

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 63 (1988)

**Artikel:** Sur une hypothèse de transversalité d'Arnold.  
**Autor:** Colin de Verdière, Y. de  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-48202>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sur une hypothèse de transversalité d'Arnold

Y. COLIN DE VERDIÈRE

Dans [AD], V. Arnold introduit certaines hypothèses de transversalité relatives aux valeurs propres d'une famille d'opérateurs autoadjoints.

Après avoir donné une définition précise d'une hypothèse forte (SAH = “strong Arnold's hypothesis”) et d'une hypothèse faible (WAH = “weak Arnold's hypothesis”), nous prouvons les résultats suivants:

- L'hypothèse SAH est vérifiée pour toutes les valeurs propres positives du laplacien de  $S^2$  pour la métrique canonique.

- L'hypothèse SAH est vérifiée pour toute valeur propre d'un tore plat de multiplicité  $\leq 6$  et non pour les autres. Cela fournit un contre-exemple à l'hypothèse d'Arnold.

- Nous traitons ensuite le cas des laplaciens discrets sur certains graphes finis.

Tous ces résultats sont utilisables dans la construction de métriques riemanniennes ou de domaines euclidiens de  $\mathbf{R}^n$  dont une partie finie du spectre est prescrit ([C-C], [CV3]). L'ensemble de ces résultats est annoncé dans [CV2].

Je tiens à remercier Michel Brion pour m'avoir aidé à traiter le cas de  $S^2$ .

## 1. L'hypothèse d'Arnold

Rappelons d'abord quelques éléments de la théorie des perturbations des valeurs propres multiples:

soit  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\mathbf{R}} \oplus \mathbf{C}$  le complexifié d'un espace de Hilbert réel et  $(H_a)_{a \in T}$  une famille d'opérateurs autoadjoints réels sur  $\mathbf{H}$  (i.e. définis sur  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}$ ) de même domaine  $\mathbf{D} \subset \mathbf{H}$ , dépendant continument de  $a$  variant dans l'espace topologique  $T$  au sens que  $a \mapsto (H_a + i)^{-1}$  de  $T$  dans  $\mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{D})$  est continue pour la norme. Soit alors  $\lambda_0$  une valeur propre isolée de multiplicité finie  $n_0$  de  $H_0$  ( $0 \in T$ ), c'est à dire telle que  $\lambda_0 \notin \text{sp.ess}(H_0)$ . Soit  $\varepsilon > 0$  tel que le disque  $D$  de centre  $\lambda_0$  et de rayon  $\varepsilon$  ne rencontre le spectre de  $H_0$  qu'en  $\lambda_0$ .

Il existe alors un voisinage  $U$  de 0 dans  $T$  tel que, si  $a \in U$ ,  $H_a$  admet dans  $D$  un nombre fini de valeurs propres dont la somme des multiplicités est  $n_0$ . De plus, le projecteur orthogonal  $P_0$  de  $\mathbf{H}$  sur la somme  $E_a$  de ces espaces propres

dépend continument de  $a$ :

$$P_a = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (\lambda - H_a)^{-1} d\lambda \quad \text{avec} \quad \gamma = bD.$$

Lorsque  $a \rightarrow 0$ ,  $E_a \rightarrow E_0$  et on définit la forme quadratique  $q_a$  sur  $E_0$  par  $q_a(f) = \langle H_a U_a f \mid U_a f \rangle$  où  $U_a$  est l'isométrie naturelle de  $E_0$  sur  $E_a$  définie par:

$$U_a = \mathcal{B}(\mathcal{B}^* \mathcal{B})^{-1/2}$$

avec  $\mathcal{B}x = x + \mathcal{B}x$  et  $E_a = \text{graphe}(B)$ ,  $B \in \mathcal{L}(E_0, E_0^\perp)$ .

Il est clair que le spectre de  $q_a$  sur  $E_0$  est  $(\text{spectre}(H_a)) \cap D$ .

Supposons maintenant que  $T$  est une variété  $C^k$  ( $k \geq 0$ ) et que  $q_a$  est définie sur un voisinage de 0 homéomorphe à une boule  $K$  d'un espace modèle. On désigne par

$$\Phi: K \rightarrow \mathcal{Q}(E_0) = \{\text{formes quadratiques réelles sur } E_0\}$$

l'application  $a \mapsto q_a$  et on pose les:

**DÉFINITIONS.** On dira que la valeur propre  $\lambda_0$  de  $H_0$  vérifie l'hypothèse d'Arnold forte (SAH) (resp. l'hypothèse d'Arnold faible (WAH)) relativement à la famille  $(H_a)_{a \in T}$  si  $\Phi$  est une submersion en  $a = 0$  (resp.  $\Phi$  est essentielle sur  $(\mathcal{Q}(E_0), \lambda_0 \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .)

Soit  $K$  un espace topologique,  $E$  un espace de Banach,  $y_0 \in E$ ,  $\Phi: K \rightarrow E$  continue, on dira que  $\Phi$  est *essentielle* sur  $(E, y_0)$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que,  $\forall \Psi: K \rightarrow E$ , continue, avec  $\|\Psi - \Phi\|_{L^\infty(K)} \leq \varepsilon$ , on a  $y_0 \in \Psi(K)$ .

L'ensemble de ces applications est un ouvert de  $C(K, E)$ . Lorsque  $K$  est une boule d'un espace vectoriel et  $\Phi$  de classe  $C^1$ , si  $\Phi(x_0) = y_0$  et  $d\Phi(x_0)$  est surjective,  $\Phi$  est essentielle sur  $(E, y_0)$ .

On introduit de même les propriétés SAH et WAH pour une famille  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$  de valeurs propres isolées de multiplicités  $n_i < \infty$  de  $H_0$  dans la famille  $(H_a)$  en considérant l'application

$$\Phi: K \rightarrow \mathcal{Q}(E_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{Q}(E_N), \text{ somme des applications précédentes.}$$

Une condition *nécessaire* pour SAH et WAH est évidemment que:

$$\text{dimension}(T) \geq \sum_{i=1}^N \frac{n_i(n_i + 1)}{2}.$$

On peut également traiter le cas *non réel* de manière similaire: c'est le cas qui intervient pour la théorie de l'opérateur de Schrödinger en présence d'un champ magnétique.

La vérification de SAH se ramène à celle de la surjectivité de la différentielle de  $\Phi: a \mapsto q_a$  en  $a = 0$  et on a le:

**CRITÈRE.** Pour que  $\lambda_0$  vérifie SAH, il faut et il suffit que la différentielle de  $\Phi: a \mapsto \langle H_a \cdot | \cdot \rangle \in \mathcal{Q}(E_0)$  soit surjective en  $a = 0$ .

*Preuve.* On a

$$q_{a_t}(x, y) = \langle H_{a_t}(x + B_t x) | y + B_t y \rangle + O(t^2),$$

et donc

$$\dot{q}_0(x, y) = \langle \dot{H}_0 x | y \rangle + \langle H_0 \dot{B} x | y \rangle + \langle H_0 x | \dot{B} y \rangle$$

et comme  $\dot{B} \in \mathcal{L}(E_0, E_0^\perp)$ , on a  $\dot{q}_0(x, y) = \langle \dot{H}_0 x | y \rangle$ .

Lorsque **H** et (ou) **D** dépendent de  $a$ , on peut souvent modifier les  $H_a$  par des transformations unitaires explicites pour se ramener à la théorie précédente. Traitons par exemple le cas où  $(X, g_0)$  est une variété riemannienne compacte de dimension 2 et la famille  $H_a$  celle des laplaciens  $\Delta_a$  associés aux métriques  $e^{2a}g_0 = g(a \in C^\infty(X, \mathbf{R}) = T)$ , on a alors la:

**PROPOSITION.**  $\lambda_0(\neq 0)$  vérifie SAH si

$$h \mapsto \left( (\varphi, \psi) \mapsto \int_X h \varphi \psi \right)$$

est surjective de  $C^\infty(X)$  dans  $\mathcal{Q}(E_0)$ .

*Preuve.*  $v_g = e^{2a}v_{g_0}$  et  $\hat{\Delta} = e^{-a}\Delta_a e^{-a}$ , où  $\hat{\Delta}$  est le transporté de  $\Delta_a$  sur  $L^2(X, v_{g_0})$  par l'isométrie  $Uf = e^{-a}f$  de  $L^2(X, v_{g_0})$  sur  $L^2(X, v_g)$ . Le résultat est alors immédiat.

## 2. Cas de la sphère

**THÉORÈME.** Soit  $(S^2, g_0)$  la sphère munie de la métrique usuelle et  $\lambda_0 = l(l+1)$  ( $l \geq 1$  entier) une valeur propre du laplacien. Alors  $\lambda_0$  vérifie SAH

*relativement à la famille des laplaciens des métriques conformes à  $g_0$ . Il en est de même en ne considérant que les déformations invariantes par antipodie.*

*Preuve.* On désigne par  $\mathcal{P}_{2l}$  l'espace des polynômes homogènes de degré  $2l$  sur  $\mathbf{R}^3$  et par  $\mathcal{H}_l$  l'espace des harmoniques sphériques de degré  $l$ . D'après le §1, il suffit de montrer la surjectivité de l'application

$$F_l : \mathcal{P}_{2l} \rightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_l) \quad \text{définie par} \quad F_l : P \mapsto \left( q(\varphi) = \int_{S^2} P \varphi^2 \right).$$

La transposée de  $F_l$  est l'application de  $\mathcal{H}_l \circ \mathcal{H}_l \rightarrow \mathcal{P}_{2l}$  définie par  $\varphi \circ \psi \mapsto \varphi \psi$ . Comme  $\dim(\mathcal{Q}(\mathcal{H}_l)) = \dim(\mathcal{P}_{2l})$  ( $= (l+1)(2l+1)$ ), il suffit de montrer la surjectivité de  $F_l$ , c'est à dire que tout polynôme homogène de degré  $2l$  est combinaison linéaire de produits d'harmoniques sphériques de degré  $l$ .

Comme tout sous-espace de  $\mathcal{P}_{2l}$  contient une fonction zonale (invariante par rotation autour de  $Oz$ ), il suffit visiblement de le montrer pour les éléments zonaux de  $\mathcal{P}_{2l}$ . Pour cela, on utilise des arguments classiques de la théorie des représentations linéaires qui m'ont été expliqués par Michel Brion. On note  $a = x + iy$ ,  $b = z$ ,  $c = x - iy$  et on a une base de  $\mathcal{P}_{2l}$  formée des  $a^u b^v c^w$  avec  $u + v + w = 2l$ . L'espace zonal est engendré par les monômes tels que  $u = w$ , l'algèbre de Lie de  $SO(3)$  par les vecteurs

$$L_x = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, \quad L_y = \dots \text{ et } L_z = \dots$$

On pose  $W_{\pm} = L_y \pm iL_x$  et on a:

$$W_+(a) = 2b, \quad W_+(b) = -c, \quad W_+(c) = 0 = W_-(a), \quad W_-(b) = -a, \quad W_-(c) = 2b.$$

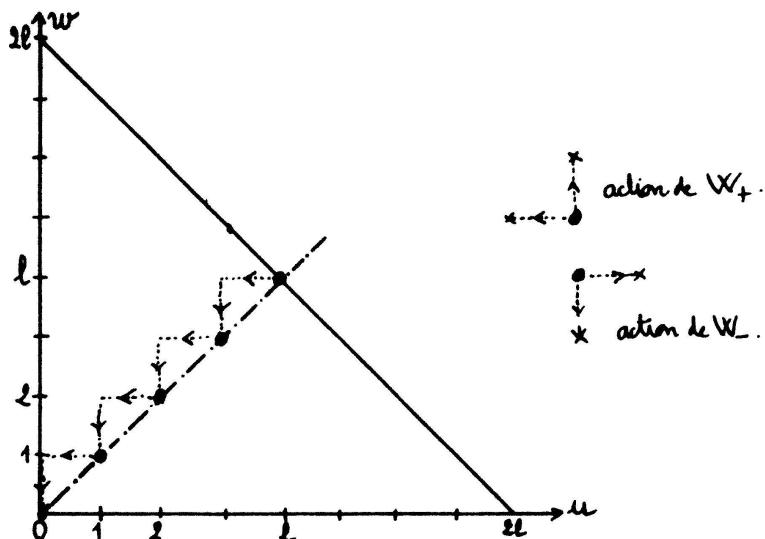
De plus cette algèbre de Lie opère sur  $\mathcal{P}_{2l}$  par dérivation:

$$\begin{aligned} W_+(a^u b^v c^w) &= 2ua^{u-1}b^{v+1}c^w - va^u b^{v-1}c^{w+1} \\ W_-(a^u b^v c^w) &= -va^{u+1}b^{v-1}c^w + 2wa^u b^{v+1}c^{w-1}. \end{aligned}$$

Dans le plan des  $(u, w)$ , on a donc

$$W_+(e_{u,w}) = \alpha e_{u,w+1} + \beta e_{u-1,w}$$

$$W_-(e_{u,w}) = \alpha' e_{u,w-1} + \beta' e_{u+1,w},$$



où  $\alpha, \beta, \alpha'$  et  $\beta'$  ne sont nuls que s'ils sont coefficients d'un  $e_{u',w'}$  avec  $(u', v') \notin T$ , où

$$T = \{(u, w) \in \mathbf{N}^2 \mid u + w \leq 2l\}.$$

Par applications successives de  $W_+$  et  $W_-$  à partir de  $e_{l,l} = (x^2 + y^2)^l = a'b^l$  qui est produit de deux harmoniques sphériques, on obtient visiblement tous les monômes zonaux  $e_{k,k}$  ( $0 \leq k \leq l$ ): le vecteur  $a^l c^l$  est donc un vecteur cyclique de  $\mathcal{P}_{2l}$ , ce qui prouve le résultat.

### 3. Cas des tores plats

**THÉORÈME.** Soit  $X$  un tore de dimension 2, muni d'une métrique plate, et  $\lambda_0$  une valeur propre non nulle du laplacien, de multiplicité  $N$ , alors  $\lambda_0$  vérifie SAH relativement à l'ensemble de toutes les métriques riemanniennes sur  $X$  si et seulement si  $N \leq 6$ .

Cela fournit des contre-exemples à la conjecture d'Arnold, car on sait que  $N$  peut être supérieur à 6. Je ne sais pas ce qu'il en est pour l'hypothèse WAH.

**Preuve.** Soit  $X = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ , toute métrique sur  $X$  s'écrit  $\varphi^*(g)$ , où  $\varphi$  est un difféomorphisme de  $X$  et

$$g = e^h(A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2)$$

avec  $\int_X e^h dx dy = 0$ .

On est donc amené à considérer, pour  $g_0 = A_0 dx^2 + 2B_0 dx dy + C_0 dy^2$ , une valeur propre  $\lambda_0 \neq 0$  du laplacien. Soit

$$P = \{\mu = (m, n) \in \mathbf{Z}^2 \mid g_0^*(\mu) = \lambda_0\}$$

alors l'espace propre  $E_0$  est engendré par les exponentielles  $e_\mu(x, y) = \exp(2\pi i(mx + ny))$  où  $\mu \in P$ . Soit

$$d\Phi : C_0^\infty(X, \mathbf{C}) \oplus (\mathbf{C} dx^2 \oplus \mathbf{C} dx dy \oplus \mathbf{C} dy^2) \mapsto \mathcal{D}(E_0) \otimes \mathbf{C}$$

la complexifiée de la différentielle de  $\Phi$  en  $g_0$ , où  $C_0^\infty(X, \mathbf{C}) = \{f \in C^\infty(X, \mathbf{C}) \mid \int_X f = 0\}$ .

On a, d'après le §1:

$$[d\Phi(f \oplus 0)]_{\mu, \mu'} = C \int_X f e_\mu e_{\mu'}$$

avec  $\mu, \mu' \in P$ , et

$$\begin{aligned} [d\Phi(0 \oplus (\alpha dx^2 + 2\beta dx dy + \gamma dy^2))]_{\mu, \mu'} \\ = C \int_X \left[ \alpha \frac{\partial e_\mu}{\partial x} \frac{\partial e'_{\mu'}}{\partial x} + \beta \left( \frac{\partial e_\mu}{\partial x} \frac{\partial e'_{\mu'}}{\partial y} + \frac{\partial e_\mu}{\partial y} \frac{\partial e'_{\mu'}}{\partial x} \right) + \gamma \frac{\partial e_\mu}{\partial y} \frac{\partial e'_{\mu'}}{\partial y} \right] dx dy. \end{aligned}$$

Donc, si  $\mu + \mu' \neq 0$ ,  $'d\Phi(e_\mu \circ e_{\mu'}) = C'^e e_{\mu+\mu'} \oplus \dots$  si  $\mu + \mu' = 0$ ,  $'d\Phi(e_\mu \circ e_{-\mu}) = 0 \oplus C'^e(m^2 \oplus 2mn \oplus n^2)$  où  $\mu = (m, n)$ .

Comme les  $\mu + \mu'$  sont 2 à 2 distincts lorsque  $\{\mu, \mu'\}$  sont distincts, on voit que l'injectivité  $'d\Phi$  se réduit au fait que les vecteurs  $(m^2, mn, n^2)$  sont linéairement indépendants pour les différentes valeurs de  $\mu$  à symétrie près ( $\mu \mapsto -\mu$ ). Ce qui est le cas si et seulement s'il y a moins de 3 telles paires, i.e. si  $N \leq 6$ .

#### 4. Cas des graphes

Donnons d'abord quelques définitions: les graphes que nous allons considérer sont des graphes finis, non orientés et connexes;  $S$  sera l'ensemble des sommets et  $A$ , l'ensemble des arêtes, est un sous-ensemble de l'ensemble des parties à 2 éléments de  $S$ .

On se donne une mesure  $\mu = \sum_{i \in S} V_i \delta(i)$  ( $V_i > 0$ ),  $\mu_0 = \sum_{i \in S} \delta(i)$  sera appellée la mesure canonique. Un *laplacien combinatoire*  $\Delta$  sur  $\Gamma$  est défini par la donnée de  $\mu$  et d'une forme quadratique

$$q(x_i) = \sum_{a \in A} c_a (d_a x)^2 \quad \text{où} \quad d_a x = x_i - x_j \quad \text{si} \quad a = \{i, j\};$$

$\Delta$  est alors donné par:

$$(\Delta x)_i = \frac{1}{V_i} \sum_{\{i, j\} \in A} c_{\{i, j\}} (x_i - x_j)$$

Un *opérateur de Schrödinger* combinatoire est un opérateur de la forme  $H = \Delta + V$ , où  $V$  est diagonale.

Par la transformation unitaire  $U(x_i) = \sqrt{V_i} x_i$  de  $L^2(S, \mu)$  sur  $L^2(S, \mu_0)$ , on ramène un tel opérateur à un opérateur  $H$  de matrice symétrique  $(H) = (a_{i,j})$  avec  $a_{i,j} < 0$  si  $\{i, j\} \in A$ ,  $a_{i,j} = 0$  si  $\{i, j\} \notin A$  et  $i \neq j$ . Ainsi nous considérons soit des laplaciens sur  $L^2(S, \mu)$ , soit des opérateurs de Schrödinger sur  $L^2(S, \mu_0)$ .

Soit  $C_N$  le *graphe complet* à  $N$  sommets, i.e. tel que tout couple de sommets distincts est l'ensemble des extrémités d'une arête;  $C_N$  a donc  $N(N - 1)/2$  arêtes.

On désigne aussi par  $E_N$  le *graphe en étoile* à  $N$  branches ( $N + 1$  sommets et  $N$  arêtes). On a les:

**THÉORÈME 1.** Si  $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$  et  $\mu = \sum_{i=1}^N V_i \delta(i)$  sont donnés, il existe un laplacien combinatoire sur  $(C_N, \mu)$  ayant ce spectre avec multiplicités.

De plus la partie  $\text{Sp}^*(\Delta) = \text{Sp}(\Delta) - \{0\}$  vérifie SAH relativement aux déformations de  $\Delta$  à  $\mu$  fixé.

On a le même résultat, avec  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ , pour les opérateurs de Schrödinger  $H$  sur  $L^2(C_N, \mu_0)$  avec SAH pour le spectre entier.

**THÉORÈME 2.** Soit  $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{N+1}$ , il existe  $\mu$  et  $\Delta$  sur  $(E_N, \mu)$  ayant ce spectre et  $\text{Sp}^*(\Delta)$  vérifie SAH relativement aux déformations de  $\Delta$  ( $\mu$  variable).

*Remarque.* Soit  $\Delta_0$  sur  $(E_N, \mu_0)$  associé à  $q_0(x_i) = \sum_{i=1}^N (x_0 - x_i)^2$ , alors le spectre de  $\Delta_0$  est  $0 < 1 = 1 = \dots = 1 < (N + 1)$  et la valeur propre 1 ne vérifie pas WAH relativement aux déformations de  $\mu_0$  et de  $\Delta_0$  si  $N \geq 5$ .

Les applications de ces résultats élémentaires sont à la construction de spectres prescrits, mais aussi à de curieux critères de non-plongement de graphes dans une surface (voir [CV2], [CV3] et [CV4]).

Par exemple, si un graphe  $\Gamma$  admet un opérateur de Schrödinger combinatoire de spectre  $\lambda_1 < \lambda_2 = \dots = \lambda_{k+2} < \dots$  où  $\lambda_2$  est de multiplicité  $k$  et vérifie WAH relativement aux déformations de  $H$ , alors  $\Gamma$  n'est planaire que si  $k \leq 3$ .

*Preuve du théorème 1.*

*Hypothèse SAH.* Soit  $\Phi: \mathbf{R}_+^A \mapsto \mathcal{Q}(E_0)$ , où

$$A = \{\text{arêtes de } C_N\}, \quad E_0 = \{(x_i) \in L^2(S, \mu) \mid \langle (x_i) \mid 1 \rangle = 0\},$$

définie par

$$\Phi(c_{i,j}) = \sum_{i,j} c_{i,j} (x_i - x_j)^2 \Big|_{E_0}.$$

A cause des dimensions, il suffit de vérifier l'injectivité. Cela est laissé au lecteur.

Le cas de Schrödinger est analogue.

*Existence:* elle se montre par récurrence sur le nombre  $N$  et la notion de *suspension* d'un graphe. Si  $\Gamma$  est un graphe fini à  $N$  sommets  $\{1, 2, \dots, N\}$ , muni d'une mesure  $\mu = \sum_{i=1}^N V_i \delta(i)$  et d'une forme quadratique

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} c_a (d_a x)^2 \quad (c_a > 0),$$

on construit pour tout  $V_0 > 0$  et  $a > 0$  un graphe  $S\Gamma$  de sommets  $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ , en joignant chaque sommet de  $\Gamma$  au nouveau sommet 0 par une arête. On l'équipe de la mesure  $S\mu = V_0 \delta(0) + \mu$  et de la forme quadratique

$$Sq(x_0, x_1, \dots, x_N) = a \sum_{i=1}^N V_i (x_0 - x_i)^2 + q(x_1, \dots, x_N).$$

Les valeurs propres non nulles de  $S\Gamma$ , muni de ce laplacien combinatoire sont les  $\lambda_j + a$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ),  $\lambda_j$  valeurs propres de  $\Gamma$  et la valeur propre  $\Lambda = a(1 + (\sum_{i=1}^N V_i)/V_0)$ .

Soit à réaliser pour  $S\Gamma$  le spectre

$$\Lambda_1 = 0 < \Lambda_2 \leq \dots \leq \Lambda_{N+1}.$$

On choisit  $a$  tel que  $a(1 + (\sum_{i=1}^N V_i)/V_0) = \Lambda_2$ . On doit alors avoir pour

$$2 \leq j \leq N, \quad \lambda_j = \Lambda_{j+1} - a > 0, \quad (\text{car } \Lambda_2 > a).$$

On raisonne alors par récurrence pour construire  $\Gamma$  ayant  $0 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$  comme spectre.

*Preuve du théorème 2.* Il est facile de vérifier que les valeurs propres non nulles sont les solutions de

$$\sum_{i=1}^N \frac{c_i}{(\lambda - (c_i/V_i))} = 1,$$

et donc

$$0 < \frac{c_1}{V_1} < \lambda_2 < \frac{c_2}{V_2} < \dots < \frac{c_N}{V_N} < \lambda_{N+1}$$

si les  $c_i/V_i$  sont 2 à 2 distincts et ordonnés.

On se donne la suite  $0 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_{N+1}$  et on choisit  $a_i$  tels que  $0 < a_1 < \lambda_2 < a_2 < \dots < a_N < \lambda_{N+1}$ . Les  $\lambda_i$  sont alors les solutions de  $\sum_{i=1}^N c_i/(\lambda - a_i) = 1$  et donc les  $(-c_i)$  sont les résidus en  $\lambda = a_i$  de  $R(\lambda) = \prod_{i=2}^{N+1} (\lambda - \lambda_i)/(\lambda - a_i)$ . Il est facile de vérifier que les  $c_i$  ainsi définis sont  $> 0$  et on pose  $V_i = c_i/a_i$ . L'application  $(V_i, c_i) \mapsto (\lambda_j)_{j \geq 2}$  est une submersion, car le procédé précédent donne un relèvement analytique local où les  $c_i/V_i$  sont fixés, d'où SAH.

Pour la deuxième partie, il suffit de compter les dimensions: à cause de l'invariance par dilatation, on peut supposer  $V_0 = 1$  et on a

$$\# \text{ paramètres} = 2N; \quad \dim(\mathcal{Q}(E_0)) = N(N-1)/2$$

et donc, si

$$N \geq 6, \quad \dim(\mathcal{Q}(E_0)) > \# \text{ paramètres}.$$

On ne peut avoir une application essentielle, donc WAH n'est pas vérifiée.

## RÉFÉRENCES

- [AD] V. ARNOLD, *Modes and quasi-modes*, Functional Anal. Appl., 6 (1972), 94–101.
- [C-C] B. COLBOIS ET Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur la multiplicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann à courbure constante*, Comment. Math. Helv., 63 (1988).

- [CV1] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du laplacien*, Comment. Math. Helv., 61 (1986), 254–270.
- [CV2] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Spectres de variétés riemanniennes et spectres de graphes*, Proc. ICM. Berkeley, (1986).
- [CV3] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Constructions de Laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée*, soumis aux Annales de l'E.N.S., (1987).
- [CV4] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité*, soumis à J. of combinatorial theory, (1987).

*Université de Grenoble I  
Institut Fourier  
Laboratoire de Mathématiques  
F-38402 Saint Martin d'Hères*

Reçu le 27 octobre 1986