les idées générales et [CV4] pour les détails techniques) [CV3] contient un développement sur les idées de transversalité utilisées à la fin de la preuve, idées remontant à V. Arnold (1972).

I. Lemme des petites valeurs propres

L'approximation des petites valeurs propres et des espaces propres correspondant d'un hamiltonien ≥ 0 sur un espace de Hilbert repose sur un Lemme abstrait: ces petites valeurs propres sont proches des valeurs propres d'une forme quadratique dite "matrice d'interaction" (voir par exemple [HS]). Cette forme quadratique est la restriction à un espace test E_0 de la forme quadratique ("intégrale de Dirichlet") associée à l'hamiltonien. Nous avons besoin d'une forme très précise de ce résultat d'approximation que nous n'avons pas pu localiser dans la littérature existante.

Introduisons d'abord quelques notations:

(i) Si $(E_0, \langle, \rangle_0)$ est un espace euclidien de dimension finie, q une forme quadratique sur E_0 et \langle, \rangle une autre structure euclidienne sur E_0 définie par: $\langle x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle_0$ où A est symétrique sur $(E_0, \langle, \rangle_0)$, on pose: $[q, \langle, \rangle] = Q$ où Q est la forme quadratique sur E_0 définie par $Q(x, y) = q(A^{-1/2}x, A^{-1/2}y)$; Q a le même spectre relativement à \langle, \rangle_0 que q relativement à \langle, \rangle .

(ii) Soit maintenant (H, \langle, \rangle) un espace de Hilbert et q une forme quadratique ≥ 0 fermée sur H de domaine D . Soient E_0 et E deux sous-espaces vectoriels de D de même dimension finie N tels que E est le graphe d'une application linéaire B de E_0 dans E_0^\perp . On note $\beta \in L(E_0, E)$ l'isomorphisme

$$\beta x = Bx + x \quad \text{et} \quad q_{E_0} \text{ (resp. } q_E) = q_{|E_0} \text{ (resp. } q_{|E}).$$

Puis $q_{E/E_0} = [\beta^*(q_E), \beta^*(\langle \cdot, \cdot \rangle_E)]$.

Si E est somme d'espaces propres de q de valeurs propres $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N \leq C_1$, alors q_{E/E_0} a sur $(E_0, \langle \cdot, \cdot \rangle_{E_0})$ les mêmes valeurs propres $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq N}$. De plus on a: $\|q_{E/E_0} - \beta^*(q_E)\| = O(\|B\|^2)$, uniformément lorsque N et C_1 sont fixés. Cela résulte de l'inégalité $|\|\beta x\| - \|x\|| \leq \|B\| \cdot \|x\|$ qui est un corollaire immédiat de Pythagore.

(iii) On note maintenant $|x|_0^2 = \langle x, x \rangle$ la norme de H et $|\cdot|_1^2 = |\cdot|_0^2 + q(\cdot)$ la norme naturelle sur D , domaine de q . On note A l'extension de Friedrichs de q et pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $P_{q,I}$ le projecteur spectral de A , associé à l'intervalle I .

LEMME I.1 (des "petites valeurs propres"). *Soit $C_1 > 0$ et N un entier donné tels que:*

(PVPi) $\dim(P_{q,[0,C_1]}) \leq N$,

(PVPii) *Il existe un sous-espace E_0 de dimension N de D et un $\varepsilon > 0$ tels que:*

$$\forall f \in E_0, \quad \forall g \in D, \quad q(f, g) \leq \varepsilon |f|_0 |g|_1.$$

Alors il existe $\varepsilon_0(C_1, N)$ et $C(C_1, N)$ tels que, si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, alors:

a) *A admet N valeurs propres (avec multiplicité) $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N \leq C_1$ et si $0 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_N$ sont les valeurs propres de q_{E_0} on a:*

$$\forall 1 \leq i \leq N, \quad \mu_i - C\varepsilon^2 \leq \lambda_i \leq \mu_i.$$

b) *Si E est le sous-espace de D engendré par les fonctions propres de A associées aux $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq N}$, on a:*

$$\|q_{E/E_0} - q_{E_0}\| \leq C\varepsilon^{1+1/N}.$$

DÉFINITION I.2. Sous les hypothèses du Lemme PVP, q_{E_0} porte le nom de matrice d'interaction.

Preuve. Elle se fait en 3 étapes, suivant des idées analogues à celles utilisées dans [CV1].

1^{ière} étape. Le cas $N = 1$. Soit f un générateur de E_0 avec $|f|_0 = 1$. De (PVPii) on déduit $q(f) \leq \varepsilon \sqrt{1 + q(f)}$ et donc $q(f) = O(\varepsilon) |f|_0$.

A admet donc une valeur propre $\lambda_1 < C_1$ pour ε assez petit. Soit alors $f = f_1 + f_\infty$ avec $Af_1 = \lambda_1 f_1$ et $\langle f_1, f_\infty \rangle = 0$. On a alors $q(f_\infty) = q(f, f_\infty) \leq \varepsilon(|f_\infty|_0^2 + q(f_\infty))^{1/2}$ et comme $q(f_\infty) \geq C_1 |f_\infty|_0^2$ on a $q(f_\infty) \leq \varepsilon(1 + (1/C_1))^{1/2} q(f_\infty)^{1/2}$ et donc $q(f_\infty) \leq \varepsilon^2(1 + (1/C_1))$ et $|f_\infty|_0 \leq ((1 + C_1)^{1/2}/C_1)\varepsilon$. On a alors $\mu_1 = q(f) = \lambda_1 |f_1|_0^2 + q(f_\infty) \leq \lambda_1 + (1 + (1/C_1))\varepsilon^2$.

L'autre inégalité $\lambda_1 \leq \mu_1$ est une conséquence immédiate du minimax. On note aussi que l'angle entre E_0 et E vérifie $\alpha = 0(\varepsilon)$.

2^{ème} étape. Pour les mêmes raisons que dans la 1^{ère} étape, il est clair que A admet N valeurs propres $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N \leq C_1$ (ε assez petit). On note E la somme des espaces propres correspondants. On va prouver les inégalités cherchées sur les valeurs propres et la $O(\varepsilon)$ -proximité de E et E_0 .

Pour cela on applique les résultats de la 1^{ère} étape à l'extension $A^{\wedge N}$ de A au produit tensoriel antisymétrique $H \wedge \dots \wedge H$ d'ordre N . Les éléments de cet espace sont connus dans la mécanique quantique des systèmes de N particules indiscernables sous le nom de *fermions*. On a, par définition

$$A^{\otimes N}(f_1 \otimes \dots \otimes f_N) = \sum_{j=1}^N f_1 \otimes \dots \otimes A f_j \otimes \dots \otimes f_N$$

et on considère $A^{\wedge N}$ comme la restriction de $A^{\otimes N}$ au sous espace $H \wedge \dots \wedge H$ de $H \otimes \dots \otimes H$. Il est clair que la première valeur propre de $A^{\wedge N}$ est $\bigwedge_1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_N$, l'espace propre étant $\bigwedge^N E$ et que $\dim P_{q, [0, C_1]}^{\wedge N} = 1$.

Il reste à prouver que l'hypothèse (PVPii) est vérifiée par $A^{\wedge N}$ et $\tilde{E}_0 = \bigwedge^N E_0$. Il suffit de prouver l'inégalité (PVPii) pour $f_1 \otimes \dots \otimes f_N$ ($f_j \in E_0$).

Soit (g_i) une base orthonormée de D pour $| \cdot |_1$ et $g = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \otimes G_i$ un élément de $H^{\wedge N}$. On a

$$q^{\otimes N}(f_1 \otimes \dots \otimes f_N, g) = \sum_{j=1}^N q_j(f_1 \otimes \dots \otimes f_N, g)$$

avec

$$q_j(f_1 \otimes \dots \otimes f_N, g_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes g_{\alpha_N}) = \langle f_1, g_{\alpha_1} \rangle_0 \dots \langle A f_j, g_{\alpha_j} \rangle_0 \dots \langle f_N, g_{\alpha_N} \rangle_0.$$

Alors, en raisonnant par exemple sur q_1 on a:

$$\begin{aligned} q_1\left(f_1 \otimes \dots \otimes f_N, \sum_{i=1}^{\infty} g_i \otimes G_i\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} q(f_1, g_i) \langle f_2 \otimes \dots \otimes f_N, G_i \rangle_0 \\ &= q\left(f_1, \sum_{i=1}^{\infty} \langle f_2 \otimes \dots \otimes f_N, G_i \rangle_0 g_i\right) \\ &\leq \varepsilon |f_1|_0 \left| \sum_{i=1}^{\infty} \langle f_2 \otimes \dots \otimes f_N, G_i \rangle_0 g_i \right|_1 \\ &\leq \varepsilon |f_1|_0 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle f_2 \otimes \dots \otimes f_N, G_i \rangle_0^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \varepsilon |f_1|_0 \dots |f_N|_0 \left(\sum_{i=1}^{\infty} |G_i|_0^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|g|_1^2 &= |g|_0^2 + \sum_{j=1}^N q_j(g) \geq |g|_0^2 + q_1(g) \\
&= \langle g, g \rangle_0 + \langle A_1 g, g \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |G_i|_0^2.
\end{aligned}$$

D'où

$$q_1(f_1 \otimes \cdots \otimes f_N, g) \leq \varepsilon |f_1 \otimes \cdots \otimes f_N|_0 |g|_1$$

et

$$q^{\wedge N}(f_1 \wedge \cdots \wedge f_N, g) \leq N\varepsilon |f_1 \wedge \cdots \wedge f_N|_0 |g|_1.$$

On peut donc appliquer la première étape d'où l'on déduit que

$$\mu_1 + \cdots + \mu_N - C\varepsilon^2 \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_N \leq \mu_1 + \cdots + \mu_N$$

et comme d'après le principe du minimax

$$\forall i, \lambda_i \leq \mu_i, \text{ on a: } \forall i, 1 \leq i \leq N, \quad \mu_i - C\varepsilon^2 \leq \lambda_i \leq \mu_i.$$

On a donc aussi la $O(\varepsilon)$ -proximité de $\bigwedge^N E$ et $\bigwedge^N E_0$, donc celle de E et E_0 .

3^{ème} étape. Il reste à prouver la proximité des formes quadratiques q_{E/E_0} et q_{E_0} . Comme $\|B\| = O(\varepsilon)$, il suffit de comparer $\beta^*(q_E)$ et q_{E_0} .

$\beta^*(q_E(x)) = q(\beta x) \leq q(x')$ où $x' \in E_0$ est tel que sa projection orthogonale sur E soit βx : et $\|x - x'\| = O(\varepsilon^2)$. Donc $q_{E/E_0} \leq q_{E_0} + O(\varepsilon^2)$. On peut alors appliquer le Lemme II de [CV1].

II. Famille de surfaces

Soit X une surface complète. Le Laplacien Δ de X est formellement autoadjoint sur $C_0^\infty(X)$ et admet une unique extension autoadjointe sur $L^2(X)$. Le spectre essentiel de Δ , noté $\text{essspec } \Delta$, se compose des points d'accumulation du spectre de Δ et des valeurs propres de multiplicité infinie. Si $\Pi_1(X)$, groupe fondamental de X , est de génération finie et que la courbure à l'infini est ≤ -1 , alors $\text{essspec } \Delta \geq \frac{1}{4}$ [DY].

On suppose que X est partagée en domaines (X_i) $1 \leq i \leq N$ dont les bords communs sont des géodésiques périodiques de petite longueur, $\gamma_a = X_i \cap X_j$ pour $a = \{i, j\}$, l_a est la longueur de γ_a . Supposons en outre qu'il existe des voisinages tubulaires Z_a de γ_a de grande largeur α_a tels que $l_a \text{ ch } \alpha_a = L$, $L > 0$ fixé et la

métrique g de X induit sur Z_a la métrique à courbure -1 , $dx^2 + l_a^2 \operatorname{ch}^2 x d\theta^2$, $(x, \theta) \in [-\alpha_a, \alpha_a] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. (Coordonnées de Fermi). Soient $\hat{X}_i = X_i \setminus \bigcup_a Z_a$, E_0 l'espace des fonctions $f \in H^1(X)$ telles que $f|_{\hat{X}_i} = x_i$ si $\operatorname{vol} X_i < \infty$, $f|_{\hat{X}_i} = 0$ si $\operatorname{vol} X_i = \infty$ et f harmonique sur les Z_a . Pour appliquer le lemme des petites valeurs propres à E_0 (avec $H = L^2(X)$, q la forme quadratique de Dirichlet, D son domaine) on va exhiber une famille à un paramètre X^ε , $\varepsilon > 0$, du type de ci-dessus, pour laquelle les conditions (PVPi) et (PVPii) sont vérifiées.

Description de la famille X^ε

Si X est une surface complète à courbure -1 , à groupe fondamental de génération finie, X est difféomorphe à une surface compacte de genre g avec p cusps et q vasques hyperboliques [KA]. Via une décomposition en pantalons comme dans [BU1] on peut décomposer X en parties $(X_i)_{i=1}^N$, chaque X_i étant un domaine à bord géodésique, chaque géodésique du bord de X_i correspondant à une géodésique de la décomposition en pantalons. On sait aussi qu'une telle surface est caractérisée par la donnée de $(3g - 3 + p + 2q)$ longueurs de géodésiques de la décomposition en pantalons ainsi que par les paramètres de twist associés.

On construit X^ε à partir de X comme suit:

Les géodésiques de la décomposition en pantalons de X n'appartenant pas au bord d'un des X_i , $1 \leq i \leq N$, restent de longueur fixe. Si $\gamma_a = X_i \cap X_j$, on choisit γ_a^ε de longueur $l_a^\varepsilon = \varepsilon l_a$. Le twist ne change pas. Au découpage $X^\varepsilon = \bigcup_{i=1}^N X_i^\varepsilon$, on associe le graphe Γ d'adjacence de la famille X_i^ε . Les arêtes sont en bijection avec les géodésiques périodiques $X_i^\varepsilon \cap X_j^\varepsilon$ (on peut supposer que $X_i^\varepsilon \cap X_j^\varepsilon$ est soit l'ensemble vide, soit connexe). Notons que $\operatorname{vol} X_i^\varepsilon = \operatorname{vol} X_i$.

On sait [RL] qu'autour de γ_a^ε on a un voisinage tubulaire Z_a^ε qui est grand lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$: En fait $l_a^\varepsilon \operatorname{cha} \geq C$ (C constante universelle, a longueur du tube). On peut choisir $L = 1$.

PROPOSITION II.1. *La famille X^ε décrite ci-dessus vérifie (PVPi) et (PVPii).*

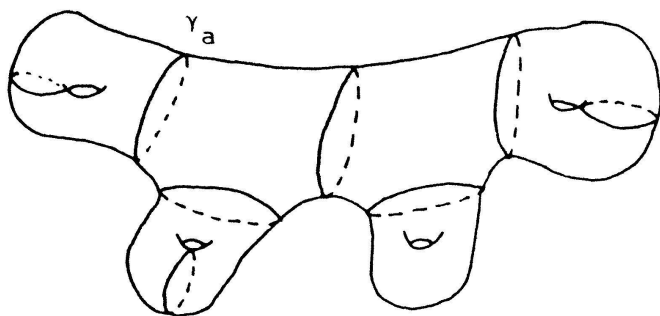
PROPOSITION II.2. *Soit $f \in E_0(X^\varepsilon)$ $\|f\| = 1$ $f|_{\hat{X}_i^\varepsilon} = x_i$. Alors:*

(i) $(\int_{X^\varepsilon} f^2) / \sum_{i=1}^N V_i x_i^2 \rightarrow 1$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ où

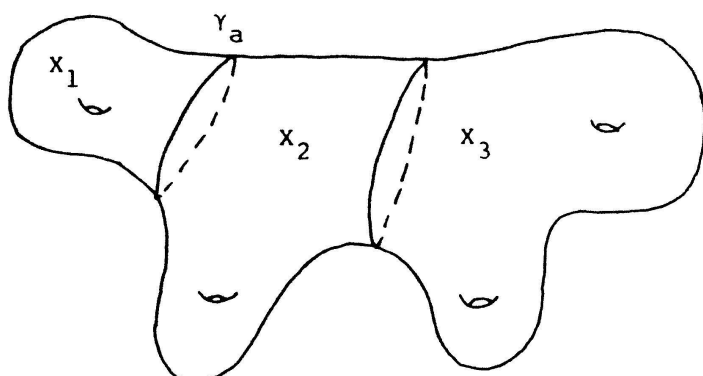
$$V_i = \begin{cases} \operatorname{vol} X_i^\varepsilon & \text{si } \operatorname{vol} X_i^\varepsilon < \infty \\ 0 & \text{si } \operatorname{vol} X_i^\varepsilon = \infty \end{cases}$$

(ii) $\int_{X^\varepsilon} |df|^2 \sim \varepsilon / \Pi \sum_{a \in A} l_a |d_a x|^2$, où $d_{\{i,j\}} x = x_i - x_j$.

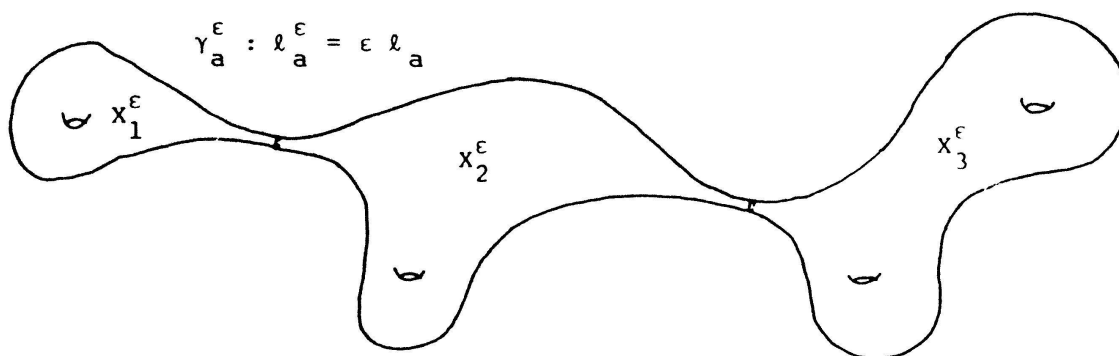
La preuve de ces deux propositions découlera directement des considérations qui

Exemple

X obtenue à partir
de 6 pantalons



On découpe X en trois
morceaux X_1, X_2, X_3
obtenus à partir du
découpage en pantalons.



On modifie uniquement la longueur du bord des X_i en la faisant
tendre vers 0.

Le graphe associé est



vont suivre sur la notion de capacité d'un condensateur et de 0-condensateur. Notons S_1 les sommets Γ correspondant aux parties X_i^ϵ de volume fini V_i . $L^2(S_1, \mu)$ est l'espace de Hilbert des fonctions sur S_1 avec la mesure $\mu = \sum_{i \in S_1} V_i \delta(i)$.

On a alors une application naturelle

$$U: L^2(S_1, \mu) \rightarrow H^1(X^\epsilon)$$

$$(x_i) \mapsto f$$

où f prend la valeur x_i sur \hat{X}_i^ε où $\text{vol } X_i^\varepsilon < \infty$, la valeur 0 sur \hat{X}_i^ε où $\text{vol } X_i^\varepsilon = \infty$, et f harmonique sur les Z_a^ε .

III. Condensateurs

Soit \bar{X} une variété riemannienne compacte de dimension n , d'intérieur X . On suppose que l'on a une partition du bord $bX = C_+ \cup C_-$ où C_+ et C_- sont deux sous-variétés fermées non vides de dimension $(n-1)$.

DÉFINITION III.1. La capacité du condensateur $\mathcal{C} = (X, C_+, C_-)$ est le nombre $\text{cap } \mathcal{C} = \inf (\int_X |df|^2)$ où l'inf porte sur les fonctions $f \in H^1(\bar{X})$ telles que $f|_{C_+} = 1, f|_{C_-} = 0$. Il existe une unique $f_0 \in H^1(\bar{X})$ vérifiant les conditions précédentes et harmonique dans X . Cette fonction est le potentiel d'équilibre du condensateur pour les tensions sur C_+ et C_- indiquées. On pose

$$f_{x_+x_-} = (x_+ - x_-)f_0 + x_-, \quad f_{x_+x_-}|_{C_+} = x_+, \quad f_{x_+x_-}|_{C_-} = x_-.$$

On a alors: $\int_X |df_{x_+x_-}|^2 = \text{cap } \mathcal{C} (x_+ - x_-)^2$.

DÉFINITION III.2. Soit \mathcal{C}_ε une famille de condensateurs; on dira que \mathcal{C}_ε est un 0-condensateur si les 4 propriétés suivantes sont satisfaites.

(Ci) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\text{Cap } (\mathcal{C}_\varepsilon) / \varepsilon) = 1$

(Cii) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{X^\varepsilon} |f_{a,b}|^2 = V_+ a^2 + V_- b^2,$
 V_+, V_- ne dépendent pas de ε

(Ciii) Si f_0^ε est le potentiel d'équilibre,

$$\left\| \frac{\partial f_0^\varepsilon}{\partial n} \right\|_{L^2(C_\pm^\varepsilon)} = O(\varepsilon)$$

(Civ) L'application $\text{Tr}_\varepsilon : H^1(X^\varepsilon) \rightarrow L^2(C_\pm^\varepsilon)$ est uniformément majorée en norme quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

PROPOSITION III.3. *Le cylindre hyperbolique à courbure -1*

$Y^\varepsilon = [-a, a] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, a réel positif, avec la métrique

$g_\varepsilon = dx^2 + l_0^2 \text{ch}^2 x d\theta^2$, $l_0 = \pi \cdot \varepsilon$, $l_0 \text{cha} = l$, $l > 0$ fixé,

$C_\pm = \{\pm a\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

est un 0-condensateur.

Preuve. Le potentiel d'équilibre f_0^ε est solution de l'équation $f''(x) + \text{th } x f'(x) = 0$, $f(-a) = 0$, $f(a) = 1$. $f_0^\varepsilon(x) = \delta^\varepsilon \cdot \text{arcsinh } x + \frac{1}{2}$, $\delta^\varepsilon = 1/2 \text{ arcsinh } a$, $a = \text{argch } l/l_0$. On vérifie les propriétés de 0-condensateur.

$$(Ci) \int_0^1 d\theta \int_{-a}^a dx l_0 \text{ch } x (\delta^\varepsilon)^2 / \text{ch}^2 x = 2l_0 (\delta^\varepsilon)^2 \text{ arcsinh } a$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4 \text{ arcsinh } a} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\text{ arcsinh } a} = 1.$$

$$(Cii) (f_{a,b}^\varepsilon)^2 = a^2 (f_0^\varepsilon)^2 + b^2 (1 - f_0^\varepsilon)^2 + 2ab f_0^\varepsilon (1 - f_0^\varepsilon).$$

Posons $V = \int_{Y^\varepsilon} (f_0^\varepsilon)^2$. On a $\int_{Y^\varepsilon} |f_{a,b}^\varepsilon|^2 = V(a^2 + b^2) + 2ab \int_{Y^\varepsilon} f_0^\varepsilon (1 - f_0^\varepsilon)$. Pour voir que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{Y^\varepsilon} f_0^\varepsilon (1 - f_0^\varepsilon) = 0$ il suffit de vérifier que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 d\theta \int_0^a dx (1 - f_0^\varepsilon) l_0 \text{ch } x = 0$ et $1 - f_0^\varepsilon(x) = (1/2 \text{ arcsinh } a)(\text{arcsinh } a - \text{arcsinh } x) \leq (a - x)/\text{ch } x$. Ainsi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 d\theta \int_0^a dx (1 - f_0^\varepsilon) \text{ch } x \cdot l_0 \leq l_0 \frac{a^2}{2} = O(\varepsilon \ln^2 \varepsilon).$$

$$\text{Remarque III.4. } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{Y^\varepsilon} f_0^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi \varepsilon \cdot l/l_0 = l.$$

$$(Ciii) \left| \frac{df}{dn} \right| = \frac{\delta^\varepsilon}{\text{ch } x} \Rightarrow \left\| \frac{df}{dn} \right\|_{L^2(C_\pm)} = O(\varepsilon).$$

(Civ) Cette propriété résulte de considérations plus générales du type “géométrie bornée”. Soit X une variété compacte à bord et $T: H^1(X) \rightarrow L^2(bX)$ la trace naturelle. A chaque métrique riemannienne sur X sont associées des normes naturelles sur $H^1(X)$ et $L^2(bX)$ et donc on a une norme d'opérateur $\| \| T \| \|_g$.

On peut facilement prouver le

LEMME III.5. *Sous les hypothèses précédentes, et si $\dim X = n$, si g_0, g_1 sont des métriques vérifiant $e^{-c} g_0 \leq g_1 \leq e^c g_0$ sur X on a: $\| \| T \| \|_{g_1} \leq e^{(n+1/2)C} \| \| T \| \|_{g_0}$.*

Dans le cas qui nous intéresse on applique le Lemme III.5 au voisinage collier X de C_\pm de largeur 1. $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1]$ avec les métriques $g_a = ds^2 + (\text{ch}(a - s)/\text{ch } a)^2 d\theta^2$ ($a \geq a_0 > 0$) et $g_\infty = ds^2 + e^{-2s} d\theta^2$.

Preuve proposition II.1. (PVPi) Cette propriété découle du théorème 1.1' de [DPRS] et du fait qu'à l'exception des géodésiques dont la longueur tend vers 0 avec ε par construction, [RL] nous assure que les autres ont leur longueur bornée inférieurement par une constante C_0 indépendante de ε lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Remarque. (PVPi) découle également du fait que la constante de Cheeger du problème de Neumann de X_i , $1 \leq i \leq N$, est bornée inférieurement indépendamment de ε ([BU2] et [SWY]).

(PVPii) Si $f \in E_0(X^\varepsilon)$, $g \in H^1(X^\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \int_{X^\varepsilon} \langle df, dg \rangle &= \sum_{a \in A} \int_{Z_a^\varepsilon} \langle df, dg \rangle = \sum_{a \in A} \left(\int_{Z_a^\varepsilon} \langle \Delta f, g \rangle + \int_{\partial Z_a^\varepsilon} \left\langle \frac{df}{dn}, g \right\rangle \right) \\ &= \sum_{a \in A} \int_{\partial Z_a^\varepsilon} \left\langle \frac{df}{dn}, g \right\rangle \leq \sum_{a \in A} \left(\int_{\partial Z_a^\varepsilon} \left\langle \frac{df}{dn}, \frac{df}{dn} \right\rangle \right)^{1/2} \left(\int_{\partial Z_a^\varepsilon} g^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Mais Z_a^ε est un 0-condensateur. En appliquant (Cii) et (Ciii) au premier terme et (Civ) au second on a :

$$\int_{X^\varepsilon} \langle df \cdot dg \rangle \leq C \cdot \varepsilon |f|_0 |g|_1.$$

Preuve proposition II.2. On a $Z_a^\varepsilon = Y_{(\varepsilon l_a/\pi)}$ avec un choix convenable $l = \pi/l_a$ si $L = 1$. On voit ainsi que (i) découle de (Cii) et (ii) de (Ci).

IV. Spectre de graphes

Soit Γ un graphe fini non orienté. On désigne par $S = S_1 \cup S_2$ l'ensemble des sommets ($S_1 \neq \emptyset$) et par A l'ensemble des arêtes. Soit $(V_i)_{i \in S_1}$ une suite de nombres positifs et μ la mesure sur S définie par $\mu = \sum_{i \in S_1} V_i \delta(i)$.

On introduit sur $L^2(S_1, \mu)$ une forme quadratique q du type: $q((x_j)) = \sum_{a \in A} C_a |d_a x|^2$ où $C_a > 0$ et $d_{\{i,j\}} = x_i - x_j$ avec $x_j = 0$ si $j \in S_2$.

Soit Δ le Laplacien de q pour le produit scalaire de $L^2(S_1, \mu)$. Le spectre de Δ est donné par:

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{|S_1|} \quad \text{si } S_2 = \emptyset,$$

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{|S_1|} \quad \text{si } S_2 \neq \emptyset.$$

Graphes complets. On note C_N le graphe complet à N sommets, i.e. tel qu'il existe une arête joignant chaque couple de sommets disjoints.

A $(C_{ij})_{i < j} \in \mathbb{R}^{N(N-1)/2}$, $C_{ij} > 0$, on peut associer une forme quadratique sur $L^2(C_N)$ et un Laplacien combinatoire comme indiqué plus haut.

L'application associant à $(C_{ij})_{i < j}$ la forme quadratique correspondante est un

difféomorphisme linéaire sur son image, un ouvert des formes quadratiques positives s'annulant sur les fonctions constantes.

PROPOSITION IV.1. *Soit $(V_i)_{i \in S}$, $V_i > 0$. Alors il existe (C_{ij}) , $C_{ij} > 0$, tel que le spectre de la forme quadratique $\sum_{i < j} C_{ij}(x_i - x_j)^2$ pour la mesure $\mu = \sum_{i \in j} V_i \cdot \delta(i)$ soit $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 = \dots = \lambda_N = \sum_{i \in S_1} V_i$.*

Preuve. On prend $C_{ij} = V_i V_j$ et un calcul simple donne la conclusion.

V. Evaluations asymptotiques des petites valeurs propres

Ce paragraphe contient l'énoncé général d'approximation des petites valeurs propres dont découlent les résultats sur les multiplicités, mais aussi des résultats plus généraux ([CV2], [CV4]).

$X^\varepsilon (0 < \varepsilon \leq 1)$ est la famille de surfaces construite au §II. Γ est le graphe associé, A l'ensemble de ses arêtes, $S = S_1 \cup S_2$ l'ensemble de ses sommets ($i \in S_1 \Leftrightarrow \text{Vol}(X_i) < \infty$) $\mu = \sum_{i \in S_1} V_i \delta(i)$ où $V_i = \text{Vol } X_i$. Puis, soit

$$q(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{a \in A} l_a |d_a x|^2 \quad \text{où} \quad d_{\{ij\}} x = x_i - x_j$$

avec $x \in \mathbb{R}^{S_1}$, $x_j = 0$ si $j \in S_2$.

On va exhiber une forme quadratique naturelle $q^\varepsilon \in L^2(S_1, \mu)$ (dépendant continument des paramètres géométriques l_a) dont le spectre est l'ensemble des N plus petites valeurs propres de X^ε et telle que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|(q^\varepsilon/\varepsilon) - q\| = 0$, uniformément sur tout compact $W \subseteq (\mathbb{R}_*^+)^A$. En particulier, on voit que les valeurs propres $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq N}$ de X^ε vérifient $\lambda_i \sim \varepsilon \mu_i (\varepsilon \rightarrow 0)$ où $(\mu_i)_{1 \leq i \leq N}$ sont les valeurs propres de q sur $L^2(S_1, \mu)$.

Construction de q^ε . Elle résulte de deux transferts successifs de l'intégrale de Dirichlet sur X^ε : soit E la somme des espaces propres associés aux $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq N}$ ($E \subset H^1(X^\varepsilon)$) E_0 l'espace test ($E_0 \subset H^1(X^\varepsilon)$) image de $L^2(S_1, \mu)$ par l'application U construite au §II.

Soit q_E la restriction à E de l'intégrale de Dirichlet sur X^ε ; on a la forme q_{E/E_0} définie au §I et on pose $q^\varepsilon = [U^*(q_{E/E_0}), U^*(\langle \rangle)]$ où $\langle \rangle$ est la structure L^2 induite sur E_0 .

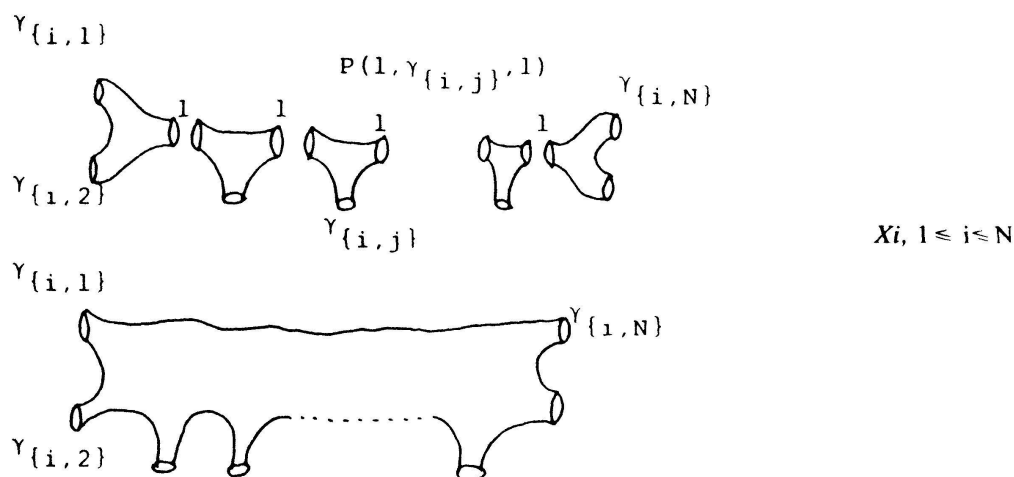
LEMME V.1. *Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on a: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|(q^\varepsilon/\varepsilon) - q\| = 0$ et cette convergence est localement uniforme sur $(\mathbb{R}_*^+)^A$.*

Preuve. La proximité de q_{E/E_0} et q_{E_0} résulte du lemme PVP (§I) et de la proposition II.1 qui permet de l'appliquer. Le transfert U^* donne alors le résultat cherché d'après l'évaluation asymptotique de la matrice d'interaction q_{E_0} (Proposition II.2).

VI. Construction d'un exemple et preuve du théorème

L'exemple construit sera une surface modelée sur le graphe complet. Pour une surface de genre g à p cusps, on prend un graphe complet à $N = E[(3 + \sqrt{8g + 1})/2]$ sommets. Pour les détails de la construction, se référer à [BU1]. Au sommet $i (1 \leq i \leq N - 1)$ sera associé un morceau X_i du type: on recolle $(N - 3)$ pantalons $P(\gamma_{\{i,1\}}, \gamma_{\{i,2\}}, 1)$ $P(1, \gamma_{\{i,3\}}, 1), \dots, P(1, \gamma_{\{i,j\}}, 1), \dots, P(1, \gamma_{\{i,N-1\}}, \gamma_{\{i,N\}})$ comme suit: $P(1, \gamma_{\{i,j\}}, 1)$ est recollé à $P(1, \gamma_{\{i,j+1\}}, 1)$ le long de la géodésique de longueur 1 sans twist. $P(1, \gamma_{\{i,1\}}, \gamma_{\{i,2\}})$ est recollé à $P(1, \gamma_{\{i,3\}}, 1)$ et $P(1, \gamma_{\{i,N\}}, \gamma_{\{i,N-1\}})$ est recollé à $P(1, \gamma_{\{i,N-2\}}, 1)$.

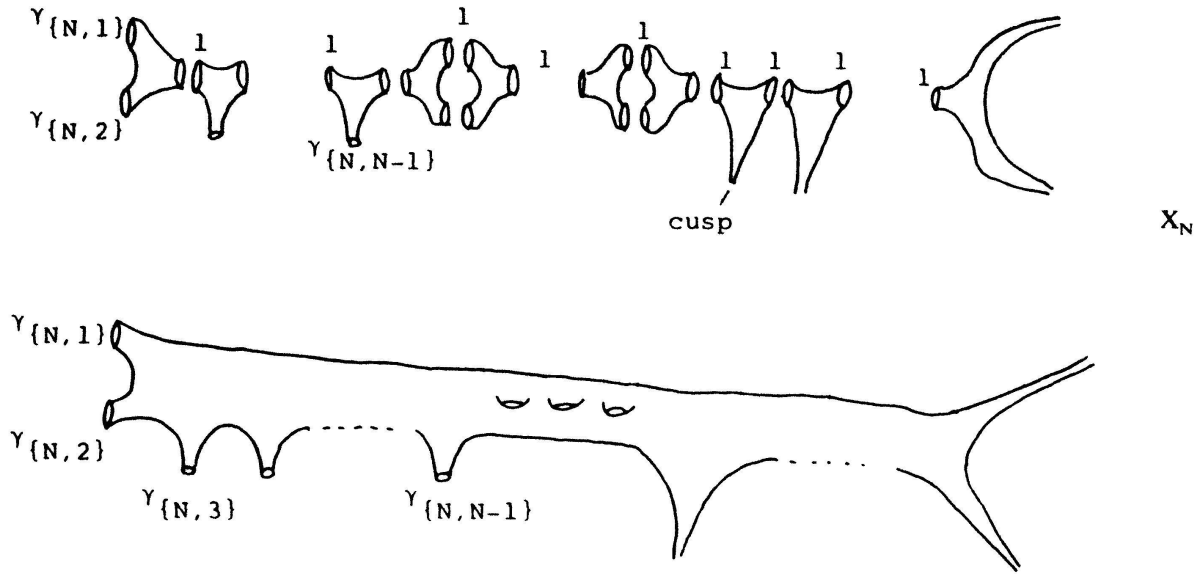
On obtient donc $N - 1$ géodésiques libres $\gamma_{\{i,1\}}, \gamma_{\{i,2\}}, \dots, \gamma_{\{i,N\}}$.



Au sommet N , la surface X_N associée sera plus compliquée. On adjoindra à une surface du type de celles décrites ci-dessus p pantalons correspondant à p cusps et $2(g - ((N(N - 3)/2) + 1))$ pantalons pour atteindre le genre g voulu. On recolle comme avant tous les pantalons le long des géodésiques de longueur 1 sans twist. On obtient $(N - 1)$ géodésiques libres: $\gamma_{\{N,1\}}, \gamma_{\{N,2\}}, \dots, \gamma_{\{N,N-1\}}$.

Pour construire la surface X on recolle entre elles les différentes surfaces X_i comme indiqué par le graphe complet à N sommets. On recolle X_i et X_j en identifiant sans twist $\gamma_{\{i,j\}}$ et $\gamma_{\{j,i\}}$. La seule condition sur les longueurs est donc que $l(\gamma_{\{i,j\}}) = l(\gamma_{\{j,i\}})$.

A tout $N(N - 1)/2$ -uplet $\theta = (\theta_{12}, \theta_{13}, \dots, \theta_{1N}, \dots, \theta_{N-1,N})$, où $\theta_{ij} > 0$, est donc associée une surface X_θ où $l(\gamma_{\{i,j\}}) = \theta_{ij}$ et le graphe complet à N sommets



C_N avec comme mesure $\mu = (V_i)_{i=1}^N$ où :

$$V_i = 2\pi(N-3) \quad 1 \leq i \leq N-1$$

$$V_N = 4\pi \left(g - \left(\frac{N(N-3)}{2} + 1 \right) + 2\pi(N-3) + 2\pi p \right)$$

et une forme quadratique q_θ sur $L^2(S, \mu)$ donnée par $(\theta_{ij})/\pi$. Rappelons qu'il existe θ_0 tel que q_{θ_0} ait sa première valeur propre non nulle de multiplicité $(N-1)$ et que l'application $\theta \rightarrow q_\theta$ est un difféomorphisme local sur son image.

Preuve du théorème. Soit W un voisinage compact de θ_0 . On va voir qu'il existe ε et $\theta \in W$ tels que X_θ^ε ait sa première valeur propre non nulle de multiplicité $N-1$. On a $\|(q_\theta^\varepsilon/\varepsilon) - q_\theta\| \rightarrow 0$ uniformément sur W , où q_θ^ε est la forme quadratique définie au §V. On utilise alors le

LEMME TOPOLOGIQUE. *Si on a une famille φ_α d'applications continues d'une boule fermée B_0 de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n telle que, lorsque $\alpha \rightarrow 0$, φ_α converge uniformément vers un difféomorphisme de B_0 sur un compact de \mathbb{R}^n dont l'intérieur contient l'origine, alors pour α assez petit, l'origine est dans l'image $\varphi_\alpha(B_0)$.*

Ici la famille d'applications continues est $\theta \rightarrow (q_\theta^\varepsilon/\varepsilon)$, elle converge vers q_θ dans W . Il existe donc θ et ε avec $q_\theta^\varepsilon = \varepsilon q_{\theta_0}$ et q_θ^ε a pour spectre les N premières valeurs propres de X_θ^ε et q_{θ_0} a sa première valeur propre non nulle de multiplicité $N-1$. Cela conclut la preuve.

VII. Remarques et commentaires

Remarque VII.1. Les propositions I.1 et le lemme V.1 généralisent le résultat de Ph. Gall [GL] sur le comportement asymptotique de la première valeur propre d'une surface de Riemann à courbure -1 , de volume infini.

Remarque VII.2. L'un des points essentiels de la preuve est la présence d'un cylindre hyperbolique de grande longueur Z_a^ε autour de chaque géodésique tendant vers 0. Il n'est pas nécessaire par contre que les \hat{X}_i^ε soient à courbure -1 . Il suffit que l'on puisse assurer que la $(N+1)^{\text{ième}}$ valeur propre de la surface soit bornée inférieurement indépendamment de ε . Si \hat{X}_i^ε n'est pas à courbure -1 on ne peut plus employer [DPRS], mais les résultats de Buser [BU2] ou [SWY] conviennent parfaitement pour assurer cette propriété dans de nombreux cas.

Remarque VII.3. Le résultat de [DPRS] généralise celui de [SWY]. Cependant nous montrons ici, grâce aux propositions I.1, et le lemme V1 que lorsque les géodésiques ont une longueur tendant vers 0 avec des rapports mutuels bornés, on peut estimer exactement le comportement des petites valeurs propres.

Remarque VII.4. Le théorème que nous obtenons est à relier avec la conjecture P269 de [CV1] (voir aussi [CV2] à ce sujet). En effet, l'obstruction fondamentale à dépasser ici la multiplicité $C \cdot \sqrt{g}$ pour une surface de genre g est qu'il faut sur un graphe à N sommets avoir suffisamment d'arêtes pour obtenir un ouvert des formes quadratiques s'annulant sur les constantes, donc $N(N-1)/2$ arêtes.

Le nombre de sommets correspond à peu près à la multiplicité et le nombre d'arêtes au genre.

Remarque VII.5. On peut modifier légèrement la construction de l'exemple du §VI de façon à assurer que son groupe d'isométrie soit trivial, malgré la grande multiplicité de sa première valeur propre non nulle (comparer à [BC] et [UK]). Il suffit de recoller les pantalons le long de géodésiques de longueurs toutes différentes comprises entre 0.01 et 0.02 et d'introduire un paramètre de twist α_{ij} dans le recollement de X_i avec X_j , tous les α_{ij} étant différents l'un de l'autre.

Cela oblige toute isométrie à envoyer les morceaux X_i sur eux-mêmes, avec correspondance des pantalons. La présence du twist élimine en plus les isométries associées naturellement aux symétries des pantalons.

RÉFÉRENCES

- [BC] M. BURGER et B. COLBOIS, *A propos de la multiplicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann*, Comptes Rendus de l'Ac. des Sc. de Paris 300, p. 247–250 (1985).
- [BN] G. BESSON, *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes*, Ann. Inst. Fourier 30, p. 109–128 (1980).
- [BU1] P. BUSER, *Riemannsche Flächen und Längenspectrum vom trigonometrischen Standpunkt*, aus Habilitationsschrift, Bonn (1980).
- [BU2] P. BUSER, *On Cheeger's Inequality $\lambda_1 \geq h^2/4$* . Proc. of Symp. in Pure Math. 36, p. 29–77 (1980).
- [CG] S. Y. CHENG, *Eigenfunctions and nodal sets*, Commentarii Math. Helv. A51 (1976), p. 43–55.
- [CS] B. COLBOIS, *Petites valeurs propres du Laplacien sur une surface de Riemann compacte et graphes*, Comptes Rendus de l'Ac. des Sc. de Paris 301, p. 927–930 (1985).
- [CV1] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur la multiplicité de la première valeur propres non nulle du Laplacien*. Commentarii Math. Helv 61 (1986), p. 254–270.
- [CV2] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Spectres de variétés riemanniennes et spectres de graphes*. Proc. Intern. Cong. of Math. 1986 (Berkeley).
- [CV3] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur une hypothèse de transversalité d'Arnold*. Commentarii Math. Helv. 63 (1988), p. 184–193.
- [CV4] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée à l'avance*. Soumis aux Annales de l'ENS (janvier 87).
- [DPRS] J. DODZIUK, T. PIGNATARO, B. RANDOL et D. SULLIVAN, *Estimating small eigenvalues of Riemann Surfaces*, Preprint.
- [DY] H. DONNELLY, *On the essential spectrum of a complete Riemannian Manifold*, Topology 20. p. 1–14 (1981).
- [HS] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, *Puits multiples en semiclassiques*. O. Comm. P.D.E., 9 (1984) P. 337–408. II. Ann. IHP (Phys. Théorique), 42 (1985), p. 127–212. III. Math. Nachrichten, 127 (1985), p. 263–313. IV. Comm. P.D.E., 10 (1985), p. 245–340. V, VI. A paraître.
- [GL] P. GALL, *Sur la première valeur propre des groupes de Hecke de covolume presque fini*, C.R. Acad. Sc. Paris Série I, math. 302 (1986) p. 299–302.
- [KA] I. KRA, *Automorphic forms and Kleinian Groups*, Benjamin (1972).
- [RL] B. RANDOL, *Cylinders in Riemann Surfaces*, Comment. Math. Helv. 54 (1979) p. 1–5.
- [SWY] R. SCHOEN, S. WOLPERT et S. T. YAU, *Geometric bounds on the low eigenvalues of a compact surface*, Proc. Symp. Pure Math. 36 (1980), p. 279–285.
- [UK] K. UHLENBECK, *Eigenvalues of Laplace Operators*, Bull. of the Am. Soc. 78 (Num. 6) (1972), p. 1073–1076.

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
 Département de Mathématiques
 MA (Ecublens)
 CH-1015 Lausanne
 (Suisse)

Institut Fourier
 Université de Grenoble I
 BP 74
 38402 St Martin D'Hères Cedex
 (France)

Reçu le 10 novembre 1986