

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	63 (1988)
<b>Artikel:</b>	Durch Hilbertfunktionen definierte Unterschemata des Hilbertschemas.
<b>Autor:</b>	Gotzmann, Gerd
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-48199">https://doi.org/10.5169/seals-48199</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Durch Hilbertfunktionen definierte Unterschemata des Hilbertschemas

GERD GOTZMANN

## 1. Einleitung

(1.1) Sei  $k$  ein Körper,  $S = k[X_0, \dots, X_r]$  der graduierte Polynomring und  $X = \text{Proj } S$ .

Nach einem Satz von F. S. Macaulay ist das Hilbertschema  $\text{Hilb}_X^P$  genau dann nicht leer, wenn  $\binom{T+r}{r} - P(T)$  ein Polynom

$$Q(T) = \binom{T-a_0+r}{r} + \dots + \binom{T-a_s+r-s}{r-s} \quad (1)$$

mit ganzen Zahlen  $0 < a_0 \leq \dots \leq a_s$ ,  $0 \leq s \leq r-1$ , ist. Das Schema  $\text{Hilb}_X^P = H_Q$  ist projektiv über  $k$  und parametrisiert die Ideale  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$  mit Hilbertpolynom  $Q$ .

Wenn  $K/k$  eine Körpererweiterung und  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{X \otimes_k K}$  ein Ideal mit Hilbertpolynom  $Q$  ist, dann wird die Hilbertfunktion  $h(\mathcal{I})$  definiert durch

$$h(\mathcal{I})(n) = \dim_K H^0(X \otimes_k K, \mathcal{I}(n)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jedes  $x \in H_Q$  bestimmt eindeutig ein Ideal  $\mathcal{I} \in H_Q(\text{Spec } k(x))$ , und die Hilbertfunktion  $h$  auf  $H_Q$  wird definiert durch

$$h(x) = h(\mathcal{I}).$$

$h$  ist also eine Abbildung von  $H_Q$  in die Menge der numerischen Funktionen  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Wenn auf dieser Menge eine Ordnung definiert wird durch  $f \leq g$ , falls  $f(n) \leq g(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann folgt aus dem Halbstetigkeitssatz, daß für jede numerische Funktion  $f$

$$H_{\geq f} = \{x \in H_Q \mid h(x) \geq f\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von  $H_Q$  ist. Das Ziel der Arbeit ist der Beweis von folgendem

**SATZ.** Wenn  $k$  ein Körper der Charakteristik 0 ist, dann ist  $H_{\geq f}$  zusammenhängend.

(1.2) Die Gliederung des Beweises ist ungefähr wie folgt:

1° Man läßt die Gruppe  $B(r+1, k)$  der oberen Dreicksmatrizen auf  $S$ , d.h. auf  $H_Q$  operieren. Da sie auflösbar ist, kann man jeden Punkt aus  $H_Q$  durch eine Folge von Bahnen der Form  $G \cdot x$ , wobei  $G$  gleich  $\mathbb{G}_a$  oder  $\mathbb{G}_m$  ist, mit einem Punkt des Fixpunktschemas verbinden. (Dies ist auch die Ausgangsidee von Hartshorne in seinem Beweis für den Zusammenhang von  $H_Q$ .) Längs dieser Bahnen wird die Hilbertfunktion nicht kleiner.

2°  $H_Q^U$  bezeichnet das Fixpunktschema unter der unipotenten Gruppe  $U = U(r+1, k)$ . In  $H_Q^U$  werden bestimmte abgeschlossene Teilmengen  $\Delta(\mathcal{L})$  betrachtet, die Kegel genannt werden. Hierbei ist  $\mathcal{L}$  eine Idealgarbe auf  $Y = \mathbb{P}_k^{r-1}$ . Für diese Kegel wird gezeigt, daß man jeden Punkt darin durch eine Folge von sogenannten numerisch starren und numerisch wachsenden Deformationen mit einem Punkt im Kegel verbinden kann, dessen Hilbertfunktion eine spezielle Form hat (das zugehörige Ideal wird numerisch relativ maximal genannt). Hierbei nimmt die Hilbertfunktion nicht ab.

Ein Kegel ist übrigens nichts anderes als die Faser über  $\mathcal{L}$  des sogenannten Horrocks–Morphismus (vgl. [Ho])

$$H_Q^U \rightarrow H_Q^{U'}, \quad Q'(T) = Q(T) - Q(T-1), \quad U' = U(r, k).$$

Es ist bekannt, daß diese sogar einfach-zusammenhängend ist. Man kann also von vornherein hoffen, daß die Kegel besondere topologische Eigenschaften haben, und daß dies wirklich der Fall ist, zeigt Satz 4.12.

3° Man hat zwei Kegel in  $H_Q$  miteinander zu verbinden. Dies geschieht in einem Induktionsschluß nach  $r$  (Satz 5.4). Die Schwierigkeit besteht darin, daß man nicht jede Bahn in  $H_Q^{U'}$  mittels des Horrocks–Morphismus nach  $H_Q^U$  liften kann. Deshalb wird eine Klasse von Bahnen mit dieser Eigenschaft konstruiert, sogenannte Standarddeformationen.

Bei dem Beweis ist es nötig, ständig die Regularität der betrachteten Ideale im Auge zu behalten (vgl. 2.1 bzgl. der Definition). Aus dem Halbstetigkeitssatz folgt sofort, daß die Ideale mit einer Regularität größer oder gleich einer gegebenen Zahl eine abgeschlossene Teilmenge des Hilbertschemas bilden. Als Korollar des Beweises ergibt sich, daß diese ebenfalls zusammenhängend ist.

(1.3) Es stellt sich natürlich die Frage nach der Voraussetzung  $\text{char}(k) = 0$ . Der Beweis von Hartshorne für den Zusammenhang von  $H_Q$  ist zwar in jeder Charakteristik gültig, ich sehe aber nicht, wie sich bei den dort verwendeten Deformationen die Hilbertfunktion verhält. Da bei den hier verwendeten

Argumenten oft  $\text{char}(k) = 0$  ausgenutzt werden muß, scheint es mir sehr zweifelhaft, ob und wie man auf diese Voraussetzung verzichten kann. (Zumindest ist es aber möglich, aus den Ergebnissen in Charakteristik 0 den Zusammenhang des absoluten Hilbertschemas, d.h. von  $\text{Hilb}^P$  in der Terminologie von [Gr], herzuleiten.) Da einige Teilergebnisse jedoch unabhängig davon sind, wird hier eine Übersicht angegeben, an welcher Stelle man sie wirklich benötigt:

Abschnitt 2:  $k$  ein beliebiger Körper;

Abschnitt 3:  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper, nur in Lemma 3.4.3 muß auch  $\text{char}(k) = 0$  sein;

Abschnitt 4 und 5:  $k$  algebraisch abgeschlossen und  $\text{char}(k) = 0$ .

Abschnitt 6: Hier ist der Grundring irgendein noetherscher Ring, der  $\mathbb{Q}$  enthält. Obwohl in diesem Abschnitt die Betrachtung unter dem Gesichtspunkt der Darstellbarkeit von Funktoren erfolgt, beruht das Hauptergebnis (Satz 6.2) wesentlich auf Satz 5.4.

## 2. Ergebnisse über Hilbertpolynome und graduierte Ideale

(2.1)  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$  ist  $d$ -regulär, wenn  $H^i(X, \mathcal{I}(d-i)) = (0)$  für alle  $i \geq 1$ . Die Zahl  $\text{reg}(\mathcal{I}) = \min \{d \in \mathbb{N} \mid \mathcal{I} \text{ ist } d\text{-regulär}\}$  wird *Regularität* von  $\mathcal{I}$  genannt. Wenn  $\mathcal{I}$  das Hilbertpolynom  $Q$  hat, ist  $h^0(\mathcal{I}(n)) = \dim H^0(X, \mathcal{I}(n)) = Q(n)$  und  $S_1 H^0(\mathcal{I}(n)) = H^0(\mathcal{I}(n+1))$  für alle  $n \geq \text{reg}(\mathcal{I})$  (vgl. [M], Lecture 14).

Die Zahl  $a_s$  in (1) wird mit  $n(Q)$  bezeichnet; es ist  $\text{reg}(\mathcal{I}) \leq n(Q)$  für alle Ideale mit Hilbertpolynom  $Q$ .

(2.2) Wenn  $A$  noethersche  $k$ -Algebra,  $\mathcal{I} \in H_Q(A)$  und  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$  ist, dann gilt für alle  $n \geq n(Q)$ :

(i)  $H^0(X \otimes A, \mathcal{I}(n))$  ist  $Q(n)$ -Unterbündel von  $S_n \otimes A$  (d.h. lokal freier direkter Summand vom Rang  $Q(n)$ ) und  $S_1 H^0(X \otimes A, \mathcal{I}(n)) = H^0(X \otimes A, \mathcal{I}(n+1))$ ;

(ii)  $H^0(X \otimes A, \mathcal{F}(n)) \cong S_n \otimes_k A / H^0(X \otimes A, \mathcal{I}(n))$ ;

(iii) die Bildung der Kohomologiegruppen von  $\mathcal{I}(n)$  und  $\mathcal{F}(n)$  ist mit Basiswechsel vertauschbar (die höheren Kohomologiegruppen sind natürlich Null).

(2.3) Sei  $A$  eine noethersche  $k$ -Algebra. Es bestehen natürliche Bijektionen, funktoriell in  $A$ , zwischen folgenden Mengen, wobei  $d \geq n(Q)$  irgendeine feste ganze Zahl ist:

(i)  $H_Q(\text{Spec } A) = \{\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{X \otimes A} \text{ Ideal} \mid \mathcal{O}_{X \otimes A}/\mathcal{I} \text{ flach über } A \text{ mit Hilbertpolynom } P \text{ in jeder Faser}\}$

(ii)  $\{I \subset S \otimes_k A \text{ graduiertes Ideal, erzeugt von der homogenen Komponente } I_d \text{ von } I, \text{ so daß } I_n \subset S_n \otimes_k A \text{ } Q(n)\text{-Unterbündel ist für alle } n \geq d\}$

(iii)  $\{I \subset S \otimes_k A \text{ graduiertes Ideal, erzeugt von } I_d, \text{ so daß } S_n \otimes A/I_n \text{ flach über } A \text{ vom Rang } P(n) \text{ ist für } n = d \text{ und } n = d + 1\}$

(iv)  $\{(F, L) \mid F \subset S_d \otimes A, L \subset S_{d+1} \otimes A \text{ Unterbündel vom Rang } Q(d) \text{ bzw. } Q(d+1) \text{ mit } S_1 F \subset L\}$ .

Die Zuordnungen sind wie folgt definiert:

(i)  $\rightarrow$  (ii):  $\mathcal{J} \mapsto \bigoplus_{n \geq d} H^0(X \otimes A, \mathcal{J}(n))$

(ii)  $\rightarrow$  (iii) und (iii)  $\rightarrow$  (iv) sind die natürlichen Zuordnungen.

(iv)  $\rightarrow$  (i):  $(F, L) \mapsto (F)^\sim$ , wobei  $(F)$  das von  $F$  in  $S \otimes A$  erzeugte Ideal ist und  $\sim$  die assoziierte Garbe bedeutet.

Diese Ergebnisse bleiben richtig, wenn man  $k$  durch irgendeinen noetherschen Ring ersetzt (zum Beweis siehe [M] und [G1]).

### 3. Aktionen der additiven und multiplikativen Gruppe auf dem Hilbertschema und ihre Bahnen

#### 3.1. Bezeichnungen

Die Gruppe  $\mathbb{G}L(r+1, k)$  operiert als Gruppe von  $(r+1) \times (r+1)$ -Matrizen auf dem graduierten Polynomring  $S = k[X_1, \dots, X_r, X_0]$ . Insbesondere operiert die zu  $\mathbb{G}_a$  isomorphe Untergruppe  $\mathbb{G}_a^{ij}$  mit  $i < j$  auf  $S$  durch

$$\varphi_{ij}(\lambda): X_j \mapsto \lambda X_i + X_j, \quad X_l \mapsto X_l \quad \text{für } l \neq j, \lambda \in k.$$

(Verabredungsgemäß soll  $X_0$  die letzte Variable sein.) Die zu  $\mathbb{G}_m$  isomorphe Gruppe  $\mathbb{G}_m^s$  operiert auf  $S$  durch

$$\varphi^s(\lambda): X_s \mapsto \lambda X_s, \quad X_i \mapsto X_i \quad \text{für } i \neq s, \lambda \in k^\times.$$

Mit  $U = U(r+1, k)$  wird die unitrianguläre Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen, mit  $D = D(r+1, k)$  die Gruppe der Diagonalmatrizen aus  $\mathbb{G}L(r+1, k)$  bezeichnet. Wenn  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_r, \rho_0) \in \mathbb{Z}^{r+1}$  mit  $\rho_1 + \dots + \rho_0 = 0$  ist, dann ist  $T(\rho)$  die Untergruppe von  $D$ , die aus den  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_0) \in (k^\times)^{r+1}$  mit  $\lambda_1^{\rho_1} \dots \lambda_0^{\rho_0} = 1$  besteht. Im folgenden wird immer  $ggT(\rho_0, \dots, \rho_r) = 1$  vorausgesetzt; dann ist  $T(\rho) \simeq (\mathbb{G}_m)^r$  als algebraische Gruppe. Außerdem soll verabredungsgemäß immer  $\rho_0 \geq 0$  sein; wegen  $T(\rho) = T(-\rho)$  ist das keine Einschränkung.  $B$  bezeichnet die Borelgruppe  $U \cdot D$  und  $B(\rho)$  die Untergruppe  $U \cdot T(\rho)$ .

Alle genannten Gruppen operieren auf natürliche Weise auf dem Hilbertschema  $H_Q$ . Da sie (mit Ausnahme von  $\mathbb{G}L(r+1, k)$ ) auflösbar sind, folgt

aus dem Borelschen Fixpunktsatz, daß die Fixpunktschemata  $H_Q^B$ ,  $H_Q^U$  usw. abgeschlossene, nicht-leere Unterschemata von  $H_Q$  sind.

### (3.2) Konstruktion von Bahnkurven im Hilbertschema

Wenn  $A = k[\lambda]$ ,  $T = \text{Spec } A$ , dann ist  $A_\lambda = k[\lambda, \lambda^{-1}]$ , und für  $\mathcal{J} \in H_Q(k)$  ist  $\varphi^s(\lambda)\mathcal{J}$  ein Element von  $H_Q(\mathbb{G}_m)$ , wobei  $\lambda$  als Unbestimmte aufgefaßt wird. Es gibt ein  $\mathcal{J} \in H_Q(\text{Spec } A)$  mit  $\mathcal{J} | X \times_k \mathbb{G}_m = \varphi^s(\lambda)\mathcal{J}$ . Wir bezeichnen  $\mathcal{J} \otimes_A k(0)$  mit  $\mathcal{J}_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi^s(\lambda)\mathcal{J}$ . Entsprechend wird für  $A = k[\lambda^{-1}]$  die Garbe  $\mathcal{J}_\infty = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi^s(\lambda)\mathcal{J}$  erklärt.  $\mathcal{J}_0$  und  $\mathcal{J}_\infty$  sind Elemente von  $H_Q(k)$ , die fest unter  $\mathbb{G}_m^s$  sind. Die geometrische Bedeutung ist wie folgt. Wenn  $\mathcal{J}$  dem abgeschlossenen Punkt  $z \in H_Q$  entspricht und  $Y$  irgendein lokal-noethersches Schema über  $k$  ist, dann sei  $z_Y$  das induzierte Element  $\mathcal{J} \otimes_k \mathcal{O}_Y \in H_Q(Y)$ . Indem man  $\varphi \in \mathbb{G}_m^s(Y)$  auf  $\varphi(z_Y) \in H_Q(Y)$  abbildet, wird ein Morphismus  $f: \mathbb{G}_m \rightarrow H_Q$  definiert. Da  $H_Q$  projektiv über  $k$  ist, gibt es eine eindeutig bestimmte Fortsetzung  $\bar{f}: \mathbb{P}_k^1 \rightarrow H_Q$  und  $z_0 = \bar{f}(0)$  bzw.  $z_\infty = \bar{f}(\infty)$  entsprechen gerade den Idealen  $\mathcal{J}_0$  bzw.  $\mathcal{J}_\infty$ .  $\text{Im}(f)$  bzw.  $\text{Im}(\bar{f})$  mit der reduzierten Unterschema-Struktur werden Bahn bzw. abgeschlossene Bahn von  $z$  unter  $\mathbb{G}_m$  genannt. Wir sagen, wir haben  $z$  durch eine (abgeschlossene) Bahn mit der Spezialisierung  $z_0$  und  $z_\infty$  von  $z$  unter  $\mathbb{G}_m^s$  verbunden. Eine analoge Konstruktion ist mit  $\mathbb{G}_a^{ij}$  möglich, und da  $B$  eine Kompositionssreihe mit zu  $\mathbb{G}_m$  oder  $\mathbb{G}_a$  isomorphen Quotienten hat, kann man jeden abgeschlossenen Punkt  $z \in H_Q$  durch eine Folge von abgeschlossenen Bahnen mit einem Fixpunkt von  $H_Q$  unter  $B$  verbinden.

### (3.3) Beschreibung der Spezialisierung unter einer multiplikativen Gruppe

Diese beruht auf folgender bekannten Tatsache:

**BEMERKUNG 1.** Sei  $R$  der Polynomring über  $k$  in einer Variablen und  $E$  ein freier  $R$ -Modul vom Rang  $n$ . Wenn  $f \in R \setminus \{0\}$  und  $F \subset E_f$  ein (lokal-) freier direkter Summand vom Rang  $m$  ist, dann gibt es genau einen direkten Summanden  $F^*$  von  $E$  mit  $F_f^* = F$ , der Fortsetzung von  $F$  auf  $A$  genannt wird.

An späterer Stelle werden wir noch benötigen:

**BEMERKUNG 2.** Wenn  $F \subset S_d \otimes_k R_f$  und  $L \subset S_{d+1} \otimes_k R_f$  zwei lokal-freie direkte Summanden mit  $S_1 F \subset L$  sind, dann gilt auch für die Fortsetzungen  $S_1 F^* \subset L^*$ .

**Beweis.**  $X_i F^* + L^*/L^*$  ist als Untermodul von  $S_{d+1} \otimes_k R/L^*$  frei, folglich  $X_i F^* + L^*$  ein freier direkter Summand. Für die Lokalisierung erhält man  $(X_i F^* + L^*)_f = X_i F + L = L$ , nach Bemerkung 1 muß dann  $X_i F^* \subset L^*$  sein.

Wir beschreiben nun für  $\mathcal{J} \in H_Q(k)$  die Konstruktion von  $\mathcal{J}_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi^s(\lambda)\mathcal{J}$  und  $\mathcal{J}_\infty = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi^s(\lambda)\mathcal{J}$ .

Sei  $d \geq n(Q)$  eine feste Zahl, sei  $m = Q(d)$  und  $F = H^0(X, \mathcal{J}(d))$ ;  $\mathcal{J}_Q$  bezeichnet die universelle Idealgarbe auf  $H_Q$ . Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir die Rechnung für  $s = 0$  durch, wobei  $R = k[X_1, \dots, X_r]$  sein soll.

1°  $F$  hat eine Basis  $F_i = X_0^{d_i} f_i^0 + X_0^{d_i+1} f_i^1 + \dots$ ,  $1 \leq i \leq m$ , so daß  $f_i^v \in R$  homogen vom Grad  $d - (d_i + v)$ ,  $f_i^0 \neq 0$ , und  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_m$  ist. Wenn  $d_a = d_b$  für ein Paar von Zahlen  $1 \leq a < b \leq m$  ist, kann man durch lineares Kombinieren der  $F_i$ ,  $a \leq i \leq b$ , erreichen, daß die  $f_i^0$ ,  $a \leq i \leq b$ , linear unabhängig sind. Wir setzen  $f_i = X_0^{-d_i} F_i$ . Für  $\lambda \in \mathbb{G}_m^0(k)$  ist dann  $\varphi^0(\lambda)F = \varphi^0(\lambda)H^0(X, \mathcal{J}(d)) = H^0(X, \mathcal{J}_\lambda(d))$ , wobei  $\mathcal{J}_\lambda = \varphi^0(\lambda)\mathcal{J} \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{J}_Q) \otimes_{\mathbb{G}_m} k(\lambda)$ . Also hat  $H^0(X, \mathcal{J}_\lambda(d))$  die Basis

$$\varphi^0(\lambda)(F_i) = \lambda^{d_i}(X_0^{d_i} f_i^0 + \lambda X_0^{d_i+1} f_i^1 + \lambda^2 X_0^{d_i+2} + \dots).$$

Dem Morphismus  $f$  entspricht das  $k[\lambda, \lambda^{-1}]$ -Bündel  $\varphi^0(\lambda)F$ ,  $\lambda$  als Unbestimmte aufgefaßt. Da die  $X_0^{d_i} f_i^0$  linear unabhängig sind, folgt, daß die Fortsetzung von  $\varphi^0(\lambda)F$  auf  $k[\lambda]$  gerade das Unterbündel mit der Basis ist:

$$X_0^{d_i} f_i^0 + \lambda X_0^{d_i+1} f_i^1 + \dots, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Das Ideal in  $\mathcal{O}_X$

$$\mathcal{J}_0 = \bar{f}^*(\mathcal{J}_Q) \otimes_{\mathbb{P}^1_k} k(0) = (\{X_0^{d_i} f_i^0 \mid 1 \leq i \leq m\}) = : \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi^0(\lambda)\mathcal{J} \quad (2)$$

entspricht dem Grenzwertpunkt  $\bar{f}(0) \in H_Q(k)$ .

2° Entsprechend hat  $F$  eine Basis  $X_0^{e_i} g_i^0 + X_0^{e_i-1} g_i^1 + X_0^{e_i-2} g_i^2 + \dots$  mit  $e_1 \leq \dots \leq e_m$  und linear unabhängigen Formen  $g_i^0$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Dann wird  $\varphi^0(\lambda)F$  erzeugt von

$$\lambda^{e_i}(X_0^{e_i} g_i^0 + \lambda^{-1} X_0^{e_i-1} g_i^1 + \lambda^{-2} X_0^{e_i-2} g_i^2 + \dots),$$

und daher ist die Fortsetzung des  $k[\lambda, \lambda^{-1}]$ -Bündels  $\varphi^0(\lambda)F$  auf  $k[\lambda^{-1}]$  gerade das Unterbündel mit der Basis

$$X_0^{e_i} g_i^0 + \lambda^{-1} X_0^{e_i-1} g_i^1 + \lambda^{-2} X_0^{e_i-2} g_i^2 + \dots, \quad 1 \leq i \leq m.$$

## Das Ideal in $\mathcal{O}_X$

$$\mathcal{J}_\infty = \bar{f}^*(\mathcal{J}_Q) \otimes_{\mathbb{P}_k^1} k(\infty) = (\{X_0^e g_i^0 \mid 1 \leq i \leq m\}) =: \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi^0(\lambda) \mathcal{J} \quad (3)$$

entspricht dem Grenzwertpunkt  $\bar{f}(\infty)$ .

### (3.4) Die Gruppe $U = U(r+1, k)$

Ihre Bedeutung beruht auf folgender.

**BEMERKUNG.** Wenn  $\mathcal{J} \in H_Q(k)$   $U(k)$ -invariant und  $I = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{J}(n))$  ist, dann ist  $X_0$  kein Nullteiler des Ringes  $S/I$  und  $\mathcal{J}' = \mathcal{J} + X_0 \mathcal{O}_X(-1)/X_0 \mathcal{O}_X(-1) \in H_{Q'}(k)$  invariant unter  $U(r, k)$ , wobei  $Q'(T) = Q(T) - Q(T-1)$ .

**Beweis.** Wenn  $U = \bigcap_i Q_i$  eine reduzierte Primärzerlegung ist mit graduierten Idealen  $Q_i$ , primär zu graduierten Primidealen  $P_i$ , dann ist  $\bigcup P_i$  die Menge der Nullteiler von  $S/I$ . Da  $I$  fest unter  $U(k)$  ist, sind es auch die  $P_i$ , so daß aus  $X_0 \in P_i$  folgen würde  $S_+ \subset P_i$ , Widerspruch.

**LEMMA 1.** Sei  $z$  ein abgeschlossener Punkt des Fixpunktschemas  $H_Q^U$ , der dem Ideal  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$  entspricht. Längs der abgeschlossenen Bahn von  $z$  unter  $\mathbb{G}_m^0$  ist

- (i)  $h^0(\mathcal{J}(n)) = h^0(\mathcal{J}_\lambda(n))$  für alle  $\lambda \in \mathbb{P}_k^1 - \{\infty\}$  und  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (ii)  $h^0(\mathcal{J}(n)) \leq h^0(\mathcal{J}_\infty(n))$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Mit anderen Worten, die Hilbertfunktion  $h$  ist auf der abgeschlossenen Bahn mit Ausnahme des unendlich-fernen Fixpunktes konstant, dort wird sie eventuell größer.

**Beweis.** Da für  $n \geq d = n(Q)$  in (i) und (ii) Gleichheit gilt, sei  $0 \leq n < d$ . Wir verwenden die Bezeichnungen von (3.3). Wegen obiger Bemerkung ist

$$H^0(\mathcal{J}_0(n)) = \{x \in S_n \mid X_0^{d-n} \cdot x \in H^0(\mathcal{J}_0(d))\} \subset \langle \mathcal{B}_n^0 \rangle$$

$$H^0(\mathcal{J}(n)) = \{x \in S_n \mid X_0^{d-n} \cdot x \in H^0(\mathcal{J}(d))\} \supset \langle \mathcal{B}_n \rangle,$$

wobei

$$\mathcal{B}_n^0 = \{X_0^{d_i-(d-n)} \cdot f_i^0 \mid d_i \geq d-n\},$$

$$\mathcal{B}_n = \{X_0^{d_i-(d-n)} \cdot f_i \mid d_i \geq d-n\}$$

nach Konstruktion der Basis  $(F_i)$  in (3.3) linear unabhängige Mengen sind. Es folgt  $h^0(\mathcal{J}_0(n)) \leq h^0(\mathcal{J}(n))$ , und  $h^0(\mathcal{J}_0(n)) \geq h^0(\mathcal{J}(n))$  gilt wegen des Halbstetigkeitssatzes, der auch (ii) impliziert.

**LEMMA 2.** Sei  $\mathcal{J} \in H_Q(k)$  invariant unter  $U(r+1, k)$  und  $\mathcal{J}_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi^0(\lambda) \mathcal{J}$ . Wenn dann  $S_1 H^0(\mathcal{J}(n)) = H^0(\mathcal{J}(n+1))$  ist, dann ist auch  $S_1 H^0(\mathcal{J}_0(n)) = H^0(\mathcal{J}_0(n+1))$ .

*Beweis.* Für  $n \geq d$  folgt dies aus (2.2). Sei daher  $n < d$ . Der Beweis von Lemma 1 hat gezeigt  $H^0(\mathcal{J}(n)) = \langle \mathcal{B}_n \rangle$ ,  $H^0(\mathcal{J}_0(n)) = \langle \mathcal{B}_n^0 \rangle$  und Entsprechendes für  $n+1$  statt  $n$ . Wir haben zu zeigen  $X_0^{d_i - (d-n-1)} \cdot f_i^0 \in S_1 H^0(\mathcal{J}_0(n))$ , wenn  $d_i \geq (d-n-1)$  ist. Für  $d_i > d-n-1$  ist dies klar, so daß man annehmen kann  $d_i = d-n-1$ . Nach Voraussetzung hat man dann

$$f_i = \sum (a_j X_0 + l_j) \cdot X_0^{d_i - (d-n)} \cdot f_j,$$

wobei die Summation über die  $j$  mit  $d_j \geq d-n$  erfolgt und  $l_j \in S_1$  Linearformen ohne  $X_0$  sind. Es folgt

$$f_i^0 + X_0 f_i^1 + \dots = \sum (a_j X_0 + l_j) X_0^{d_i - (d-n)} \cdot (f_j^0 + X_0 f_j^1 + \dots).$$

Sortieren nach Potenzen von  $X_0$  gibt

$$f_i^0 = \sum l_j f_j^0 \in S_1 H^0(\mathcal{J}_0(n)),$$

da hier die Summation über die  $j$  mit  $d_j = d-n$  erfolgt.

**LEMMA 3.** Sei  $I \subset S$  ein graduiertes Ideal, erzeugt von  $I_d$ , und  $B(r+1, k)$ -invariant. Dann ist  $\mathcal{J} = \tilde{I}$   $d$ -regulär und  $H^0(\mathcal{J}(n)) \cong I_n$  für alle  $n \geq d$ . (Vgl. [B-S], prop. 2.9 bzgl. einer ähnlichen Aussage.)

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, daß

$$0 \longrightarrow S_n/I_n \xrightarrow{X_0} S_{n+1}/I_{n+1} \longrightarrow S'_{n+1}/I'_{n+1} \longrightarrow 0 \tag{*}$$

exakt ist für alle  $n \geq d$ , wobei  $S' = S/X_0 S(-1)$  und  $I' = I + X_0 S(-1)/X_0 S(-1)$  sein soll. Für  $X_0 \cdot x \in I_{n+1}$  haben wir zu zeigen  $x \in I_n$ . Da man  $x$  als Summe von Monomen schreiben kann und  $I_{n+1}$  als Vektorraum von Monomen ezeugt wird, kann man ohne Einschränkung annehmen,  $x$  ist Monom. Dann ist  $X_0 \cdot x = X_s \cdot y$

mit  $y \in I_n$  Monom. Da  $I_n$  invariant unter  $B$  und  $\text{char}(k) = 0$  ist, folgt  $x = X_s \cdot X_0^{-1} \cdot y \in I_n$  (vgl. hierzu auch 4.2.3).

Offenbar erfüllt  $I'$  dieselben Voraussetzungen wie  $I$ , so daß man nach Induktionsvoraussetzung  $\mathcal{J}' = \tilde{I}'$  ist  $d$ -regulär und  $I'_n = H^0(\mathcal{J}'(n))$ ,  $n \geq d$ , annehmen kann. Aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{J}(-1) \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}' \rightarrow 0$$

folgt dann mit dem Schluß von ( $M$ , p. 102), daß  $H^i(\mathcal{J}(n-i)) = 0$  für alle  $n \geq d$ ,  $i \geq 2$ . Aus (\*) folgt, daß auch die obere Zeile des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & I_{n-1} & \rightarrow & I_n & \rightarrow & I'_n & \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{kan.} & & \downarrow \text{kan.} & & \downarrow \wr \\ 0 & \rightarrow & H^0(\mathcal{J}(n-1)) & \rightarrow & H^0(\mathcal{J}(n)) & \rightarrow & H^0(\mathcal{J}'(n)) & \rightarrow H^1(\mathcal{J}(n-1)) \rightarrow H^1(\mathcal{J}(n)) \rightarrow 0 \end{array}$$

exakt ist für alle  $n \geq d$ , wobei  $I_{d-1} = \{x \in S_{d-1} \mid X_0 \cdot x \in I_d\}$  sein soll. Daher ist  $H^0(\mathcal{J}(n)) \rightarrow H^0(\mathcal{J}'(n))$  surjektiv und  $H^1(\mathcal{J}(n-1)) \simeq H^1(\mathcal{J}(n))$  für alle  $n \geq d$ . Es folgt  $H^1(\mathcal{J}(n-1)) = 0$ ,  $n \geq d$ . Da  $I_n \simeq H^0(\mathcal{J}(n))$  für  $n \gg 0$ , folgt aus dem Diagramm durch absteigende Induktion  $I_n \simeq H^0(\mathcal{J}(n))$ ,  $n \geq d$ .

### (3.5) Numerisch wachsende und starre Deformationen monomialer Ideale

**LEMMA 1.** Sei  $F \subset S_d$  ein  $T(\rho)$ -invarianter Unterraum.  $F$  hat eine Basis der Form  $M_i p_i(X^\rho)$ , wobei  $M_i$  paarweise verschiedene Monome und  $p_i$  Polynome in einer Variablen mit konstantem Term 1 sind.

*Beweis.* Zunächst schreibt man jedes Basiselement als Summe von Monomen, etwa in der lexikographischen Ordnung. Dann erhält man durch lineares Kombinieren eine Basis der Form  $f_i = m_i + g_i$ ,  $m_i$  ein Monom,  $g_i$  Summe von Monomen, derart daß  $m_i$  vor allen Monomen in  $g_i$  in der lexikographischen Anordnung steht und  $m_i \neq m_j$  ist für alle  $i \neq j$ . Durch lineares Kombinieren kann man erreichen, daß außerdem  $m_i$  in keinem  $g_j$  mehr vorkommt. Wenn nun  $\varphi \in T(\rho)$  und  $f \in \{f_i\}$  ist, kommen in  $\varphi(f)$  dieselben Monome wie in  $f$  vor. Aus  $\varphi(f) \in F$  folgt daher  $\varphi(f) = c(\varphi) \cdot f$ ,  $c$  ein Charakter von  $T(\rho)$ . Wenn  $f = \sum a_i X^{\alpha(i)}$  ist, dann muß  $\alpha(i) - \alpha(j) \in \mathbb{Z} \cdot \rho$  sein, falls  $a_i \neq 0$  und  $a_j \neq 0$  sind. Man kann daher jedes  $f_i$  in die Form  $M_i p_i(X^\rho)$  bringen und dann durch lineares Kombinieren  $M_i \neq M_j$  erreichen.

**LEMMA 2.** Sei  $\mathcal{J} \in H_Q(k)$  invariant unter  $B(\rho)$ . Wenn  $\rho_s$  irgendeine positive Komponente von  $\rho$  ist, sind  $\mathcal{J}_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi^s(\lambda) \mathcal{J}$  und  $\mathcal{J}_\infty = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi^s(\lambda) \mathcal{J}$

unabhängig von der Wahl von  $\rho_s$ . Wenn  $\rho_0 = 0$  ist, hat man  $h^0(\mathcal{J}_0(n)) = h^0(\mathcal{J}_\infty(n)) = h^0(\mathcal{J}(n))$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Wir wählen für  $F = H^0(\mathcal{J}(d))$  eine Basis wie in Lemma 1. Dann ist  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi^s(F) = \langle M_i \rangle$  (vgl. 3.3), und dies ist offenbar unabhängig von  $s$ . Da  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi^s(\lambda)F = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi'(\lambda)F$  für  $\rho_t < 0$ , zeigt dieser Schluß die entsprechende Aussage auch für  $\mathcal{J}_\infty$ . Im Fall  $\rho_0 = 0$  kann man  $\rho$  durch  $-\rho$  ersetzen und braucht nur  $\mathcal{J}_0$  zu betrachten, wo die Aussage wie in (3.4.1) folgt mit

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_n^0 &= \{X_0^{-(d-n)}M_i \mid \text{grad}_{X_0} M_i \geq d - n\}, \\ \mathcal{B}_n &= \{X_0^{-(d-n)}M_i p_i(X^\rho) \mid \text{grad}_{X_0} M_i \geq d - n\}.\end{aligned}$$

**DEFINITION.** Die abgeschlossenen Punkte  $x_1$  und  $x_2$  von  $H_Q$  sollen invariant unter  $B$  sein. Der Punkt  $x_1$  kann durch eine ( $h$ -monotone) Deformation mit  $x_2$  verbunden werden, wenn es ein  $x \in H_Q(k)$  gibt, das invariant unter einer Gruppe  $B(\rho)$  ist, derart daß  $x_1 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi^s(\lambda)x$  und  $x_2 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi^s(\lambda)x$  ist, wobei  $\rho_s$  irgendeine positive Komponente von  $\rho$  ist. Wenn  $\rho_0 = 0$  ist, heißt die Deformation (*numerisch*) *starr*, weil sie die Hilbertfunktion  $h$  nicht ändert. Wenn  $\rho_0 > 0$  ist, heißt die Deformation (*numerisch*) *wachsend*. Nach Lemma 2 ist nämlich  $h(x_1) \leq h(x_2)$ , und dem Beweis von Lemma 2 und (3.3) kann man entnehmen, daß tatsächlich  $h(x_1) < h(x_2)$  ist.

## 4. Deformationen innerhalb eines Kegels

### (4.1) Bezeichnungen

$R = k[X_1, \dots, X_r]$ ,  $Y = \text{Proj } R$ ,  $\mathcal{L} \subset \mathcal{O}_Y$  Ideal mit Hilbertpolynom  $h$ , invariant unter  $U(r, k)$ ,  $S = k[X_1, \dots, X_r, X_0]$ ,  $L = \bigoplus_{n \geq 0} L_n$  mit  $L_n = \bigoplus_{i=0}^n X_0^{n-i} H^0(\mathcal{L}(i))$ , das von  $\bigoplus_{n \geq 0} H^0(\mathcal{L}(n))$  in  $S$  erzeugte graduierte Ideal. Da  $X_0$  ein Nichtnullteiler auf  $S/L$  ist, hat man für  $\mathcal{L}^* = \tilde{L}$

$$H^0(\mathcal{L}^*(n)) = \bigoplus_{i=0}^n X_0^{n-i} H^0(Y, \mathcal{L}(i)).$$

$\mathcal{L}^*$  ist invariant unter  $U(r+1, k) \cdot \mathbb{G}_m^0$ , sein Hilbertpolynom nennen wir  $H$ .

Im folgenden ist  $C$  eine feste natürliche Zahl; wir betrachten Hilbertpolynome  $Q$ , für die  $H - Q = c$  eine natürliche Zahl  $c < C$  ist, und setzen  $d = n(H) + C$ . Dann ist  $n(Q) < d$ . Die Menge  $\Delta(\mathcal{L})$  aller Ideale  $\mathcal{J} \subset \mathcal{L}^*$ , deren Hilbertpolynom  $Q$  die gerade genannten Bedingungen erfüllt, wird *Kegel* über  $\mathcal{L}$  genannt. Wenn

$G \subset GL(r+1, k)$  eine Gruppe ist, die  $\mathcal{L}^*$  invariant lässt, bezeichnet  $\Delta(\mathcal{L}; G)$  die Teilmenge der Elemente von  $\Delta(\mathcal{L})$ , die fest unter  $G$  sind.

BEMERKUNG. Für  $\mathcal{J} \in \Delta(\mathcal{L}; U(r+1, k))$  ist

$$\mathcal{J}' = \mathcal{J} + X_0 \mathcal{O}_X(-1)/X_0 \mathcal{O}_X(-1) = \mathcal{L}$$

und  $\text{reg } (\mathcal{L}) \leq \text{reg } (\mathcal{J})$ .

Die erste Aussage ist klar und die zweite folgt hieraus, indem man zu der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}(e-i-1) \xrightarrow{X_0} \mathcal{J}(e-i) \longrightarrow \mathcal{L}(e-i) \longrightarrow 0$$

die lange exakte Kohomologiesequenz bildet,  $e = \text{reg } (\mathcal{J})$ .

(4.2) LEMMA. Die Menge der unter  $U(r+1, k) \cdot \mathbb{G}_m^0$  invarianten Ideale  $\mathcal{J} \subset \mathcal{L}^*$  mit Hilbertpolynom  $Q = H - c$ , wobei  $0 \leq c \leq C$ , ist bijektiv zur Menge der Folgen  $(V_0, \dots, V_d)$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $V_n \subset H^0(\mathcal{L}(n))$  ist ein  $k_n$ -codimensionaler  $U(r, k)$ -invarianter Unterraum,  $n = 0, 1, \dots, d$ , mit  $\sum k_n = c$ ,  $k_d = 0$ ;
- (ii)  $R_1 V_n \subset V_{n+1}$ ,  $0 \leq n \leq d-1$ .

Beweis. (a) Für  $\mathcal{J} \in \Delta(\mathcal{L}; U(r+1, k) \cdot \mathbb{G}_m^0; c)$  hat man eine Zerlegung  $H^0(\mathcal{J}(d)) = \bigoplus_{n=0}^d X_0^{d-n} V_n$ ,  $V_n \subset H^0(\mathcal{L}(n))$   $U(r, k)$ -invarianter Unterraum. Da  $X_0$  Nichtnullteiler auf  $S/\bigoplus_{n \geq 0} H^0(\mathcal{J}(n))$  ist, folgt hieraus

$$H^0(\mathcal{J}(n)) = \bigoplus_{i=0}^n X_0^{n-i} V_i, \quad 0 \leq n \leq d. \tag{*}$$

Die Bedingung  $S_1 H^0(\mathcal{J}(n)) \subset H^0(\mathcal{J}(n+1))$ ,  $0 \leq n \leq d-1$ , ist dann gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} R_1 V_n \oplus X_0(V_n + R_1 V_{n-1}) \oplus X_0^2(V_{n-1} + R_1 V_{n-2}) \oplus \cdots \oplus \\ X_0^n(V_1 + R_1 V_0) \oplus X_0^{n+1} V_0 \subset V_{n+1} \oplus X_0 V_n \oplus \cdots \oplus X_0^{n+1} V_0 \end{aligned}$$

für  $0 \leq n \leq d-1$ , d.h. gleichbedeutend mit

$$R_1 V_n \subset V_{n+1}, \quad 0 \leq n \leq d-1.$$

Da  $\mathcal{J}$   $d$ -regulär ist, ist  $h^0(\mathcal{J}(d)) = \sum_0^d \dim V_n = Q(d) = H(d) - c = \sum_0^d h^0(\mathcal{L}(n)) - c$ ,

woraus  $\sum_0^d k_n = c$  folgt. Wegen der  $d$ -Regularität von  $\mathcal{I}$  ist  $H^0(\mathcal{I}(d)) \rightarrow H^0(\mathcal{L}(d))$  surjektiv und daher  $V_d = H^0(\mathcal{L}(d))$  (vgl. Bemerkung 4.1).

(b) Umgekehrt wird das Ideal  $I \subset S$  definiert durch  $I_n = \bigoplus_{i=0}^n X_0^{n-i} V_i$ ,  $0 \leq n \leq d$  und  $I_n = S_{n-d} I_d$ ,  $n \geq d$ . Dann erhält man mit (ii) und der  $d$ -Regularität von  $\mathcal{L}$  für  $n \geq 0$ :

$$\begin{aligned} S_n I_d &= R_n H^0(\mathcal{L}(d)) + X_0 R_{n-1} H^0(\mathcal{L}(d)) \oplus \cdots \oplus X_0^n H^0(\mathcal{L}(d)) \\ &\quad \oplus X_0^{n+1} V_{d-1} \oplus \cdots \oplus X_0^{n+d} V_0 \\ &= H^0(\mathcal{L}(d+n)) \oplus X_0 H^0(\mathcal{L}(d+n-1)) \oplus \cdots \oplus X_0^n H^0(\mathcal{L}(d)) \\ &\quad \oplus X_0^{n+1} V_{d-1} \oplus \cdots \oplus X_0^{n+d} V_0. \end{aligned}$$

Daher ist  $\dim S_n I_d = H(d+n) - c$ ,  $n \geq 0$ .  $\mathcal{I} = \tilde{I}$  hat demnach das Hilbertpolynom  $Q$ , und da dann  $d$  eine Regularitätsschranke für  $\mathcal{I}$  ist, hat man  $h^0(\mathcal{I}(d)) = H(d) - c$ . Es folgt  $H^0(\mathcal{I}(d)) = \bigoplus_{n=0}^d X_0^{d-n} V_n$ . Die Bijektion wird also durch  $\mathcal{I} \mapsto (V_0, \dots, V_d)$  definiert.

### *Bezeichnungen und Bemerkungen*

1. Wenn  $\mathcal{I}$  die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt, ist

$$V_n = H^0(\mathcal{L}(n)) \quad \text{für alle } n \geq \text{reg}(\mathcal{I}).$$

Dies folgt aus den exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{I}(n-1)) \rightarrow H^0(\mathcal{I}(n)) \rightarrow H^0(\mathcal{L}(n)) \rightarrow 0.$$

2. Wenn die Folge  $V = (V_0, \dots, V_d)$  die Bedingungen (i) und (ii) des Lemmas erfüllt, wird das zugehörige Ideal mit  $\mathcal{I}(V)$  bezeichnet. Im Beweis hatte sich ergeben

$$H^0(\mathcal{I}(V)(n)) = \bigoplus_{i=0}^n X_0^{n-i} V_i, \quad 0 \leq n \leq d.$$

3. Wenn  $\mathcal{L}$  zusätzlich  $D(r, k)$ -invariant ist, setzen wir

$$\Delta^*(\mathcal{L}) = \text{Menge der unter } B(r+1, k) \text{ invarianten Ideale}$$

$\mathcal{I} \subset \mathcal{L}^*$  mit Hilbertpolynom  $H(T) - c$ , wobei  $c < C$ .

Für  $\mathcal{I} \in \Delta^*(\mathcal{L})$  hat jeder Vektorraum  $V_n$  eine eindeutig bestimmte Basis von Monomen, die mit  $E(V_n)$  bezeichnet wird. Zur Vereinfachung identifizieren wir

$V_n$  mit  $E(V_n)$  und schreiben  $V_n$  statt  $E(V_n)$ . Die Menge  $\bigcup_0^d E(V_n) = E(V)$  wird *Treppe* von  $V = (V_0, \dots, V_d)$  genannt und zur Vereinfachung mit  $V$  bezeichnet. Wir setzen  $\Lambda_n = E(H^0(\mathcal{L}(n)))$  und  $\Lambda = \bigcup_0^d \Lambda_n$ . Der Ausdruck Treppe soll nur im Zusammenhang mit  $D(r+1, k)$ -Invarianz verwendet werden.

Die Bedingung, daß jedes  $V_n$  invariant unter  $U(r, k)$  ist, ist wegen  $\text{char}(k) = 0$  äquivalent mit

$$X_1^{\alpha_1} \cdots X_r^{\alpha_r} \in V_n \Rightarrow X_1^{\alpha_1} \cdots X_t^{\alpha_t+1} \cdots X_s^{\alpha_s-1} \cdots X_r^{\alpha_r} \in V_n \quad (*)$$

für alle  $1 \leq t < s \leq r$  mit  $\alpha_s \neq 0$ . Dies sieht man, indem man  $(\lambda X_t + X_0)^{\alpha_s}$  nach dem Binomischen Satz entwickelt und  $\text{char}(k) = 0$  sowie das Nichtverschwinden der Vandermonde-Determinante ausnutzt.

(4.3) LEMMA.  *$\mathcal{L}$  soll unter  $U(r, k) \cdot D(r, k)$  invariant und  $\mathcal{J} \in \Delta(\mathcal{L})$  soll  $U(r+1, k) \cdot T(\rho)$ -invariant sein. Dann ist  $\text{reg}(\mathcal{J}_0) = \text{reg}(\mathcal{J})$  (zur Definition von  $\mathcal{J}_0$  vgl. 3.5.2).*

*Beweis.* Da  $\text{reg}(\mathcal{J}_0) \geq \text{reg}(\mathcal{J})$  aus dem Halbstetigkeits-Satz folgt, bleibt noch  $\text{reg}(\mathcal{J}_0) \leq \text{reg}(\mathcal{J}) = e$  nachzuweisen. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall.  $\rho_0 > 0$ . Da  $S_1 H^0(\mathcal{J}(n)) = H^0(\mathcal{J}(n+1))$  für  $n \geq e$  ist (vgl. 2.1), folgt mit Lemma 3.4.2  $S_1 H^0(\mathcal{J}_0(n)) = H^0(\mathcal{J}_0(n+1))$ ,  $n \geq e$ , und hieraus mit Lemma 3.4.3  $\text{reg}(\mathcal{J}_0) \leq e$ .

2. Fall.  $\rho_0 = 0$ . Man hat entsprechend Lemma 4.2 die Zerlegungen

$$H^0(\mathcal{J}(n)) = \bigoplus_{i=0}^n X_0^{n-i} V_i, \quad V_n \subset H^0(\mathcal{L}(n)) \quad B(\rho)\text{-invariant},$$

$$H^0(\mathcal{J}_0(n)) = \bigoplus_{i=0}^n X_0^{n-i} V_n^0, \quad V_n^0 \subset H^0(\mathcal{L}(n)) \quad B\text{-invariant}.$$

Nach (4.2.1) ist

$$V_n = H^0(\mathcal{L}(n)), \quad n \geq e. \quad (*)$$

Aus  $h^0(\mathcal{J}_0(n)) = h^0(\mathcal{J}(n))$ ,  $n \in \mathbb{N}$  (Lemma 3.5.2), folgt

$$\dim V_n^0 = \dim V_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (**)$$

so daß aus (\*) und (\*\*\*) folgt

$$V_n^0 = H^0(\mathcal{L}(n)), \quad n \geq e, \quad (***)$$

und hieraus wegen  $\text{reg } (\mathcal{L}) \leq e$  (vgl. 4.2.1)

$$S_1 H^0(\mathcal{I}_0(n)) = H^0(\mathcal{I}_0(n+1)), \quad n \geq e.$$

Mit 3.4.3 folgt  $\text{reg } (\mathcal{I}_0) \leq e$ .

(4.4) LEMMA. Sei  $\mathcal{L}$   $B(r, k)$ -invariant,  $\mathcal{J} \in \Delta^*(\mathcal{L})$  ein Ideal mit Hilbertpolynom  $Q(T) = H(T) - c$  und  $E(\mathcal{J}) = V$ . Seien  $u \in V_m$  und  $v \in \Lambda_n - V_n$  zwei Monome mit  $n \leq m$ , derart daß  $V - u = U$  und  $W = U \cup v$  zwei unter  $B(r, k)$  invariante Treppen sind. Sei  $A = k[t]$ ,  $x = X_0^{d-m} \cdot u$ ,  $y = X_0^{d-n} \cdot v$ ,  $z = x + ty$  und  $I(t) \subset S \otimes_k A$  das von  $I(U)$  und  $z$  erzeugte Ideal. Dann gilt:

(i)  $I(t)_n \subset H^0(\mathcal{L}^*(n)) \otimes_k A$  ist  $U(r+1, k)$ -invarianter direkter Summand vom Rang  $Q(n)$  für alle  $n \geq d$ .

(ii) Definiert man  $\sigma \in \mathbb{Z}^{r+1}$  durch  $X^\sigma = y/x$  und setzt  $\rho = \sigma/\text{ggT}(\sigma)$ , dann ist  $I(t)$  invariant unter  $B(\rho)$ .

Zunächst soll die Situation an einem Beispiel erläutert werden:  $\Lambda_9$  ist in Figur 1 dargestellt; dabei ist das Monom  $X_1^2 X_2^5 X_3^2$  eingezeichnet. Nach (3.4.3) ist  $H^0(\mathcal{L}(9)) = \langle \Lambda_9 \rangle$ , und hieraus ergibt sich einerseits  $\binom{n-1+2}{2} + \binom{n-15+1}{1}$  als Hilbertpolynom von  $\mathcal{L}$ , andererseits  $\# \Lambda_8 = 30$ ;  $\# \Lambda_7 = 21$ ;  $\# \Lambda_6 = 13$ ;  $\# \Lambda_5 = 6$ ;  $\# \Lambda_4 = 2$ ;  $\# \Lambda_3 = 0$ . Daher ist

$$H(n) = \binom{n-1+3}{3} + \binom{n-16+2}{2} + \binom{n-78+1}{1}$$

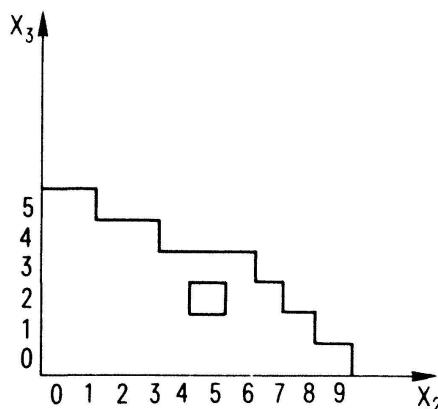


Fig. 1

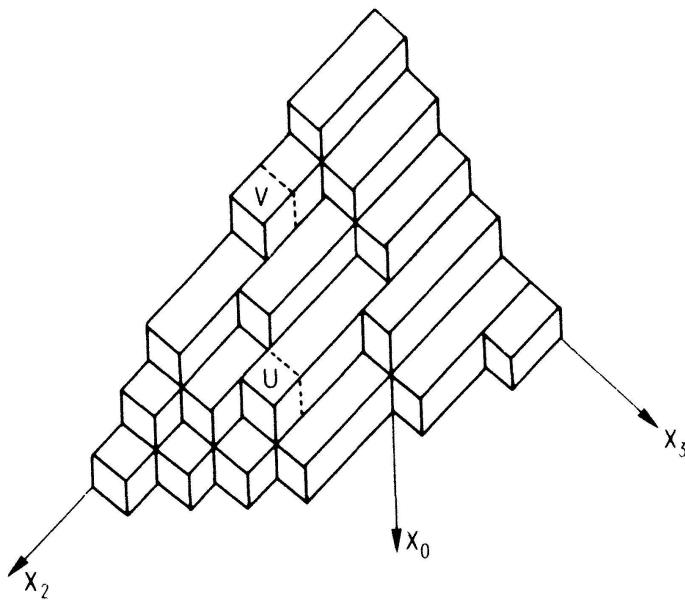


Fig. 2

das Hilbertpolynom von  $\mathcal{L}^*$ . Die Treppe  $V$  ist in Figur 2 dargestellt ( $v$  gehört nicht zu  $V$ ). Sie gibt

$$Q(n) = \binom{n-1+3}{3} + \binom{n-16+2}{2} + \binom{n-95+1}{1}$$

als Hilbertpolynom von  $\mathcal{J}(V)$ .  $W$  entsteht durch Herausnehmen von  $u$  und Hinzufügen von  $v$ . Während das Hilbertpolynom dabei gleich bleibt, wird die Hilbertfunktion größer. Nun zum formalen

*Beweis.* Da  $\text{reg } (\mathcal{J}) < d$ , folgt mit (4.2.1)  $V_n = \Lambda_n$  für  $n = d, d-1$ . Aus Bemerkung 4.1 ergibt sich dann  $u \notin V_d$ , d.h.  $U_d = \Lambda_d$ . Man kann Lemma 4.2 auf  $U$  anwenden und schließen:

$$\begin{aligned} X_i u \in V - u = U \Rightarrow X_i x \in I(U), \quad 1 \leq i \leq r; \\ X_i v \in W - v = U \Rightarrow X_i y \in I(U), \quad 1 \leq i \leq r. \end{aligned} \tag{*}$$

Für kein  $t \in K$ ,  $K/k$  Körpererweiterung, kann  $X_0 z \in I(U)$  sein, da sonst  $X_0^{d-m} u \in I(U)$  oder  $X_0^{d-n} v \in I(U)$  und daher  $u \in U$  oder  $v \in U$  wäre. Deshalb hat man

$$\dim \text{Im } (I_{d+1}(t) \otimes k(\mathcal{P}) \rightarrow S_{d+1} \otimes k(\mathcal{P})) = \dim I(U)_{d+1} + 1 = Q(d+1)$$

und daher  $\dim (S_n \otimes A/I(t)_n) \otimes k(\mathcal{P}) = P(n)$  für  $n = d, d+1$  und alle  $\mathcal{P} \in \text{Spec } A$ , woraus (i) folgt (vgl. [G1], 3.9]). Wenn  $\varphi \in U(r+1, k)$  die Variable  $X_0$  fest lässt,

dann folgt

$$\varphi(z) - z = X_0^{d-m}(\varphi(u) - u) + t \cdot X_0^{d-n}(\varphi(v) - v) \in I(U) \otimes A,$$

weil  $\bar{u} \in V_m/U_m$  und  $\bar{v} \in W_n/U_n$  invariant unter  $U(r, k)$  sind. Wenn dagegen  $\varphi \in \mathbb{G}_a^{i0}$  ist (vgl. 3.1), dann bekommt man

$$\varphi(z) - z = (X_0 + \lambda X_i)^{d-m}u - X_0^{d-m}u + t((X_0 + \lambda X_i)^{d-n}v - X_0^{d-n}v),$$

und wegen (\*) ist das ein Element von  $I(t)$ . Die Aussage (ii) ist klar.

### Folgerungen und Bezeichnungen

1. Sei  $x \in H_Q^{B(\rho)}(k)$  der Punkt, der zum Ideal  $\tilde{I}(1)$  des Lemmas gehört. Es können 2 Fälle eintreten:

1. Fall:  $n < m$ , d.h.  $\rho_0 > 0$ . Dann ist  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi^0(\lambda)x = \mathcal{J}(V)$  und  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi^0(\lambda)x = \mathcal{J}(W)$ , und die Hilbertfunktion von  $\mathcal{J}(W)$  ist größer als die von  $\mathcal{J}(V)$  (vgl. 4.2.2). Entsprechend der Definition 3.5 haben wir  $\mathcal{J}(V)$  durch eine numerisch wachsende Deformation innerhalb  $\Delta(\mathcal{L})$  mit  $\mathcal{J}(W)$  verbunden, die wir *wachsende Modifikation* nennen.

2. Fall:  $n = m$ , d.h.  $\rho_0 = 0$ . Dann ist  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi^s(\lambda)x = \mathcal{J}(V)$  und  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi^s(\lambda)x = \mathcal{J}(W)$ , wobei  $\rho_s > 0$ . Es handelt sich um eine numerisch starre Deformation innerhalb  $\Delta(\mathcal{L})$ , die wir *starre Modifikation* nennen. Wir bezeichnen die Modifikationen mit  $V \mapsto V - u \cup v$ .

2. DEFINITION. Eine (unter  $D(r, k)$  invariante) Treppe  $V$  heißt *numerisch lokal maximal*, wenn es keine wachsende Modifikation von  $V$  gibt.

3. Wenn  $\mathcal{J} \in \Delta^*(\mathcal{L})$  das Hilbertpolynom  $Q(T) = H(T) - c$  mit  $0 < c$  hat, dann gibt es ein  $\mathcal{J}' \in \Delta^*(\mathcal{L})$  mit Hilbertpolynom  $Q + 1$  und  $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}'$ . Dies folgt mit Hilfe des Borelschen Fixpunktsatzes. Wegen 4.2 ist  $\mathcal{J}' = \mathcal{J}(\tilde{V})$ , wobei  $\tilde{V}$  eine Treppe der Form  $V \cup u$  mit einem Monom  $u \in \Lambda$  vom Grad  $< d$  ist. Wir nennen  $\tilde{V}$  *Erweiterung* von  $V$ .

DEFINITION.  $\delta(V) = \min \{\text{grad } u \mid u \in \Lambda - V \text{ Monom und } V \cup u \text{ ist Treppe}\}$ . Wenn  $u \in \Lambda - V$ ,  $V \cup u$  Treppe und  $\text{grad } u = \delta(V)$  ist, heißt  $V \cup u$  eine *minimale Erweiterungstreppe* und wird mit  $V^*$  bezeichnet.

(4.5) HILFSSATZ. *V numerisch lokal maximal,  $\tilde{V} = V \cup u$  Erweiterungstreppe mit  $u \in \Lambda_m$ . Dann ist  $R_1 \tilde{V}_n = \tilde{V}_{n+1}$  für alle  $n \geq m$  und daher  $R_1 V_n = V_{n+1}$  für alle  $n > m$ .*

*Beweis.* Wenn für ein  $n \geq m$   $R_1 \tilde{V}_n \subsetneq \tilde{V}_{n+1} = V_{n+1}$  wäre, hätte man einen  $B(r, k)$ -invarianten, 1-codimensionalen Unterraum  $E \subset V_{n+1}$  mit  $R_1 \tilde{V}_n \subset E$ . Dies folgt aus der Auflösbarkeit von  $B(r, k)$ . Es wäre dann  $E \oplus kv = V_{n+1}$ , und indem man  $v$  als Linearkombination von Monomen schreibt, sieht man, daß  $v$  als Monom angenommen werden kann. Da  $V_n = \Lambda_n$  für  $n = d - 1$ ,  $d$  ist (vgl. 4.2.1), muß  $n + 1 \leq d - 1$  sein. Dann wäre aber  $V \mapsto V - v \cup u$  eine wachsende Modifikation.

(4.6) LEMMA. *Wenn  $V$  numerisch lokal maximal und  $V^*$  eine minimale Erweiterungstreppe ist, dann ist entweder  $V^*$  numerisch lokal maximal, oder es gibt eine starre Modifikation  $V'$  von  $V$  und eine minimale Erweiterungstreppe  $V'^*$  von  $V'$ , derart daß  $\delta(V') < \delta(V)$  ist und für die Hilbertfunktionen  $h(\mathcal{J}(V^*)) < h(\mathcal{J}(V'^*))$  gilt.*

*Beweis.* Sei  $V^* = V \cup w$ ,  $w \in \Lambda_e$ ,  $e = \delta(V)$ . Angenommen, es wäre  $V^* \rightarrow V^* - v \cup u$  wachsende Modifikation. Wenn  $n = \text{grad } v > e$ , dann  $v \in V_n^* = R_1 V_{n-1}^*$  (4.5), und  $V^* - v$  wäre gar keine Treppe. Wenn  $n < e$ , dann  $m = \text{grad } u < \text{grad } v < e$ , folglich  $R_1 u \subset V_{m+1}^* = V_{m+1}$ , und  $V \cup u$  wäre Erweiterungstreppe, Widerspruch zur Definition von  $e$ . Also ist  $n = e$ . Nach Voraussetzung ist  $V^* - v$  eine Treppe. Es kann nicht  $v = w$  sein, da dann  $V^* - v \cup u = V \cup u$  eine Erweiterungstreppe von  $V$  mit  $\text{grad } u < \text{grad } v = e$  wäre. Nach Voraussetzung ist  $V - v \cup w = V^* - v$  Treppe und daher nach Definition  $V_e - v \cup w$  und  $V_e$  beides  $U(r, k)$ -invariante Mengen von Monomen im Sinne von 4.2.3. Man sieht leicht unter Benutzung der dort angegebenen Bedingung für  $U(r, k)$ -Invarianz, daß dann auch  $V_e - v$   $U(r, k)$ -invariant ist. Da nach Voraussetzung  $R_1 V_{e-1} \subset V_e - v \cup w$  und  $w \notin R_1 V_{e-1} \subset V_e$  ist, muß  $R_1 V_{e-1} \subset V_e - v$  sein. Daher ist  $V - v$  eine Treppe. Also ist  $V \rightarrow V - v \cup w = V'$  eine starre Modifikation und  $V' \cup u = V^* - v \cup u$  eine Erweiterungstreppe von  $V'$  mit  $\text{grad } u < e$ . Daher ist  $\delta(V') < \delta(V)$  und  $h(\mathcal{J}(V'^*)) \geq h(\mathcal{J}(V' \cup u)) = h(\mathcal{J}(V^* - v \cup u)) > h(\mathcal{J}(V^*))$ .

(4.7) HILFSSATZ. *Sei  $\mathcal{J} \in \Delta^*(\mathcal{L})$  numerisch lokal maximal. Die Multiplikation mit  $X_r$  induziert einen injektiven Homomorphismus von  $k$ -Vektorräumen*

$$R_{n-1}/V_{n-1} \rightarrow R_n/V_n \quad \text{für alle } 1 \leq n \leq e-1,$$

wobei  $e := \text{reg } (\mathcal{J}) < d$  und  $E(\mathcal{J}) = (V_0, \dots, V_d)$  ist.

*Beweis:*  $e < d$  ist verabredungsgemäß erfüllt (vgl. 4.1). Angenommen,  $X, \cdot x \in V_n$  mit  $x \notin V_{n-1}$  und  $n < e$ . Man kann ohne Einschränkung  $x$  als Monom annehmen. Aus der  $B(r, k)$ -Invarianz folgt  $R_1x \subset V_n$  und daher

$$R_1 \sum_{\varphi \in B} \varphi(V_{n-1} + k \cdot x) \subset V_n.$$

Da  $B$  auflösbar ist, gibt es einen  $B$ -invarianten Unterraum  $V_{n-1} \subset E \subset \Sigma\varphi(V_{n-1} + kx)$  mit  $\dim E = \dim V_{n-1} + 1$ . Es folgt  $R_1E \subset V_n$ . Sei etwa  $E = V_{n-1} + ky$  mit einem Monom  $y$  (vgl. den Beweis von 4.5). Es ist  $R_1V_{e-1} \subsetneq V_e$ , da aus  $R_1V_{e-1} = V_e$  folgen würde  $S_1H^0(\mathcal{J}(e-1)) = H^0(\mathcal{J}(e))$  und hieraus mit (2.1) und (3.4.3)  $\text{reg } (\mathcal{J}) < e$ . Da  $B$  auflösbar ist, gibt es einen  $B$ -invarianten, 1-codimensionalen Unterraum  $F \subset V_e$  mit  $R_1V_{e-1} \subset F$ . Sei wieder  $V_e = F + kz$ ,  $z$  Monom. Dann wäre  $V \mapsto V - z \cup y$  wachsende Modifikation.

(4.8) HILFSSATZ: *Sei  $\mathcal{J} \in \Delta^*(\mathcal{L})$  numerisch lokal maximal,  $\text{reg } (\mathcal{J}) = e$  und  $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{L}^*$ . Dann ist (i)  $\text{reg } (\mathcal{L}) < e$  und  $V_{e-1} \subset H^0(\mathcal{L}(e-1))$  1-codimensional; (ii)  $\text{grad } x = e-1$ , wenn  $\tilde{V} = V \cup x$  irgendeine Erweiterungstreppe von  $V = E(\mathcal{J})$  ist.*

*Beweis:* Sei  $B = B(r, k)$  und  $L = H^0(\mathcal{L}(e-1))$ .  $V_e = H^0(\mathcal{L}(e))$  folgt aus der  $e$ -Regularität von  $\mathcal{J}$  (vgl. den Beweis von 4.2).

*Fall 1.*  $R_1L \subsetneq V_e$ .

1. *Unterfall:*  $V_{e-1} \subsetneq L$ . Dann ist  $R_1V_{e-1} \subsetneq R_1L \subsetneq V_e$ , wie man leicht mit der Bedingung (\*) in 4.2.3 sieht. Es gibt einen  $B$ -invarianten, 1-codimensionalen Unterraum  $F \subset V_e$  mit  $R_1L \subset F$ . Daher ist  $F + kv = V_e$ ,  $v$  ein Monom. Ebenso gibt es einen  $B$ -invarianten Unterraum  $V_{e-1} \subset E \subset L$  mit  $\dim E/V_{e-1} = 1$ . Dann ist  $E = V_{e-1} + ku$ ,  $u$  ein Monom und  $V \mapsto V - v \cup u$  wachsende Modifikation.

2. *Unterfall:*  $V_{e-1} = L$ . Aus (4.7) folgt  $V_n = H^0(\mathcal{L}(n))$ ,  $0 \leq n \leq d$  und daher  $\mathcal{J} = \mathcal{L}^*$ .

*Fall 2.*  $R_1L = V_e$ . Da  $\text{reg } (\mathcal{L}) \leq e$  ist (4.2.1), folgt mit (3.4.3)  $\text{reg } (\mathcal{L}) < e$ .

1. *Unterfall:*  $\dim L/V_{e-1} \geq 2$ . Wähle einen  $B$ -invarianten Unterraum  $V_{e-1} \subsetneq E \subsetneq L$  mit  $\dim E/V_{e-1} = 1$  und sei  $E = V_{e-1} + ky$ ,  $y$  ein Monom. Da  $R_1E \subsetneq R_1L = V_e$  ist, gibt es einen  $B$ -invarianten Unterraum  $R_1E \subset F \subset V_e$  mit  $\dim V_e/F = 1$ . Sei  $V_e = F + kz$ ,  $z$  ein Monom. Dann ist  $V \mapsto V - x \cup y$  eine wachsende Modifikation.

2. *Unterfall:*  $V_{e-1} = L$ . Wie im 1. Fall ergibt sich ein Widerspruch.

3. *Unterfall:*  $V_{e-1} \subset L$  1-codimensional bleibt als einziger Fall übrig.

Angenommen,  $V \cup x$  wäre eine Erweiterungstreppe mit  $m = \deg x < e-1$ .

Da  $X_r x \in V_{m+1}$ , ergibt sich mit (4.7), daß  $x \in V_m$  wäre, Widerspruch.  $m \geq e$  ist auch nicht möglich, da  $V_n = H^0(\mathcal{L}(n))$  für  $n \geq e$  (Gleichung (\*) in 4.3).

(4.9) LEMMA. Sei  $V \subset R_d$  ein Vektorraum,  $U \subset V$  ein 1-codimensionaler, unter  $G = U(r, k) \cdot T(\rho)$  invarianter Unterraum. Dann ist  $R_1 U \subsetneq R_1 V$ , wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i)  $\rho_r \neq 0$  und  $V$  ist  $B(r, k)$ -invariant;
- (ii)  $\rho_r = 0$  und  $V$  ist  $G$ -invariant.

*Beweis.* (i) Wenn  $\rho_r < 0$  ist, ersetzt man  $\rho$  durch  $-\rho$  und kann daher ohne Einschränkung  $\rho_r > 0$  annehmen.

1° Sei  $\dim V = n + 1$ . Nach (3.5.1) hat  $U$  eine Basis der Form  $M_i p_i(X^\rho)$ ,  $M_i$  verschiedene Monome,  $p_i(t) = 1 + a_{i1}t + \dots + a_{in_i}t^{n_i}$  Polynome. Durch lineares Kombinieren kann man darüber hinaus erreichen, daß jedes  $M_i$  nicht mehr in  $M_j p_j(X^\rho)$  vorkommt für alle  $i \neq j$ . Da  $V$  von Monomen erzeugt wird, folgt  $M_i \in V$ ,  $a_{ij} M_i X^{j \cdot \rho} \in V$ ,  $1 \leq j \leq n_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Da  $\dim V = n + 1$  ist, können folgende beiden Fälle eintreten.

1. Fall: Alle  $a_{ij} = 0$ .

Dann wird  $U$  von Monomen erzeugt, und wir schließen so:

$$M \in V \text{ Monom} \Rightarrow X_r M \in R_1 V = R_1 U \Rightarrow X_r M = X_r M_r.$$

Wenn  $s = r$ , dann  $M = M_s \in U$ . Wenn  $s < r$ , dann  $M = X_s X_r^{-1} M_s \in U$  (Bedingung (\*) in 4.2.3)  $\Rightarrow U = V$ .

2. Fall. Die Menge  $\{M_i X^{j \cdot \rho} \mid a_{ij} \neq 0, 1 \leq j \leq n_i, 1 \leq i \leq n\}$  hat genau ein Element, das wir mit  $M_{n+1}$  bezeichnen. Dann ist  $V = \langle M_1, \dots, M_{n+1} \rangle$ , und es gibt eine Basis von  $U$  der Form  $f_i = M_i + a_i M_{n+1}$  mit  $M_{n+1} = X^{d_{n+1}} M_{n+1}$  und  $d_i > 0$ , falls  $a_i \neq 0$ . Dann müssen die  $d_i$  paarweise verschieden sein, da die  $M_i$  es sind. Derjenige Index  $i$ , für den  $a_i \neq 0$  und  $d_i$  minimal ist, wird jetzt  $n$  genannt, m.a.w. es ist  $\text{grad}_{X_r} M_n > \text{grad}_{X_r} M_i$ , falls  $a_i \neq 0$ . In  $f_n$  ist dann  $a_n \neq 0$  nach Konstruktion, und Ersetzen von  $f_i$  durch  $f_i - a_n^{-1} a_i f_n = M_i - a_n^{-1} a_i M_n$ , falls  $a_i \neq 0$ , gibt eine Basis von  $U$  der Form

$$f_i = M_i + a_i M_n, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad M_n = M_n X^{d_n \cdot \rho}, \quad d_i > 0, \quad \text{falls } a_i \neq 0;$$

$$f_n = M_n + a_n M_{n+1}, \quad a_n \neq 0, \quad M_{n+1} = M_{n+1} X^{d_{n+1}}, \quad d_n > 0.$$

$U^0 = \langle M_1, \dots, M_n \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi^r(\lambda) U$  ist invariant unter  $B(r, k)$ . (Begründung:

$U \in Z(k)$ ,  $Z = \text{Fixpunktschema von Grass}^n V$  unter  $G$ .  $\mathbb{G}_m'$  operiert auf  $Z$ , da  $\mathbb{G}_m'$  die Gruppe  $G$  normalisiert. Da  $Z$  projektiv ist, ist  $U^0 = \lim \varphi^r(\lambda)U \in Z(k)$  und auch invariant unter  $\mathbb{G}_m'$ , vgl. 3.3). Daher ist  $W = U \cap U^0$  invariant unter  $G$ . Wegen  $U + U^0 = V$  ist  $W \subset U^0$  1-codimensional, daher  $W = \langle f_1, \dots, f_{n-1} \rangle$  und folglich  $W^0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi^r(\lambda)W = \langle M_1, \dots, M_{n-1} \rangle$ .

Durch Induktion nach  $\dim V$  folgt: Es gibt eine Basis  $f_1, \dots, f_n$  von  $U$  und eine Zahl  $1 < m \leq n$  mit folgenden Eigenschaften:

- (a)  $f_i = M_i$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ ;
- (b)  $f_i = M_i + a_i M_{i+1}$ ,  $a_i \neq 0$ ,  $M_{i+1} = M_i X^{d_i \cdot \rho}$ , mit geeigneten ganzen Zahlen  $d_i > 0$ ,  $m \leq i \leq n$ ;
- (c)  $U_i = \langle f_1, \dots, f_i \rangle$  ist  $G$ -invariant,  $1 \leq i \leq n$ ;
- (d)  $U_i^0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi^r(\lambda)U_i = \langle M_1, \dots, M_i \rangle$  ist  $B(r, k)$ -invariant,  $1 \leq i \leq n$ .

Wir bemerken noch, daß tatsächlich  $m > 1$  ist, da jeder  $U(r, k)$ -invariante Teilraum von  $R_d$  das Monom  $X_1^d$  enthält.

2° Zur Abkürzung setzen wir  $\langle M_1, \dots, M_{m-1} \rangle = E$  und schreiben  $l \in R_1$  in der Form  $l' + cX_r$ ,  $l'$  Linearform ohne  $X_r$ . Wir schließen indirekt:

$$R_1 U = R_1 V \Rightarrow X_r M_{n+1} \in R_1 U \Rightarrow$$

$$X_r M_{n+1} \equiv \sum_{i=m}^{i=n} (l'_i + c_i X_r)(M_i + a_i M_{i+1}) \pmod{R_1 E}.$$

Da  $R_1 E$  von Monomen erzeugt wird, erhält man durch Sortieren nach Potenzen von  $X_r$ :

- (I)  $(1 - c_n a_n) X_r M_{n+1} \in R_1 E$
- (II)  $a_n l'_n M_{n+1} + (c_n + c_{n-1} a_{n-1}) X_r M_n \in R_1 E$
- (III)  $(l'_{i+1} + a_i l'_i) M_{i+1} + (c_i + c_{i-1} a_{i-1}) X_r M_i \in R_1 E$  für alle  $m+1 \leq i \leq n-1$
- (IV)  $(l'_{m+1} + a_m l'_m) M_{m+1} + c_m X_r M_m \in R_1 E$ .

Es kann nicht sein, daß  $c_i = 0$  für alle  $m \leq i \leq n$  ist, da dann aus (I) folgen würde  $M_{n+1} \in E$ . Daher gibt es ein  $m \leq j \leq n$  mit  $c_i = 0$  für  $i < j$  und  $c_j \neq 0$ . Wenn  $m < j < n$  ist, würde aus (III) folgen

$$(l'_{j+1} + a_j l'_j) M_{j+1} + c_j X_r M_j \in R_1 E.$$

Da  $X_r M_j$  nicht in  $R_1 E$  liegt, muß  $X_r M_j = X_s M_{j+1}$  für ein  $X_s$  mit  $1 \leq s \leq r-1$  sein, das in  $l'_{j+1} + a_j l'_j$  vorkommt. Wenn  $j = n$  wäre, würde aus (II) folgen  $X_r M_n = X_s M_{n+1}$  für ein  $X_s$  mit  $1 \leq s \leq r-1$ , das in  $a_n l'_n$  vorkommt. Wenn schließlich  $j = m$  wäre, würde aus (IV) folgen  $X_r M_m = X_s M_{m+1}$  für ein  $X_s$  mit  $1 \leq s \leq r-1$ , das in  $l'_{m+1} + a_m l'_m$  vorkommt. Jedenfalls hat man  $M_{j+1} = X_s^{-1} X_r M_j$  für ein  $m \leq j \leq n$  und  $1 \leq s \leq r-1$ . Daher ist  $X^\rho = X_s^{-1} X_r$ .

3° Wir schreiben  $f_m = M_m + a_m M_{m+1}$  in der Form

$$X_1^{\alpha_1} \cdots X_r^{\alpha_r} + a_m X_1^{\alpha_1} \cdots X_s^{\alpha_s-g} \cdots X_r^{\alpha_r+g} = MX_s^\alpha X_r^\beta + aMX_s^{\alpha-g} X_r^{\beta+g},$$

wobei  $\alpha = \alpha_s$ ,  $\beta = \alpha_r$  und  $g = d_m > 0$  ist. Wir nehmen  $\varphi \in U(r, k)$  mit  $\varphi(X_r) = X_r + \lambda X_s$ ,  $\varphi(X_i) = X_i$ ,  $i < r$ . Dann ist  $\varphi(f_m) = MX_s^\alpha (X_r + \lambda X_s)^\beta + aMX_s^{\alpha-g} (X_r + \lambda X_s)^{\beta+g}$ , und man erhält

$$\varphi(f_m) - f_m = MX_s^\alpha \sum_{\nu=1}^{\beta} \binom{\beta}{\nu} \lambda^\nu X_s^\nu X_r^{\beta-\nu} + aMX_s^{\alpha-g} \sum_{\nu=1}^{\beta+g} \binom{\beta+g}{\nu} \lambda^\nu X_s^\nu X_r^{\beta+g-\nu}.$$

Da  $\varphi(f_m) - f_m \in E$  ist (vgl. Bedingung (c) in 1°), folgt durch Sortieren nach Potenzen von  $\lambda$

$$\binom{\beta}{\nu} MX_s^{\alpha+\nu} X_r^{\beta-\nu} + a \binom{\beta+g}{\nu} MX_s^{\alpha-g+\nu} X_r^{\beta+g-\nu} \in E$$

und daher

$$MX_s^{\alpha-g+\nu} X_r^{\beta+g-\nu} \in E, \quad 1 \leq \nu \leq \beta + g.$$

Für  $\nu = g$  erhält man  $M_m \in E$ , Widerspruch.

(ii) Wir behandeln nun den Fall  $\rho_r = 0$  und zeigen zunächst die Exaktheit der Sequenz

$$0 \longrightarrow R_d/U \xrightarrow{X_r} R_{d+1}/R_1 U. \quad (*)$$

Sei dazu  $f_i = M_i p_i(X^\rho)$  eine Basis von  $U$  wie am Anfang von (i). Sei  $X_r \cdot x \in R_1 U$ . Wir schreiben  $X_r \cdot x = \sum l_i M_i p_i(X^\rho)$ , wobei man ohne Einschränkung annehmen kann,  $l_i$  ist Linearform ohne  $X_r$ . Alle Terme, für die  $M_i$  die Variable  $X_r$  nicht enthält, müssen sich gegenseitig aufheben, da die  $p_i(X^\rho)$  kein  $X_r$  enthalten. Daher kann man ohne Einschränkung annehmen, daß  $X_r$  in allen  $M_i$  vorkommt. Wir nehmen  $\varphi \in U(r, k)$  wie in 3°. Wenn dann etwa  $f = N \cdot X_r^\alpha p(X^\rho) \in U$  ist,  $N$  Monom,  $a$  eine positive ganze Zahl und  $p$  ein Polynom, dann ist  $\varphi(f) = N \cdot p(X^\rho) \sum \binom{a}{\nu} \lambda^\nu X_s^\nu X_r^{a-\nu} \in U$  und folglich  $NX_s^\nu X_r^{a-\nu} p(X^\rho) \in U$ ,  $0 \leq \nu \leq a$ . Wenn daher  $l \in R_1$  die Variable  $X_r$  nicht enthält, hat man  $l X_r^{-1} f \in U$ . Wendet man dies an, dann folgt  $x \in U$ .

Ebenso folgt, daß  $(*)$  mit  $V$  anstelle von  $U$  exakt ist. Aus  $R_1 U = R_1 V$  folgt also  $U = V$ .

(4.10) LEMMA.  $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}_0$  seien zwei numerisch lokal maximale Ideale aus  $\Delta^*(\mathcal{L})$  mit H.P.  $Q$  bzw.  $Q + 1$ , derart daß  $\mathcal{J}_0 \neq \mathcal{L}^*$  ist. Wenn  $\mathcal{J}_0 \hookrightarrow \mathcal{J}_\infty$  eine starre Deformation innerhalb  $\Delta(\mathcal{L})$  ist, dann induziert diese entweder eine starre Deformation  $\mathcal{J}_0 \hookrightarrow \mathcal{J}_\infty \subset \mathcal{J}_\infty$  oder eine starre Modifikation  $\mathcal{J}_0 \hookrightarrow \mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_0$  und eine starre Deformation  $\mathcal{J}_1 \hookrightarrow \mathcal{J}_2 \subset \mathcal{J}_\infty$ .

*Beweis.* 1° Entsprechend zu (4.2) hat man Zerlegungen

$$H^0(\mathcal{J}_0(n)) = \bigoplus_{i=0}^n X_0^{n-i} V_i^0, \quad 0 \leq n \leq d;$$

$$H^0(\mathcal{J}_0(n)) = \bigoplus_{i=0}^n X_0^{n-i} W_i^0, \quad 0 \leq n \leq d.$$

Wir setzen  $\text{reg } (\mathcal{J}_0) = e$  und erhalten mit Gleichung  $(***)$  aus (4.3) und (4.8):

$$V_n^0 = H^0(\mathcal{L}(n)), \quad e \leq n \leq d, \quad V_{e-1}^0 \subset H^0(\mathcal{L}(e-1))$$

ist 1-codimensional und  $\text{reg } (\mathcal{L}) \leq e - 1$ .

Aus der exakten Sequenz  $0 \rightarrow \mathcal{J}_0 \rightarrow \mathcal{J}_0 \rightarrow \mathcal{J}_0/\mathcal{J}_0 \rightarrow 0$ , in der  $\mathcal{J}_0/\mathcal{J}_0$  als Modul mit konstantem Hilbertpolynom 0-regulär ist, folgt  $\text{reg } (\mathcal{J}_0) \leq e$ . Aus  $H^0(\mathcal{J}_0(d)) = H^0(\mathcal{J}_0(d)) + 1$  und  $H^0(\mathcal{J}_0(d)) \subset H^0(\mathcal{J}_0(d))$  folgt  $V_n^0 = W_n^0 = H^0(\mathcal{L}(n))$ ,  $e \leq n \leq d$ , und  $V_n^0 = W_n^0$  für alle  $n < e$  bis auf einen Index, für den  $V_n^0 \subset W_n^0$  1-codimensional ist. Wäre  $V_{e-1}^0 = W_{e-1}^0$ , dann würde aus (4.7) folgen  $V_n^0 = W_n^0$  für alle  $n \leq e - 1$  und daher  $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}_0$ . Ebenso kann nicht  $V_n^0 \subsetneq W_n^0$  für ein  $n < e - 1$  sein, da dann  $V_{e-1}^0 = W_{e-1}^0$  wäre. Man erhält:  $V_n^0 = W_n^0$  für alle  $n \neq e - 1$ ,  $W_n^0 = H^0(\mathcal{L}(n))$ ,  $n \geq e - 1$ .

Da oben  $\text{reg } (\mathcal{L}) \leq e - 1$  gefolgert wurde, ist  $R_1 W_n^0 = W_{n+1}^0$ ,  $n \geq e - 1$ , daher  $S_1 H^0(\mathcal{J}_0(n)) = H^0(\mathcal{J}_0(n+1))$ ,  $n \geq e - 1$ , und mit Lemma 3.4.3 folgt  $\text{reg } (\mathcal{J}_0) \leq e - 1$ .

Angenommen,  $\mathcal{J}_0$  wäre  $e$ -2-regulär. Dann folgt aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_0(-1) \rightarrow \mathcal{J}_0 \rightarrow \mathcal{J}'_0 = \mathcal{L} \rightarrow 0$$

zunächst einmal, daß  $H^0(\mathcal{J}_0(e-2)) \rightarrow H^0(\mathcal{L}(e-2))$  surjektiv wäre, d.h.  $W_{e-2}^0 = H^0(\mathcal{L}(e-2))$ . Außerdem würde die  $(e-2)$ -Regularität von  $\mathcal{L}$  folgen. Hieraus erhält man aber  $V_n^0 = H^0(\mathcal{L}(n))$ ,  $n \geq e - 2$ , Widerspruch. Man hat also

$$\text{reg } (\mathcal{J}_0) = e - 1.$$

Anwendung von (4.8) auf  $\mathcal{J}_0$  gibt:

$$V_{e-2}^0 = W_{e-2}^0 \subset H^0(\mathcal{L}(e-2)) \text{ ist 1-codimensional, } \text{reg } (\mathcal{L}) \leq e-2.$$

2° Nach Definition (vgl. 3.5) ist die starre Deformation gegeben durch ein Ideal  $\mathcal{J} \in H_{Q+1}^G(k)$ , wobei  $G = B(\rho)$  mit  $\rho_0 = 0$  ist. Daher hat man nach (4.2) eine Zerlegung

$$H^0(\mathcal{J}(n)) = \bigoplus_{i=0}^n X_0^{n-i} W_i, \quad W_i \subset H^0(\mathcal{L}(i)) \text{ G-invariant.}$$

Sei  $\rho_s$  eine positive Komponente. Wir schreiben  $\varphi(\lambda)$  statt  $\varphi^s(\lambda)$ . Nach der Voraussetzung ist  $\mathcal{J}_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi(\lambda) \mathcal{J}$ , und aus 1° folgt mit (4.3) und (4.2.1), daß  $H^0(\mathcal{L}(n)) = W_n$ ,  $e-1 \leq n \leq d$ . Aus (3.5.2) folgt  $h^0(\mathcal{J}(n)) = h^0(\mathcal{J}_0(n))$ , und daraus mit 1°:

$$\begin{aligned} \dim W_n^0 &= \dim W_n, \quad 0 \leq n \leq d, \\ W_{e-2} &\subset H^0(\mathcal{L}(e-2)) \text{ 1-codimensional.} \end{aligned}$$

Anwendung von (4.9) und die Auflösbarkeit von  $G$  geben einen 1-codimensionalen,  $G$ -invarianten Unterraum  $R_1 W_{e-2} \subset U \subset H^0(\mathcal{L}(e-1))$ . Nach (4.2) wird ein  $G$ -invariantes Ideal  $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$  mit Hilbertpolynom  $Q$  definiert durch die Folge  $V = (V_0, \dots, V_d)$  mit  $V_n = W_n$ ,  $n \neq e-1$ ,  $V_{e-1} = U$  und

$$H^0(\mathcal{J}(n)) = \bigoplus_{i=0}^n X_0^{n-i} V_i, \quad 0 \leq n \leq d.$$

3° Sei  $\mathcal{J}(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi(\lambda) \mathcal{J}$ . Die in (3.2) und (3.3) angegebene Konstruktion soll hier genauer ausgeführt werden. Sei  $A = k[\lambda]$  und  $\mathbf{I}$  die Fortsetzung der Garbe  $\varphi(\lambda) \mathcal{J}$  auf  $X \times \mathbb{G}_m$  zu einer Garbe auf  $X \otimes A$ . Dann ist

$$\begin{aligned} H^0(\mathbf{I}(d)) &= \text{Fortsetzung des } \mathbb{G}_m\text{-Bündels } \varphi(\lambda) H^0(\mathcal{J}(d)) \text{ zu einem} \\ &\quad A\text{-Bündel} \\ &= \bigoplus_0^d X_0^{d-n} V_n^*, \quad V_n^* \text{ die Fortsetzung des } \mathbb{G}_m\text{-Bündels } \varphi(\lambda) V_n \\ &\quad \text{zu einem } A\text{-Bündel.} \end{aligned}$$

Weiter ist

$$H^0(\mathcal{J}(0)(d)) := H^0(\mathbf{I}(d) \otimes_A k(0)) = H^0(\mathbf{I}(d)) \otimes_A k(0),$$

weil hier die Bildung der Kohomologie mit Basiswechsel vertauschbar ist (vgl. 2.2 iii). Es folgt

$$H^0(\mathcal{J}(0)(d)) = \bigoplus_{n=0}^d X_0^{d-n} V_n(0) \quad \text{mit} \quad V_n(0) = V_n^* \otimes_A k(0).$$

Nach Voraussetzung ist  $\mathcal{J}_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi(\lambda) \mathcal{J}$  und daher mit  $W_n^* = \text{Fortsetzung des } \mathbb{G}_m\text{-Bündels } \varphi(\lambda) W_n$ :

$$H^0(\mathcal{J}_0(d)) = \bigoplus_{n=0}^d X_0^{d-n} W_n^* \otimes k(0) = \bigoplus_{n=0}^d X_0^{d-n} W_n^0.$$

Nun ist aber  $V_n = W_n$  und daher  $V_n^* = W_n^*$  für  $n \neq e - 1$ , so daß  $V_n^0 = V_n(0)$  für  $n \neq e - 1$  folgt.

1. Fall.  $V_{e-1}(0) = V_{e-1}^0$ . Dann ist  $\mathcal{J}(0) = \mathcal{J}_0$ .

2. Fall.  $V_{e-1}(0) \neq V_{e-1}^0$ . Dann ist aus Dimensionsgründen  $E = V_{e-1}(0) \cap V_{e-1}^0 \subset W_{e-1}^0$  ein 2-codimensionaler,  $B(r, k)$ -invarianter Unterraum. Man hat  $V_{e-1}^0 = E \oplus ku$ ,  $V_{e-1}(0) = E \oplus kv$ ,  $u$  und  $v$  Monome, und  $V^0 \mapsto V^0 - u \cup v$  eine numerisch starre Modifikation von  $\mathcal{J}_0$  in  $\mathcal{J}(0)$ .

(4.11) DEFINITION. Ein Ideal  $\mathcal{J} \in \Delta^*(\mathcal{L})$  mit Hilbertpolynom  $Q(T) = H(T) - c$  wird definiert durch eine Treppe  $V = (V_0, \dots, V_d)$  im Sinne von (4.2.3).  $\mathcal{J}$  heißt *numerisch relativ maximal*, wenn  $V_n = H^0(\mathcal{L}(n))$  für alle  $n \leq e - 1$  und  $n \geq e + c$  und  $V_n \subset H^0(\mathcal{L}(n))$  1-codimensional ist für alle  $e \leq n \leq e + c - 1$ , wobei  $e = \text{reg}(\mathcal{L})$ .

HILFSSATZ 1. Wenn  $\mathcal{J}$  n.r.m. (*numerisch relativ maximal*) ist, dann ist  $\mathcal{J}$  n.l.m. (*numerisch lokal maximal*).

*Beweis.* Annahme  $E(\mathcal{J}) = V \mapsto V - x \cup y = W = E(\mathcal{J})$  wachsende Modifikation  $\Rightarrow e \leq n = \text{grad } y < m = \text{grad } x \Rightarrow W_n = H^0(\mathcal{L}(n)) \Rightarrow W_m = H^0(\mathcal{L}(m)) \Rightarrow x \in W_m$ .

HILFSSATZ 2. Wenn  $\mathcal{J} \in \Delta^*(\mathcal{L})$  dieselbe Hilbertfunktion wie ein n.r.m. Ideal hat, dann ist  $\mathcal{J}$  n.r.m.

*Beweis.*  $h(n) = \sum_{i=0}^n h^0(\mathcal{L}(i))$  ist die Hilbertfunktion von  $\mathcal{L}^*$ , und nach Voraussetzung ist

$$h^0(\mathcal{J}(n)) = \begin{cases} h(n); & n \leq e - 1 \\ h(n) - (n - e + 1); & e \leq n \leq e + c - 1 \\ h(n) - c; & e + c \leq n \end{cases}$$

die Hilbertfunktion von  $\mathcal{J}$ . Wenn  $E(\mathcal{J}) = V$  ist, ist  $V_n \subset H^0(\mathcal{L}(n))$ , und die Behauptung folgt aus

$$\dim V_n = h^0(\mathcal{J}(n)) - h^0(\mathcal{J}(n-1)) = \begin{cases} h^0(\mathcal{L}(n)); & n \leq e - 1 \\ h^0(\mathcal{L}(n)) - 1; & e \leq n \leq e + c - 1 \\ h^0(\mathcal{L}(n)); & e + c \leq n \leq d. \end{cases}$$

**HILFSSATZ 3.** Wenn  $\mathcal{J} \in \Delta^*(\mathcal{L})$  n.r.m. mit Hilbertpolynom  $H(T) - c$  ist, dann ist  $\text{reg } (\mathcal{J}) = e + c$ .

*Beweis.* Da  $R_1 V_{e+c-1} \subsetneq V_{e+c}$  ist (Lemma 4.9), ist  $S_1 H^0(\mathcal{J}(e+c-1)) \subsetneq H^0(\mathcal{J}(e+c))$ , daher  $\text{reg } (\mathcal{J}) \geq e + c$ . Andererseits ist  $R_1 V_n = V_{n+1}$ ,  $n \geq e + c$ , daher  $S_1 H^0(\mathcal{J}(n)) = H^0(\mathcal{J}(n+1))$ ,  $n \geq e + c$ , so daß mit Lemma (3.4.3)  $\text{reg } (\mathcal{J}) \leq e + c$  folgt.

**HILFSSATZ 4.** Seien  $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}'$  zwei Ideale aus  $\Delta^*(\mathcal{L})$  mit Hilbertpolynom  $Q$  bzw.  $Q + 1$ . Wenn  $\mathcal{J}$  n.l.m. und  $\mathcal{J}'$  n.r.m. ist, dann ist auch  $\mathcal{J}$  n.r.m.

*Beweis.* Sei  $E(\mathcal{J}) = V$ ,  $E(\mathcal{J}') = W$ . Im Beweis von Lemma (4.10) hatte sich  $\text{reg } (\mathcal{J}) = \text{reg } (\mathcal{J}') - 1$  ergeben. Nach (4.8 ii) ist  $V_n = W_n$  für alle  $n \neq l$ ,  $l := \text{reg } (\mathcal{J}) - 1 = \text{reg } (\mathcal{J}') = e + c - 1$  und  $V_l \subset H^0(\mathcal{L}(l))$  1-codimensional.

**HILFSSATZ 5.**  $\mathcal{J} \in \Delta^*(\mathcal{L})$  soll n.r.m. sein und das Hilbertpolynom  $Q + 1$  haben. Wenn  $\mathcal{J}' \in \Delta^*(\mathcal{L})$ ,  $i = 1, 2$  in  $\mathcal{J}$  enthalten sind, das Hilbertpolynom  $Q$  haben und beide n.r.m. sind, dann gibt es eine starre Modifikation von  $\mathcal{J}_1$  in  $\mathcal{J}_2$ , die in  $\mathcal{J}$  enthalten ist.

*Beweis.* Sei  $E(\mathcal{J}) = W$ ,  $E(\mathcal{J}') = V'$  und  $Q(T) = H(T) - c$ . Nach dem Beweis von Hilfssatz 4 ist  $V'_n = V_n^2 = W_n$  für alle  $n \neq l = e + c - 1$  und  $V'_l \subset W_l$  1-codimensional. Wie im Beweis von (4.10.3°) konstruiert man dann eine starre Modifikation  $V^1 \rightarrow V^2$ .

(4.12) SATZ. *Man kann jedes Ideal  $\mathcal{J} \in \Delta^*(\mathcal{L})$  durch eine Folge von wachsenden Modifikationen und starren Deformationen mit einem numerisch relativ maximalen Ideal in  $\Delta^*(\mathcal{L})$  verbinden. Je zwei numerisch relativ maximale Ideale mit dem gleichen Hilbertpolynom können durch eine Folge starrer Deformationen numerisch relativ maximaler Ideale miteinander verbunden werden.*

*Beweis.* Sei  $Q(T) = H(T) - c$  das Hilbertpolynom von  $\mathcal{J}$ . Wir beweisen den Satz durch absteigende Induktion nach  $c$ , wobei der Induktionsanfang mit  $c = 0$  trivialerweise erfüllt ist. Sei also  $c > 0$  und der Satz für  $c - 1$  richtig.

1° Wir wählen zu jedem  $\mathcal{J} \in \Delta^*(\mathcal{L})$  ein Ideal  $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}^* \in \Delta^*(\mathcal{L})$  mit Hilbertpolynom  $Q + 1$ . Das Paar  $(\mathcal{J}, \mathcal{J}^*)$  erfüllt dann eine der folgenden Bedingungen (a), (b) und (c):

(a)  $\mathcal{J}$  ist nicht numerisch lokal maximal.

*Folgerung:* Es gibt eine wachsende Modifikation  $\mathcal{J} \mapsto \mathcal{J}'$ .

(b)  $\mathcal{J}$  ist numerisch lokal maximal,  $\mathcal{J}^*$  ist nicht numerisch lokal maximal.

*Folgerung:* Es gibt eine starre Modifikation  $\mathcal{J} \mapsto \mathcal{J}_1$  und eine numerisch wachsende  $\mathcal{J}_1 \mapsto \mathcal{J}'$ .

*Beweis der Folgerung.* Wegen (4.8) ist  $\mathcal{J}^*$  automatisch minimales Erweiterungsideal im Sinne von (4.4.3). Aus (4.6) ergibt sich die Existenz einer starren Modifikation  $\mathcal{J} \mapsto \mathcal{J}_1$  mit  $\delta(V_1) < \delta(V)$ . Nun ist  $\text{reg}(\mathcal{J}) = \text{reg}(\mathcal{J}_1)$  nach (4.3). Wäre  $\mathcal{J}_1$  numerisch lokal maximal, würde wegen (4.8) folgen  $\delta(V_1) = \text{reg}(\mathcal{J}_1) - 1 = \text{reg}(\mathcal{J}) - 1 = \delta(V)$ .

(c)  $\mathcal{J}$  und  $\mathcal{J}^*$  sind numerisch lokal maximal.

*Folgerung:* Es gibt eine starre Transformation (das soll die Verknüpfung von starren Deformationen im Kegel sein)  $t: \mathcal{J} \mapsto \mathcal{J}'$  mit  $l(\mathcal{J}'^*) < l(\mathcal{J}^*)$ , wobei für ein Ideal  $\mathcal{J} \in \Delta^*(\mathcal{L})$  mit Hilbertpolynom  $Q + 1$  die Zahl  $l(\mathcal{J})$  die *minimale Länge einer Kette* von starren Deformationen und wachsenden Modifikationen

$$\mathcal{J} \mapsto \mathcal{J}_1 \mapsto \cdots \mapsto \mathcal{J}_n$$

mit numerisch relativ maximalem  $\mathcal{J}_n$  sein soll.

*Beweis der Folgerung.* Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Kette

## (minimaler Länge) starrer Deformationen und wachsender Modifikationen

$$\mathcal{J}^* \xrightarrow{T} \mathcal{J}_1 \hookrightarrow \mathcal{J}_2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{J}_n = \text{num. rel. maximal.}$$

Hier ist  $T$  notwendigerweise starre Deformation, und nach (4.10) induziert  $T$  ein Diagramm

$$\begin{array}{c} \mathcal{J}^* \xrightarrow{T} \mathcal{J}_1 =: \mathcal{J}'^* \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{J}_n \\ \cup \qquad \cup \\ \mathcal{J} \hookrightarrow \mathcal{J}' \end{array}$$

Wenn man also von einem Paar  $(\mathcal{J}, \mathcal{J}^*)$  ausgeht, gibt es ein Paar  $(\mathcal{J}', \mathcal{J}'^*)$ , wobei  $\mathcal{J}'$  aus  $\mathcal{J}$  durch starre Deformationen und/oder wachsende Modifikationen hervorgeht und entweder  $h(\mathcal{J}') > h(\mathcal{J})$  oder  $l(\mathcal{J}'^*) < l(\mathcal{J}^*)$  ist. Auf  $(\mathcal{J}', \mathcal{J}'^*)$  wendet man das Verfahren noch einmal an usw. Das Verfahren muß schließlich zum Stillstand kommen, und zwar genau dann, wenn  $\mathcal{J}'^{(n)*}$  ein numerisch relativ maximales Ideal und  $\mathcal{J}'^{(n)}$  ein numerisch lokal maximales Ideal ist. Dann ist nach (4.11.4) auch  $\mathcal{J}'^{(n)}$  numerisch relativ maximal.

2° Wir beweisen nun den zweiten Teil des Satzes. Seien  $\mathcal{J}$  und  $\mathcal{J}'$  zwei numerisch relativ maximale Ideale mit Hilbertpolynom  $Q$ . Wir wählen zwei n.r.m. Ideal  $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$  und  $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}'$  in  $\Delta^*(\mathcal{L})$  mit Hilbertpolynom  $Q+1$  und verbinden nach Induktionsvoraussetzung  $\mathcal{J}$  und  $\mathcal{J}'$  durch eine Folge starrer Deformationen und n.r.m. Ideale

$$\mathcal{J} \xrightarrow{T} \mathcal{J}_1 \hookrightarrow \mathcal{J}_2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{J}_n = \mathcal{J}'.$$

Nach (4.10) erhält man ein Diagramm

$$\begin{array}{c} \mathcal{J} \xrightarrow{T} \mathcal{J}_1 \\ \cup \qquad \cup \qquad t = \text{starre Transformation (vgl. 1°)} \\ \mathcal{J} \hookrightarrow \mathcal{J}_1 \end{array}$$

Da sich bei  $t$  die Hilbertfunktion nicht ändert, ist nach (4.11.2) auch  $\mathcal{J}_1$  n.r.m. Man kann so weiterschließen und erhält eine Folge starrer Deformationen und n.r.m. Ideale

$$\mathcal{J} \hookrightarrow \mathcal{J}_1 \hookrightarrow \mathcal{J}_2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{J}_n \subset \mathcal{J}'.$$

Nach (4.11.5) gibt es schließlich eine starre Modifikation  $\mathcal{J}_n \mapsto \mathcal{J}'$ , q.e.d.

## 5. Standarddeformationen

### (5.1) Bezeichnungen und Verabredungen.

Die Bezeichnungen und Voraussetzungen sollen wie in (4.1) sein. Außerdem soll jetzt  $\mathcal{L}$  invariant unter  $U(r, k) \cdot T(\rho)$  sein, wobei die Komponente  $\rho_r \geq 0$  sein soll. Wenn  $\rho_s > 0$  irgendeine positive Komponente von  $\rho$  ist, sind  $\mathcal{L}_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi^s(\lambda) \mathcal{L}$  und  $\mathcal{L}_\infty = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi^s(\lambda) \mathcal{L}$  unabhängig von der Wahl von  $\rho_s$  (vgl. 3.5.2).

Wir betrachten folgende Bedingungen für die Garbe  $\mathcal{L}$ :

*Standardannahme 1.*  $\text{reg}(\mathcal{L}_0) = \text{reg}(\mathcal{L})$ .

*Standardannahme 2.*  $R_1 H^0(\mathcal{L}(e-1)) \subsetneq H^0(\mathcal{L}(e))$ ,  $e = \text{reg}(\mathcal{L})$ .

Wir sagen, wir verbinden das Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Y$  mit dem Ideal  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_Y$  durch eine *Standarddeformation* (Bezeichnung:  $\mathcal{I} \rightsquigarrow \mathcal{J}$ ), wenn es ein  $\mathcal{L}$  gibt, das obige Voraussetzungen und die Standardannahmen erfüllt, so daß  $\mathcal{I} = \mathcal{L}_0$  und  $\mathcal{J} = \mathcal{L}_\infty$  ist.

(5.2) LEMMA.  $\mathcal{L}$  erfüllt die Standardannahmen, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i)  $\rho_r > 0$
- (ii)  $\rho_r = 0$ , und es gibt ein unter  $B(r-1, k)$  invariantes Ideal  $\mathcal{M} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^{r-2}}$ , derart daß  $\mathcal{L}$  in einem geeigneten Kegel über  $\mathcal{M}$  liegt (vgl. 4.1).

*Beweis.* (i)  $\text{reg}(\mathcal{L}_0) \geq \text{reg}(\mathcal{L})$  folgt aus dem Halbstetigkeitssatz. Aus der  $e$ -Regularität von  $\mathcal{L}$  folgt  $R_1 H^0(\mathcal{L}(n)) = H^0(\mathcal{L}(n+1))$ ,  $n \geq e$ , und hieraus nach Lemma 3.4.2  $R_1 H^0(\mathcal{L}_0(n)) = H^0(\mathcal{L}_0(n+1))$ ,  $n \geq e$ . Mit Lemma 3.4.3 folgt  $\text{reg}(\mathcal{L}_0) \leq e$ .

Wenn  $R_1 H^0(\mathcal{L}(e-1)) = H^0(\mathcal{L}(e))$  wäre, würde aus denselben Gründen  $R_1 H^0(\mathcal{L}_0(e-1)) = H^0(\mathcal{L}_0(e))$  und daraus  $\text{reg}(\mathcal{L}) = \text{reg}(\mathcal{L}_0) < e$  folgen.

(ii) Aus (4.3) folgt sofort  $\text{reg}(\mathcal{L}_0) = e$ . Wie im Beweis von (4.3) hat man für  $0 \leq n \leq d$ :

$$H^0(\mathcal{L}(n)) = \bigoplus_{i=0}^n X_r^{n-i} V_i, \quad V_n \subset H^0(\mathcal{M}(n)) \quad B(\rho)-\text{invariant};$$

$$H^0(\mathcal{L}_0(n)) = \bigoplus_{i=0}^n X_r^{n-i} V_i^0, \quad V_n^0 \subset H^0(\mathcal{M}(n)) \quad B(r-1, k)-\text{invariant};$$

$$\dim V_n^0 = \dim V_n, \quad n \in \mathbb{N}; \quad V_n^0 = V_n = H^0(\mathcal{M}(n)), \quad n \geq e.$$

Angenommen, es wäre  $R_1 H^0(\mathcal{L}(e-1)) = H^0(\mathcal{L}(e))$ . Es folgt

$$P_1 V_{e-1} = V_e, \quad P = k[X_1, \dots, X_{r-1}].$$

Daraus folgt  $P_1 H^0(\mathcal{M}(e-1)) = H^0(\mathcal{M}(e)) = V_e$  und daraus mit Lemma 4.9

$$V_{e-1} = H^0(\mathcal{M}(e-1)).$$

Da  $\text{reg } (\mathcal{M}) \leq \text{reg } (\mathcal{L})$  (vgl. 4.1), hat man also  $V_n^0 = H^0(\mathcal{M}(n))$  und  $P_1 H^0(\mathcal{M}(n)) = H^0(\mathcal{M}(n+1))$ ,  $n \geq e-1$ . Daher ist  $R_1 H^0(\mathcal{L}_0(n)) = H^0(\mathcal{L}_0(n+1))$ ,  $n \geq e-1$ , und daher wegen (3.4.3)  $\text{reg } (\mathcal{L}_0) < e$ , Widerspruch.

(5.3) LEMMA.  $\mathcal{L} \subset \mathcal{O}_Y$  soll die Standardannahmen erfüllen und  $e = \text{reg } (\mathcal{L})$  sein. Es gibt eine Folge von  $B(\rho)$ -invarianten, 1-codimensionalen Unterräumen  $U_n \subset H^0(\mathcal{L}(n))$ ,  $e \leq n \leq d$ , mit folgenden Eigenschaften:

- (a)  $R_1 H^0(\mathcal{L}(e-1)) \subset U_e$  und  $R_1 U_n \subset U_{n+1}$ ,  $e \leq n \leq d-1$ .
- (b) Setzt man

$$V_n = \begin{cases} H^0(\mathcal{L}(n)), & 0 \leq n \leq e-1 \\ U_n, & e \leq n \leq e+c-1 \\ H^0(\mathcal{L}(n)), & e+c \leq n \leq d, \end{cases}$$

dann wird durch

$$H^0(\mathcal{J}(n)) = \bigoplus_{i=0}^n X_0^{n-i} V_i, \quad 0 \leq n \leq d,$$

ein  $U(r+1, k)T(\rho)$ -invariantes Ideal  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$  mit Hilbertpolynom  $H(T) - c$  definiert, derart daß

- (i)  $\mathcal{J}_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi^s(\lambda) \mathcal{J} \in \Delta^*(\mathcal{L}_0)$  numerisch relativ maximal;
- (ii)  $\text{reg } (\mathcal{J}) = e + c$ ;
- (iii)  $\mathcal{J}$  die Standardannahmen erfüllt;
- (iv)  $\mathcal{J}_\infty \in \Delta^*(\mathcal{L}_\infty)$  ist.

*Beweis.* (a) Wir konstruieren zunächst die  $U_n$  und unterscheiden 2 Fälle.

1. Fall. Die Komponente  $\rho_r > 0$ . Wir nehmen einen  $U(r, k)T(\rho) = G$ -invarianten, 1-codimensionalen Unterraum  $R_1 H^0(\mathcal{L}(e-1)) \subset U \subset H^0(\mathcal{L}(e))$  und ein  $f \in H^0(\mathcal{L}(e))$  mit  $U \oplus kf = H^0(\mathcal{L}(e))$ . Dann ist  $\bar{f}$  automatisch  $G$ -invariant, d.h.  $\varphi(f) - f \in U$  für alle  $\varphi \in U(r, k)$  und  $\chi(f) - c(\chi) \cdot f \in U$  für alle  $\chi \in T(\rho)$ ,  $c(\chi)$  ein Charakter.

*Behauptung 1.*  $U_{e+1} := R_1 U + L \cdot f$  ist  $G$ -invariant und 1-codimensional in  $H^0(\mathcal{L}(e+1))$ , wobei  $L = P_1$  und  $P = k[X_1, \dots, X_{r-1}]$  gesetzt wird.

*Beweis der Behauptung.* 1° Zur Abkürzung sei für ein  $\varphi \in U(r, k)$  bzw.  $\chi \in T(\rho)$   $\varphi(f) - f = u \in U$  bzw.  $\chi(f) - c(\chi) \cdot f = v \in U$  gesetzt. Dann ist für  $l \in L$   $\varphi(l \cdot f) = \varphi(l) \cdot (f + u) = \varphi(l) \cdot f + \varphi(l) \cdot u \in R_1 U + L \cdot f$  und  $\chi(l \cdot f) = \chi(l)(c \cdot f + v) = \chi(l) \cdot c \cdot f + \chi(l) \cdot v \in R_1 U + L \cdot f$ . Daraus folgt die  $G$ -Invarianz von  $U_{e+1}$ .

2° Wir zeigen  $U_{e+1} \subsetneq H^0(\mathcal{L}(e+1))$ . Annahme  $X_r f \in R_1 U + L \cdot f \Rightarrow l \cdot f \in R_1 U$  mit  $l = a_1 X_1 + \dots + a_{r-1} X_{r-1} + X_r$ ,  $a_i$  geeignete Körperelemente. Wenn  $\varphi \in U(r, k)$  mit  $\varphi(X_r) = X_r + \lambda X_s$ ,  $\varphi(X_i) = X_i$  für  $i < r \Rightarrow \varphi(l) \cdot \varphi(f) \in R_1 U \Rightarrow \varphi(l) \cdot (f + u) \in R_1 U$ ,  $u \in U$  geeignet  $\Rightarrow (\varphi(l) - l) \cdot f \in R_1 U \Rightarrow$

$$X_s f \in R_1 U, \quad 1 \leq s < r. \quad (*)$$

Sei  $M_i p_i(X^\rho)$  eine Basis von  $U$  wie in (3.5.1). Wir schreiben  $f = f^0 + X_r f^1 + X_r^2 f^2 + \dots$ ,  $f^i \in P = k[X_1, \dots, X_{r-1}]$  homogen. Hier ist  $f^0 \neq 0$ , denn aus  $f = X_r g \in H^0(\mathcal{L}(e))$  folgt  $g \in H^0(\mathcal{L}(e-1))$  und daher  $f = X_r g \in U$ . Aus  $(*)$  folgt

$$X_{r-1}(f^0 + X_r f^1 + \dots) = \sum (l_i + c_i X_r) \cdot M_i \cdot p_i(X^\rho),$$

wobei  $l_i \in P_1$  und  $c_i \in k$  ist. Da  $\rho_r > 0$  ist, d.h.  $X^\rho$  die Variable  $X_r$  enthält, folgt durch Sortieren nach Potenzen von  $X_r$ ,

$$X_{r-1} f^0 = \sum l_j M_j,$$

wobei die Summation über die Monome erfolgt, die kein  $X_r$  enthalten. Sei  $U' \subset P_e$  der Unterraum, der von diesen Monomen erzeugt wird. Da der von allen  $M_i$  erzeugte Unterraum  $U^0$  invariant unter  $B(r)$  ist (vgl. den Beweis von 4.9), folgt, daß  $U'$  invariant unter  $B(r-1)$  ist. Aus der exakten Sequenz in (4.9ii) folgt dann  $f^0 \in U'$ . Hieraus folgt, daß für geeignete  $a_i \in k$  und  $g \in R_{e-1}$

$$f - \sum a_i M_i p_i(X^\rho) = X_r g$$

ist. Dann muß aber  $g \in H^0(\mathcal{L}(e-1))$ , daher  $X_r g \in U$  und damit  $f \in U$  sein, Widerspruch. Da  $U_{e+1} + \langle X_r f \rangle = R_1 U + R_1 f = R_1 H^0(\mathcal{L}(e)) = H^0(\mathcal{L}(e+1))$ , ist  $U_{e+1}$  1-codimensional.

*Behauptung 2.* Definiert man  $U_e = U$ ,  $U_n = R_{n-e-1} U_{e+1}$  für  $n \geq e+1$ , dann ist  $U_n$  ein  $U(r, k) \cdot T(\rho)$ -invarianter Unterraum und  $U_n \oplus \langle X_r^{n-e} \cdot f \rangle = H^0(\mathcal{L}(n))$ ,  $n \geq e$ .

*Beweis der Behauptung.* Die  $G$ -Invarianz ist klar und  $U_n + \langle X_r^{n-e} \cdot f \rangle = R_{n-e}U + R_{n-e-1} \cdot L \cdot f + \langle X_r^{n-e} \cdot f \rangle = R_{n-e} \cdot (U + k \cdot f) = R_{n-e}H^0(\mathcal{L}(e)) = H^0(\mathcal{L}(n))$ ,  $n \geq e+1$ . Annahme

$$\begin{aligned} X_r^{n-e} \cdot f \in U_n &\Rightarrow X_r^{n-e} \cdot f \in R_{n-e}U + R_{n-e-1}L \cdot f \\ &\Rightarrow (X_r^{n-e} + g) \cdot f \in R_{n-e}U, g \in R_{n-e-1}L \end{aligned}$$

eine Form, die  $X_r$  höchstens in  $n-e-1$ -ter Potenz enthält. Sei dann  $\varphi \in U(r, k)$  wie oben und

$$\begin{aligned} \varphi(f) = f + u, u \in U. &\Rightarrow [(X_r + \lambda X_s)^{n-e} + \varphi(g)] \cdot f \in R_{n-e}U \\ &\Rightarrow \lambda^{n-e} X_s^{n-e} \cdot f \in R_{n-e}U, \end{aligned}$$

weil  $\varphi(g)$  die ‘‘Variable’’  $\lambda$  höchstens in  $n-e-1$ -ter Potenz enthält. Es folgt

$$X_s^{n-e} \cdot f \in R_{n-e}U, \quad 1 \leq s < r. \quad (**)$$

Ganz ähnlich wie im Beweis der 1. Behauptung folgt

$$X_s^{n-e} \cdot f^0 \in P_{n-e}U', \quad 1 \leq s < r,$$

und hieraus  $f^0 \in U'$ , was nicht möglich ist, siehe oben.

2. Fall. Die Komponente  $\rho_r = 0$ . Wir definieren  $U_e$  wie im ersten Fall. Angenommen, man hätte schon  $U_n$  für ein  $n \geq e$ . Aus  $R_1H^0(\mathcal{L}(n)) = H^0(\mathcal{L}(n+1))$  und (4.9) ergibt sich  $R_1U_n \subsetneq H^0(\mathcal{L}(n+1))$ . Dann kann man wegen der Auflösbarkeit von  $G$  einen  $G$ -invarianten, 1-codimensionalen Unterraum  $R_1U_n \subset U_{n+1} \subset H^0(\mathcal{L}(n+1))$  finden.

*Behauptung 3.* Wenn  $U_e \oplus k \cdot f = H^0(\mathcal{L}(e))$ , dann ist  $U_n \oplus kX_r^{n-e} \cdot f = H^0(\mathcal{L}(n))$ ,  $n \geq e$ .

*Beweis der Behauptung.* Sie sei für ein  $n-1 \geq e$  schon bewiesen. Annahme

$$\begin{aligned} X_r^{n-e} \cdot f \in U_n &\Rightarrow (X_r + \lambda X_s)^{n-e} \cdot (f + u) \in U_n \Rightarrow X_s X_r^{n-e-1} \cdot f \in U_n, \quad 1 \leq s \leq r \\ &\Rightarrow R_1 X_r^{n-e-1} \cdot f \in U_n \Rightarrow R_1 H^0(\mathcal{L}(n-1)) \subset U_n, \end{aligned}$$

Widerspruch, da  $R_1 H^0(\mathcal{L}(n-1)) = H^0(\mathcal{L}(n))$ ,  $n-1 \geq e$ .

(b) Die Bezeichnungen sollen wie im Beweis von (4.10.3°) sein. Die

Fortsetzungen  $V_n^*$  der  $\mathbb{G}_m$ -Bündel  $\varphi(\lambda)V_n$  erfüllen dann nach Konstruktion

$$\text{rang}_A V_n^* = \begin{cases} h^0(\mathcal{L}(n)); & n \leq e - 1 \\ h^0(\mathcal{L}(n)) - 1; & e \leq n \leq e + c - 1 \\ h^0(\mathcal{L}(n)); & e + c \leq n \leq d. \end{cases}$$

Da aber  $H^0(\mathcal{J}_0(d)) = H^0(\mathbf{I}(d)) \otimes_A k(0) = \bigoplus_0^d X_0^{d-n} V_n^0$  mit  $V_n^0 = V_n^* \otimes k(0)$  und  $h^0(\mathcal{L}_0(n)) = h^0(\mathcal{L}(n))$  ist (vgl. Lemmata 3.4.1, 3.5.2), braucht man zum Nachweis von (i) nur noch  $V_n^0 \subset H^0(\mathcal{L}_0(n))$  zu zeigen. Nun ist

$$\begin{aligned} V_d^* &= \text{Fortsetzung des } \mathbb{G}_m\text{-Bündels } \varphi(\lambda)H^0(\mathcal{L}(d)) \\ &= H^0(\mathbf{L}(d)), \end{aligned}$$

wobei  $\mathbf{L}$  die Fortsetzung der Garbe  $\varphi(\lambda)\mathcal{L}$  bezeichnet.

Nach (3.3.2) ist  $R_1 V_n^* \subset V_{n+1}^*$ , daher  $R_{d-n} V_n^* \subset H^0(\mathbf{L}(d))$  und deshalb  $V_n^* \subset H^0(\mathbf{L}(n))$ ,  $0 \leq n \leq d$ . Weil schließlich die  $V_n^* \subset R_n \otimes A$  direkte Summanden sind, erhält man einen injektiven Homomorphismus

$$\begin{aligned} V_n^* \otimes_A k(0) &\longrightarrow H^0(\mathbf{L}(n)) \otimes_A k(0) \xrightarrow{\text{kan.}} H^0(\mathbf{L}(n) \otimes_A k(0)) \\ &= H^0(\mathcal{L}_0(n)) \subset R_n \otimes_A k(0) \simeq R_n. \end{aligned}$$

*Beweis von (ii) und (iii).* Aus  $\text{reg}(\mathcal{L}_0) = e$  und  $V_n^0 = H^0(\mathcal{L}_0(n))$  für  $n \geq e + c$  folgt  $R_1 V_n^0 = V_{n+1}^0$ , daher  $S_1 H^0(\mathcal{J}_0(n)) = H^0(\mathcal{J}_0(n+1))$ ,  $n \geq e + c$ . Mit (3.4.3) erhält man  $\text{reg}(\mathcal{J}_0) \leq e + c$ , und der Halbstetigkeitssatz gibt  $\text{reg}(\mathcal{J}) \leq \text{reg}(\mathcal{J}_0) \leq e + c$ .

Angenommen, man hätte  $\text{reg}(\mathcal{J}) < e + c$ . Dann wäre  $S_1 H^0(\mathcal{J}(e+c-1)) = H^0(\mathcal{J}(e+c))$  und daher  $R_1 U_{e+c-1} = H^0(\mathcal{L}(e+c))$ , Widerspruch. Damit ist (ii) nachgewiesen, und gleichzeitig zeigt dieser Schluß, daß  $\mathcal{J}$  auch die Standardannahmen erfüllt.

*Beweis von (iv).* Nach Definition ist  $\mathcal{J}_\infty = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi^*(\lambda)\mathcal{J} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi'(\lambda)\mathcal{J}$ , wobei  $\rho_t < 0$ . Die Überlegungen zu (i) – diesmal mit den Fortsetzungen  $V_n^*$  von  $\varphi'(\lambda)V_n$  auf  $k[\lambda]$  – zeigen  $V_n^\infty = V_n^* \otimes k(0) \subset H^0(\mathcal{L}_\infty(n))$ . Daher ist  $\mathcal{J}'_\infty \subset \mathcal{L}_\infty$ , und die Gleichheit ergibt sich daraus, daß  $\mathcal{J}_\infty$  das Hilbertpolynom  $Q$  und daher  $\mathcal{J}'_\infty$  dasselbe Hilbertpolynom wie  $\mathcal{L}_\infty$  hat.

(5.4) SATZ. Jedes Ideal  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$  mit Hilbertpolynom  $Q$ , das invariant unter

$U(r+1, k) \cdot D(r+1, k)$  ist, kann durch eine Folge von Standarddeformationen mit dem Ideal  $\mathcal{N}(Q)$  verbunden werden, das von den  $Q(d)$  ersten Monomen vom Grad  $d$  in der lexikographischen Ordnung erzeugt wird; hierbei ist  $d$  irgendeine ganze Zahl größer oder gleich  $n(Q)$ .

*Beweis.* Wir schließen durch Induktion nach  $r$ , wobei der Induktionsanfang  $r=1$  sicher richtig ist, da es nur ein einziges Ideal mit festem Hilbertpolynom gibt, das unter  $U(2, k) \cdot D(2, k)$  invariant ist. Dann gibt es zu  $\mathcal{I}' = \mathcal{I} + X_0\mathcal{O}_X(-1)/X_0\mathcal{O}_X(-1)$  eine Folge von Standarddeformationen in  $\mathbb{P}_k^{r-1}$ :

$$\mathcal{I}' = \mathcal{L}^0 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \mathcal{L}^n = \mathcal{N}(Q'), \quad Q'(T) = Q(T) - Q(T-1).$$

Nach (5.3) kann man jede Standarddeformation  $\mathcal{L}^i \rightsquigarrow \mathcal{L}^{i+1}$  zu einer Standarddeformation  $\mathcal{I}_0^i \rightsquigarrow \mathcal{I}_\infty^i$  liften, wobei  $\mathcal{I}_0^i \in \Delta^*(\mathcal{L}^i)$  und  $\mathcal{I}_\infty^i \in \Delta^*(\mathcal{L}^{i+1})$  das Hilbertpolynom  $Q$  haben und  $\mathcal{I}_0^i$  numerisch relativ maximal ist. Die Hilbertpolynome von  $\mathcal{L}^i$  haben nämlich die Form  $Q(T) + c_i$ , mit  $c_0 \geq 0$  wegen  $\mathcal{I} \in \Delta^*(\mathcal{L}^0)$  und  $c_i \leq c_{i+1}$  wegen  $h(\mathcal{L}^i) \leq h(\mathcal{L}^{i+1})$  (vgl. 3.5). Nach Satz 4.12 kann man  $\mathcal{I}_\infty^i$  mit dem numerisch relativ maximalen Ideal  $\mathcal{I}_0^{i+1} \in \Delta^*(\mathcal{L}^{i+1})$  verbinden durch eine Folge wachsender Modifikationen und starrer Deformationen in  $\Delta^*(\mathcal{L}^{i+1})$ , welche nach (5.2) Standarddeformationen sind. Es ist nicht schwierig einzusehen, daß  $\mathcal{N}(Q) \in \Delta^*(\mathcal{N}(Q'))$  ist und die größte überhaupt mögliche Hilbertfunktion hat (vgl. hierzu [G2], p. 292f). Mit (4.12) folgt dann, daß  $\mathcal{N}(Q)$  auch numerisch relativ maximal ist, und nochmalige Anwendung von (4.12) zeigt, daß man  $\mathcal{I}_\infty^n$  mit  $\mathcal{N}(Q)$  verbinden kann.

## 6. Unterschemata des Hilbertschemas

In diesem Abschnitt betrachten wir als Grundring einen noetherschen Ring  $R$ , der  $\mathbb{Q}$  enthält. Entsprechend setzen wir  $S = R[X_0, \dots, X_r]$ ,  $X = \text{Proj } S$ ,  $H_{Q,R} = \text{Hilb}_X^P$  und zur Abkürzung  $n(Q) = d$ .

(6.1) DEFINITIONEN. Die Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  soll die Bedingung  $f(n) \leq \binom{n+r}{r}$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ , erfüllen. Die Menge der nicht verschwindenden Linearformen aus  $S$  mit rationalen Koeffizienten wird mit  $T$  bezeichnet. Für  $t \in T$  und  $n < d$  ist  $t^{d-n}S_n$  ein freier direkter Summand von  $S_d$  und somit für jede natürliche Zahl  $p \leq \binom{n+r}{r}$  das spezielle Schubertschema  $\sigma_p(t^{d-n}S_n)$  definiert. Dieses ist ein abgeschlossenes Unterschema des Grassmannschemas  $W = \text{Grass}^{Q(d)}(S_d)$  und

parametrisiert diejenigen direkten Summanden  $L$  vom Rang  $Q(d)$  von  $S_d$ , für die  $L \cap t^{d-n}S_n$  einen Rang  $\geq p$  hat (vgl. [K], p.285 bezüglich der Definition). Es folgt, daß

$$V = \bigcap \{\sigma_{f(n)}(t^{d-n}S_n) \mid t \in T, 0 \leq n < d\}$$

ein abgeschlossenes Unterschema von  $W$  ist. Für jede noethersche  $R$ -Algebra  $A$  sei

$$\mathcal{H}_{\geq f, R}(A) = \{\mathcal{J} \in H_{Q, R}(\text{Spec } A) \mid H^0(\mathcal{J}(d)) \in V(\text{Spec } A)\}.$$

Dadurch wird ein Unterfunktor des Hilbertfunktors definiert. Nach einem Ergebnis in (2.3) wird  $\mathcal{H}_{\geq f, R}$  durch ein abgeschlossenes Unterschema  $H_{\geq f, R}$  von  $H_{Q, R}$  dargestellt.

**LEMMA.** *Für jeden Körper  $K$  über  $R$  ist*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\geq f, R}(K) &= \{\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K} \text{ Ideal mit Hilbertpolynom } Q, \\ &\quad \text{so daß } h^0(\mathcal{J}(n)) \geq f(n), n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Sei  $\mathcal{J}$  ein Ideal aus der Menge auf der rechten Seite. Aus  $(S_{d-n} \otimes K)H^0(\mathcal{J}(n)) \subset H^0(\mathcal{J}(d))$  folgt  $t^{d-n}H^0(\mathcal{J}(n)) \subset H^0(\mathcal{J}(d))$ ,  $t \in T$ ,  $0 \leq n < d$ , daher  $\dim_K t^{d-n}S_n \otimes K \cap H^0(\mathcal{J}(d)) \geq h^0(\mathcal{J}(n)) \geq f(n)$  und somit  $H^0(\mathcal{J}(d)) \in V(K)$ .

Sei umgekehrt  $\mathcal{J} \in \mathcal{H}_{\geq f, R}(K)$ . Es gibt ein  $t \in T$ , das kein Nullteiler auf  $S \otimes K / \bigoplus_{n \geq 0} H^0(\mathcal{J}(n))$  ist. Dann ist  $t^{d-n}(S_n \otimes K) \cap H^0(\mathcal{J}(d)) = H^0(\mathcal{J}(n))$  und folglich  $h^0(\mathcal{J}(n)) \geq f(n)$ .

**BEMERKUNG.** Falls  $R$  ein Körper ist, gilt: Wenn  $f(n) \leq Q(n)$  für alle  $n \geq d$  ist, ist die dem Schema  $H_{\geq f, R}$  zugrundeliegende Punktmenge gleich der in der Einleitung definierten Menge  $H_{\geq f}$ . Wenn  $f(n) > Q(n)$  für ein  $n \geq d$  ist, ist  $H_{\geq f}$  leer. (Dies folgt aus dem Lemma und  $h^0(\mathcal{J}(n)) = Q(n)$ ,  $n \geq d$ .)

Wir übertragen nun die Ergebnisse von Abschnitt 5 auf die hier betrachtete Situation:

(6.2) **SATZ.**  *$H_{\geq f, R}$  ist zusammenhängend, wenn  $\text{Spec } R$  zusammenhängend ist.*

*Beweis.* 1. Fall.  $R$  ist ein algebraisch abgeschlossener Körper  $k$ .

Man kann jedes  $x \in H_Q(k)$  durch eine Folge von abgeschlossenen Bahnen mit

einem Punkt  $y \in H_Q^B(k)$  verbinden, wobei die Hilbertfunktion nicht abnimmt (vgl. (3.2)). Die Behauptung folgt dann aus (5.4), da bei einer Standarddeformation die Hilbertfunktion ebenfalls nicht abnimmt.

**2. Fall.**  $R$  ist ein Körper  $k$ . Die Behauptung ergibt sich aus  $H_{\geq f,k} \otimes \bar{k} \rightarrow H_{\geq f,\bar{k}}$ .

**3. Fall.**  $\text{Spec } R$  ist zusammenhängend. Sei  $\pi: H_{\geq f,R} \rightarrow \text{Spec } R$  der kanonische Morphismus. Dann ist  $\pi$  projektiv, und die Fasern sind nach dem Ergebnis im zweiten Fall zusammenhängend. Da jede Faser das lexikographische Ideal  $\mathcal{N}(Q)$  enthält, ist  $\pi$  surjektiv. Man sieht leicht, daß eine disjunkte Zerlegung von  $H_{\geq f,R}$  in nicht-leere abgeschlossene Unterschemata eine entsprechende Zerlegung von  $\text{Spec } R$  nach sich zieht.

(6.3) **KOROLLAR.** Das absolute Hilbertschema  $\text{Hilb}_r^P = \text{Hilb}_{\mathbb{F}_p}^P$ , ist zusammenhängend.

**Beweis.** Sei  $F$  eine Zusammenhangskomponente von  $\text{Hilb}_r^P$ . Es gibt dann eine Primzahl  $p$ , derart daß  $F \otimes_{\mathbb{Z}} k \neq 0$  ist, wobei  $k$  der algebraische Abschluß von  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  sein soll. Die Gruppe  $D(r+1, k)$  operiert auf  $\text{Hilb}_r^P \otimes k$  und permutiert die endlich vielen Zusammenhangskomponenten. Folglich ist  $F \otimes_{\mathbb{Z}} k$  stabil unter  $D(r+1, k)$ . Nach dem Borelschen Fixpunktsatz gibt es einen abgeschlossenen Fixpunkt aus  $F \otimes_{\mathbb{Z}} k$ , der einem monomialen Ideal entspricht. Dieses definiert dann automatisch einen Morphismus  $\text{Spec } \mathbb{Z} \rightarrow \text{Hilb}_r^P$ , dessen Bild mit  $F$  einen nicht-leeren Durchschnitt hat; folglich faktorisiert der Morphismus über  $F$ . Dann ist aber  $F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \neq \emptyset$ . Wenn also  $\text{Hilb}_r^P$  nicht zusammenhängend wäre, müßte dies auch für  $\text{Hilb}_r^P \otimes \mathbb{Q}$  gelten, was jedoch ein Widerspruch zu (6.2) wäre.

(6.4) Zum Abschluß betrachten wir noch einmal das Hilbertschema  $H_Q$  über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0. Jeder Punkt  $x \in H_Q$  bestimmt eindeutig ein Ideal  $\mathcal{I} \in H_Q(\text{Spec } k(x))$ , und eine Funktion  $\text{reg}$  wird auf  $H_Q$  definiert durch  $\text{reg}(x) = \text{reg}(\mathcal{I})$ . Nach dem Halbstetigkeitssatz ist für jedes  $m \in \mathbb{N}$

$$H_{\geq m} = \{x \in H_Q \mid \text{reg}(x) \geq m\}$$

eine abgeschlossene Menge.

**SATZ.**  $H_{\geq m}$  ist zusammenhängend.

Der Beweis ist ähnlich wie der im ersten Fall von Satz 6.2, da bei Spezialisierungen und Standarddeformationen  $\text{reg}$  nicht kleiner wird.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] [B-S], BAYER, D. and STILLMAN, M. *A criterion for detecting  $m$ -regularity*. Preprint (May, 1985).
- [2] [G1], GOTZMANN, G. *Eine Bedingung für die Flachheit und das Hilbertpolynom eines graduierten Ringes*. *Math. Z.* 158, 61–70 (1978).
- [3] [G2], GOTZMANN, G. *Einige einfach-zusammenhängende Hilbertschemata*. *Math. Z.* 180, 291–305 (1982).
- [4] [Gr], GROTHENDIECK, A. Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV. Les schémas de Hilbert. Sem. Bourbaki 1960/61, Exposé 221.
- [5] [Ha], HARTSHORNE, R. *Connectedness of the Hilbert scheme*. *Publ. Math. IHES* 29, 261–309 (1966).
- [6] [Ho], HORROCKS, G. *Sheaves on projective space invariant under the unitriangular group*. *Invent. Math.* 10, 108–118 (1970).
- [7] [K], KLEIMAN, S. *Geometry on Grassmannians and applications to splitting bundles and smoothing cycles*. *Publ. Math. IHES* 36, 281–297 (1969).
- [8] [M], MUMFORD, D. *Lectures on curves on an algebraic surface*. Princeton University Press (1966).

*Isselstrasse 34  
D-4440 Rheine*

Erhalten 28. April 1986