

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 62 (1987)

**Artikel:** Fibrés algébriques sur une surface réelle.  
**Autor:** Barge, Jean / Ojanguren, Manuel  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-47365>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**Fibrés algébriques sur une surface réelle**

JEAN BARGE et MANUEL OJANGUREN

Soit  $A$  un anneau régulier de dimension 2.

Dans ce travail, nous construisons d'abord explicitement un homomorphisme surjectif  $\rho$  du groupe de Witt  $W^f(A)$  des espaces symétriques de longueur finie sur  $A$  dans le groupe de Witt  $W^-(A)$  des espaces antisymétriques. L'existence de  $\rho$  nous était garantie par la théorie générale développée dans [BSV] et dans [P<sub>3</sub>]. Ensuite, nous déterminons le noyau de  $\rho$  – et donc  $W^-(A)$  – lorsque  $A$  est l'anneau des coordonnées d'une surface affine, réelle, compacte  $S$ . Le résultat est étonnant (ou, du moins, nous étonne): à un 2-groupe élémentaire près,  $W^-(A)$  est un invariant topologique de  $S$ . Le groupe  $W^-(A)/2W^-(A)$  avait déjà été déterminé dans [P<sub>1</sub>] et dans [OPS].

Les classes d'isomorphisme des fibrés algébriques orientés de rang 2 sur  $S$  forment un groupe que l'on calcule en termes de  $W^-(A)$  et de  $K_0(A)$ . Nous obtenons, par exemple, pour  $A = \mathbb{R}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1)$  – c'est-à-dire  $S = S^2$  – que deux  $A$ -modules projectifs de rang 2 sont isomorphes si et seulement si les fibrés vectoriels topologiques correspondants le sont.

Nous remercions Michele Cipolla de son invitation à l'Université de Palerme, où ce travail a été rédigé, et son épouse Rita pour son hospitalité. Nous remercions Margherita Galbiati, Michel Kervaire, Gilbert Levitt et John Morgan de leurs suggestions et de l'intérêt qu'ils ont montré pour ce travail.

Barge remercie le Fonds National Suisse de lui avoir offert une heureuse année à l'Université de Genève.

**CHAPITRE I**

Dans ce chapitre  $A$  est un anneau commutatif unitaire noethérien régulier de dimension 2. Tous les  $A$ -modules considérés sont de type fini.

Si  $P$  est un  $A$ -module projectif, on note  $P^* = \text{Hom}_A(P, A)$  son dual. Si  $M$  est un  $A$ -module de longueur finie, on note  $\hat{M}$  le  $A$ -module  $\text{Ext}_A^2(M, A)$ .

Soit  $M$  un  $A$ -module de longueur finie et soit

$$0 \rightarrow P_2 \xrightarrow{\iota} P_1 \xrightarrow{s} P_0 \rightarrow M \rightarrow 0 \tag{R}$$

une résolution projective de  $M$ . On note  $D(R)$  la suite

$$0 \rightarrow P_0^* \xrightarrow{-s^*} P_1^* \xrightarrow{t^*} P_2^* \rightarrow \hat{M} \rightarrow 0.$$

C'est une résolution projective de  $\hat{M}$  et, en redualisant, on obtient le diagramme commutatif ci-dessous où les flèches verticales sont les identifications canoniques. Elles induisent l'isomorphisme  $j: M \rightarrow \hat{M}$  qu'on vérifie être indépendant de la résolution projective  $(R)$ .

$$\begin{array}{ccccccc} (R) & 0 \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{t} & P_1 & \xrightarrow{s} & P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow i & & \downarrow -i & & \downarrow i \\ D^2(R) & 0 \longrightarrow & P_2^{**} & \xrightarrow{-t^{**}} & P_1^{**} & \xrightarrow{-s^{**}} & P_0^{**} \longrightarrow \hat{M} \longrightarrow 0 \end{array}$$

L'isomorphisme  $j$  se décrit de la façon suivante. Soit  $m \in M$ . Choisissons  $p_0 \in P_0$  au-dessus de  $m$ . Le "push-out" de  $D(R)$  par  $p_0 \in \text{Hom}_A(P_0^*, A)$  est une extension de  $\hat{M}$  par  $A$ . C'est  $j(m)$ .

## 1. Le groupe de Witt antisymétrique de $A$

Un espace alterné sur  $A$  est un couple  $(P, \Psi)$  où  $P$  est un  $A$ -module projectif et  $\Psi$  un isomorphisme antisymétrique ( $\Psi = -\Psi^* \circ i$ ) de  $P$  sur  $P^*$ .

Un espace alterné  $(P, \Psi)$  est neutre s'il existe un sous-module  $Q$  facteur direct de  $P$  (et donc projectif) qui est égal à son orthogonal.

Le groupe de Witt antisymétrique de  $A$ , que l'on note  $W^-(A)$ , est le quotient du monoïde (pour la somme orthogonale) engendré par les classes d'isométrie d'espaces alternés, par le sous-monoïde engendré par celles des neutres. C'est un groupe abélien. On note  $[P, \Psi]$  la classe de  $(P, \Psi)$  dans  $W^-(A)$ . L'opposé de  $[P, \Psi]$  est  $[P, -\Psi]$ .

Pour tout  $A$ -module projectif  $P$  on note  $H(P)$  l'espace symétrique  $(P \oplus P^*, h)$ , où  $h(p \oplus f, q \oplus g) = f(q) - g(p)$ . Il est neutre.

## 2. Le groupe de Witt des $A$ -modules de longueur finie

Soient  $M$  un  $A$ -module de longueur finie et  $\phi$  un isomorphisme symétrique ( $\phi = \hat{\phi} \circ j$ ) de  $M$  sur  $\hat{M}$ .

Un tel couple  $(M, \phi)$  est neutre s'il existe un sous-module  $N$  de  $M$  égal à son orthogonal, c'est-à-dire tel que  $N = \phi^{-1}(\ker \hat{i})$  où  $i = N \rightarrow M$  est l'inclusion.

Le groupe de Witt des  $A$ -modules de longueur finie, que l'on note  $W'^f(A)$  est le quotient du monoïde (pour la somme orthogonale) engendré par les classes d'isométries des couples  $(M, \phi)$ , par le sous-monoïde engendré par celles des

neutres. C'est un groupe abélien. On note  $[M, \phi]$  la classe de  $(M, \phi)$  dans  $W^{lf}(A)$ . L'opposé de  $[M, \phi]$  est  $[M, -\phi]$ .

Nous rappelons maintenant le calcul de  $W^{lf}(A)$ .

Supposons d'abord  $A$  local, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  et de corps résiduel  $A/\mathfrak{m} = k(\mathfrak{m}) = k$ .

Le choix d'un générateur  $\xi$  du groupe  $\text{Ext}_A^2(k, A)$  fournit, pour tout  $k$ -espace vectoriel  $E$ , un isomorphisme  $j_\xi : E^* \rightarrow \hat{E}$  qui associe à  $f \in E^*$  le “pull-back” de  $\xi$  par  $f$ .

**PROPOSITION 2.1.** *L'application qui, à tout espace symétrique  $(E, b)$ , associe le couple  $(E, j_\xi \circ b)$  induit un isomorphisme*

$$i_\xi : W(k) \xrightarrow{\sim} W^{lf}(A).$$

*De plus, si  $\xi = c^2\eta$  pour un  $c \in k^*$ ,  $i_\xi = i_\eta$ .*

*Preuve.* Voir [P<sub>3</sub>].

Soit de nouveau  $A$  global et soit  $\mathcal{M}$  l'ensemble de ses idéaux maximaux. La décomposition d'un module de longueur finie en composantes primaires (nécessairement orthogonales pour toute forme  $\phi$ ) fournit un isomorphisme

$$W^{lf}(A) \cong \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}} W^{lf}(A_{\mathfrak{m}}).$$

On obtient alors:

**PROPOSITION 2.2.** *Pour chaque  $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}$  choisissons un générateur  $\xi(\mathfrak{m})$  de  $\text{Ext}_A^2(k(\mathfrak{m}), A)$ . L'homomorphisme*

$$\bigoplus_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}} i_{\xi(\mathfrak{m})} : \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}} W(k(\mathfrak{m})) \rightarrow W^{lf}(A)$$

*est un isomorphisme.*

### 3. Construction de $\rho : W^{lf}(A) \rightarrow W^-(A)$

Soient  $M$  un  $A$ -module de longueur finie et  $Q$  un  $A$ -module projectif. L'accouplement

$$\cup : \text{Ext}_A^2(M, Q^*) \times Q \rightarrow \text{Ext}_A^2(M, A)$$

qui consiste à faire le “push-out” induit un isomorphisme

$$\theta : \mathrm{Ext}_A^2(M, Q^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(Q, \hat{M})$$

(évident pour  $Q = A$ ). Soient alors  $\alpha : P \rightarrow M$  un homomorphisme surjectif d'un module projectif  $P$  sur  $M$  et  $\beta : Q \rightarrow \hat{M}$  un homomorphisme quelconque d'un module projectif  $Q$  dans  $\hat{M}$ . On note  $e(\alpha, \beta)$  l'“unique” suite exacte

$$0 \longrightarrow Q^* \xrightarrow{\iota} K(\alpha, \beta) \xrightarrow{s} P \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0$$

qui représente  $\theta^{-1}(\beta)$  et qui se termine par  $P \xrightarrow{\alpha} M$ .

Dans la suite, nous utiliserons systématiquement la caractérisation de  $e(\alpha, \beta)$  par les deux propriétés suivantes:

- (i) pour tout  $q \in Q$ , on a  $e(\alpha, \beta) \cup q = \beta(q)$
- (ii)  $e(\alpha, \beta)$  se termine par  $P \xrightarrow{\alpha} M$ .

**PROPOSITION 3.1.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- (i)  $\beta$  est surjectif
- (ii)  $K(\alpha, \beta)$  est projectif.

*Preuve.* Le conoyau de  $\beta$  s'identifie à  $\mathrm{Ext}_A^1(K(\alpha, \beta), A)$ .

Nous supposerons dorénavant  $\beta$  surjectif. La suite  $e(\alpha, \beta)$  est alors une résolution projective de  $M$ .

**PROPOSITION 3.2.**  $D(e(\alpha, \beta)) = e(\beta, j \circ \alpha)$ .

*Preuve.* La formule  $e(\alpha, \beta) \cup q = \beta(q)$  montre que  $D(e(\alpha, \beta))$  se termine par  $Q \xrightarrow{\beta} \hat{M}$ . En utilisant la description de  $j$  donnée au début, on voit que, pour tout  $p \in P$ ,  $j(\alpha(p)) = D(e(\alpha, \beta)) \cup p$ .

**THEOREME 3.3.** *Soient  $\phi : M \rightarrow \hat{M}$  un isomorphisme symétrique,  $P$  un  $A$ -module projectif et  $\alpha : P \rightarrow M$  une surjection. Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\alpha} & M \\ \parallel & & \downarrow \phi \\ P & \xrightarrow{\beta} & \hat{M} \end{array}$$

où  $\beta = \phi \circ \alpha$ , se complète en

$$\begin{array}{ccccccc} e(\alpha, \beta) & 0 \longrightarrow P^* \xrightarrow{t} K(\alpha, \beta) \xrightarrow{s} P \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0 \\ & \parallel & \downarrow \Psi & \parallel & & \downarrow \phi \\ D(e(\alpha, \beta)) & 0 \longrightarrow P^* \xrightarrow{-s^*} K(\alpha, \beta)^* \xrightarrow{t^*} P \xrightarrow{\beta} \hat{M} \longrightarrow 0 \end{array}$$

où  $\Psi$  est un isomorphisme antisymétrique. De plus, le couple  $(K(\alpha, \beta), \Psi)$  est unique à isométrie près. On note  $f(\alpha, \phi)$  sa classe d'isométrie.

LEMME 3.4. Pour tout  $\phi : M \rightarrow \hat{M}$ ,

$$\phi^*(D(e(\alpha, \phi \circ \alpha))) = e(\alpha, \hat{\phi} \circ j \circ \alpha).$$

Preuve. On calcule  $[\phi^*(D(e(\alpha, \phi \circ \alpha)))] \cup p$  pour tout  $p \in P$ . Comme le “pull-back” et le “push-out” commutent, on trouve

$$\begin{aligned} \phi^*[D(e(\alpha, \phi \circ \alpha)) \cup p] &= \phi^*[e(\beta, j \circ \alpha) \cup p] && (\text{Prop. 3.2}) \\ &= \phi^*[j \circ \alpha(p)] = \hat{\phi} \circ j \circ \alpha(p). \end{aligned}$$

D'autre part, il est clair que  $\phi^*(D(e(\alpha, \phi \circ \alpha)))$  se termine par  $\alpha$ .

Preuve du Théorème 3.3. Puisque  $\phi = \hat{\phi} \circ j$ , il résulte du lemme 3.4 l'existence du diagramme annoncé, à ceci près que  $\Psi$  n'est pas nécessairement antisymétrique. En redualisant, on s'aperçoit que  $\Psi + \Psi^*$  à défaut d'être nul est de la forme  $-s^* \circ f \circ s$  pour un certain  $f \in \text{Hom}_A(P, P^*)$ . De plus, ce  $f$  symétrique est, comme  $\Psi + \Psi^*$ , pair. Il s'écrit donc  $g + g^*$ . On remplace alors  $\Psi$  par  $\Psi + s^* \circ g \circ s$ . Ceci montre l'existence du diagramme annoncé.

L'unicité est de la même veine.

Remarque 3.5. Soit  $I$  un idéal de hauteur 2 de  $A$ . La donnée d'un  $\phi : A/I \rightarrow \widehat{A/I}$  est alors équivalente au choix d'un générateur  $\phi(1) = \xi$  de  $\widehat{A/I}$ . On pose  $f(\xi) = f(\pi, \xi)$  où  $\pi : A \rightarrow A/I$  est la surjection canonique. La construction dans ce cas est bien connue ([MS], [P<sub>1</sub>], [S]).

THEOREME 3.6. La correspondance  $(M, \phi) \mapsto f(\alpha, \phi)$  pour n'importe quel  $\alpha$  définit un homomorphisme  $\rho : W^{lf}(A) \rightarrow W^-(A)$ .

LEMME 3.7. Soient  $\alpha_i : P_i \rightarrow M$ ,  $i = 1, 2$ , deux surjections. Alors  $f(\alpha_1, \phi) \oplus f(\alpha_2, -\phi)$  est neutre.

*Preuve.* Par (i) et (ii),  $e(\alpha_1, \phi \circ \alpha_1) \oplus e(\alpha_2, -\phi \circ \alpha_2) = e(\alpha_1, -\phi \circ \alpha_2) \oplus e(\alpha_2, \phi \circ \alpha_1)$ . On vérifie que le facteur direct  $K(\alpha_1, -\phi \circ \alpha_2)$  de  $f(\alpha_1, \phi) \oplus f(\alpha_2, -\phi)$  est son propre orthogonal.

**LEMME 3.8.** *Soit  $(M, \phi)$  un couple neutre. Il existe une surjection  $\alpha: P \rightarrow M$  telle que  $f(\alpha, \phi)$  soit neutre.*

*Preuve.* Soit  $N$  un sous-module de  $M$  égal à son propre orthogonal. Recouvrions la suite exacte  $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$  par une suite exacte  $0 \rightarrow P_N \rightarrow P_M \rightarrow P_{M/N} \rightarrow 0$  de modules projectifs. On obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & P_N & \longrightarrow & P_M & \longrightarrow & P_{M/N} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha_N & & \downarrow \alpha_M & & \downarrow \alpha_{M/N} \\
 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & M & \longrightarrow & M/N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \beta_{M/N} & & \downarrow \beta_M & & \downarrow \beta_N \\
 & & \widehat{M}/N & \longrightarrow & \widehat{M} & \xrightarrow{i} & \widehat{N} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

On vérifie que le sous-module  $K(\alpha_N, \beta_N)$  de  $f(\alpha_M, \phi)$  est une facteur direct égal à son orthogonal.

**THEOREME 3.9.** *L'homomorphisme  $\rho$  est surjectif.*

*Preuve.* D'après [OPS, Cor. 1.3], tout élément de  $W^-(A)$  est la classe d'un  $(P, \Psi)$  où  $P$  est de rang 2. D'après [J, page 102], il existe une “section générique”, c'est-à-dire un  $x \in P$  tel que l'idéal de  $A$   $I = \{\Psi(x, y) \mid y \in P\}$  soit de hauteur 2. On a alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A^* & \xrightarrow{t} & P & \xrightarrow{s} & A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow \Psi & \parallel & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A^* & \xrightarrow{-s^*} & P^* & \xrightarrow{t^*} & \widehat{A/I} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où  $t(1) = x$  et  $s(y) = \Psi(x, y)$ , qui induit un isomorphisme symétrique  $\phi: A/I \rightarrow \widehat{A/I}$ . Il est évident que  $\rho([A/I, \phi]) = [P, \Psi]$  dans  $W^-(A)$ .

Soit  $(f, g)$  une suite régulière de  $A$ . Le complexe de Koszul qui lui est associé

est canoniquement isomorphe à son dual, comme le montre le diagramme ci-dessous;

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A^* & \longrightarrow & A^2 & \longrightarrow & A \longrightarrow A/Af + Ag \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow \Psi & \parallel & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A^* & \longrightarrow & (A^2)^* & \longrightarrow & A \longrightarrow \widehat{A/Af + Ag} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où  $\Psi$  est la forme hyperbolique.

On note  $\phi_{f,g}$  l'isomorphisme de  $A/Af + Ag$  sur  $\widehat{A/Af + Ag}$  induit par  $\Psi$ .

**PROPOSITION 3.10.**  $\rho([A/Af + Ag, \phi_{f,g}]) = 0$ .

## CHAPITRE II

Dans ce chapitre  $A$  est l'anneau des coordonnées d'une surface algébrique  $X$ , affine, réelle et lisse. Soit  $S$  l'ensemble des points réels et  $T$  l'ensemble des points complexes de  $X$ . Nous supposons  $S$  compact (pour la topologie transcidente).

Il résulte de 2.2 que le groupe  $W^{lf}(A)$  est isomorphe (non canoniquement) à  $\mathbb{Z}^{(S)} \oplus (\mathbb{Z}/2)^{(T)}$ .

### 4. Elimination des points complexes

**THEOREME 4.1.** Pour tout  $m \in T$  on a  $\rho(W^{lf}(A_m)) = 0$ .

**LEMME 4.2.** Soit  $m \in T$ . Il existe dans  $A$  une suite régulière  $(f, g)$  telle que  $A/Af + Ag$  ait une décomposition primaire  $M_1 \oplus \dots \oplus M_r$  avec  $M_1$   $m$ -primaire de longueur impaire et  $M_2, \dots, M_r$  de support complexe et de longueur paire.

*Preuve de 4.1.* Puisque l'homomorphisme de  $W^{lf}(A_m)$  sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  s'obtient en associant à  $[M, \phi]$  la longueur de  $M$  modulo 2, la classe de  $[A/Af + Ag, \phi_{f,g}]$  dans  $W^{lf}(A)$  est le générateur de  $W^{lf}(A_m)$ . Le théorème résulte alors de 3.10.

*Preuve de 4.2.* On commence par choisir un  $f \in m$  tel que  $\text{Spec}(A/Af)$  est une courbe sans points réels, lisse en  $m$ . (Par exemple, en coupant la surface par une hypersurface sans points réels.)

On applique alors la proposition ci-dessous à  $B = A/Af$ .

**PROPOSITION 4.3.** Soit  $B$  une  $\mathbb{R}$ -algèbre affine de dimension 1, sans idéaux maximaux réels. Soit  $m$  un idéal maximal régulier de  $B$ . Il existe un  $g \in B$  tel que

$B/Bg$  est un  $B$ -module de longueur finie avec  $(B/Bg)_m$  de longueur impaire et  $(B/Bg)_{m'}$  de longueur paire pour tout idéal maximal  $m' \neq m$ .

*Preuve.* Supposons d'abord que  $B$  soit lisse. En ce cas,  $\text{Spec } B$  est un ouvert affine d'une courbe réelle projective  $Y$ , lisse et sans points réels. D'après [K, Théorème 10.9], le degré des diviseurs définit un isomorphisme

$$\deg : \text{Pic } Y / 2 \text{ Pic } Y \rightarrow 2\mathbb{Z} / 4\mathbb{Z}.$$

Soit  $P$  le point de  $Y$  correspondant à  $m$  et soit  $Q$  un point de  $Y \setminus \text{Spec } B$ . La classe du diviseur  $P + Q$  de degré 4 appartient donc à  $2 \text{ Pic } Y$ . Ceci entraîne que la classe de  $m$  dans  $\text{Pic } B$  est un carré. Il existe donc un idéal inversible  $\alpha \subset B$  tel que  $m\alpha^2$  est principal, engendré par un  $g \in B$ . Il est clair que  $B/Bg$  a la propriété requise.

Soit maintenant  $B$  une  $\mathbb{R}$ -algèbre comme dans l'énoncé. Soit  $B_0 = B/\text{rad } B$  et soit  $C$  la clôture intégrale de  $B_0$  sans son corps total de fractions. On a  $C = C_1 \times \cdots \times C_r$ , où les  $C_i$  sont des  $\mathbb{R}$ -algèbres lisses, intègres, de dimension  $\leq 1$  et sans points réels. La démonstration faite dans le cas lisse nous assure de l'existence d'un idéal inversible  $\alpha \subset C$  tel que  $m\alpha^2$  est principal. La suite de Mayer-Vietoris [B, IX, 5.3], associée au diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} B_0 & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_0/\mathfrak{c} & \longrightarrow & C/\mathfrak{c} \end{array}$$

(où  $\mathfrak{c}$  est le conducteur de  $C$  dans  $B_0$ ), fournit une suite exacte

$$(C/\mathfrak{c})^\bullet \rightarrow \text{Pic } B_0 \rightarrow \text{Pic } C \rightarrow 0$$

où  $(C/\mathfrak{c})^\bullet$  est le groupe des unités de  $C/\mathfrak{c}$ . Il existe donc un idéal inversible  $\alpha_0 \subset B_0$  tel que  $\alpha_0 C \cong \alpha$ . La classe de  $m\alpha_0^2$  est donc dans l'image de  $(C/\mathfrak{c})^\bullet$ . Comme  $C$  n'a pas de points réels,  $(C/\mathfrak{c})^\bullet$  est divisible et la classe de  $m\alpha_0^2$  est un carré. Il existe donc un idéal inversible  $\alpha_1 \subset B_0$  tel que  $m\alpha_0^2\alpha_1^2$  est principal. Puisque  $\text{Pic } B = \text{Pic } B_0$ , il existe un idéal inversible  $\alpha_2 \subset B$  tel que  $m\alpha_2^2$  est principal, engendré par un  $g \in B$ . Si  $m' \neq m$ , on a

$$(B/Bg)_{m'} = (B/a^2 B)_{m'}$$

où  $a$  est un générateur de  $\alpha_2$  en  $m'$ . Comme  $a$  ne divise pas zéro dans  $B_{m'}$ ,

$aB_m/a^2B_{m'} \cong B_{m'}/aB_{m'}$  et  $B/Bg$  est de longueur paire. Par contre, en  $m$  on a  $a_2B_m = m^k B_m$  pour un certain entier  $k$  et  $B_m/gB_m = B_m/m^{2k+1}B_m$  est de longueur impaire.

## 5. Les points réels

Soit

$$W_R^{lf}(A) = \bigoplus_{m \in S} W^{lf}(A_m).$$

Chaque  $W^{lf}(A_m)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . On note  $U \subset W_R^{lf}(A)$  l'ensemble des générateurs de chaque  $W^{lf}(A_m)$ . D'après la Proposition 2.1, la donnée d'un tel générateur équivaut à la donnée d'un générateur de  $\widehat{A/m}$  aux carrés près.

Soit  $\Omega$  le fibré cotangent à  $X$  et  $\omega = \Lambda^2 \Omega$ . La restriction de  $\omega$  à  $S$  est un fibré vectoriel de rang 1 dont le fibré principal associé de groupe  $O(1) = \mu_2$  est le revêtement d'orientation  $\tilde{S}$  de  $S$ . D'autre part [AK, page 16], la fibre de  $\omega$  en  $m$  est  $\omega(m) = \text{Ext}_A^2(A/m, A)$ . Un point de  $\tilde{S}$  définit donc un générateur aux carrés près de  $\text{Ext}_A^2(A/m, A)$  et donc un élément de  $U$ . Ceci nous permet d'identifier  $U$  à  $\tilde{S}$  et de le munir de la topologie transcendante de  $S$ . On a, alors, le

**THEOREME 5.1.** *Si  $u$  et  $u'$  sont dans la même composante connexe de  $U$ ,  $\rho(u) = \rho(u')$ .*

La démonstration de ce théorème utilise le fait suivant.

**PROPOSITION 5.2.** *Pour chaque couple de points  $u_m, u'_{m'}$  de  $U$  au-dessus de  $m, m' \in S$ , distincts et suffisamment proches, il existe  $f, g \in A$  tels que  $A/Af + Ag = A/m \oplus A/m' \oplus M$  où  $\text{Supp } M \subset T$ . On peut, de plus, choisir  $f$  et  $g$  de façon que tous les points réels de  $\text{Spec } A/Af$  et de  $\text{Spec } A/Ag$  soient contenus dans un même ouvert trivialisant du revêtement  $\tilde{S}$ .*

**Preuve.** On intersecte  $S$  par deux petites sphères réelles passant par  $m$  et  $m'$  et transverses, d'équation  $f = 0$  et  $g = 0$ .

**Preuve de 5.1.** Il suffit de démontrer que pour  $u_m$  et  $u'_{m'}$  suffisamment proches, on a  $\rho(u_m) = \rho(u'_{m'})$ . On choisit  $f$  et  $g$  comme dans la Proposition 5.2. On a vu (Proposition 3.10) que  $\rho(A/Af + Ag, \phi_{f,g}) = 0$ . Or

$$(A/Af + Ag, \phi_{f,g}) = (A/m, (\phi_{f,g})_m) \oplus (A/m', (\phi_{f,g})_{m'}) \oplus (M, \phi)$$

et donc (Théorème 4.1),

$$\rho(A/m, (\phi_{f,g})_m) + \rho(A/m', (\phi_{f,g})_{m'}) = 0.$$

Si  $(\phi_{f,g})_m = \varepsilon x^2 u_m$ , où  $\varepsilon = \pm 1$  et  $x \in k(m)^\times$ , on a  $(\phi_{f,g})_{m'} = -\varepsilon y^2 u'_{m'}$  pour un  $y \in k(m')^\times$ , d'où  $\rho(u_m) = \rho(u'_{m'})$ .

## 6. Calcul de $W^-(A)$

On note  $\tilde{K}_0^{Sp}(A)$  le quotient du monoïde (pour la somme orthogonale) engendré par les classes d'isométrie d'espaces alternés sur  $A$  par le sous-monoïde engendré par les classes des  $H(A^n)$ . C'est un groupe abélien. En effet, soit  $(P, \Psi)$  un espace alterné et  $Q$  un module projectif tel que  $P \oplus Q = A^n$ . On a

$$(P, \Psi) \oplus (P, -\Psi) \oplus H(Q) = H(P) \oplus H(Q) = H(A^n).$$

Il y a une suite exacte évidente

$$\tilde{K}_0(A) \xrightarrow{H} \tilde{K}_0^{Sp}(A) \rightarrow W^-(A) \rightarrow 0$$

et la suite analogue pour  $C^\infty(S)$

$$\tilde{K}_0(S) \xrightarrow{H} \tilde{K}_0^{Sp}(S) \rightarrow W^-(C^\infty(S)) \rightarrow 0.$$

Le groupe  $\tilde{K}_0^{Sp}(S)$  est le groupe des fibrés vectoriels symplectiques stables de base  $S$ . Tout élément de  $\tilde{K}_0^{Sp}(S)$  est représenté par un unique fibré de rang 2 orienté. La classe d'Euler fournit alors un isomorphisme

$$e : \tilde{K}_0^{Sp}(S) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z}).$$

Un fibré vectoriel stable sur  $S$  est déterminé par ses deux premières classes de Stiefel–Whitney. Plus précisément, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z}/2) \rightarrow \tilde{K}_0(S) \xrightarrow{w_1} H^1(S, \mathbb{Z}/2) \rightarrow 0.$$

**LEMME 6.1.** *L'application  $e \circ H$  de  $\tilde{K}_0(S)$  dans  $H^2(S, \mathbb{Z})$  est nulle sur  $H^2(S, \mathbb{Z}/2)$  et induit le Bockstein*

$$\beta : H^1(S, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z}).$$

*Preuve.* C'est la formule  $w_2(\xi \oplus \xi^*) = w_1(\xi)^2$ .

Notons  $H_{\text{alg}}^1(S, \mathbb{Z}/2)$  l'image de  $\text{Pic } A$  dans  $H^1(S, \mathbb{Z}/2)$ . L'application  $e$  induit alors une application

$$\tau: W^-(A) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})/\beta(H_{\text{alg}}^1(S, \mathbb{Z}/2)).$$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème principal de cet article.

### THEOREME 6.2. *L'homomorphisme*

$$\tau: W^-(A) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})/\beta(H_{\text{alg}}^1(S, \mathbb{Z}/2)),$$

obtenu en associant à tout  $(P, \Psi)$  sa classe d'Euler, est un isomorphisme.

Avant de démontrer ce théorème, définissons un homomorphisme

$$\chi: W_R^f(A) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z}).$$

Soit  $u_m$  un élément de  $U = \tilde{S}$ . Posons  $\chi(u_m) = ef(\xi)$  où  $\xi$  est un représentant de  $u_m$  dans  $\widehat{A/m}$  (cf. remarque 3.5). On constate que  $\chi(-u_m) = -\chi(u_m)$  et on étend  $\chi$  à  $W_R^f(A)$  par additivité. Le fibré vectoriel orienté de base  $S$  induit par  $f(\xi)$  est le pull-back du fibré de Hopf sur  $S^2$  par l'application de degré 1:  $S \rightarrow S^2$  obtenue par construction de Thom sur le point  $m$ . Il en résulte que si  $\chi(u_m) = \chi(u'_m)$  les deux éléments de  $U$ ,  $u_m$  et  $u'_m$  sont dans la même composante connexe de  $U$  et, par conséquent,  $\rho(u_m) = \rho(u'_m)$  en vertue du Théorème 5.1. Ceci montre que  $\rho$  se factorise à travers  $\chi$  en une surjection

$$\bar{\rho}: H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow W^-(A).$$

*Preuve de 6.2.* Démontrons d'abord que  $\tau$  est injectif.

Soit  $x = [P, \Psi] \in \ker \tau$ . Quitte à modifier  $P$  par des facteurs hyperboliques, on peut supposer que  $P$  est de rang 2 et  $e(P, \Psi) = 0$ .

Par le théorème de Bertini [J, p. 102], il existe une section générique de  $P$  qui conduit au diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A^* & \longrightarrow & P & \longrightarrow & A \longrightarrow A/\bigcap_i m_i \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \Psi & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A^* & \longrightarrow & P^* & \longrightarrow & A \longrightarrow \widehat{A/\bigcap_i m_i} \longrightarrow 0 \end{array}$$

où les  $m_i$  sont des idéaux maximaux distincts et en nombre fini.

Ce diagramme induit un isomorphisme  $\phi: A/\bigcap_i m_i \rightarrow \widehat{A/\bigcap_i m_i}$ , qu'on décompose en

$$\bigoplus_i \phi_i: \bigoplus_i A/m_i \rightarrow \bigoplus_i \widehat{A/m_i}.$$

Admettons la formule

$$e(P, \Psi) = \sum_i \chi[A/m_i, \phi_i]. \quad (6.3)$$

On a

$$\begin{aligned} x &= \rho \left[ A \Big/ \bigcap_i m_i, \phi \right] = \sum_i \rho[A/m_i, \phi_i] = \sum_i \bar{\rho} \circ \chi[A/m_i, \phi_i] \\ &= \bar{\rho} \sum_i \chi[A/m_i, \phi_i] = \bar{\rho} e(P, \Psi) = \bar{\rho}(0) = 0. \end{aligned}$$

La surjectivité de  $\tau$  résulte de la surjectivité de  $e$  qui est assurée par celle, évidente, de  $\chi$ .

La formule 6.3 est la définition de  $\chi$  s'il y a un seul idéal maximal. Il suffit de démontrer que

$$e(f(\phi(1))) = \sum_i e(f(\phi_i(1))).$$

En fait, nous avons plus:

$$\bigoplus_i f(\phi_i(1)) = f(\phi(1)) \oplus H(A^n).$$

Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} e(\pi, \phi \circ \pi): & 0 & \longrightarrow & A^* & \longrightarrow & P & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\pi} A/\bigcap_i m_i \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow \Delta & & \downarrow & & \downarrow \Delta & \downarrow \\ \oplus e(\pi, \phi_i \circ \pi): & 0 & \longrightarrow & \bigoplus_i A^* & \longrightarrow & \bigoplus_i P_i & \longrightarrow & \bigoplus_i A & \xrightarrow{\oplus \pi} \bigoplus_i A/m_i \longrightarrow 0 \end{array}$$

permet de plonger  $P$  isométriquement dans  $\bigoplus_i P_i$ . On vérifie que

$$\bigoplus_i f(\phi_i(1)) = f(\phi(1)) \oplus H(\text{Coker } \Delta).$$

## 7. Applications

**PROPOSITION 7.1.** *Si  $S$  est orientable, on a*

$$W^-(A) = W^-(C^\infty(S)) = H^2(S, \mathbb{Z}).$$

**PROPOSITION 7.2.** *Si  $S$  est connexe, de caractéristique d'Euler impaire, on a*

$$W^-(A) = 0.$$

*Preuve.* Si  $\omega = \Lambda^2 \Omega$  est le fibré canonique de  $X$ ,  $\beta(w_1(\omega)) = \chi(S) \bmod 2$  est non nul.

**PROPOSITION 7.3.** *Soit  $A = \mathbb{R}[x, y, z] = \mathbb{R}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1)$  l'anneau des coordonnées de  $S^2$ . Deux  $A$ -modules projectifs de rang 2 sont isomorphes si et seulement si les fibrés vectoriels sur  $S^2$  qui leur sont associés sont isomorphes.*

*Preuve.* Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux modules projectifs comme dans l'énoncé. Puisque  $\text{Pic } A = 0$ , on peut choisir sur  $P_1$  et  $P_2$  deux formes antisymétriques non dégénérées  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$ . Quitte à changer le signe de  $\Psi_2$  on peut supposer que  $e(P_1, \Psi_1) = e(P_2, \Psi_2)$  et donc (Proposition 7.1) que  $[P_1, \Psi_1] = [P_2, \Psi_2]$  dans  $W^{-1}(A)$ . Or,

$$W^-(A) = \tilde{K}_0^{Sp}(A)/H(\tilde{K}_0(A)).$$

Nous allons montrer que  $H(\tilde{K}_0(A)) = 0$ . (Ce fait avait été remarqué pendant la rédaction de [OPS]). On sait que  $\tilde{K}_0(A)$  est un groupe cyclique (d'ordre 2) engendré par la classe de  $\mathcal{H} = A^4\pi$  où  $\pi$  est la matrice idempotente  $[F]$ :

$$\begin{pmatrix} 1-z & -x & -y & 0 \\ -x & 1+z & 0 & -y \\ -y & 0 & 1+z & x \\ 0 & -y & x & 1-x \end{pmatrix}.$$

On constate que

$$e_1 = (1-z, -x, -y, 0, -y, 0, 1+z, x)$$

et

$$e_2 = (0, y, -x, z-1, -x, 1+z, 0, -y)$$

sont deux éléments unimodulaires orthogonaux de  $H(\mathcal{H})$ . On a donc  $H(\mathcal{H}) = H(A^2)$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [AK] A. ALTMAN and S. KLEIMAN, *Introduction to Grothendieck Duality Theory*, Springer Lecture Notes 146 (1970).
- [BSV] J. BARGE, J.-J. SANSUC et P. VOGEL, *Conjecture de Gersten en L-Théorie*, en préparation.
- [B] H. BASS, *Algebraic K-Theory*, W. A. Benjamin, New York, 1968.
- [F] R. FOSSUM, *Vector bundles over spheres are algebraic*, Inventiones Math. 8 (1969), p. 222–225.
- [J] J.-P. JOUANOLOU, *Théorèmes de Bertini et Applications*, Birkhäuser, Bâle, 1983.
- [K] M. KNEBUSCH, *On Algebraic Curves over Real Closed Fields II*, Math. Z. 151 (1976), p. 189–205.
- [MS] P. MURTHY et R. SWAN, *Vector Bundles over Affine Surfaces*, Inventiones Math. 36 (1976), p. 125–165.
- [OPS] M. OJANGUREN, R. PARIMALA et R. SRIDHARAN, *Symplectic bundles over affine surfaces*, Comment. Math. Helv., 61 (1986) p. 491–500.
- [P<sub>1</sub>] W. PARDON, *A Relation between Witt groups and zero-cycles in a regular ring*, in: *Algebraic K-Theory, Geometry and Analysis*, Springer Lecture Notes 1046, 1984.
- [P<sub>2</sub>] W. PARDON, *The exact sequence of a localization for Witt groups*, Springer Lecture Notes 551 (1976), p. 336–379.
- [P<sub>3</sub>] W. PARDON, *A Gersten conjecture for Witt groups*, Springer Lecture Notes 967 (1982), p. 300–314.
- [S] J.-P. SERRE, *Sur les modules projectifs*, Sémin. Dubreil-Pisot 14 (1960–1961) n° 2.

*J. Barge*

*Université des Sciences et Techniques de Lille*

*Mathématiques*

*F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex*

*M. Ojanguren*

*Université de Lausanne*

*Dépt. de Mathématiques*

*CH-1015 Lausanne-Dorigny*

*Reçu le 7 novembre 1986*