

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 62 (1987)  
  
**Artikel:** Duale Varietäten von Fahnenvarietäten.  
**Autor:** Knop, Friedrich / Menzel, Gisela  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-47339>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Duale Varietäten von Fahnenvarietäten

FRIEDRICH KNOP\* und GISELA MENZEL

### §0. Einleitung

Für eine glatte irreduzible Untervarietät  $X$  eines projektiven Raumes  $\mathbb{P}^N$  definiert man die duale Varietät  $\check{X}$  als die Menge der Hyperebenen  $H$ , die tangential zu  $X$  liegen oder äquivalent, daß der Hyperebenenschnitt  $H \cap X$  nicht glatt ist. Für  $\dim X = 1$  und  $N = 2$  erhält man dann als Spezialfall die klassische duale Kurve. Ein einfaches Argument zeigt, daß  $\check{X}$  irreduzibel und  $\dim \check{X} \leq N - 1$  ist, wobei Gleichheit die Regel ist.

Ziel dieser Arbeit ist es nun,  $\dim \check{X}$  zu berechnen, wenn  $X$  isomorph zu einer verallgemeinerten Fahnenvarietät ist, d.h.  $X \cong G/P$  mit einer halbeinfachen algebraischen Gruppe  $G$  und einer parabolischen Untergruppe  $P$  von  $G$ .

Nun gibt es Formeln von Holme, Hefez und Kleiman ([H], [H–K]), die es im Prinzip erlauben, aus der Kenntnis von  $\mathcal{L} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|_X$  und des Chowringes von  $X$  die Dimension von  $\check{X}$  und sogar den Grad auszurechnen. Jedoch erweisen sich diese Formeln auf Fahnenvarietäten angewandt als so kompliziert, daß sich diese Methode zur Bestimmung von  $\dim \check{X}$  nicht eignet. Doch immerhin zeigen diese Formeln, daß es nur auf  $\mathcal{L}$  und nicht auf die spezielle Einbettung  $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$  ankommt, d.h. wir können und werden ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Einbettung vollständig ist. Falls nun  $G$  einfach zusammenhängend ist, was wir auch immer annehmen können, dann läßt sich die Wirkung von  $G$  auf  $X$  fortsetzen zu einer Wirkung auf  $\mathcal{L}$  und damit auf den  $\mathbb{P}^N$ . Besitzt der Grundkörper die Charakteristik Null, so operiert  $G$  irreduzibel auf  $H^0(X, \mathcal{L})^\vee$  (Borel–Weil) und  $X$  ist die Bahn eines Höchstgewichtsvektors in  $\mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{L})^\vee)$ . Man erhält also eine Korrespondenz zwischen irreduziblen Darstellungen und vollständigen Einbettungen von Fahnenvarietäten. Wenn nun  $\dim \check{X} = N - 1$  gilt, so ist  $\check{X}$  Nullstellenmenge eines  $G$ -invarianten homogenen Polynoms auf  $\mathbb{P}^N$ , der Diskriminante. Diese Bemerkung liefert für einfache Gruppen im Prinzip schon alle Ausnahmen der Regel “ $\dim \check{X} = N - 1$ ,” nämlich Darstellungen, die keine nichtkonstanten invarianten Polynome besitzen. Dies ist

---

\* Unterstützt durch den Schweizerischen Nationalfonds

der Fall für den  $\mathbb{P}^N$  selbst ( $G = Sl_{N+1}$  oder  $Sp_{N+1}$ ,  $\check{X} = \emptyset$ ), den Raum der schiefsymmetrischen  $n \times n$ -Matrizen ( $n$  ungerade,  $G = Sl_n$ ,  $X = Gr(1, n-1)$ ) und den Raum der zehndimensionalen Spinoren ( $G = Spin_{10}$ ,  $X = \{\text{reine Spinoren}\}$ ). Die Ausnahme bildet die Operation der  $Spin_9$  auf dem Raum der zehndimensionalen Spinoren ( $N = 15$ ), hier existiert eine Invariante, jedoch ist  $\dim \check{X} = 10$ .

Der Nachweis, daß für die anderen Einbettungen der einfachen Gruppen  $\dim \check{X} = N - 1$  gilt, ist erheblich schwieriger. Wir benutzen das Kriterium von Katz ([K]), daß dies in Charakteristik Null genau dann eintritt, wenn es eine Hyperebene  $H$  gibt, so daß  $X \cap H$  eine nicht ausgeartete quadratische Singularität besitzt. Für jede Einbettung weisen wir induktiv nach  $\dim G$  die Existenz einer solchen Hyperebene nach. Die meisten Fälle werden dabei vom Hauptlemma 3.10 erfaßt. Die restlichen Darstellungen werden dann gesondert behandelt, wobei vor allem der Fall  $G \cong Sl_n$  besonders mühsam ist.

Das Problem für halbeinfache Gruppen  $G$  läßt sich auf einfache zurückführen, was Inhalt von Satz 2.3 ist. Dieser Satz zeigt auch, daß die Eigenschaft “ $\dim \check{X} < N - 1$ ” nicht von der Dimension des Invariantenringes abhängt. Diese kann beliebig groß sein.

Spezialfälle unseres Hauptsatzes waren schon vorher bekannt, wie etwa für die Plückereinbettungen der Graßmannvarietäten  $G(m, n)$  ( $m = 1$ : Landman, allgemein: Helmstetter, beides unveröffentlicht).

Schließlich möchten wir J. Helmstetter und D. Luna danken, die uns zu dieser Arbeit angeregt haben.

## § 1. Allgemeine Bemerkungen

1.1 Alle Varietäten seien über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$  der Charakteristik Null definiert. Wir betrachten einen endlichdimensionalen Vektorraum  $V$  und seinen Dualraum  $\check{V}$ . Zu einer glatten irreduziblen echten Untervarietät  $Z \subset \mathbb{P}(\check{V})$  ist die *duale Varietät*  $\check{Z}$  definiert durch

$$\check{Z} := \{H \subset \mathbb{P}(\check{V}) \mid H \text{ ist eine zu } Z \text{ tangentielle Hyperebene}\}.$$

Die duale Paarung  $\check{V} \times V \rightarrow k$  identifiziert die Punkte in  $\mathbb{P}(V)$  mit den Hyperebenen in  $\mathbb{P}(\check{V})$ ; zu  $v \in \mathbb{P}(V)$  sei  $H_v$  die entsprechende Ebene. Das Bild des Konormalenbündels

$$\mathbb{P}(\mathfrak{N}_Z) := \{(z, v) \in Z \times \mathbb{P}(V) \mid T_z(Z) \subset H_v\}$$

unter der Projektion  $\text{pr}: Z \times \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  ist dann genau die zu  $Z$  duale

Varietät, insbesondere gilt

$$\dim \check{Z} \leq \dim \mathbb{P}(\mathfrak{N}_Z) = \dim \mathbb{P}(V) - 1.$$

Die Menge

$$U_{\mathbb{P}(\mathfrak{N}_Z)} := \{(z, v) \in \mathbb{P}(\mathfrak{N}_Z) \mid Z \cap H_v \text{ besitzt eine nicht ausgeartete quadratische Singularität in } z\}$$

besteht genau aus den Punkten, in denen die Projektion  $\text{pr}: \mathbb{P}(\mathfrak{N}_Z) \rightarrow \check{Z}$  unverzweigt ist; sie ist also insbesondere offen ([K], Prop. 3.2). Setzen wir

$$U_{\check{Z}} := \{v \in \check{Z} \mid Z \cap H_v \text{ besitzt genau eine Singularität, und diese ist quadratisch und nicht ausgeartet}\},$$

so ist  $U_{\check{Z}}$  offen in  $\check{Z}$  ([K], Prop. 3.2), und es gilt:

### 1.2 SATZ ([K], Prop. 3.5):

*Ist die Projektion  $\text{pr}: \mathbb{P}(\mathfrak{N}_Z) \rightarrow \check{Z}$  generisch unverzweigt, so ist sie birational. In diesem Fall besteht  $U_{\check{Z}}$  genau aus den glatten Punkten von  $\check{Z}$  und ist identisch mit der größten offenen Menge  $U$  von  $\check{Z}$ , für die die Projektion einen Isomorphismus  $\text{pr}^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$  induziert.*

1.3 Wir identifizieren  $\mathbb{P}(\check{V})$  mit den Geraden durch den Ursprung in  $\check{V}$ . Für  $f \in \check{V} \setminus \{0\}$  sei  $F$  die Gerade durch  $f$ . Operiert eine reduktive zusammenhängende Gruppe  $G$  linear auf  $V$ , und ist  $Z \subset \mathbb{P}(\check{V})$  eine homogene  $G$ -Varietät, so existiert ein  $f \in \check{V}$  mit  $GF = Z$ . Der Stabilisator  $P = G_F$  von  $F$  in  $G$  ist dann eine parabolische Untergruppe von  $G$ .

### DEFINITION:

Ist  $\text{Kodim}_{\mathbb{P}(V)}(GF) = 1$ , so heißt  $(V, f)$  nicht ausgeartet.

Nach Satz 1.2 ist  $(V, f)$  genau dann nicht ausgeartet, wenn  $U_{\mathbb{P}(\mathfrak{N}_Z)}$  nicht leer ist. Da  $Z = GF$  homogen ist, ist dies genau dann der Fall, wenn ein  $v \in V$  existiert mit  $f(v) = 0$ ,  $\mathfrak{g}f \subset H_v$  und  $Gf \cap H_v$  in  $f$  eine nicht ausgeartete quadratische Singularität besitzt. Hierbei ist  $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$  die Liealgebra von  $G$ . Ist  $P^-$  eine  $P$  gegenüberliegende parabolische Untergruppe von  $G$  und  $R_u(P^-)$  ihr unipotentes Radikal mit Liealgebra  $\mathfrak{n}^-$ , so liegt  $R_u(P^-) \cdot P$  dicht in  $G$ . Daher läßt sich mit der Exponentialabbildung  $\mathfrak{n}^- \xrightarrow{\sim} R_u(P^-)$ ,  $X \mapsto \exp X$ , die Gleichung von  $Gf \cap H_v$  in  $f$



lokal beschreiben:

$$\begin{aligned} R_u(P^-) \cdot f \cap H_v &= \{uf \mid u \in R_u(P^-), uf(v) = 0\} \\ &\cong \{X \in \mathfrak{n}^- \mid f((\exp X) \cdot v) = 0\}. \end{aligned}$$

Wegen  $f(v) = 0$  und  $\mathfrak{gf} \subset H_v$  ist  $f((\exp X) \cdot v) = \frac{1}{2}f(X^2v) + \frac{1}{6}f(X^3v) + \dots$ . Wählen wir also eine Basis  $X_1, \dots, X_r$  von  $\mathfrak{n}^-$ , so ist die Singularität genau dann nicht ausgeartet, wenn die Matrix

$$H(f, v) := (f(X_i X_j v))_{1 \leq i, j \leq r} \quad \text{maximalen Rang besitzt.}$$

#### 1.4 Bemerkungen:

- 1) Sei  $N := \mathfrak{gf} = \{v \in V \mid Xf(v) = 0 \text{ für alle } X \in \mathfrak{g}\}$ , dann ist  $N$  stabil unter  $P$  und folgende Aussagen sind äquivalent:
  - a)  $(V, f)$  ist nicht ausgeartet.
  - b)  $\text{Kodim}_V(GN) = 1$ .
  - c) Es existiert ein  $v \in N$  mit  $\mathfrak{n}^- v + N = \check{K}f$ .
  - d) Der kanonische Morphismus  $\mathfrak{N}_Z = G \times {}^P N \rightarrow GN$  ist eine Auflösung der Singularitäten (Satz 1.2).
- 2) Ist  $V$  reduzibel, so existiert ein eindeutig bestimmter irreduzibler Untermodul  $V_1$  mit  $f \in \check{V}_1$ , und  $(V, f)$  ist genau dann nicht ausgeartet, wenn  $(V_1, f)$  dies ist.
- 3) Die Frage “ausgeartet oder nicht?” hängt nur von den nilpotenten Elementen der Liealgebra ab. Daher genügt es, einfach zusammenhängende halbeinfache Gruppen zu betrachten.

## § 2. Formulierung der Ergebnisse

2.1 Von nun an sei  $G$  halbeinfach und einfach zusammenhängend, und  $V$  ein irreduzibler  $G$ -Modul. Sei  $f \in \check{V}$  mit  $GF = \overline{GF}$ .

Für  $v \in V$  sei  $H(v) := H(f, v) = (f(X_i X_j v))_{1 \leq i, j \leq r}$  die Hessesche von  $v$ .

Mit  $\text{Rang } V := \max \{\text{Rang } H(v) \mid v \in \check{V}\}$  sei der *Rang*,

mit  $\text{ord } V := \dim R_u(G_F) = \dim GF$  sei die *Ordnung*,

und mit  $\text{def } V := \text{ord } V - \text{Rang } V = \text{Kodim}_{\mathbb{P}(V)}(\check{GF}) - 1$

sei der *Defekt* von  $V$  bezeichnet.

#### 2.2 SATZ:

*Die ausgearteten irreduziblen Darstellungen einfach zusammenhängender einfacher Gruppen sind, bis auf äußere Automorphismen von  $G$ , genau die aus*

folgender Tabelle:

$G$	$V$	Rang $V$	ord $V$	def $V$
1. $Sl_n$	$k^n$	0	$n - 1$	$n - 1$
2. $Sl_{2n+1}$	$\bigwedge^2 k^{2n+1}$	$4(n - 1)$	$2(2n - 1)$	2
3. $Sp_{2n}$	$k^{2n}$	0	$2n - 1$	$2n - 1$
4. $Spin_9$	$k^{16}$	6	10	4
5. $Spin_{10}$	$k^{16}$	6	10	4

### 2.3 SATZ:

Ist  $G$  halbeinfach, einfach zusammenhängend, und  $V$  eine ausgeartete irreduzible Darstellung von  $G$ , so gibt es eine Zerlegung  $G \cong G_1 \times G_2$ ,  $V \cong V_1 \otimes V_2$  mit  $(G_1, V_1)$  aus der Tabelle von Satz 2.2,  $G_2$  halbeinfach, und  $V_2$  ein irreduzibler  $G_2$ -Modul mit  $\text{def } V_1 > \text{ord } V_2$ . In diesem Fall ist  $\text{def } V = \text{def } V_1 - \text{ord } V_2$ .

### 2.4 Bemerkung:

Falls die Charakteristik von  $k$  positiv ist, lassen sich jede Fahnenvarietät  $G/P$  und jedes Geradenbündel  $\mathcal{L}$  auf  $G/P$  zu einem Körper der Charakteristik Null anheben. Weil sich dabei der Chowring von  $G/P$  nicht ändert, zeigen die in der Einleitung erwähnten Formeln, daß die Einbettung  $G/P \hookrightarrow H^0(\mathcal{L})^\vee$  genau dann ausgeartet ist, wenn dies in Charakteristik Null gilt.

Der Rest dieser Arbeit ist den Beweisen der beiden Sätze gewidmet. Zunächst berechnen wir im Abschnitt 3.2 den Defekt von  $V$  für die Darstellungen der Tabelle aus Satz 2.2. Mit Lemma 3.3 und Satz 2.2 ergibt sich der Beweis zu Satz 2.3. Die Hauptschwierigkeit ist es zu zeigen, daß die übrigen Darstellungen nicht ausgeartet sind. Dies ist leider nur durch Unterscheidung der Gruppen nach ihren Wurzelsystemen möglich. Ist dieses vom Typ  $G_2$ , so ist der Beweis relativ unkompliziert und findet sich im Abschnitt 3.6. Die anderen Fälle lassen sich größtenteils mit dem Hauptlemma 3.10 induktiv erledigen. Dies geschieht in § 4. Jedoch bleiben besonders im Fall  $A_n$  Spezialfälle übrig, die explizit nachgerechnet werden müssen.

## § 3. Einige Hilfssätze und der Beweis im Fall $G_2$

3.1 Um dem Leser die Übersicht zu erleichtern, tragen wir an dieser Stelle alle Bezeichnungen, auch die bereits verwendeten, zusammen.

$G$  sei eine halbeinfache einfach zusammenhängende algebraische Gruppe mit Liealgebra  $\mathfrak{g}$ ,  $B$  eine Boreluntergruppe von  $G$  und  $T$  ein maximaler Torus in  $B$  mit Liealgebra  $\mathfrak{h}$ . Mit  $\phi$  bezeichnen wir das Wurzelsystem von  $G$  bezüglich  $T$ , und mit  $\phi^+$  die bezüglich  $B$  positiven Wurzeln.  $X(T) := \text{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$  sei die

Charaktergruppe von  $T$  und  $(\ , \ )$  ein unter der Weylgruppe invariantes Skalarprodukt auf  $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ . Für  $\alpha, \beta \in X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  sei  $\langle \alpha, \beta \rangle := 2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$ .  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  seien die einfachen Wurzeln in  $\phi^+$  und  $\omega_1, \dots, \omega_n$  die Fundamentalgewichte von  $G$  ( $\langle \omega_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$ ). Weiterhin wählen wir eine Chevalley-Basis  $X_\alpha, \alpha \in \phi; H_{\alpha_i}, 1 \leq i \leq n$ , von  $\mathfrak{g}$  wie in Bourbaki ([B], Ch. VIII, §2, n° 4), d.h. es gilt

$$[H, X_\alpha] = \alpha(H)X_\alpha \quad \text{für alle } \alpha \in \phi, H \in \mathfrak{h};$$

$$[X_\alpha, X_\beta] = \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha + \beta \notin \phi \cup \{0\} \\ -H_\alpha, & \text{falls } \alpha + \beta = 0 \\ N_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta}, & \text{falls } \alpha + \beta \in \phi \end{cases}$$

$V$  sei ein irreduzibler  $G$ -Modul mit höchstem Gewicht  $\lambda$ ,  $h$  ein Höchstgewichtsvektor in  $V$  und  $f$  ein Tiefstgewichtsvektor im Dualraum  $\check{V}$ ,  $P$  der Stabilisator der Geraden durch  $h$ . Der Stabilisator  $P^-$  der Geraden durch  $f$  ist dann eine  $P$  gegenüberliegende parabolische Untergruppe von  $G$ . Setzen wir  $\phi^+(\lambda) := \{\alpha \in \phi^+ \mid \langle \lambda, \alpha \rangle > 0\}$ , so erhalten wir für die Liealgebren der unipotenten Radikale von  $P$  und  $P^-$ :

$$\mathfrak{n} := \text{Lie } R_u(P) = \bigoplus_{\alpha \in \phi^+(\lambda)} kX_\alpha, \quad \mathfrak{n}^- := \text{Lie } R_u(P^-) = \bigoplus_{\alpha \in \phi^+(\lambda)} kX_{-\alpha}.$$

Weiterhin sei  $N := \check{\mathfrak{g}}f = \{v \in V \mid Xf(v) = 0 \text{ für alle } X \in \mathfrak{g}\}$ . Für  $\mu \in X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  sei

$$N(\mu) := \{v \in N \mid H \cdot v = (\lambda - \mu)(H) \cdot v \text{ für alle } H \in \mathfrak{h}\}.$$

Die Hessesche eines  $v \in V$  ist die Matrix  $H(v) := (f(X_\alpha X_\beta v))_{\alpha, \beta \in \phi^+(\lambda)}$ ,

$$\text{Rang } V := \max \{\text{Rang } H(v) \mid v \in N\}, \text{ ord } V := \dim \mathfrak{n} = |\phi^+(\lambda)|,$$

$$\text{def } V := \text{Rang } V - \text{ord } V = \text{Kodim}_V(GN) - 1.$$

$\lambda$  heißt ausgeartet, falls  $\text{def } V > 0$  ist.

### 3.2 Berechnung von $\text{def } V$ für die Darstellungen aus Tabelle 2.2.

1., 3. In beiden Fällen ist  $V = \overline{Gh} = Gh \cup \{0\}$ , also  $N = \{0\}$  und  $GN = \{0\}$ .

2.  $(G, V) = (Sl_{2n+1}, \bigwedge^2 k^{2n+1})$ :

Wir wählen die Standardform: Sei  $e_1, \dots, e_{2n+1}$  eine Basis von  $k^{2n+1}$ , dann ist

$h = e_1 \wedge e_2$  und  $N = \bigoplus_{3 \leq i < j \leq 2n+1} k(e_i \wedge e_j)$ . Nun ist  $M := P \cap P^-$  isogen zu  $Sl_2 \times Gl_{2n-1}$ ,  $Sl_2$  operiert trivial auf  $N$  und  $N \cong \bigwedge^2 k^{2n-1}$  als  $Gl_{2n-1}$ -Modul. Für  $v = e_3 \wedge e_4 + \dots + e_{2n-1} \wedge e_{2n}$  ist  $\overline{M}v = N$ , also  $GN = \overline{G}v$  und  $\dim GN = \dim Gv = \dim V - 3$ .

#### 4. $Spin_9$ :

Sei  $e_1, \dots, e_4$  die kanonische Basis von  $X(T)$ , dann sind  $\pm \frac{1}{2}(e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$  die Gewichte in  $Spin_9$ ,  $\lambda = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$ . Alle Gewichtsräume sind eindimensional,

$$N = \bigoplus_{i=1}^4 N(\mu_i) + N(\mu) \quad \text{mit} \quad \mu = e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \quad \mu_i = \mu - e_i.$$

Hier ist  $M = P \cap P^- \cong Gl_4$ , und  $N \cong k^4 \oplus k$  als  $Gl_4$ -Modul. Für  $v = v_1 + v_2$  mit  $v_1 \in N(\mu_1) \setminus \{0\}$ ,  $v_2 \in N(\mu) \setminus \{0\}$  ist  $N = \overline{M}v$ , also  $GN = \overline{G}v$  und  $\dim GN = \dim V - 5$ .

#### 5. $Spin_{10}$ :

Die Inklusion  $SO_9 \subset SO_{10}$  liefert einen Isomorphismus  $\mathfrak{n}_9 = \mathfrak{n}_{10}$ , und die Räume der Spinoren sind isomorph als  $\mathfrak{n}$ - und  $\mathfrak{n}^-$ -Moduln.

### 3.3 LEMMA:

Ist  $G = G_1 \times \dots \times G_r$  das direkte Produkt halbeinfacher Gruppen und  $V = V_1 \otimes \dots \otimes V_r$  das Tensorprodukt irreduzibler  $G_i$ -Moduln  $V_i$  mit  $\text{ord } V_1 \geq \text{ord } V_2 \geq \dots \geq \text{ord } V_r$ , dann gilt

$$\text{def } V = \max(0, \text{def } V_1 - \text{ord}(V_2 \otimes \dots \otimes V_r)).$$

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach  $r$ :

#### a) $r = 2$ :

Für  $(G_i, V_i)$ ,  $i = 1, 2$ , sei  $\mathfrak{g}_i, \phi_i, \phi_i^+, \lambda_i, h_i, f_i, \mathfrak{n}_i, \dots$  wie in 3.1 definiert.

Dann ist  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ ,  $\phi = (\phi_1 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \phi_2)$ ,  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ ,  $f = f_1 \otimes f_2$ ,  $h = h_1 \otimes h_2$ ,  $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2, \dots$

1) Wir zeigen zunächst die Richtung " $\leq$ ": Zu  $\alpha \in \phi_1^+(\lambda) \times \{0\}$ ,  $\beta \in \{0\} \times \phi_2^+(\lambda)$  und vorgegebenem  $\mu_{\alpha, \beta} \in k$  definiere

$$v_{\alpha, \beta} := \mu_{\alpha, \beta} \frac{1}{\langle \lambda_1, \alpha \rangle} \frac{1}{\langle \lambda_2, \beta \rangle} (X_{-\alpha} h_1 \otimes X_{-\beta} h_2).$$

Dann ist  $v_{\alpha,\beta} \in N$  und für  $\gamma, \delta \in \phi^+(\lambda)$  gilt

$$f(X_\gamma X_\delta v_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \{\gamma, \delta\} \neq \{\alpha, \beta\} \\ \mu_{\alpha,\beta}, & \text{falls } \{\gamma, \delta\} = \{\alpha, \beta\} \end{cases}$$

Wähle nun  $v_1 \in N_1$  mit  $\text{Rang } H(v_1) = \text{Rang } V_1$  und setze

$$v := v_1 \otimes h_2 + \sum_{\substack{\alpha \in \phi_1^+(\lambda) \times \{0\} \\ \beta \in \{0\} \times \phi_2^+(\lambda)}} v_{\alpha,\beta}.$$

Dann hat  $H(v)$  die Form

$$H(v) = \left( \begin{array}{c|c} H(v_1) & M \\ \hline M^t & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \text{ord } V_1 \\ \text{ord } V_2 \end{matrix}$$

mit  $M = (\mu_{\alpha,\beta})$ . Nun ist für  $p \geq q$  und eine vorgegebene symmetrische  $p \times p$ -Matrix  $A$

$$\max \left\{ \text{Rang} \left( \begin{array}{c|c} A & M \\ \hline M^t & 0 \end{array} \right) \mid M \text{ beliebig} \right\} = \begin{cases} \text{Rang } A + 2q, & q < \text{def } A \\ p + q, & q \geq \text{def } A \end{cases}$$

2) Es gilt " $\geq$ ": Ist  $v \in V$ ,  $v = \sum_{i=1}^r v_1^i \otimes v_2^i$  mit  $v_1^i \in V_1$ ,  $v_2^i \in V_2$ , setze

$$w_1 := \sum_{i=1}^r f_2(v_2^i) v_1^i \quad \text{und} \quad w_2 := \sum_{i=1}^r f_1(v_1^i) v_2^i.$$

Dann hat  $H(v)$  die Form

$$H(v) = \left( \begin{array}{c|c} H(w_1) & B \\ \hline B^t & H(w_2) \end{array} \right) \begin{matrix} \text{ord } V_1 \\ \text{ord } V_2 \end{matrix}$$

mit geeignetem  $B$ . Nun ist

$$\text{Rang } H(v) \leq \min (\text{Rang } H(w_1) + 2 \text{ ord } V_2, \text{ ord } V_1 + \text{ord } V_2),$$

also  $\text{def } V \geq \max (0, \text{def } V_1 - \text{ord } V_2)$ .

b) *Induktionsschluß:*

1. Fall:  $\text{def } V_1 > \text{ord } (V_2 \otimes \cdots \otimes V_r)$

Dann ist  $\text{ord } V_1 > \text{ord } (V_2 \otimes \cdots \otimes V_r)$  und die Behauptung folgt mit a).

2. Fall:  $\text{def } V_1 \leq \text{ord } (V_2 \otimes \cdots \otimes V_r)$

Dann ist nach a)  $\text{def } V = \max(0, \text{def } (V_1 \otimes \cdots \otimes V_{r-1}) - \text{ord } V_r)$  und mit Induktion folgt

$$\text{def } V = \max(0, \max(0, \text{def } V_1 - \text{ord } (V_2 \otimes \cdots \otimes V_{r-1})) - \text{ord } V_r) = 0$$

3.4 Der Beweis von Satz 2.3 ergibt sich nun aus Lemma 3.3 und Satz 2.2.

3.5 LEMMA:

Erfüllen  $\alpha, \beta \in \phi^+(\lambda)$  eine der drei Bedingungen

1)  $\phi \not\cong G_2$ ,  $\alpha - \beta \notin \phi$

2)  $\alpha + \beta \notin \phi$  und  $\lambda - \alpha - \beta$  ist Gewicht von  $V$

3)  $\phi \not\cong G_2$ ,  $\alpha + \beta \in \phi$ ,  $\alpha - \beta \in \phi$  und  $\langle \lambda, \alpha \rangle \neq \langle \lambda, \beta \rangle$  oder  $\langle \lambda, \alpha \rangle = \langle \lambda, \beta \rangle \neq 1$

Dann existiert ein  $v_{\alpha+\beta} \in N(\alpha + \beta)$  mit  $f(X_\gamma X_\delta v_{\alpha+\beta}) \neq 0$  für alle  $\gamma, \delta \in \phi^+(\lambda)$  mit  $\gamma + \delta = \alpha + \beta$ .

Beweis:

Für  $\alpha, \beta \in \phi^+(\lambda)$  definiere  $v := (\lambda, \alpha)X_{-\alpha}X_{-\beta}h + (\lambda, \beta)X_{-\beta}X_{-\alpha}h$ .

a) Es ist  $v \in N(\alpha + \beta)$ .

Bew.: Ist die Summe  $\alpha + \beta \notin \phi$ , so ist  $X_{\alpha+\beta} = 0$ . Sei deshalb  $\alpha + \beta \in \phi$ . Dann gilt

$$X_{\alpha+\beta} \cdot v = -\frac{1}{2} \langle \lambda, \alpha \rangle \langle \lambda, \beta \rangle (\|\alpha\|^2 N_{\alpha+\beta, -\alpha} + \|\beta\|^2 N_{\alpha+\beta, -\beta}) = 0$$

([B] VIII, §2, n° 4, Lemma 4 (4)).

b) Ist  $\alpha - \beta \in \phi$ , so sei o.E.  $\alpha - \beta \in \phi^+$ . Eine kurze Rechnung zeigt:

$$f(X_\beta X_\alpha \cdot v) = -\langle \lambda, \beta \rangle A$$

mit  $A = \langle \lambda, \alpha \rangle (\lambda, \alpha + \beta) - \langle \beta, \alpha \rangle (\lambda, \alpha) - (\lambda, \beta) N_{\alpha, -\beta} N_{\alpha-\beta, -\alpha}$ . Sei  $-\beta - q\alpha, \dots, -\beta, \dots, -\beta + p\alpha$  die  $\alpha$ -Leiter durch  $-\beta$ , dann ist  $N_{\alpha, -\beta} N_{\alpha-\beta, -\alpha} = p(q+1)$  ([B] VIII, §2, n° 4, Lemma 4 (3)), also

$$A = \langle \lambda, \alpha \rangle (\lambda, \alpha + \beta) - \langle \beta, \alpha \rangle (\lambda, \alpha) - (\lambda, \beta) p(q+1).$$

c) Wir zeigen nun, daß unter den angegebenen Voraussetzungen  $A \neq 0$  ist:

1) Für  $\alpha - \beta \notin \phi$  ist  $p = 0$ , also  $\langle \beta, \alpha \rangle \leq 0$  und  $A > 0$ .

2) Ist  $\alpha + \beta \notin \phi$  und  $\lambda - \alpha - \beta$  Gewicht, so ist  $q = 0$ ,  $p = \langle \beta, \alpha \rangle$  und  $A = \langle \lambda - \beta, \alpha \rangle (\lambda, \alpha + \beta) > 0$ .

3) Ist  $\phi \not\cong G_2$ ,  $\alpha + \beta \in \phi$  und  $\alpha - \beta \in \phi^+$ , so zeigt ein Blick auf die

Wurzelsysteme vom Rang 2, daß dann  $p = q = 1$ ,  $\langle \beta, \alpha \rangle = 0$  und  $\|\alpha\| = \|\beta\|$  gilt. Damit erhalten wir

$$A = \langle \lambda, \alpha \rangle (\lambda, \alpha + \beta) - 2(\lambda, \beta),$$

also für  $\langle \lambda, \alpha \rangle \neq \langle \lambda, \beta \rangle : A \geq (\lambda, \alpha - \beta) > 0$ , und für  $\langle \lambda, \alpha \rangle = \langle \lambda, \beta \rangle : A = 2(\lambda, \alpha)(\langle \lambda, \alpha \rangle - 1) \neq 0$ .

d) Erfüllen  $\alpha$  und  $\beta$  die Voraussetzungen und sind  $\gamma, \delta \in \phi^+(\lambda)$  mit  $\gamma + \delta = \alpha + \beta$ , so erfüllen auch  $\gamma$  und  $\delta$  eine der drei Bedingungen.

Bew.: Erfüllen  $\alpha, \beta$  die Bedingung 2, so auch  $\gamma, \delta$ . Daher nehmen wir an, daß  $\alpha, \beta$  die Voraussetzung 1 oder 3 erfüllen, insbesondere also  $\phi \neq G_2$  ist, und daß  $\gamma - \delta \in \phi$  ist.

1. Fall:  $\alpha, \beta$  erfüllen 1. Dann ist  $\alpha - \beta \notin \phi$  und  $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ . Insbesondere ist  $\langle \lambda - \alpha, \beta \rangle \geq \langle \lambda, \beta \rangle > 0$  und  $\lambda - \gamma - \delta$  ist Gewicht von  $V$ . Sei daher  $\gamma + \delta \in \phi$ . In diesem Fall sind  $\gamma$  und  $\delta$  kurz und  $(\gamma, \delta) = 0$ , wie man an den Wurzelsystemen vom Rang 2 abliest. Wegen  $\alpha - \beta \notin \phi$  und  $\alpha + \beta = \gamma + \delta \in \phi$  ist dann aber  $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$  und  $\|\gamma\|^2 + \|\delta\|^2 = \|\gamma + \delta\|^2 = \|\alpha + \beta\|^2 < \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$ , sei daher o.E.  $\alpha$  lang. Dann ist  $\|\alpha\| > \|\gamma\| = \|\delta\|$  und  $\|\beta\| \geq \|\gamma\| = \|\delta\|$ , also  $\langle \lambda, \gamma \rangle + \langle \lambda, \delta \rangle > \langle \lambda, \alpha \rangle + \langle \lambda, \beta \rangle \geq 2$ .

2. Fall:  $\alpha, \beta$  erfüllen 3. Dann sind  $\alpha, \beta$  kurz und  $(\alpha, \beta) = 0$ . Nun ist aber auch  $\gamma + \delta, \gamma - \delta \in \phi$ , somit sind auch  $\gamma$  und  $\delta$  kurz und  $(\gamma, \delta) = 0$ . Wir erhalten

$$\langle \lambda, \gamma \rangle + \langle \lambda, \delta \rangle = \langle \lambda, \alpha \rangle + \langle \lambda, \beta \rangle \geq 3.$$

### 3.6 SATZ:

Ist das Wurzelsystem vom Typ  $G_2$ , so ist keine irreduzible Darstellung von  $G$  ausgeartet.

Beweis:

$\phi$  habe Basis  $\alpha_1, \alpha_2$  mit  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = -1$ ,  $\langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle = -3$ . Die Fundamentalgewichte sind  $\omega_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ ,  $\omega_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$ , sei also  $\lambda = r\omega_1 + s\omega_2$  mit  $r, s \in \mathbb{N}$ . Wir erhalten

$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$	$\alpha_4 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$	$\alpha_5 = 2\alpha_1 + \alpha_2$	$\alpha_6 = 3\alpha_1 + \alpha_2$
$\langle \lambda, \alpha \rangle$	$r$	$s$	$r + 3s$	$r + 2s$	$2r + 3s$	$r + s$

1. Fall:  $r = 0, s \geq 1$ .

Hier ist  $\phi^+(\lambda) = \phi^+ \setminus \{\alpha_1\}$ . Die  $2\alpha_i$ ,  $i = 3, 4, 5$  erfüllen die Bedingung 2 aus Lemma 3.5, sei daher  $v_{2\alpha_i} \in N(2\alpha_i)$  wie in 3.5 definiert. Für  $v := v_{2\alpha_3} + v_{2\alpha_4} + v_{2\alpha_5}$ ,

hat  $H(v)$  die Gestalt

$$H(v) = (f(X_{\alpha_i} X_{\alpha_j} \cdot v))_{2 \leq i, j \leq 6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Fall:  $s = 0$ ,  $r \geq 1$ .

Nun ist  $\phi^+(\lambda) = \phi^+ \setminus \{\alpha_2\}$ , und  $2\alpha_5$  erfüllt die Voraussetzung 2 aus Lemma 3.5. Setzen wir  $v := v_{2\alpha_5}$  wie in 3.5, so hat  $H(v)$  den Rang 5.

3. Fall:  $r, s \geq 1$ .

In diesem Fall ist  $\phi^+(\lambda) = \phi^+$ , und  $v := v_{2\alpha_3} + v_{2\alpha_5}$  liefert das Gewünschte.

3.7 LEMMA (vgl. [K], Beweis zu Théorème 2.5):

*Enthält das Diagramm von  $\lambda$  keine Eins, so ist  $\lambda$  nicht ausgeartet.*

*Beweis:*

Sei  $\phi \not\cong G_2$ . Wir zerlegen  $\phi^+(\lambda)$  in die Mengen der kurzen und der langen Wurzeln. Hat das Wurzelsystem nur Wurzeln gleicher Länge, so seien alle Wurzeln lang.

$$\phi^+(\lambda) = K \dot{\cup} L \quad \text{mit} \quad K := \{\alpha \in \phi^+(\lambda) \mid \alpha \text{ ist kurz}\} \quad \text{und} \\ L := \{\alpha \in \phi^+(\lambda) \mid \alpha \text{ ist lang}\}.$$

Wegen  $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 2$  für alle  $\alpha \in \phi^+(\lambda)$  erfüllt  $2\alpha$  die Voraussetzung 2 aus Lemma 3.5. Sei  $v_{2\alpha}$  definiert wie in 3.5 und

$$v := x \sum_{\alpha \in K} v_{2\alpha} + \sum_{\alpha \in L} v_{2\alpha} \quad \text{mit einem} \quad x \in k.$$

Sind nun  $\gamma, \delta \in \phi^+(\lambda)$  mit  $\gamma \neq \delta$  und  $\gamma + \delta = 2\alpha$ , so ist  $\alpha$  kurz und  $\gamma, \delta$  sind lang, wie man aus den Rang 2 Wurzelsystemen  $\not\cong G_2$  abliest. Also hat  $H(v)$  die Form

$$H(v) = \left( \begin{array}{c|c} xD_K & 0 \\ \hline 0 & D_L + xM \end{array} \right) \begin{matrix} K \\ L \end{matrix}$$

mit nicht ausgearteten Diagonalmatrizen  $D_K$ ,  $D_L$  und gewissem  $M$ . Wähle nun  $x$  so, daß  $\det H(v) \neq 0$ .



### 3.8 DEFINITION:

- 1)  $\phi^+(\lambda) = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_s$  sei Vereinigung von paarweise disjunkten Teilmengen. Die  $A_i$  heißen *unvermischt*, wenn für alle  $i$  und alle  $j \neq k$  gilt

$$(A_i + A_j) \cap (A_k + A_l) = \emptyset.$$

- 2) Eine Teilmenge  $A \subset \phi^+(\lambda)$  heißt *zulässig*, falls ein  $v \in \bigoplus_{\alpha, \beta \in A} N(\alpha + \beta)$  existiert, für das die Matrix

$$H_A(v) := (f(X_\alpha X_\beta \cdot v))_{\alpha, \beta \in A} \text{ regulär ist.}$$

### 3.9 LEMMA:

Ist  $\lambda$  ein dominantes Gewicht und  $\phi^+(\lambda)$  die Vereinigung von paarweise disjunkten, unvermischten und zulässigen Teilmengen, so ist  $\lambda$  nicht ausgeartet.

*Beweis:*

$\phi^+(\lambda) = A_1 \cup \dots \cup A_s$ , wobei die  $A_i$  die gewünschten Eigenschaften besitzen. Wähle  $v_i \in \bigoplus_{\alpha, \beta \in A_i} N(\alpha + \beta)$  mit  $H_{A_i}(v_i)$  regulär und  $x_1, \dots, x_s$  mit  $\det H(x_1 v_1 + \dots + x_s v_s) \neq 0$ .

3.10 Für ein irreduzibles Wurzelsystem  $\phi \not\cong G_2$  wählen wir  $\delta$  wie folgt:

Fall 1:  $\delta$  sei eine dominante Wurzel.

Fall 2:

$$\delta = \begin{cases} 2(\alpha_1 + \dots + \alpha_n) & \text{falls } \phi \cong B_n \\ 2(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-2}) + \alpha_{n-1} + \alpha_n, & \text{falls } \phi \cong D_n \end{cases}$$

Für  $\alpha \in \phi$  ist  $\langle \alpha, \delta \rangle$  ganz und

$$\phi_\delta := \{ \alpha \in \phi \mid \langle \alpha, \delta \rangle \text{ ist gerade} \}$$

ist ein Unterwurzelsystem von  $\phi$ .

### HAUPTLEMMA:

$\lambda$  sei ein dominantes Gewicht mit

- a)  $\lambda/\phi_\delta$  ist nicht ausgeartet oder Null  
b)  $\langle \lambda, \delta \rangle \geq 2$  in Fall 1 bzw.  $\langle \lambda, \delta \rangle \geq 1$  in Fall 2.

Dann ist auch  $\lambda$  nicht ausgeartet.

*Beweis:*

Setzen wir  $\phi_1 := \phi \setminus \phi_\delta = \{ \alpha \in \phi \mid \langle \alpha, \delta \rangle \text{ ist ungerade} \}$ , so ist  $\phi^+(\lambda) =$

$\phi_\delta^+(\lambda) \dot{\cup} \phi_1^+(\lambda)$ ,  $\phi_\delta^+(\lambda)$  und  $\phi_1^+(\lambda)$  sind unvermischt, und  $\phi_\delta^+(\lambda)$  ist zulässig nach Voraussetzung a). Nach Lemma 3.9 haben wir also zu zeigen, daß  $\phi_1^+(\lambda)$  zulässig ist. Hierfür zerlegen wir  $\phi_1^+(\lambda)$  wie folgt:

$$M_0 := \{\alpha \in \phi_1^+(\lambda) \mid \langle \lambda, \delta - \alpha \rangle = 0\}$$

$$M_1 := \{\alpha \in \phi_1^+(\lambda) \mid \langle \lambda, \delta - \alpha \rangle \neq 0\}$$

- 1)  $\alpha \in \phi_1^+ \Leftrightarrow \delta - \alpha \in \phi_1^+$ . Für  $\alpha \in \phi_1^+$  ist  $\langle \alpha, \delta \rangle = 1$  und in Fall 2 ist  $\langle \delta, \alpha \rangle \geq 2$ .

*Beweis:*

In Fall 1 ist  $\langle \delta, \alpha \rangle > 0$ , hieraus folgt  $\delta - \alpha \in \phi$ . Nun sind  $\alpha$  und  $\delta - \alpha$  gleichlang, wie man aus den Rang 2 Wurzelsystemen  $\neq G_2$  abliest. Daher ist  $\langle \alpha, \delta \rangle = 1$ , also  $\langle \delta - \alpha, \delta \rangle = 1$  und  $\delta - \alpha \in \phi_1^+$ .

In Fall 2 liefert direktes Nachrechnen die Behauptung.

- 2) Für  $\alpha \in M_0$  ist  $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 2$ , denn  $(\lambda, \alpha) = (\lambda, \delta)$ , also  $\langle \lambda, \alpha \rangle = \langle \lambda, \delta \rangle \langle \delta, \alpha \rangle \langle \alpha, \delta \rangle^{-1}$ , mit 1) und Voraussetzung b) folgt die Behauptung.  
 3) Wegen 2) erfüllt  $2\alpha$  ( $\alpha \in M_0$ ) die Voraussetzung 2 aus Lemma 3.5. Es existiert somit ein  $v_0 \in \bigoplus_{\alpha \in M_0} N(2\alpha)$  mit  $\det H_{M_0}(v_0) \neq 0$  (vgl. Beweis zu 3.7).  
 4) Seien  $\alpha, \beta \in M_1$  mit  $\alpha + \beta = \delta$ , so ist Lemma 3.5 anwenbar.

*Beweis:*

Fall 1: Hier ist  $\alpha + \beta = \delta$  eine Wurzel. Für  $\alpha - \beta \notin \phi$  ist Voraussetzung 1 aus Lemma 3.5 erfüllt, sei daher  $\alpha - \beta \in \phi$ . Wir zeigen, daß dann Vor. 3 gilt. An den Rang 2 Wurzelsystemen  $\neq G_2$  lesen wir  $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$  ab, wegen  $\alpha + \beta = \delta$  folgt hieraus  $\langle \delta, \alpha \rangle = 2$ . Sei nun  $\langle \lambda, \alpha \rangle = \langle \lambda, \beta \rangle = \langle \lambda, \delta - \alpha \rangle$ . Da  $\alpha$  und  $\delta - \alpha$  die gleiche Länge haben folgt mit 1) und Voraussetzung b):

$$\langle \lambda, \alpha \rangle = (\lambda, \delta)(\alpha, \alpha)^{-1} = \frac{1}{2}\langle \lambda, \delta \rangle \langle \delta, \alpha \rangle \langle \alpha, \delta \rangle^{-1} = \langle \lambda, \delta \rangle \geq 2.$$

Fall 2: Hier ist  $\alpha + \beta = \delta$  keine Wurzel, zu zeigen ist Voraussetzung 2 aus 3.5, d.h.  $\lambda - \delta$  ist Gewicht von  $V$ . Für  $\alpha \neq \beta$  ist  $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ , also  $\langle \lambda - \alpha, \beta \rangle \geq \langle \lambda, \beta \rangle \geq 1$ , somit ist  $\lambda - (\alpha + \beta)$  Gewicht. Für  $\alpha = \beta$  ist nach Vor. b)  $\langle \lambda, \delta \rangle = \langle \lambda, 2\alpha \rangle = \frac{1}{2}\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 1$ , somit ist  $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 2$  und  $\lambda - 2\alpha$  ist Gewicht.

- 5) Setze  $v_\delta \in N(\delta)$  wie in 3.5, wegen  $\alpha \in M_1 \Leftrightarrow \delta - \alpha \in M_1$  (vgl. 1)) ist  $\det H_{M_1}(v_\delta) \neq 0$ .  
 6) Für  $v := v_0 + v_\delta$ ,  $v_0$  wie in 3),  $v_\delta$  wie in 5) hat  $H(v)$  die Gestalt

$$H(v) = \left( \begin{array}{c|c} H_{M_0}(v_0) & 0 \\ \hline 0 & H_{M_1}(v_\delta) \end{array} \right).$$

Beweis: zu zeigen ist

(i) für  $\alpha \in M_0$ ,  $\beta, \gamma \in \phi_1^+(\lambda)$  mit  $2\alpha = \beta + \gamma$  folgt  $\beta, \gamma \in M_0$ .

(ii) für  $\alpha, \beta \in \phi_1^+(\lambda)$  mit  $\alpha + \beta = \delta$  folgt  $\alpha, \beta \in M_1$ .

zu i): Hier ist  $2(\lambda, \alpha) = 2(\lambda, \delta) = (\lambda, \beta) + (\lambda, \gamma) \Rightarrow (\lambda, \delta - \beta) + (\lambda, \delta - \gamma) \geq 0$

zu ii): Sind  $\alpha, \beta \in M_0$ , so ist  $(\lambda, \alpha) = (\lambda, \delta) = (\lambda, \beta) \neq 0$ , dies steht im Widerspruch zu  $\alpha + \beta = \delta$ ; und für  $\alpha \in M_1$  ist auch  $\beta = \delta - \alpha \in M_1$  nach 1).

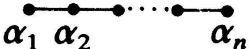
#### § 4. Der Beweis von Satz 2.2.

Die Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie im vorhergehenden Paragraphen. Wegen Satz 3.6 sei  $\phi \not\cong G_2$ .

##### 4.1 SATZ:

Ist  $\lambda = \sum_{i=1}^n r_i \omega_i$  mit  $r_i \in \{0, 1\}$ , und erscheint  $(G, V)$  nicht in Tabelle 2.2, so ist  $\lambda$  nicht ausgeartet.

Der Beweis des Satzes erfolgt durch Fallunterscheidung nach dem Wurzelsystem  $\phi$  und nimmt die Abschnitte 4.2–4.9 in Anspruch. Satz 2.2 wird dann in 4.10 endgültig bewiesen.

4.2  $\phi \cong A_n$ : 

Wir identifizieren  $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  mit der Hyperebene der Punkte in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , deren Koordinatensumme Null beträgt.

Positive Wurzeln:  $\bar{ij} := e_i - e_j, \quad 1 \leq i < j \leq n + 1$

Basis:  $\alpha_i := e_i - e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n$

Fundamentalgewichte:  $\omega_i = e_1 + \dots + e_i, \quad 1 \leq i \leq n$

I. Die Fundamentaldarstellungen  $\lambda = \omega_p$ :

Hier ist  $\phi^+(\lambda) = \{\bar{ij} \mid 1 \leq i \leq p, p + 1 \leq j \leq n + 1\}$ .

Sei  $q := n + 1 - p$ , dann hat  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{sl}_{n+1}$  nach geeigneter Basiswahl die Gestalt

$$\mathfrak{n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \vdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}}_q \}^p$$

Wir bezeichnen daher  $\omega_p$  mit  $(p, q)$ .

1) Für  $p \geq 2$  ist  $(p, p)$  nicht ausgeartet.

*Beweis:*

Sei  $Y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{1}_p & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{n}^-$ , dann ist die Abbildung

$\beta: \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}^-$ ,  $\beta(X) := [[X, Y], Y] + 2\omega_p([X, Y])Y$ , gegeben durch

$$X = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \beta(X) = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (\text{spur } A)\mathbb{1}_p - A & 0 \end{pmatrix}.$$

Sie ist somit bijektiv. Setzen wir  $v := Y^2 h$ , so zeigt eine kurze Rechnung, daß  $Xv = \beta(X)h$  gilt für alle  $X \in \mathfrak{n}$ . Insbesondere ist  $Xv \in \mathfrak{n}^- h$  für alle  $X \in \mathfrak{n}$ , woraus  $v \in N$  folgt.

Für  $X = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ist  $f(X^2 v) = 2p(p-1) \neq 0$ , also ist auch  $v \neq 0$ . Weil nun  $\beta$  bijektiv ist, folgt  $nv = \mathfrak{n}^- h$  und damit  $nv + N = (kf)$ .

2) Sind  $(p, q)$  und  $(p, q')$  nicht ausgeartet, so ist auch  $(p, q + q')$  nicht ausgeartet.

*Beweis:*

Für  $\lambda = (p, q + q')$  definieren wir  $A := \{\alpha \in \phi^+(\lambda) \mid \langle \omega_{p+q}, \alpha \rangle = 0\}$  und  $A' := \{\alpha \in \phi^+(\lambda) \mid \langle \omega_{p+q}, \alpha \rangle = 1\}$ . Dann ist  $\phi^+(\lambda) = A \dot{\cup} A'$  und  $A, A'$  sind nach Konstruktion unvermischt. Für die Unterwurzelsysteme  $\phi_1 = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{p+q-1} \rangle$ ,  $\phi_2 = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + \dots + \alpha_{p+q}, \alpha_{p+q+1}, \dots, \alpha_n \rangle$  von  $\phi$  gilt  $\lambda/\phi_1 = (p, q)$ ,  $\lambda/\phi_2 = (p, q')$ ,  $\phi_1^+(\lambda) = A$  und  $\phi_2^+(\lambda) = A'$ . Nach Voraussetzung sind also  $A$  und  $A'$  nicht ausgeartet und die Behauptung folgt mit 3.9.

3) Mit  $(p, q)$  ist auch  $(q, p)$  nicht ausgeartet, denn die beiden Darstellungen sind dual zueinander.

4)  $(p, 2)$ ,  $p$  gerade, ist nach 1) und 2) nicht ausgeartet.

5) Für  $p, q \geq 3$  ist  $(p, q)$  nicht ausgeartet.

Bew.: Wegen 3) sei o.E.  $p \geq q$ , der Beweis erfolgt durch Induktion nach der lexikographischen Ordnung der  $(p, q)$ . Induktionsschluß:

Sei  $p \geq 6$ , dann sind  $(p-3, q)$  und  $(q, 3)$  nicht ausgeartet, also auch  $(p, q)$  nach 2) und 3).

Zum Induktionsanfang bleiben die Fälle:

a)  $(3, 3)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(5, 5)$ : diese sind nach 1) nicht ausgeartet.

b)  $(5, 4)$ : ist mit  $(4, 2)$  und  $(4, 3)$  nicht ausgeartet (beachte 4) und c)).

c)  $(4, 3)$  und  $(5, 3)$ :

i)  $(4, 3)$  ist nicht ausgeartet:

Bew.: Hier ist  $\phi^+(\lambda) = \{\bar{ij} \mid 1 \leq i \leq 4, 5 \leq j \leq 7\}$ .

Sei  $I := \{(\overline{16}, \overline{25}), (\overline{27}, \overline{35}), (\overline{37}, \overline{46}), (\overline{17}, \overline{45})\}$ , dann gilt für  $\alpha, \beta \in \phi^+(\lambda)$  mit  $(\alpha, \beta) \in I$ :  $\alpha - \beta \notin \phi$ , sie erfüllen also die Voraussetzung 1) aus Lemma 3.5. Definieren wir nun  $v_{\alpha+\beta}$  wie in 3.5 und setzen  $v := \sum_{(\alpha, \beta) \in I} v_{\alpha+\beta}$ , so ist  $H(v)$  regulär.

ii)  $(5, 3)$  ist nicht ausgeartet:

Der Beweis ist analog zu dem für  $(4, 3)$  in i) mit

$$I := \{(\overline{16}, \overline{25}), (\overline{27}, \overline{45}), (\overline{27}, \overline{36}), (\overline{36}, \overline{45}), (\overline{47}, \overline{56}), (\overline{17}, \overline{55})\}.$$

## II. Die anderen Darstellungen:

$$\lambda = \sum_{i=1}^n r_i \omega_i \quad \text{mit} \quad r_i \in \{0, 1\}, \quad \sum_{i=1}^n r_i \geq 2.$$

Sei  $\delta := e_1 - e_{n+1} = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ , dann ist  $\delta$  dominante Wurzel mit  $\langle \lambda, \delta \rangle \geq 2$ , und  $\phi_\delta = \{\alpha \in \phi \mid \langle \alpha, \delta \rangle \text{ ist gerade}\}$  ist das von  $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \delta$  erzeugte Unterwurzelsystem. Das Hauptlemma läßt sich also anwenden, außer für die Fälle:

- |   |   |
|---|---|
| a) $\lambda = \omega_1 + \omega_2$                        | $\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & & & & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet \end{array}$         |
| b) $\lambda = \omega_2 + \omega_n$                        | $\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & & & 0 & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet \end{array}$       |
| c) $\lambda = \omega_1 + \omega_2 + \omega_n$             | $\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & & & 0 & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet \end{array}$       |
| d) $n$ gerade, $\lambda = \omega_1 + \omega_3$            | $\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \end{array}$     |
| e) $n$ gerade, $\lambda = \omega_3 + \omega_n$            | $\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \end{array}$     |
| f) $n$ gerade, $\lambda = \omega_1 + \omega_3 + \omega_n$ | $\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$ |

Beweis, daß die Gewichte in a)–f) nicht ausgeartet sind:

a)  $\lambda = \omega_1 + \omega_2$ :

Hier ist  $\phi^+(\lambda) = \{\bar{1i} \mid 2 \leq i \leq n+1\} \cup \{\bar{2i} \mid 3 \leq i \leq n+1\}$ .

Setze  $I := \{(\overline{12}, \overline{23}), (\overline{13}, \overline{13})\} \cup \{(\overline{1i}, \overline{2i}) \mid 4 \leq i \leq n+1\}$ , dann erfüllen die  $\alpha, \beta$  mit  $(\alpha, \beta) \in I$  die Voraussetzung 1 bzw. 2 aus Lemma 3.5. Wir definieren daher  $v := \sum_{(\alpha, \beta) \in I} v_{\alpha+\beta}$ ,  $v_{\alpha+\beta}$  wie in 3.5, um ein Element zu erhalten, für das  $H(v)$  maximalen Rang besitzt.

b)  $\lambda = \omega_2 + \omega_n$ :

Nun ist  $\phi^+(\lambda) = \{\bar{ij} \mid 1 \leq i \leq 2, 3 \leq j \leq n+1\} \cup \{\bar{i} \overline{n+1} \mid 3 \leq i \leq n\}$ .

Setzen wir  $A^1 := \{\alpha \in \phi^+(\lambda) \mid \langle \omega_2 + \omega_4, \alpha \rangle = 1\}$  und  $A^2 := \{\alpha \in \phi^+(\lambda) \mid \langle \omega_2 + \omega_4, \alpha \rangle = 0, 2\}$ , so sind  $A^1$  und  $A^2$  unvermischt und  $\phi^+(\lambda) = A^1 \dot{\cup} A^2$ .

i)  $A^1 = \{\overline{13}, \overline{14}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{3 \ n+1}, \overline{4 \ n+1}\}$  ist zulässig, denn mit  $I := \{(\overline{13}, \overline{24}), (\overline{13}, \overline{4 \ n+1}), (\overline{24}, \overline{3 \ n+1})\}$  und  $v := \sum_{(\alpha, \beta) \in I} v_{\alpha+\beta}$  ist  $H_{A^1}(v)$  regulär nach Lemma 3.5.

ii) Sei  $n = 4$ .

Dann ist  $\langle \lambda, \alpha \rangle = 2$  für alle  $\alpha \in A^2$ . Die  $2\alpha$ ,  $\alpha \in A^2$  erfüllen also Bed. 2 aus Lemma 3.5, für  $v := \sum_{\alpha \in A^2} v_{2\alpha}$  ist  $H_{A^2}(v)$  regulär, d.h.  $A^2$  ist zulässig.

iii) Ist  $n \geq 5$ , so betrachten wir das von  $\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n$  erzeugte Unterwurzelsystem  $\phi_0$ . Es gilt  $A^2 = \phi_0^+(\lambda/\phi_0)$ . Nun ist  $\phi_0$  vom Typ  $A_{n-2}$  und  $\lambda/\phi_0 = \omega_2 + \omega_{n-2}$  ist nach Induktion nicht ausgeartet. Also ist auch  $A^2$  zulässig.

iv) Nach i)–iii) sind  $A^1$  und  $A^2$  zulässig, die Behauptung folgt somit mit Lemma 3.9.

c)  $\lambda = \omega_1 + \omega_2 + \omega_n$ , und

d)  $n$  gerade,  $\lambda = \omega_1 + \omega_3$ :

Für beide definiere  $A^i := \{\alpha \in \phi^+(\lambda) \mid \langle \omega_i, \alpha \rangle = i\}$ ,  $i = 0, 1$ . Dann ist  $\phi^+(\lambda) = A^0 \cup A^1$  und  $A^0, A^1$  sind unvermischt.  $A^0$  ist zulässig, denn bezeichnen wir mit  $\phi_0$  das von  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  erzeugte Unterwurzelsystem, so ist  $\lambda/\phi_0$  nicht ausgeartet und  $A^0 = \phi_0^+(\lambda/\phi_0)$ . Die  $\alpha, \beta \in \phi$  mit  $(\alpha, \beta) \in I$ ,

$$I := \{(\overline{12}, \overline{13})\} \cup \{(\overline{1i}, \overline{1i}) \mid 4 \leq i \leq n+1\} \text{ in Fall c) bzw.}$$

$$I := \{(\overline{12}, \overline{14}), (\overline{13}, \overline{15})\} \cup \{(\overline{1i}, \overline{1i}) \mid 6 \leq i \leq n\} \text{ für d)}$$

erfüllen Voraussetzung 2 aus Lemma 3.5. Setzen wir  $v := \sum_{(\alpha, \beta) \in I} v_{\alpha+\beta}$ , wobei  $v_{\alpha+\beta}$  wie in 3.5 definiert ist, so ist  $H_{A^1}(v)$  regulär, d.h.  $A^1$  ist zulässig und die Behauptung folgt mit Lemma 3.9.

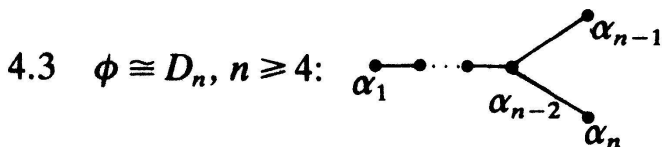
e)  $n$  gerade,  $\lambda = \omega_3 + \omega_n$ , und

f)  $n$  gerade,  $\lambda = \omega_1 + \omega_3 + \omega_n$ :

Diese beiden Fälle lassen sich analog wie c) und d) beweisen mit  $A^i := \{\alpha \in \phi^+(\lambda) \mid \langle \omega_i, \alpha \rangle = i\}$ ,  $i = 0, 1$  und

$$I := \{(\overline{14}, \overline{25}), (\overline{16}, \overline{27}), \dots, (\overline{1n}, \overline{2 \ n+1})\} \text{ für e),}$$

$$I := \{(\overline{12}, \overline{1 \ n+1}), (\overline{13}, \overline{2 \ n+1})\} \cup \{(\overline{1i}, \overline{2i}) \mid 4 \leq i \leq n\} \text{ für f).}$$



Wir identifizieren  $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  mit dem  $\mathbb{R}^n$ .

Positive Wurzeln:  $e_i + e_j, e_i - e_j, 1 \leq i < j \leq n$

Basis:  $\alpha_i = e_i - e_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1, \alpha_n = e_{n-1} + e_n$

Fundamentalgewichte:  $\omega_i = e_1 + \cdots + e_i$ ,  $1 \leq i \leq n-2$ ,  $\omega_{n-1} = \frac{1}{2}(e_1 + \cdots + e_{n-1} - e_n)$ ,  $\omega_n = \frac{1}{2}(e_1 + \cdots + e_{n-1} + e_n)$ .

I. Die Halbspindarstellungen  $\lambda = \omega_{n-1}$ ,  $\omega_n$ ,  $n \neq 5$ :

Beide Darstellungen gehen durch einen äußeren Automorphismus von  $G$  ineinander über. Daher sei o.E.  $\lambda = \omega_n$ .

Dann ist  $\phi^+(\lambda) = \{e_i + e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ .

a) Für gerades  $n$  ist die Halbspindarstellung nicht ausgeartet:

*Beweis:*

Wir identifizieren die Liealgebra mit

$$\mathfrak{g} = \{X \in M_{2n}(k) \mid X^t M = -MX\}, \text{ wobei } M := \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich geeigneter Basiswahl hat dann  $\mathfrak{n}$  die Form

$$\mathfrak{n} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subset \mathfrak{g}.$$

$$\text{Mit } Y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ J & 0 \end{pmatrix}, \quad J := \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & -1 & 0 \\ 0 & & 0 & -1 \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right\} \frac{n}{2}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{n}{2}}$

ist die Abbildung  $\beta: \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}^-$ ,  $\beta(X) := [[X, Y], Y] + 2\omega_n([X, Y])$ , bijektiv.

Setze  $v := Y^2 h$ , dann ist  $Xv = \beta(X)h$  für alle  $X \in \mathfrak{n}^-$ , insbesondere ist  $v \in N$ .

Für  $X = \begin{pmatrix} 0 & J \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ist  $f(X^2 v) = 2n(n-1) \neq 0$ , also ist  $v \neq 0$  und  $nv = n^- h$  (vgl. 4.1.I.1)).

b)  $n$  sei ungerade,  $n \neq 5$ , dann ist  $\omega_n$  nicht ausgeartet.

*Beweis:*

Definieren wir  $A^i := \{\alpha \in \phi^+(\lambda) \mid \langle \omega_3, \alpha \rangle = i\}$ ,  $i = 0, 1, 2$ , dann ist  $\phi^+(\lambda) = A^0 \dot{\cup} A^1 \dot{\cup} A^2$ . Für die Unterwurzelsysteme  $\phi_0 := \{\alpha_4, \dots, \alpha_n\}$ ,  $\phi_1 := \{\alpha_1, \alpha_2, e_3 + e_4, -\alpha_4, \dots, -\alpha_{n-1}\}$  und  $\phi_2 := \{\alpha_1, \alpha_2, e_3 + e_4, \alpha_3\}$  ist  $\lambda/\phi_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , nicht ausgeartet und  $A^i = \phi_i^+(\lambda/\phi_i)$ . Somit sind die  $A^i$  zulässig. Wählen wir nun  $v_i$  mit  $\text{Rang } H_{A^i}(v_i)$  maximal und setzen  $v := x_0 v_0 + x_1 v_1 +$

$x_2 v_2$ , dann hat  $H(v)$  die Form

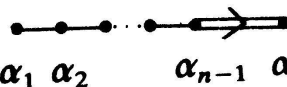
$$\left( \begin{array}{cc|c} x_0 H_{A^0}(v_0) & x_1 B & 0 \\ x_1 B^t & x_2 H_{A^2}(v_2) & 0 \\ \hline 0 & 0 & x_1 H_{A^1}(v_1) \end{array} \right)$$

mit geeignetem  $B$ . Wähle  $x_1 \neq 0$  so, daß  $\det H(v) \neq 0$ .

II. Die übrigen Fälle  $\lambda = \sum_{i=1}^n r_i \omega_i$ ,  $\lambda \neq \omega_n$ ,  $\omega_{n-1}$ :

Für  $\delta = 2e_1$  ist  $\langle \lambda, \delta \rangle = r_1 + \dots + r_{n-2} + \frac{1}{2}(r_{n-1} + r_n) \geq 1$ , und  $\phi_\delta = \{\alpha \in \phi \mid \langle \alpha, \delta \rangle \text{ ist gerade}\}$  ist das von  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  erzeugte Unterwurzelsystem. Somit ist  $\lambda/\phi_\delta$  und damit nach dem Hauptlemma auch  $\lambda$  nicht ausgeartet, außer für  $n = 6$ ,  $\lambda = \omega_1 + \omega_6$ .

In diesem Fall sei  $\delta = e_1 + e_2$  die dominante Wurzel. Dann ist  $\langle \lambda, \delta \rangle = 2$ , und  $\phi$  ist das von  $\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_6$  erzeugte Unterwurzelsystem. Nach I. a) und Lemma 3.3 ist  $\lambda/\phi_\delta$  nicht ausgeartet und das Hauptlemma ist anwendbar.

4.4  $\phi \cong B_n$ ,  $n \geq 2$ : 

Wir identifizieren  $\chi(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  wieder mit dem  $\mathbb{R}^n$ .

Positive Wurzeln:  $e_i \pm e_j$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ ,  $e_i$ ,  $1 \leq i \leq n$

Basis:  $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $\alpha_n = e_n$

Fundamentalgewichte:  $\omega_i = e_1 + \dots + e_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ ,

$$\omega_n = \frac{1}{2}(e_1 + \dots + e_n).$$

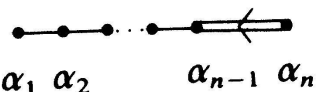
I. Die Spindarstellungen  $\lambda = \omega_n$ ,  $n \neq 2, 4$ :

Die Inklusion  $SO_{2n+1} \subset SO_{2n+2}$  induziert einen Isomorphismus  $\mathfrak{n}_{2n+1} \cong \mathfrak{n}_{2n+2}$ , und die Räume der Spinoren sind isomorph als  $\mathfrak{n}$ - und  $\mathfrak{n}^-$ -Moduln. Mit den Halbspindarstellungen (4.3.I.) sind also auch die Spindarstellungen nicht ausgeartet.

II. Die übrigen Fälle:

Mit  $\delta = 2e_1$  läßt sich das Hauptlemma immer anwenden außer für die Fälle  $\lambda = \omega_1 + \omega_n$ ,  $n = 2, 3, 5$ . Hierfür setze  $\delta = e_1 + e_2$ . Dann ist  $\delta$  eine dominante Wurzel mit  $\langle \lambda, \delta \rangle = 2$ . Mit 3.3 und 3.7 ist  $\lambda/\phi_\delta$  nicht ausgeartet für  $n = 2, 3$ . Für  $n = 5$  ist  $\lambda/\phi_\delta$  nicht ausgeartet wegen 3.3 und I. Nach dem Hauptlemma ist also auch  $\lambda$  nicht ausgeartet.



4.5  $\phi \cong C_n, n \geq 3$ : 

Wiederum ist  $\chi(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$ .

Positive Wurzeln:  $e_i \pm e_j, 1 \leq i < j \leq n, 2e_i, 1 \leq i \leq n$

Basis:  $\alpha_i = e_i - e_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1, \alpha_n = 2e_n$

Fundamentalgewichte:  $\omega_i = e_1 + \dots + e_i, 1 \leq i \leq n$ .

- I. Für  $\lambda = \sum_{i=1}^n r_i \omega_i$  mit  $r_i \in \{0, 1\}, \sum_{i=1}^n r_i \geq 2, \lambda \neq \omega_1 + \omega_2$  läßt sich das Hauptlemma mit der langen dominanten Wurzel  $\delta = 2e_1$  anwenden.
- II. Bei  $\lambda = \omega_2, \omega_4, \dots, \omega_n, \omega_1 + \omega_2$  oder  $\lambda = \omega_3, n = 3, 4$  wenden wir das Hauptlemma mit der kurzen dominanten Wurzel  $\delta = e_1 + e_2$  an.
- III. Es bleibt der Fall  $\lambda = \omega_3, n \geq 5$ :

Hier ist  $\phi^+(\lambda) = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i \leq 3, 4 \leq j \leq n\} \cup \{e_i + e_j \mid 1 \leq i \leq 3, i \leq j \leq n\}$ .

Diese Menge teilen wir wie folgt ein:

$$A^1 := \{\alpha \in \phi^+(\lambda) \mid (\lambda, \alpha) = 1, (\omega_n, \alpha) = 0\}$$

$$A^2 := \{\alpha \in \phi^+(\lambda) \mid (\lambda, \alpha) = 1, (\omega_n, \alpha) = 2\}$$

$$A^3 := \{\alpha \in \phi^+(\lambda) \mid (\lambda, \alpha) = 2, (\omega_n, \alpha) = 2\}$$

Nach Konstruktion ist  $\phi^+(\lambda) = A^1 \dot{\cup} A^2 \dot{\cup} A^3$ , und die  $A^i$  sind unvermischt. Für die Unterwurzelsysteme

$$\phi_1 := \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \rangle,$$

$$\phi_2 := \langle \alpha_1, \alpha_2, e_3 + e_n, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_4 \rangle \text{ und}$$

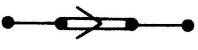
$$\phi_3 := \langle \alpha_1, \alpha_2, 2e_3 \rangle \text{ gilt } A^i = \phi_i^+(\lambda/\phi_i).$$

Ist nun  $n > 5$ , so ist  $\lambda/\phi_i$  nicht ausgeartet für  $i = 1, 2, 3$ , somit sind die  $A^i$  zulässig und  $\lambda$  ist nicht ausgeartet nach Lemma 3.9.

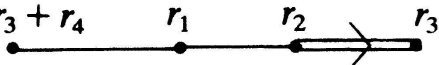
Für  $n = 5$  ist  $\lambda/\phi_3$  immer noch nicht ausgeartet, d.h.  $A^3$  ist zulässig.

Sei  $I := \{(e_2 - e_5, e_3 + e_4), (e_1 - e_4, e_2 + e_5), (e_1 - e_4, e_3 + e_4)\}$ , dann ist  $\alpha - \beta \notin \phi$  für alle  $\alpha, \beta$  mit  $(\alpha, \beta) \in I$ .

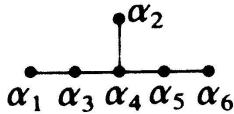
Definieren wir  $v_{\alpha+\beta}$  wie in Lemma 3.5 und setzen  $v := \sum_{(\alpha, \beta) \in I} v_{\alpha+\beta}$ , so ist  $H_{A^1 \cup A^2}(v)$  regulär, also ist auch  $A^1 \cup A^2$  zulässig und  $\lambda$  ist nach Lemma 3.9 nicht ausgeartet.

4.6  $\phi \cong F_4$ :   
 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4$

Sei  $\lambda = \sum_{i=1}^4 r_i \omega_i$  mit  $r_i \in \{0, 1\}$ . Für die höchste kurze Wurzel  $\delta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = \omega_4$  gilt  $\langle \lambda, \delta \rangle = 2r_1 + 4r_2 + 3r_3 + 2r_4 \geq 2$ , und  $\phi_\delta$  ist vom Typ  $B_4$ . Nun hat  $\lambda/\phi_\delta$  die Form:

$\lambda/\phi_\delta$ :   
 $\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$

ist also nach 4.4 nicht ausgeartet und das Hauptlemma kann angewendet werden.

4.7  $\phi \cong E_6$ :   
 $\alpha_1 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6$

Hier ist  $\chi(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \{(x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{R}^8 \mid x_6 = x_7 = -x_8\}$ .

Positive Wurzeln:  $\pm e_i + e_j$ ,  $1 \leq i < j \leq 5$ ,

$$\frac{1}{2} \left( e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{i=1}^5 (-1)^{\beta(i)} e_i \right) \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^5 \beta(i) \text{ gerade}$$

Basis:  $\alpha_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_8) - \frac{1}{2}(e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7)$ ,

$$\alpha_2 = e_1 + e_2, \quad \alpha_i = e_{i-1} - e_{i-2}, \quad 3 \leq i \leq 6$$

I. Ist  $\lambda \neq \omega_1, \omega_6, \omega_1 + \omega_2, \omega_2 + \omega_6$ , läßt sich das Hauptlemma mit der höchsten Wurzel  $\delta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6$  anwenden. Denn ist  $\lambda = \sum_{i=1}^6 r_i \omega_i$  mit  $r_i \in \{0, 1\}$ , so ist  $\langle \lambda, \delta \rangle = r_1 + 2r_2 + 2r_3 + 3r_4 + 2r_5 + r_6 \geq 2$ , und  $\phi_\delta = \{\alpha \in \phi \mid \langle \alpha, \delta \rangle \text{ ist gerade}\}$  ist das von  $\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_6, \delta$  erzeugte Unterwurzelsystem und hat den Typ  $A_5 \times A_1$ .

II. Die Gewichte  $\omega_1$  und  $\omega_6$  sind nicht ausgeartet.

*Beweis:* Beide Darstellungen sind dual zueinander, daher sei o.E.  $\lambda = \omega_1$ . Betrachte die Unterwurzelsysteme

$$\phi_0 := \{\alpha \in \phi \mid \langle \omega_6, \alpha \rangle = 0\} \quad \text{und} \quad \phi_1 := \{\alpha \in \phi \mid \langle \omega_1, \alpha \rangle = \langle \omega_6, \alpha \rangle\}.$$

Beide sind vom Typ  $D_5$ ,  $\phi_0$  wird erzeugt von  $\alpha_1, \dots, \alpha_5$  und  $\phi_1$  von  $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ . Wegen 4.3 ist nun  $\lambda/\phi_i$ ,  $i = 0, 1$ ,

nicht ausgeartet, also sind die  $A^i := \phi^+(\lambda/\phi_i)$  zulässig. Wie man leicht sieht gilt  $A^i = \{\alpha \in \phi^+(\lambda) \mid \langle \omega_6, \alpha \rangle = i\}$  für  $i = 0, 1$ . Daher sind die  $A^i$  auch unvermischt und die Behauptung folgt mit 3.9.

III.  $\omega_1 + \omega_2$  und  $\omega_2 + \omega_6$  sind nicht ausgeartet.

*Beweis:* Es genügt zu zeigen, daß  $\lambda = \omega_1 + \omega_2$  nicht ausgeartet ist. Nun ist

$$\phi^+(\lambda) = \{e_i + e_j \mid 1 \leq i < j \leq 5\} \cup \left\{ \frac{1}{2} \left( e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{i=1}^5 (-1)^{\beta(i)} e_i \right) \right\}.$$

$$\text{Sei } A^1 := \{\alpha \in \phi^+(\lambda) \mid \langle \lambda, \alpha \rangle = 1\}$$

$$= \{e_i + e_j \mid 1 \leq i < j \leq 5\} \cup \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_5\}$$

$$\text{mit } \beta_i = \frac{1}{2}(e_8 - e_1 - \dots - e_7) + e_i, \quad 1 \leq i \leq 5,$$

$$\text{und } A^2 := \{\alpha \in \phi^+(\lambda) \mid \langle \lambda, \alpha \rangle \geq 2\}.$$

Für die  $\alpha, \beta$  mit  $(\alpha, \beta) \in I$ , wobei

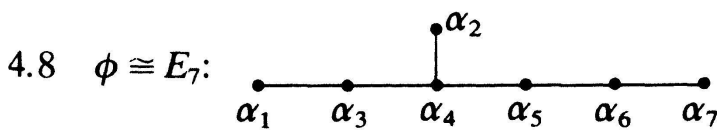
$$I := \{(e_1 + e_2, e_3 + e_4), (\beta_1, e_2 + e_5), (\beta_3, e_4 + e_5)\} \subset A^1 \times A^1,$$

gilt  $\alpha - \beta \notin \phi$ , und für  $\alpha \in A^2$  ist  $\lambda - 2\alpha$  Gewicht von  $V$ .

Definieren wir  $v := \sum_{(\alpha, \beta) \in I} v_{\alpha+\beta} + \sum_{\alpha \in A^2} v_{2\alpha}$  mit  $v_{\alpha+\beta}$  wie in Lemma 3.5, dann hat  $H(v)$  die Form

$$H(v) = \left( \begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & D \end{array} \right) \begin{matrix} A^1 \\ A^2 \end{matrix}$$

mit einer regulären Matrix  $M$  und einer regulären Diagonalmatrix  $D$ .



Ist  $\lambda = \sum_{i=1}^7 r_i \omega_i$  mit  $r_i \in \{0, 1\}$  und  $\delta = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 = \omega_1$  die höchste Wurzel, so gilt

$$\langle \lambda, \delta \rangle = 2r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 + 3r_5 + 2r_6 + r_7.$$

Weiterhin ist  $\phi_\delta = \{\alpha \in \phi \mid \langle \alpha, \delta \rangle \text{ ist gerade}\}$  das von  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_7, \delta$  erzeugte Unterwurzelsystem und hat den Typ  $D_6 \times A_1$ .

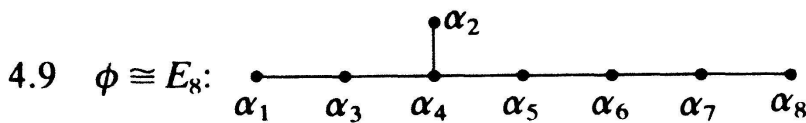
Für  $\lambda \neq \omega_7$  ist  $\langle \lambda, \delta \rangle \geq 2$  und wir können das Hauptlemma anwenden.

Für  $\lambda = \omega_7$  betrachten wir die Unterwurzelsysteme

$$\phi_0 := \{\alpha \in \phi \mid \langle \omega_1, \alpha \rangle \text{ ist gerade} \} = \langle \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_7, \delta \rangle$$

$$\phi_1 := \{\alpha \in \phi \mid \langle \omega_1, \alpha \rangle = \langle \omega_7, \alpha \rangle \} = \langle \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_7, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_6 \rangle$$

$\phi_0$  hat den Typ  $D_6 \times A_1$ ,  $\phi_1$  hat den Typ  $E_6$ . Somit ist  $\lambda/\phi_i$  nicht ausgeartet, d.h. die  $A^i := \phi_i^+(\lambda/\phi_i)$  sind zulässig für  $i=0, 1$ . Wie man leicht sieht, gilt  $A^i = \{\alpha \in \phi^+(\lambda) \mid \langle \omega_1, \alpha \rangle \equiv i \pmod{2}\}$ , insbesondere ist  $\phi^+(\lambda) = A^0 \dot{\cup} A^1$  und die  $A^i$  sind unvermischt. Also ist nach Lemma 3.9  $\lambda = \omega_7$  nicht ausgeartet.



$\delta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8 = \omega_8$  sei die höchste Wurzel. Dann gilt immer  $\langle \lambda, \delta \rangle \geq 2$  und  $\phi_\delta$  ist das von  $\alpha_1, \dots, \alpha_7, \delta$  erzeugte Unterwurzelsystem. Dieses hat den Typ  $E_7 \times A_1$ , also ist  $\lambda/\phi_\delta$  nie ausgeartet und wir können das Hauptlemma anwenden.

#### 4.10 Beweis von Satz 2.2:

Wegen 3.2, 3.7 und 4.1 bleibt zu zeigen:

Ist  $\lambda = \sum_{i=1}^n r_i \omega_i$  mit  $r_i \in \mathbb{N}$ , und existieren  $l, s$  mit  $r_l = 1$  und  $r_s \geq 2$ , so ist  $\lambda$  nicht ausgeartet.

Hierfür sei  $\lambda_1 := \sum_{r_i \neq 0} \omega_i$  und  $\lambda_2 := \lambda - \lambda_1$ . Dann ist  $\lambda_1$  nach 4.1 nicht ausgeartet und  $\phi^+(\lambda) = \phi^+(\lambda_1)$ . Für  $i = 1, 2$  sei nun  $V_i$  ein irreduzibler Modul mit höchstem Gewicht  $\lambda_i$  und  $f_i, h_i$  wie in 3.1 definiert. Da  $\lambda_1$  nicht ausgeartet ist, existiert ein  $v_1 \in \check{\mathfrak{g}}f_1 \subset V_1$  mit  $H_{\phi^+(\lambda_1)}(v_1)$  regulär.

Betrachten wir nun die Projektion  $\text{pr}: V_1 \otimes V_2 \rightarrow V$ , so sei  $v := \text{pr}(v_1 \otimes h_2)$  und eine kurze Rechnung zeigt  $v \in \check{\mathfrak{g}}f = N$ . Weiterhin gilt für alle  $X, Y \in \mathfrak{n}$ :

$$f(XYv) = f_1(XYv_1) \cdot f_2(h_2),$$

also ist  $H_{\phi^+(\lambda)}(v) = f_2(h_2) \cdot H_{\phi^+(\lambda_1)}(v_1)$  regulär.

#### LITERATUR

- [B] N. BOURBAKI: "Groupes et algèbres de Lie" Chapitres 7 et 8. Hermann, Paris 1975.
- [H] A. HOLME: "On the dual of a smooth variety" in: Algebraic Geometry, Proceedings, Copenhagen 1978, herausgegeben von K. Lønsted. Springer Lecture Notes 732, 1979, 144–156.

- [H–K] A. HEFEZ—S. L. KLEIMAN: “Notes on the duality of projective varieties” in: Geometry of Today, Giornate di Geometria, Roma 1984, herausgegeben von E. Arabello, C. Procesi, E. Strickland. Birkhäuser PM 60, Boston 1985, 143–183.
- [K] N. KATZ: “Pinceaux de Lefschetz: théorème d’existence” in: SGA 7 II, Exposé XVII. Springer Lecture Notes 340, 1973, 212–253.

*Mathematisches Institut  
Rheinsprung 21  
CH-4051 Basel*

Erhalten, 17. Februar 1986