

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 62 (1987)  
  
**Artikel:** Valuations des espaces homogènes sphériques.  
**Autor:** Brion, Michel / Pauer, Franz  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-47348>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Valuations des espaces homogènes sphériques

MICHEL BRION et FRANZ PAUER

### 1. Introduction

Soit  $G$  un groupe algébrique réductif connexe sur un corps  $k$  algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit  $H$  un sous-groupe algébrique de  $G$ . Un plongement de l'espace homogène  $G/H$  est une variété algébrique intègre  $X$ , sur laquelle  $G$  opère régulièrement, et munie d'une  $G$ -immersion ouverte  $G/H \rightarrow X$ . Les plongements normaux des espaces homogènes ont été étudiés par Luna et Vust dans [LV]; leurs résultats se simplifient notablement si l'espace homogène  $G/H$  est "sphérique", c'est-à-dire si un sous-groupe de Borel de  $G$  a une orbite ouverte dans  $G/H$ . Ils généralisent la théorie des plongements toriques, développée dans [K] (cf. aussi [D]).

Dans l'étude des plongements, la notion de plongement élémentaire joue un rôle essentiel: il s'agit d'une  $G$ -variété lisse formée de deux  $G$ -orbites, dont l'une est ouverte (et isomorphe à  $G/H$ ) et l'autre est fermée, de codimension 1. L'ensemble des plongements élémentaires de l'espace homogène sphérique  $G/H$  est en bijection naturelle avec l'ensemble  $\mathcal{V}(G/H)$  des valuations discrètes, invariantes par  $G$  et normalisées, du corps  $k(G/H)$  des fonctions rationnelles sur  $G/H$ . On peut identifier  $\mathcal{V}(G/H)$  avec l'ensemble des points entiers indivisibles d'un cône convexe rationnel  $\mathcal{CV}(G/H)$  dans un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{Q}$ .

Le résultat principal est en gros le suivant (théorème 3.6): si  $X$  est un plongement élémentaire de  $G/H$ , d'orbite fermée isomorphe à  $G/H'$ , et si  $v$  est la valuation associée à  $X$ , alors l'espace homogène  $G/H'$  est sphérique et le cône convexe  $\mathcal{CV}(G/H')$  s'identifie au quotient de  $\mathcal{CV}(G/H)$  par la droite engendrée par  $v$ . Cela permet d'étudier le cône  $\mathcal{CV}(G/H)$  à partir du cône (plus petit)  $\mathcal{CV}(G/H')$ .

On utilise la théorie des plongements de [LV] et les résultats de "structure locale" de [BLV], dont on trouve les principaux énoncés dans la deuxième partie. Dans la troisième partie, on étudie les plongements élémentaires de  $G/H$ , et les groupes d'isotropie de leurs orbites fermées; ces groupes contiennent "presque toujours" un sous-groupe unipotent maximal de  $G$ . La quatrième partie est consacrée à la description de  $\mathcal{CV}(G/H)$  et à des exemples. Enfin, dans la



cinquième partie, on décrit le rôle joué par le normalisateur de  $H$  dans les plongements de  $G/H$ .

On trouve dans [B1] une version préliminaire de cet article.

Nous remercions tous ceux qui se sont intéressés à ce travail: M. Decauwert, F. Knop, H. Kraft, G. Menzel et T. Vust. Nous remercions tout particulièrement D. Luna pour de nombreuses conversations utiles.

## 2. Plongements des espaces homogènes sphériques

Les paragraphes 2.1 à 2.10 rassemblent les définitions et résultats de [LV] et [BLV] dont nous aurons besoin.

Dans tout ce qui suit,  $G$  est un groupe algébrique réductif connexe, le corps de base est algébriquement clos et de caractéristique nulle, et  $H$  est un sous-groupe algébrique de  $G$  tel que l'espace homogène  $G/H$  soit *sphérique*, c'est-à-dire qu'on peut choisir un sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$  tel que  $BH$  soit ouvert dans  $G$ .

2.1 Un "plongement normal  $(X, x)$  de  $G/H$ " est la donnée d'une  $G$ -variété algébrique normale  $X$  et d'un point  $x \in X$  tels que l'orbite de  $x$  par  $G$  soit dense dans  $X$  et que le sous-groupe d'isotropie de  $x$  soit  $H$ .

Tout plongement de  $G/H$  ne contient qu'un nombre fini de  $G$ -orbites [LV; 7.5]; un plongement est appelé "simple", s'il ne contient qu'une seule  $G$ -orbite fermée. Si  $X'$  est une orbite fermée dans un plongement normal  $(X, x)$  de  $G/H$ , le couple  $(\{z \in X \mid X' \subset \overline{G \cdot z}\}, x)$  est un plongement simple de  $G/H$ .

Soient  $(X, x)$  et  $(Y, y)$  deux plongements normaux de  $G/H$ . L'application  $f: X \rightarrow Y$  est un morphisme de plongements, si  $f$  est un morphisme algébrique  $G$ -équivariant, qui envoie  $x$  sur  $y$ .

2.2 Un plongement *élémentaire* de  $G/H$  est un plongement normal formé de deux orbites: l'orbite dense et une orbite de codimension 1; un tel plongement est lisse. Il y a une bijection naturelle entre l'ensemble des plongements élémentaires de  $G/H$ , et l'ensemble  $\mathcal{V}(G/H)$  des valuations discrètes, invariantes par  $G$  et normalisées, du corps  $k(G/H) = k(G)^H$  des fonctions rationnelles sur  $G/H$  [LV; 3.3, 7.5, 8.10].

Si  $(Y, y)$  est un plongement de  $G/H$ , et  $Y'$  est une  $G$ -orbite dans  $Y$ , il existe un plongement élémentaire  $(X, x)$  de  $G/H$  et un morphisme de plongements  $X \rightarrow Y$  qui envoie l'orbite fermée de  $X$  sur  $Y'$  [LV; 3.5].

2.3 Soit  $\Delta$  le complémentaire de l'ouvert  $BH/H$  dans  $G/H$ . Puisque  $BH/H \cong B/B \cap H$  est affine,  $\Delta$  est pur de codimension 1 dans  $G/H$ . On note

${}^B\mathcal{D}(G/H)$  l'ensemble des composantes irréductibles de  $\Delta$ , c'est-à-dire l'ensemble des diviseurs irréductibles stables par  $B$ , de  $G/H$ . A tout  $D \in {}^B\mathcal{D}(G/H)$  est associée une valuation discrète, invariante par  $B$ , de  $k(G/H)$ ; on note  $v_D$  cette valuation.

2.4 Soit  $(X, x)$  un plongement normal simple de  $G/H$ ; soit  $X'$  son orbite fermée. Si  $Z$  est une  $G$ -orbite de codimension 1 dans  $X$ , alors  $(G \cdot x \cup Z, x)$  est un plongement élémentaire de  $G/H$ , d'où un sous-ensemble  $\mathcal{V}(X)$  de  $\mathcal{V}(G/H)$ , associé aux diverses  $G$ -orbites de codimension 1 dans  $X$ . D'autre part, soit  $\mathcal{D}(X)$  l'ensemble des  $D \in {}^B\mathcal{D}(G/H)$  tels que  $X' \subset \overline{D}$ . Le couple  $(\mathcal{V}(X), \mathcal{D}(X))$  détermine alors le plongement  $(X, x)$  [LV; 8.1 à 8.3].

2.5 Le groupe  $B$  opère par translations à gauche et le groupe  $H$  par translations à droite sur  $k(G)$ , le corps des fonctions rationnelles de  $G$ . Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des fonctions dans  $k(G)$ , qui sont à la fois vecteurs propres de  $B$  et de  $H$  et vérifient  $f(1) = 1$ . (L'ensemble  $BH$  étant dense dans  $G$ , tout vecteur propre  $f$  de  $B$  et de  $H$  vérifie  $f(1) \neq 0$ , alors  $f(1)^{-1}f \in \mathcal{P}$ ).

Soient  $\mathcal{P}^H := \mathcal{P} \cap k(G)^H$  et  $\mathcal{P}_+ := \mathcal{P} \cap k[G]$  (les éléments de  $\mathcal{P}$  qui sont des fonctions régulières sur  $G$ ).  $\mathcal{P}^H$  est un groupe abélien.

Soient  $N$  un  $G$ -module rationnel de dimension finie,  $n \in N$  et  $v \in N^*$  (le  $G$ -module dual de  $N$ ). Alors l'application

$$\begin{aligned} v(\cdot n) : G &\rightarrow k \\ s &\mapsto v(sn) \end{aligned}$$

est un élément de  $k[G]$ .

Si  $v$  est un vecteur propre de  $B$ , et  $n$  un vecteur propre de  $H$ , tels que  $v(n) = 1$ , alors  $v(\cdot n) \in \mathcal{P}_+$ . Inversement, tout élément de  $\mathcal{P}_+$  s'obtient de cette façon. Si de plus  $N$  est simple, alors  $N$  (à isomorphie près) et  $n, v$  (à multiplication scalaire près) sont uniquement déterminés (cf. [BLV; 2.2]).

Toute valuation  $v \in \mathcal{V}(G/H)$  est déterminée par sa restriction à  $\mathcal{P}^H$  [LV; 7.4], donc on peut identifier  $\mathcal{V}(G/H)$  à un sous-ensemble du  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $V := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{P}^H, \mathbb{Q})$ . On note  $\mathcal{CV}(G/H)$  le cône engendré par  $\mathcal{V}(G/H)$  dans  $V$ ; il est connexe (cf. [P1; Proposition 2.1]). La dimension de  $V$  est appelée le *rang* de  $G/H$ . Si  $D \in {}^B\mathcal{D}(G/H)$ , on note aussi  $v_D$  l'élément de  $V$  obtenu par restriction de  $v_D$  à  $\mathcal{P}^H$  (bien que l'application de  ${}^B\mathcal{D}(G/H)$  dans  $V$  ainsi définie, ne soit pas forcément injective (cf. [LV; §7])).

2.6 Soient  $\mathcal{D} \subset {}^B\mathcal{D}(G/H)$  et  $\mathcal{V}$  un sous-ensemble fini de  $\mathcal{V}(G/H)$ . Pour qu'il existe un plongement simple  $(X, x)$  de  $G/H$  tel que  $\mathcal{V}(X) = \mathcal{V}$  et  $\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}$  (voir

2.4), il faut et il suffit que les quatre conditions suivantes soient réalisées:

- a) le cône convexe  $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathcal{V})$ , engendré par  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{V}$  dans  $V$  est saillant.
- b) Tout  $v \in \mathcal{V}$  engendre une demi-droite extrémale de  $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathcal{V})$  distincte de toute demi-droite engendrée par  $v_D$ ,  $D \in \mathcal{D}$ .
- c) L'intérieur  $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathcal{V})^0$  de  $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathcal{V})$  (dans l'espace vectoriel qu'il engendre) rencontre  $\mathcal{CV}(G/H)$ .
- d) Tout caractère de  $H$  est somme d'un caractère d'un élément de  $\mathcal{P}_+$ , et d'un caractère d'un élément de  $\{f \in \mathcal{P} \mid v_D(f) = 0 \text{ pour tout } D \in \mathcal{D}\}$ . (cf. [LV; §8]).

Nous appellerons  $\mathcal{D}$  l'ensemble des *couleurs* de  $(X, x)$ , et nous disons que  $(X, x)$  est *sans couleur* si  $\mathcal{D}$  est vide. En particulier, il y a une bijection entre plongements simples, sans couleur, de  $G/H$ , et sous-cônes convexes saillants de type fini de  $\mathcal{CV}(G/H)$ .

On montrera que  $\mathcal{CV}(G/H)$  est lui-même un cône (convexe) de type fini (corollaire 3.2), que  $\mathcal{CV}(G/H)$  engendre l'espace vectoriel  $V$  (corollaire 4.1) et que ce cône est saillant si et seulement si  $N_G(H)/H$  est fini, où  $N_G(H)$  est le normalisateur de  $H$  dans  $G$  (corollaire 5.3).

2.7 Soit  $(X, x)$  un plongement normal de  $G/H$ . D'après 2.1,  $X$  est réunion finie de ses sous-plongements simples, donc  $X$  est déterminé par une famille finie de couples  $(\mathcal{D}_i, \mathcal{V}_i)_{i \in I}$  tels que:

- 1) chaque  $(\mathcal{D}_i, \mathcal{V}_i)$  vérifie les propriétés a), b), c), d) de 2.6.
- 2) Pour tout  $i \in I$ , si  $F$  est une facette de  $\mathcal{C}(\mathcal{D}_i, \mathcal{V}_i)$  dont l'intérieur  $F^0$  rencontre  $\mathcal{CV}(G/H)$ , alors il existe  $j \in I$  tel que  $F = \mathcal{C}(\mathcal{D}_j, \mathcal{V}_j)$  et  $\mathcal{D}_j = \mathcal{D}_i \cap F$ .
- 3) Les sous-ensembles  $\mathcal{C}(\mathcal{D}_i, \mathcal{V}_i)^0 \cap \mathcal{CV}(G/H)$  sont deux à deux disjoints.

De plus, pour que  $(X, x)$  soit complet, il faut et il suffit que:

- 4)  $\mathcal{CV}(G/H) \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}(\mathcal{D}_i, \mathcal{V}_i)$ . (cf. [LV; 6.3 et 6.4]).

En particulier, on obtient une bijection entre plongements normaux complets sans couleur de  $G/H$ , et "subdivisions" de  $\mathcal{CV}(G/H)$  en cône convexes saillants de type fini.

2.8 Soit  $\lambda$  un sous-groupe à un paramètre de  $G$ . A  $\lambda$  on associe une valuation  $v_\lambda \in \mathcal{CV}(G/H)$  comme suit:

L'image de  $\lambda$  opère par translations à droite sur  $k[G]$ . Si  $f \in k[G]$ , alors  $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n t^n$ , où  $\lambda(t)f_n = t^n f_n$  pour tout  $t \in k^*$ . On pose  $\bar{v}_\lambda(f) := \inf \{n \in \mathbb{Z} \mid f_n \neq 0\}$  et on étend  $\bar{v}_\lambda$  au corps  $k(G)$  des fractions de  $k[G]$ . Soit  $v_\lambda$  la restriction de  $\bar{v}_\lambda$  à  $k(G)^H$ , alors  $v_\lambda \in \mathcal{CV}(G/H)$  (mais  $v_\lambda$  peut être triviale) [LV; 5.4].

Soit  $v \in \mathcal{V}(G/H)$  et soit  $(X_v, x_v)$  le plongement élémentaire associé à  $v$ : alors  $v$  et  $v_\lambda$  sont équivalentes si et seulement si  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)x_v$  existe dans  $X_v$  et appartient à l'orbite fermée de  $X_v$  [LV; 4.8].

Lorsque l'image de  $\lambda$  est contenue dans  $N_G(H)$ , le normalisateur de  $H$ , on lui associe un plongement élémentaire  $(X_\lambda, x_\lambda)$  de la façon suivante: on fait opérer  $k^*$  sur  $G/H \times k$  par  $t \circ (gH, \theta) = (g\lambda(t)H, t^{-1}\theta)$  pour  $(t, g, \theta) \in k^* \times G \times k$ , et on prend pour  $X_\lambda$  le quotient  $G/H \times_{k^*} k$  de  $G/H \times k$  par  $k^*$  et pour  $x_\lambda$  la classe de  $(H, 1)$ . L'orbite fermée de  $X_\lambda$  est alors  $G/H \times_{k^*} \{0\} \cong G/(H \cdot \text{Im}(\lambda))$ . Il est clair que la valuation correspondante à  $(X_\lambda, x_\lambda)$  est équivalente à  $v_\lambda$ .

2.9 Soit  $P$  l'ensemble des  $s \in G$  tels que  $sBH = BH$ ; c'est un sous-groupe parabolique de  $G$  qui contient  $B$ . Soit  $P^u$  le radical unipotent de  $P$ . Soit  $(X, x)$  un plongement élémentaire de  $G/H$ , d'orbite fermée  $X'$ ; alors  $P$  a une orbite ouverte  $Y'$  dans  $X'$ , et  $Y = P \cdot x \cup Y'$  est un plongement élémentaire de  $P/P \cap H$ . De plus, il existe des sous-groupes de Levi  $L$  de  $P$ , tels que si  $C$  est la composante neutre du centre de  $L$ , on ait:

- 1)  $P \cap H = L \cap H$
- 2)  $P \cap H$  contient le sous-groupe dérivé  $(L, L)$  de  $L$ .
- 3) Pour tout plongement élémentaire  $(X, x)$  de  $G/H$ , l'opération de  $P^u$  dans  $Y$  induit un isomorphisme de variétés algébriques  $P^u \times (\overline{C \cdot x \cap Y}) \rightarrow Y$ .

Un tel  $L$  est dit *adapté à  $H$*  [BLV; 4.2].

Pour tout groupe algébrique  $G'$ , notons  $X(G')$  (resp.  $Y(G')$ ) l'ensemble des caractères (resp. des sous-groupes à un paramètre) de  $G'$ .

Soit  $f \in \mathcal{P}^H$ , alors  $f$  est un vecteur propre de  $P$  dans  $k(G)^H$ . Comme  $P$  a une orbite ouverte dans  $G/H$ ,  $f$  est déterminé par son poids  $\chi_f \in X(P)$ . De plus  $\chi_f \in X(P)^{P \cap H}$  et  $X(P)^{P \cap H} \cong X(C/C \cap H)$ , car  $P = P^u L$  et  $(L, L) \subset H$ . On identifie ainsi  $\mathcal{P}^H$  et  $X(C/C \cap H)$ , d'où par dualité, une identification de  $V = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{P}^H, \mathbb{Q})$  avec  $Y(C/C \cap H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ . En particulier, le rang de  $G/H$  est la dimension de  $C/C \cap H$ .

2.10 Soient  $L$  un sous-groupe de Levi de  $P$  adapté à  $H$ , (voir 2.9),  $(X, x)$  un plongement élémentaire de  $G/H$  et  $X'$  son orbite fermée.

Il existe un sous-groupe à un paramètre  $\lambda$  de  $C$  tel que  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)x$  existe et appartient à l'orbite ouverte de  $P$  dans  $X'$ ; un tel  $\lambda$  est dit *adapté à  $(X, x)$*  [BLV; 4.2].

Soit  $\mu$  un autre sous-groupe à un paramètre de  $C$ , adapté à  $(X, x)$ ; alors les images de  $\lambda$  et de  $\mu$  dans  $Y(C/C \cap H)$  sont proportionnelles; en effet  $\lambda$  et  $\mu$  sont adaptés au plongement élémentaire  $(\overline{C \cdot x \cap Y}, x)$  de  $C/C \cap H$ .

L'identification de  $V$  avec  $Y(C/C \cap H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  (cf. 2.9) envoie  $\mathcal{V}(G/H)$  sur l'ensemble des sous-groupes à un paramètre indivisibles de  $C/C \cap H$ , adaptés aux différents plongements élémentaires de  $G/H$  (pour voir cela, on se ramène au cas facile où  $G = C$  est un tore). D'après 2.8, la valuation associée à  $X$  est équivalente à  $v_\lambda$ . On obtient donc une application injective de  $\mathcal{CV}(G/H)$  dans  $Y(C/C \cap H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = V$ .

2.11 Dans toute la suite on conservera les notations  $G, H, B, P, L, C$  introduites ci-dessus.

### 3. Groupes d'isotropie des orbites fermées des plongements élémentaires

Le résultat principal de cette partie est le théorème 3.6, où on étudie le comportement des objets  $P, L, \mathcal{CV}(G/H)$  lorsqu'on passe de  $G/H$  à l'orbite fermée d'un plongement élémentaire. Pour prouver ce théorème, on a besoin de résultats préliminaires sur les plongements, et en particulier sur ceux qui sont sans couleur.

**3.1 PROPOSITION.** *Soit  $(X, x)$  un plongement élémentaire de  $G/H$ . Alors il existe une "complétion sans couleur" de  $(X, x)$ , c'est-à-dire un plongement  $(X^c, x^c)$  normal complet sans couleur (cf. 2.6) de  $G/H$  et un morphisme injectif de plongements  $X \hookrightarrow X^c$ .*

*Démonstration.* D'après [S] on peut supposer que  $X$  est une sous-variété  $G$ -stable, localement fermée de  $\mathbb{P}(M)$ , où  $M$  est un  $G$ -module rationnel de dimension finie. Soit  $f \in \mathcal{P}_+$  tel que  $\Delta$  soit l'ensemble des zéros de  $f$  (cf. 2.3). Soient  $N$  un  $G$ -module rationnel simple,  $n \in N$ ,  $v \in N^*$  tels que  $f = \overline{v(\cdot n)}$  (cf. 2.5). Soit  $y$  l'image de  $n$  dans  $\mathbb{P}(N)$ . Soient  $X^c$  la normalisation de  $\overline{G \cdot (x, y)} \subset \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}(N)$ , et  $x^c$  l'unique point de  $X^c$  au-dessus de  $(x, y)$ . Montrons que  $(X^c, x^c)$  convient.

L'élément  $y$  est fixé par  $H$ , donc  $X^c$  est un plongement normal complet de  $G/H$ . La projection  $\mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}(N) \rightarrow \mathbb{P}(M)$  induit un  $G$ -morphisme surjectif  $\varphi: X^c \rightarrow \overline{G \cdot x}$ , et la restriction de  $\varphi$  à  $G \cdot x^c$  est un isomorphisme sur  $G \cdot x$ . Comme  $(X, x)$  est un plongement élémentaire, il suit que  $\varphi$  est un isomorphisme au-dessus de  $X$ .

Il reste à montrer que  $(X^c, x^c)$  est sans couleur. Grâce aux propriétés de la normalisation, il suffit de montrer que  $\bar{\Delta}$ , l'adhérence de  $G \cdot (x, y) = P \cdot (x, y)$  dans  $\mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}(N) \subset \mathbb{P}(M \otimes N)$  ne contient pas d'orbite fermée de  $G$  dans  $\overline{G \cdot (x, y)}$ .

Soient  $p \in M$ ,  $q \in N$  tels que la  $G$ -orbite de l'image de  $(p, q)$  dans  $\mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}(N)$  soit fermée et contenue dans  $\overline{G \cdot (x, y)}$ . On peut supposer que  $p, q$  sont des vecteurs propres d'un sous-groupe de Borel de  $G$  opposé à  $B$ . Alors il existe un complément  $B$ -stable de  $kp$  dans  $M$ ; soit  $\mu: M \rightarrow k$  la projection sur  $kp \cong k$  le long de ce complément. Alors  $\mu$  est un vecteur propre de  $B$  dans  $M^*$  et  $\mu(p) = 1$ . Le module  $N$  étant simple, on a  $v(q) \neq 0$ , d'où  $N = kq \oplus \text{Ker}(v)$ .

Considérons l'application  $g := (\mu \otimes v)(\cdot (m \otimes n)) \in \mathcal{P}_+$ . Alors  $g = \mu(\cdot m)f$ , en

particulier l'ensemble de zéros de  $g$  est égal à  $\Delta$ . Soit  $\mathcal{H}$  l'hyperplan dans  $\mathbb{P}(M \otimes N)$  associé à  $\mu \otimes \nu \in (M \otimes N)^*$ . Alors  $\mathcal{H}$  contient l'adhérence de  $\Delta \cong G \cdot (x, y) - P \cdot (x, y)$  dans  $\mathbb{P}(M \otimes N)$ , mais ne contient pas l'image de  $p \otimes q$  dans  $\mathbb{P}(M \otimes N)$ . ■

**3.2 COROLLAIRE.** *Le cône  $\mathcal{CV}(G/H)$  est de type fini (i.e. est engendré par un nombre fini de ses éléments).*

*Démonstration.* Si  $\mathcal{CV}(G/H)$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ , il existe un plongement élémentaire  $(X, x)$  de  $G/H$ . Alors à  $(X^c, x^c)$  correspond une subdivision finie de  $\mathcal{CV}(G/H)$  en des cônes de type fini (voir 2.7). D'où le corollaire. ■

**3.3 COROLLAIRE.** *Tout plongement normal sans couleur de  $G/H$  possède une complétion sans couleur.*

*Démonstration.* Au plongement donné correspond une famille finie de cônes saillants dans  $\mathcal{CV}(G/H)$ . D'après 3.2 on voit facilement qu'en ajoutant un nombre fini de cônes saillants, on obtient une subdivision de  $\mathcal{CV}(G/H)$ . Le plongement correspondant est la complétion sans couleur cherchée. ■

**3.4 PROPOSITION.** *Soit  $(Y, y)$  un plongement normal de  $G/H$ . Soient  $\bar{\Delta}$  l'adhérence de  $G \cdot y - P \cdot y$  dans  $Y$ , et  $W$  l'adhérence de  $C \cdot y$  dans  $Y - \bar{\Delta}$ .*

- i) *Si  $Y'$  est une  $G$ -orbite dans  $Y$ , non incluse dans  $\bar{\Delta}$ , alors  $Y' - \bar{\Delta}$  est une  $P$ -orbite (ouverte) dans  $Y'$ .*
- ii) *L'opération de  $P^\mu$  sur  $Y$  induit un isomorphisme  $P^\mu \times W \rightarrow Y - \bar{\Delta}$ .*

*Démonstration.* i) D'après 2.2 il existe un plongement élémentaire  $(Z, z)$  de  $G/H$  d'orbite fermée  $Z'$ , et un morphisme de plongements  $\varphi: Z \rightarrow Y$  tels que  $\varphi(Z') = Y'$ . Soient  $\mu$  un sous-groupe à un paramètre de  $C$  adapté à  $(Z, z)$ , et  $z' := \lim_{t \rightarrow 0} \mu(t)z$ . Alors  $C \cdot z \cup C \cdot z'$  est un plongement élémentaire du tore  $C/C \cap H$ , donc il est affine (cela se voit facilement à l'aide de 2.8). Par suite  $P \cdot z \cup P \cdot z' \cong P^\mu \times (C \cdot z \cup C \cdot z')$  (voir 2.9) est un ouvert affine de  $Z$ , donc son complémentaire est pur de codimension 1 dans  $Z$ . Comme  $G \cdot z' - P \cdot z'$  est de codimension 2 dans  $Z$ , on a  $G \cdot z' - P \cdot z' \subset \overline{G \cdot z - P \cdot z}$ . Alors  $Y' - P \cdot \varphi(z') \subset \varphi(G \cdot z' - P \cdot z') \subset \varphi(\overline{G \cdot z - P \cdot z}) \subset \varphi(\overline{G \cdot z - P \cdot z}) \subset \bar{\Delta}$ .

ii) Soit  $Y'$  une  $G$ -orbite dans  $Y$ , non incluse dans  $\bar{\Delta}$ . D'après i),  $Y' - \bar{\Delta}$  est l'orbite ouverte de  $P$  dans  $Y'$ . Puisque  $L$  est adapté à  $H$ ,  $\overline{C \cdot y}$  rencontre  $Y' - \bar{\Delta}$ . Le morphisme  $\psi: P^\mu \times W \rightarrow Y - \bar{\Delta}$  est donc surjectif. Puisque  $\psi$  induit un isomorphisme  $P^\mu \times C \cdot y \rightarrow P \cdot y$ ,  $\psi$  est birationnel.



Montrons de plus que les fibres de  $\psi$  sont finies. Alors le théorème principal de Zariski impliquera que  $\psi$  est un isomorphisme.

Quitte à remplacer  $Y$  par l'ensemble des  $x \in Y$  tels que  $\bar{\Delta}$  ne contienne pas  $G \cdot x$ , on peut supposer que  $Y$  est sans couleur. D'après 3.3, on peut aussi supposer que  $Y$  est complet. Soit  $Z$  une orbite fermée de  $G$  dans  $Y$ . En remplaçant  $Y$  par l'ensemble des  $x \in Y$  tels que  $\overline{G \cdot x} \supset Z$ , on se ramène enfin au cas où  $Y$  est simple sans couleur, d'orbite fermée et complète  $Z$ . En utilisant [BLV; 2.3 et 3.2], on montre aisément que  $Z - \bar{\Delta}$  est l'unique orbite fermée de  $P$  dans  $Y - \bar{\Delta}$ , et qu'elle est isomorphe à  $P'' \cong P/L$ . Par conséquent, l'ensemble des points de  $Y - \bar{\Delta}$  au-dessus desquels la fibre de  $\psi$  est finie, contient les orbites fermées de  $P$ . Comme cet ensemble est un ouvert  $P$ -stable, il est égal à  $Y - \bar{\Delta}$ . ■

**3.5 PROPOSITION.** *Soit  $(Y, y)$  un plongement normal de  $G/H$ ; soit  $Y'$  une  $G$ -orbite dans  $Y$ . Alors l'adhérence  $\overline{Y'}$  de  $Y'$  dans  $Y$  est une variété normale.*

*Démonstration.* Grâce à [BLV; §3] on peut supposer que  $Y$  est affine. Soit  $U$  le radical unipotent de  $B$ . Alors l'algèbre  ${}^U k[Y]$  des fonctions régulières sur  $Y$ , invariante par  $U$ , est de type fini et normale [V; Th. 1] (cf. aussi [KR; III.3.3, Satz 2]). Le tore  $B/U$  opère sur  $Y_U$ , le spectre de  ${}^U k[Y]$ , avec une orbite ouverte (car les  $B/U$ -modules irréductibles dans  ${}^U k[Y]$  sont de multiplicité  $\leq 1$ ). Soit  $I$  l'idéal des fonctions régulières sur  $Y$  qui s'annulent partout sur  $Y'$ . Alors  ${}^U k[\overline{Y'}] \cong {}^U k[Y]/{}^U I$ , donc  ${}^U k[\overline{Y'}]$  est l'algèbre des fonctions régulières sur l'adhérence d'une  $B/U$ -orbite dans  $Y_U$ . D'après [K; Chap. I, Prop. 2],  ${}^U k[\overline{Y'}]$  est normale, d'après [V; Th. 1] cela implique la normalité de  $Y'$ . ■

**3.6 THÉORÈME.** *Soit  $(X, x)$  un plongement élémentaire de  $G/H$  d'orbite fermée  $X'$ . Soit  $\lambda$  un sous-groupe à un paramètre de  $C$  adapté à  $(X, x)$  (cf. 2.10). Soient  $x' = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)x$  et  $H'$  le groupe d'isotropie de  $x'$  dans  $G$ . Alors:*

- i)  $BH'$  est ouvert dans  $G$ ; l'ensemble des  $s \in G$  tels que  $sBH' = BH'$  est égal à  $P$ , et  $L$  est adapté à  $H'$ .
- ii) Soit  $\varphi: Y(C/C \cap H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow Y(C/C \cap H') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  l'application surjective définie par l'inclusion  $C \cap H \subset C \cap H'$ . Alors le noyau de  $\varphi$  est  $\mathbb{Q}v_\lambda$  (cf. 2.8) et l'image de  $\mathcal{CV}(G/H)$  par  $\varphi$  est  $\mathcal{CV}(G/H')$ .

*Démonstration.* i) Remarquons que  $(L, L) \subset H'$ : en effet  $(L, L)$  fixe  $x$  et centralise l'image de  $\lambda$ . Puisque  $P \cdot x' = P''L \cdot x' = P''C \cdot x'$  est ouvert dans  $X'$ , et que  $P''C \subset B$ , on voit que  $BH' = PH'$  est ouvert dans  $G$ .

Soit  $P' := \{s \in G \mid sBH' = BH'\}$ ; on vient de voir que  $P \subset P'$ , donc  $P'' \subset P'$ .

D'après [BLV; 3.4],  $P'' \cap H' = \{1\}$  et il existe un sous-groupe de Levi  $L'$  de  $P'$  tel que  $(L', L') \subset H'$ ; il s'ensuit que tout sous-groupe unipotent de  $P'$ , qui contient strictement  $P''$ , rencontre  $H'$  non trivialement. Mais  $P'' \cap H' = \{1\}$  car  $P''$  opère librement sur  $P \cdot x'$  (cf. 2.9). Donc  $P'' = P'''$ , d'où  $P = P'$ .

Comme l'application naturelle  $P'' \times C \cdot x' \rightarrow P \cdot x'$  est un isomorphisme, on voit facilement que  $P \cap H' = L \cap H'$ . Pour montrer que  $L$  est adapté à  $H'$ , il reste à montrer que pour tout plongement élémentaire  $(Z, z)$  de  $G/H'$ , d'orbite fermée  $Z'$ ,  $\overline{C \cdot z}$  rencontre l'orbite ouverte de  $B$  dans  $Z'$  [BLV; 4.2].

Soit  $(X^c, x^c)$  une complétion normale de  $(X, x)$ . Soit  $\overline{X'}$  l'adhérence de  $X'$  dans  $X^c$ . Soit  $(Z, z)$  un plongement élémentaire de  $G/H'$  d'orbite fermée  $Z'$ . Comme  $\overline{X'}$  est complet, il existe un morphisme de plongements  $f: Z \rightarrow \overline{X'}$ . Soit  $\mathcal{O}$  l'orbite ouverte de  $P$  dans  $f(Z')$ . D'après 3.4,  $\mathcal{O}$  contient un point de  $\overline{C \cdot x'}$ . Alors  $f^{-1}(\mathcal{O})$  est la  $P$ -orbite ouverte dans  $Z'$  et  $\overline{C \cdot z} = \overline{f^{-1}(C \cdot x')}$  rencontre  $f^{-1}(\mathcal{O})$ .

ii) Remarquons d'abord que puisque  $\dim(C \cdot x') = \dim(C \cdot x) - 1$ , la composante neutre  $(C \cap H')^0$  de  $C \cap H'$  est engendrée par  $(C \cap H)^0$  et  $\text{Im}(\lambda)$ , donc  $\varphi$  s'identifie au quotient par  $\mathbb{Q}v_\lambda$ . Soit  $v \in \mathcal{CV}(G/H)$ . On peut choisir  $\mu \in Y(C/C \cap H)$  tel que  $v$  soit équivalente à  $v_\mu$ . Supposons que  $\lambda$  et  $\mu$  ne sont pas proportionnels, c'est-à-dire que  $\varphi(\mu) \neq 0$ . Alors le cône convexe engendré par  $v_\lambda$  et  $v_\mu$  dans  $\mathcal{CV}(G/H)$  est saillant; on peut donc lui associer un plongement  $(X_\mu, x)$  normal, simple, sans couleur de  $G/H$ , qui vérifie  $X \subset X_\mu$  (voir 2.6).

Soient  $\bar{\Delta}$  l'adhérence de  $G \cdot x - P \cdot x$  dans  $X_\mu$ , et  $\overline{C \cdot x}$  l'adhérence de  $C \cdot x$  dans  $X_\mu - \bar{\Delta}$ . D'après 3.4 le morphisme naturel  $P'' \times \overline{C \cdot x} \rightarrow X_\mu - \bar{\Delta}$  est un isomorphisme et  $\overline{C \cdot x}$  est un plongement normal du tore  $C/C \cap H$ , dont le cône associé est engendré par  $\lambda$  et  $\mu$ .

D'après [K; Chap. I],  $\lim_{t \rightarrow 0} \mu(t)x'$  existe dans  $\overline{C \cdot x'} - C \cdot x'$  (où  $\overline{C \cdot x'}$  est l'adhérence de  $C \cdot x'$  dans  $\overline{C \cdot x}$ ), et  $\overline{C \cdot x'}$  est le plongement élémentaire du tore  $C/C \cap H'$  associé à  $\varphi(\mu)$ . Donc  $\overline{G \cdot x'}$  est un plongement élémentaire de  $G/H'$ , et  $\varphi(\mu)$  est un sous-groupe à un paramètre de  $C/C \cap H'$  adapté à  $\overline{G \cdot x'}$ . Par suite  $\varphi(\mu) \in \mathcal{CV}(G/H')$ .

Pour montrer que  $\varphi$  est surjective, on utilise 3.1. Soit  $(X^c, x)$  une complétion sans couleur de  $(X, x)$ , et soit  $\overline{X'}$  l'adhérence de  $X'$  dans  $X^c$ . Alors  $\overline{X'}$  est un plongement normal (cf. 3.5), complet sans couleur (cf. 3.4) de  $G/H'$ . Soient  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  des sous-groupes à un paramètre de  $C$  adaptés aux différentes  $G$ -orbites de codimension 1 dans  $X^c$ ; d'après ce qui précède, parmi  $\lambda_2, \dots, \lambda_r$  se trouve pour chaque  $G$ -orbite de codimension 1 dans  $X'$  un sous-groupe à un paramètre adapté à cette orbite. D'après 2.7,  $v_{\lambda_1}, \dots, v_{\lambda_r}$  engendrent le cône  $\mathcal{CV}(G/H)$ ; de même  $\varphi(v_{\lambda_2}), \dots, \varphi(v_{\lambda_r})$  engendrent  $\mathcal{CV}(G/H')$ , donc  $\varphi$  est surjective. ■

Le corollaire suivant indique comment varie  $\mathcal{CV}(G/H)$  lorsqu'on déforme



l'espace homogène  $G/H$  de façon  $G$ -équivariante. (Voir [B2] pour un exemple d'une telle déformation).

**3.7 COROLLAIRE.** *Soit  $Z$  une  $(G \times k^*)$ -variété lisse, munie d'un  $(G \times k^*)$ -morphisme plat  $p: Z \rightarrow k$  (où  $G$  opère trivialement sur  $k$ , et  $k^*$  opère par homothéties) tels que  $p^{-1}(k^*) \cong G/H \times k^*$ , et que  $p^{-1}(0)$  est une  $G$ -orbite. Soit  $H_0$  le groupe d'isotropie d'un point de  $p^{-1}(0)$ . Il existe alors  $\lambda \in Y(C/C \cap H)$  tel que  $\mathcal{CV}(G/H_0)$  s'identifie à  $\mathcal{CV}(G/H) + \mathbb{Q}\lambda$ .*

*Démonstration.* On peut considérer  $Z$  comme un plongement élémentaire de  $(G \times k^*)/H$ . On vérifie sans peine que  $L \times k^*$  est adapté au sous-groupe  $H$  de  $G \times k^*$ , et que l'isomorphisme  $Y(C/C \cap H \times k^*) \rightarrow Y(C/C \cap H) \times \mathbb{Z}$  fournit un isomorphisme  $\mathcal{CV}(G \times k^*/H) \rightarrow \mathcal{CV}(G/H) \times \mathbb{Q}$ . Soit  $\tilde{\lambda}$  un sous-groupe à un paramètre de  $C/C \cap H \times k^*$ , adapté à  $Z$ ; écrivons  $\tilde{\lambda}(t) = (\lambda(t), t^n)$  où  $\lambda \in Y(C/C \cap H)$  et  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ . D'après le théorème 3.6,  $\mathcal{CV}(G \times k^*/H_0 \times k^*)$  s'identifie au quotient de  $\mathcal{CV}(G \times k^*/H)$  par  $\mathbb{Q}\tilde{\lambda}$ ; le corollaire s'en déduit immédiatement. ■

**3.8 COROLLAIRE.** *Soient  $(X, x)$  un plongement élémentaire de  $G/H$ , et  $v \in \mathcal{CV}(G/H)$  la valuation correspondante. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (1) *Le groupe d'isotropie d'un point de l'orbite fermée de  $X$  contient un sous-groupe unipotent maximal de  $G$ .*
- (2) *La valuation  $v$  est à l'intérieur de  $\mathcal{CV}(G/H)$ .*

*Démonstration.* Avec les notations du théorème, (2) équivaut au fait que  $\mathcal{CV}(G/H') = Y(C/C \cap H') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ . Mais d'après [P1; Prop. 2.5], le cône  $\mathcal{CV}(G/H')$  est un espace vectoriel si et seulement si  $H'$  contient un sous-groupe unipotent maximal de  $G$  (ce résultat sera redémontré en 5.4). ■

Si  $H'$  est le sous-groupe d'isotropie d'un point de l'orbite fermée d'un plongement élémentaire de  $G/H$ , alors  $H'$  contient “presque toujours” un sous-groupe unipotent maximal de  $G$ . On va donc étudier ce cas plus en détail.

**3.9 PROPOSITION.** *Si  $H$  contient un sous-groupe unipotent maximal,  $L$  est l'unique sous-groupe de Levi de  $P$  adapté à  $H$ .*

*Démonstration.* Si  $\mu$  est un sous-groupe à un paramètre de  $G$ , on pose  $G(\mu) := \{s \in G \mid \lim_{t \rightarrow 0} \mu(t)s\mu(t)^{-1} \text{ existe dans } G\}$ ; c'est un sous-groupe parabolique de  $G$  (cf. [M; Def. 2.3, Prop. 2.6]). D'après [BLV; 4.2], les sous-groupes

de Levi de  $P$  adaptés à  $H$  sont tous conjugués par un sous-groupe  $R$  de  $P^u$ , et  $R$  est inclus dans l'intersection des  $G(\mu)$ , où  $\mu$  parcourt l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de  $C$ , adaptés à  $H$ . Mais comme  $\mathcal{CV}(G/H) = Y(C/C \cap H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ , tout  $\mu \in Y(C)$  avec  $\text{Im}(\mu) \not\subseteq C \cap H$  est adapté à  $H$ , donc  $R = \{1\}$ , d'où la proposition. ■

**3.10 PROPOSITION.** *On conserve les notations du théorème, et on suppose de plus que  $H'$  contient un sous-groupe unipotent maximal.*

- i) *Notons  $Q$  l'unique sous-groupe parabolique de  $G$  tel que  $P \cap Q = L$ . Alors  $L$  normalise  $H'$ , on a  $H' = Q^u(L \cap H')$  et la composante neutre  $(L \cap H')^0$  de  $L \cap H'$  est engendrée par  $(L \cap H)^0$  et  $\text{Im}(\lambda)$ .*
- ii) *Soit  $\overline{C \cdot x}$  l'adhérence de  $C \cdot x$  dans  $X$ . Alors les orbites de  $C$  dans  $\overline{C \cdot x} \cap X'$  sont toutes de codimension 1 dans  $\overline{C \cdot x}$ .*

*Démonstration.* i) Soit  $f \in k[G]$  tel que l'ensemble des zéros de  $f$  soit  $G - BH'$ . Soient  $N$  un  $G$ -module simple,  $n \in N$  et  $v \in N^*$  tels que  $f = v(\cdot n)$ . Puisque  $H'$  contient un sous-groupe unipotent maximal,  $kn$  est l'ensemble des vecteurs propres de  $(H')^0$  dans  $N$ . Comme  $H'$  normalise  $(H')^0$ , on voit que  $H'$  stabilise  $kn$ . Notons  $Q'$  le stabilisateur de  $kn$  dans  $G$ ; alors  $H' \subseteq Q'$ . De plus  $Q'$  est un sous-groupe parabolique de  $G$ , opposé au stabilisateur  $P$  de  $kv$ . Donc  $L' := P \cap Q'$  est un sous-groupe de Levi de  $P$ , et  $f$  est un point fixe de  $L'$  opérant par conjugaison sur  $k[G]$ . Par conséquent  $L'$  fixe  $df(1)$ , la différentielle de  $f$  en  $1 \in G$ , donc  $L'$  est adapté à  $H'$  d'après [BLV; 3.5].

D'après 3.9 on a  $L' = L$ , d'où  $Q' = Q$ . Puisque  $Q^u(L, L) \subset H' \subset Q$ , on voit que  $L$  normalise  $H'$  et que  $H' = Q^u(L \cap H')$ . Enfin, comme  $(C \cap H')^0 = (C \cap H)^0 \text{Im}(\lambda)$ , on voit aussi que  $(L \cap H')^0 = (L \cap H)^0 \text{Im}(\lambda)$ .

ii) Soit  $\mathcal{O}$  une  $C$ -orbite dans  $\overline{C \cdot x} \cap X'$ . Il existe  $\mu \in Y(C)$  tel que  $y = \lim_{t \rightarrow 0} \mu(t)x$  existe et appartient à  $\mathcal{O}$  [K; Ch. I, Theorem 2]. Soit  $L^\mu = (L \cap H)^0 \text{Im}(\mu)$ . Puisque  $L^\mu$  est réductif connexe et que la dimension de  $L^\mu$  est celle d'un sous-groupe de Levi de  $H'$ ,  $L^\mu$  est un sous-groupe de Levi de  $G_y^0$ . Comme  $(L, L) \subset L^\mu \subset L_y^0$ , on voit que  $L_y^0$  est réductif, donc que  $L_y^0 = L^\mu$ . Par suite,  $C_y^0 = (C \cap H)^0 \text{Im}(\mu)$ , d'où  $\dim(C \cdot y) = \dim(C) - \dim(C_y^0) = \dim(C \cdot x) - 1$ . ■

**3.11** Le résultat suivant est une réponse (technique) à la question naturelle: si  $v \in \mathcal{V}(G/H)$ , quels sont les sous-groupes à un paramètre  $\mu$  de  $C$  tels que les valuations  $v$  et  $v_\mu$  soient équivalentes?

**PROPOSITION.** *On conserve les notations et hypothèses de 3.10. Soit*

$\mu \in Y(C)$ . Les conditions suivantes sont équivalentes:

- a)  $\lim_{t \rightarrow 0} \mu(t)x$  existe et appartient à  $X'$ .
- b) Les valuations  $v_\mu$  et  $v$  sont équivalentes.
- c) Il existe des entiers  $m, n$  strictement positifs;  $\lambda' \in Y(L)$  et  $s \in G(\lambda')H$  tels que  $\lambda'(t^n)x = \lambda(t^m)x$  pour tout  $t \in k^*$ , et  $\mu = s^{-1}\lambda's$ .

*Démonstration.* L'équivalence de a) et b) résulte de 2.8.

c)  $\Rightarrow$  a): Ecrivons  $s = gh$  où  $g \in G(\lambda')$  et  $h \in H$ . Alors  $\mu(t)x = s^{-1}\lambda'(t)sx = s^{-1} \cdot \lambda'(t)g\lambda'(t)^{-1} \cdot \lambda'(t)x$ . En outre  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda'(t)x = x'$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda'(t)g\lambda'(t)^{-1}$  existe dans  $G$ . Donc  $\lim_{t \rightarrow 0} \mu(t)x$  existe et appartient à  $X'$ .

a)  $\Rightarrow$  c): Soit  $\mu \in Y(C)$  tel que  $y = \lim_{t \rightarrow 0} \mu(t)x$  existe et appartient à  $X'$ . Soit  $s \in G$  tel que  $y = s^{-1}x'$ . Comme  $\text{Im}(\mu) \subset G_y$ , on a  $s(\text{Im}(\mu))s^{-1} \subset H'$  donc, d'après 3.9, il existe  $h \in Q''$  tel que  $\lambda' = h^{-1}s\mu s^{-1}h$  soit un sous-groupe à un paramètre de  $L \cap H'$ . Comme  $h \in Q'' \subseteq H' = G_{x'}$ , on peut remplacer  $s$  par  $h^{-1}s$ . Alors  $\lambda' = s\mu s^{-1}$ , et  $\lambda'(t)sx = s\mu(t)x$  converge vers  $x'$  quand  $t$  tend vers zéro, d'où  $\overline{P \cdot sx}$  contient  $P \cdot x'$ . Comme  $P \cdot x'$  est ouvert dans  $X'$ , on voit que  $P \cdot sx$  est ouvert dans  $G \cdot x$ , i.e.  $s \in PH$ .

Soient  $p \in P''$ ,  $c \in C$  et  $h \in H$  tels que  $s = pch$ . Alors  $x' = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda'(t)sx = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda'(t)p\lambda'(t)^{-1} \cdot c\lambda'(t)x$ . Puisque l'opération de  $P''$  sur  $X$  induit un isomorphisme  $P \cdot x \cup P \cdot x' \cong P'' \times (C \cdot x \cup C \cdot x')$ , on voit que  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda'(t)x$  existe et appartient à  $C \cdot x'$ , et que  $p \in G(\lambda')$ . Comme  $C \cdot x \cup C \cdot x'$  est le plongement élémentaire de  $C/C \cap H$  associé à  $\lambda$ , il existe des entiers  $m, n > 0$  tels que  $\lambda'(t^n)x = \lambda(t^m)x$ , d'où le résultat. ■

*Remarque.* Si  $H'$  ne contient pas de sous-groupe unipotent maximal de  $G$ , il se peut que  $\overline{C \cdot x} \cap X'$  contienne des  $C$ -orbites de codimension au moins deux. L'exemple suivant est dû à Th. Vust:

Soient  $G = SL(3, k)$ ;  $e_1, e_2, e_3$  la base canonique de  $k^3$  et  $e_1^*, e_2^*, e_3^*$  la base duale. Soit  $H$  le stabilisateur dans  $G$  de  $e_1 + e_3$  et  $e_1^* + e_3^*$ ; alors  $H$  est isomorphe à  $SL(2, k)$ . Soient  $B$  le sous-groupe de Borel de  $G$  qui fixe le drapeau  $(e_1, e_2, e_3)$  et  $T$  le tore maximal de  $B$  qui fixe les droites  $ke_1, ke_2, k(e_1 + e_3)$ . On vérifie facilement (cf. [BLV; 2.5]) que  $BH$  est ouvert dans  $G$ ;  $P = B$ ;  $T$  est un sous-tore de  $B$  adapté à  $H$ ; l'adhérence de  $TH/H$  dans  $G/H$  est un plongement élémentaire de  $T$ . Soit  $K$  le normalisateur de  $H$  dans  $G$ ; alors  $K \cong GL(2, k)$  donc le déterminant fournit un caractère  $\chi$  de  $K$ , de noyau  $H$ . Soit  $X = G \times_K k$  où on fait opérer  $K$  sur  $G$  par translations à droite, et sur  $k$  par homothéties via  $\chi$ ; alors  $X$  est un plongement élémentaire affine de  $G/H$ , d'orbite fermée  $X'$  isomorphe à  $G/K$ . L'adhérence  $\overline{T \cdot x}$  de  $T \cdot x$  dans  $X$  est donc un plongement affine de  $T$ , contenant au moins deux plongements élémentaires; donc  $T$  a un point fixe dans  $\overline{T \cdot x} \cap X'$ .

#### 4. Le cône des valuations

Dans cette partie on étudie le cône des valuations  $\mathcal{CV}(G/H)$  dans  $V$ , et son cône dual  $\Sigma$  dans  $V^* = X(C/C \cap H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ; rappelons que  $\Sigma$  est l'ensemble des  $\sigma \in V^*$  tels que  $\langle \sigma, c \rangle \geq 0$  pour tout  $c \in \mathcal{CV}(G/H)$ .

4.1 Soit  $f \in \mathcal{P}_+$ ; soit  $\omega$  (resp.  $\chi$ ) le poids de  $f$  par rapport à  $P$  (resp.  $H$ ). On voit facilement que le couple  $(\omega, \chi)$  détermine  $f$  et que  $\omega|_{P \cap H} = -\chi|_{P \cap H}$ ; on note  $f = [\omega, \chi]$ .

**PROPOSITION.**  $\Sigma$  est l'enveloppe convexe des  $\pi - \omega - \omega'$ , tels qu'il existe  $f = [\omega, \chi]$ ,  $f' = [\omega', \chi']$  et  $\varphi = [\pi, \chi + \chi']$  dans  $\mathcal{P}_+$  avec  $\varphi$  dans l'espace vectoriel engendré par les produits  $(sf)(s'f')$ , où  $s, s' \in G$ .

*Remarque.* Si  $f, f', \varphi$  sont comme ci-dessus, alors  $ff'/\varphi \in \mathcal{P}^H$ , donc  $\pi - \omega - \omega'$  s'identifie à un caractère de  $C/C \cap H$ .

*Démonstration.* Analogue à celle de [P1; proposition 2.1]. ■

Soit  $T$  un tore maximal de  $G$  contenu dans  $B \cap L$ . Soit  $Q_-$  le cône convexe de  $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  engendré par les racines négatives de  $G$  par rapport à  $(B, T)$ . Puisque  $C \subset T$  et que  $L \cap H \supset (L, L)$ , l'application naturelle  $X(T/T \cap H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow X(C/C \cap H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  est un isomorphisme. On peut donc plonger  $\Sigma$  dans  $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ .

**COROLLAIRE.** i)  $\Sigma$  est inclus dans  $Q_-$ .

ii)  $\mathcal{CV}(G/H)$  est un cône convexe qui engendre l'espace vectoriel  $V$ .

*Démonstration.* i) résulte de la proposition et de [BO; §7, proposition 9].

ii) résulte de i) et du fait que  $Q_-$  est saillant. ■

*Remarque.* Supposons de plus que  $G/H$  est quasi-affine, c'est-à-dire que  $k(G)^H$  est le corps des fractions de  $k[G]^H$ . Soit  $k[G]^H = \bigoplus_{\omega \in \Omega} M_{\omega}$  la décomposition de  $k[G]^H$  en  $G$ -modules simples, où chaque  $M_{\omega}$  est de plus grand poids  $\omega$ . Alors  $M_{\omega}$  est l'espace vectoriel engendré par les translatés à gauche de  $[\omega, 1] \in \mathcal{P}_+^H$ , donc le monoïde  $\Omega$  est isomorphe à  $\mathcal{P}_+^H$ . On peut montrer (cf. [P1; proposition 2.1]) que  $\Sigma$  est engendré par les  $\pi - \omega - \omega'$ , où  $\omega, \omega', \pi \in \Omega$  et  $M_{\pi}$  est inclus dans le  $G$ -module engendré par les produits  $ff'$ , où  $f \in M_{\omega}, f' \in M_{\omega'}$ .

4.2 Soit  $(X, x)$  un plongement élémentaire de  $G/H$ , d'orbite fermée  $X'$ . Soient

$\lambda$  un sous-groupe à un paramètre adapté à  $(X, x)$ , et  $H'$  le groupe d'isotropie de  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)x$ .

L'inclusion  $C \cap H \subset C \cap H'$  définit une application injective  $\varphi^*: X(C/C \cap H') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow X(C/C \cap H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ . Soit  $\Sigma'$  le cône dual de  $\mathcal{CV}(G/H')$  dans  $X(C/C \cap H') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ . D'après le théorème 3.6, ii), l'image de  $\Sigma'$  par  $\varphi^*$  est la facette de  $\Sigma$  orthogonale à  $\lambda$ .

D'autre part, on a:  $\text{rg}(G/H') = \text{rg}(G/H) - 1$ . En continuant ce processus, on associe à toute demi-droite extrémale  $\delta$  de  $\Sigma$  un espace homogène sphérique de rang 1 dont  $\delta$  est le cône dual du cône des valuations.

Cela conduit à la proposition suivante, qui montre en particulier, que pour un rang fixé, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour  $\Sigma$ .

**PROPOSITION.** *Le cône convexe  $\Sigma$  est engendré par des racines négatives, et des sommes de deux racines négatives fortement orthogonales.*

*Remarque.* Ce dernier cas peut se produire, voir l'exemple 1 de 4.3.

*Démonstration.* Il suffit de démontrer l'assertion suivante:

Soit  $G/H$  un espace homogène sphérique de rang 1, tel que  $\Sigma \neq \{0\}$ . Alors  $\Sigma$  est engendré par une racine négative ou la somme de deux racines négatives fortement orthogonales.

*Première méthode:* Le groupe  $T \cap H$  est de codimension 1 dans  $T$ ; soit  $\chi$  un caractère de  $T$  dont le noyau est  $T \cap H$ . Il est clair que  $\chi$  ou  $-\chi$  engendrent  $\Sigma$ ; on peut donc supposer que  $\chi \in Q_-$  (d'après le corollaire 4.1).

Soient  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{H}$  les algèbres de Lie de  $G$ ,  $B$ ,  $H$  et soit  $\mathfrak{G} = \bigoplus_{\alpha \in X(T)} \mathfrak{G}^\alpha$  la décomposition de  $\mathfrak{G}$  en sous-espaces propres de  $T$ , et  $\mathfrak{G} = \bigoplus_{\beta \in X(T \cap H)} \mathfrak{G}_\beta$  la décomposition de  $\mathfrak{G}$  en sous-espaces propres de  $T \cap H$ . Alors  $\mathfrak{G}_{\alpha|T \cap H} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{G}^{\alpha + n\chi}$ , pour tout  $\alpha \in X(T)$ . Comme  $\mathfrak{G} = \mathfrak{B} + \mathfrak{H}$  et que  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{H}$  sont stables par  $T \cap H$ , on a pour tout  $\beta \in X(T \cap H)$ :  $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{G}_\beta = \{0\}$  implique  $\mathfrak{G}_\beta \subset \mathfrak{H}$ . On en déduit que  $\chi$  est proportionnel à une racine ou à la somme de deux racines: sinon, on aurait  $\mathfrak{G}^\alpha = \mathfrak{G}_{\alpha|T \cap H}$  pour tout  $\alpha \in X(T)$ , d'où  $\bigoplus_{\alpha \in Q_- - \{0\}} \mathfrak{G}^\alpha \subset \mathfrak{H}$ . Donc  $H$  contiendrait un sous-groupe unipotent maximal de  $G$ , ce qui contredit le fait que  $\Sigma \neq \{0\}$  (cf. corollaire 3.7).

Soit  $\alpha \in X(T)$  tel que  $\mathfrak{G}_{\alpha|T \cap H} \neq \mathfrak{G}^\alpha$ . Soit  $\mathfrak{G}'$  la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{G}$  engendrée par les  $\mathfrak{G}^{\alpha + n\chi}$  et  $\mathfrak{G}^{-\alpha - n\chi}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . C'est une algèbre semisimple de rang  $\leq 2$ , et  $\mathfrak{G}' = \mathfrak{B}' + \mathfrak{H}'$ , où  $\mathfrak{B}' = \mathfrak{G}' \cap \mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{H}' = \mathfrak{G}' \cap \mathfrak{H}$ . On voit facilement que l'espace homogène (sphérique) associé à  $(\mathfrak{G}', \mathfrak{H}')$  est de rang 1.

Il suffit donc de démontrer l'assertion dans le cas où  $G$  est semisimple de rang

$\leq 2$ . D'après ce qui précède,  $\chi$  est contenu dans  $Q_-$ , et proportionnel à une racine ou à la somme de deux racines.

En utilisant la classification des systèmes de racines de rang 2, on voit que  $\chi$  est proportionnel à une racine négative ou à une somme de deux racines négatives fortement orthogonales, sauf peut-être dans les cas suivants (on note  $\alpha$ ,  $\beta$  les racines simples de  $\mathfrak{G}$ ):

- a)  $\mathfrak{G} = \mathfrak{sl}(3, k)$  et  $\chi$  est proportionnel à  $-\alpha - (\alpha + \beta)$ ;
- b)  $\mathfrak{G} = \mathfrak{so}(5, k)$  et  $\chi$  est proportionnel à  $-\alpha - (\beta + 2\alpha)$ ,  $\alpha$  est la racine simple courte;
- c)  $\mathfrak{G} = \mathfrak{so}(5, k)$  et  $\chi$  est proportionnel à  $-\beta - (\beta + \alpha)$ ,  $\alpha$  est la racine simple courte.

Dans le cas a), d'après ce qui précède, on a  $\mathfrak{G}^{-\alpha} + \mathfrak{G}^{-\alpha-\beta} \subseteq \mathfrak{H}$ . On en déduit facilement que  $H$  est conjugué au groupe étudié dans l'exemple 2 de 4.3. On sait alors (voir 4.3) que  $\Sigma$  est engendré par une racine négative. Donc ce cas ne peut pas se produire.

Dans le cas b), on a  $\mathfrak{G}^{-\alpha} + \mathfrak{G}^{-2\alpha-\beta} \subseteq \mathfrak{H}$ ,  $(\mathfrak{G}^\beta + \mathfrak{G}^{-\beta-\alpha}) \cap \mathfrak{H} \neq \{0\}$  et  $(\mathfrak{G}^\beta + \mathfrak{G}^{\alpha+\beta}) \cap \mathfrak{H} \neq \{0\}$ . On en déduit facilement que  $H$  contient  $T$  ou un sous-groupe unipotent maximal de  $G$ , ce qui n'est pas possible.

Le cas c) est exclu de manière analogue au cas b).

Deuxième méthode: L'espace homogène  $G/H$  est de rang 1, donc admet un plongement élémentaire complet  $(X, x)$ . Une telle situation a été étudiée par D. Ahiezer dans [A2]; résumons une partie de ses résultats.

Il existe un sous-groupe parabolique  $P'$  de  $G$ , et un sous-groupe de Levi  $L'$  de  $P'$ , tels que  $H \subset P'$  et qu'on soit dans l'un des cas suivants:

- i)  $H = H''L'$  où  $H'' \subset P''$  est le radical unipotent de  $H$ ; la  $P'$ -variété  $P'/H' = P''/H''$  est isomorphe à un espace vectoriel  $M$  sur lequel  $P'$  opère par transformations affines, et  $L'$  opère transitivement sur  $\mathbb{P}(M)$ ; on a  $X = G \times_P \mathbb{P}(M \oplus k)$ .
- ii)  $H = P''H'$  où  $H'$  est un sous-groupe réductif de  $L'$ , et où  $L'/H'$  est de rang 1. Si  $Y$  est un plongement élémentaire complet de  $L'/H'$ , on a  $X = G \times_{P'} Y$  où  $P''$  opère trivialement sur  $Y$ .

De plus, Ahiezer donne la liste de tous les  $(L', M)$  (dans le cas i)) ou  $(L', H')$  (dans le cas ii)) possibles. La proposition se vérifie aisément dans le cas i); dans le cas ii), on peut montrer que si  $N$  est un  $L'$ -module simple tel que  $H'_N \neq 0$ , alors le plus grand poids de  $N$  engendre  $-\Sigma$ ; puis on utilise la classification de [A2]. ■

**4.3 EXEMPLES.** 1) Cet exemple montre qu'en général  $\Sigma$  n'est pas engendré par des racines négatives.

Soient  $G = SL(2, k) \times SL(2, k)$ , et  $H = SL(2, k)$  la diagonale de  $G$ . Soient



$B_1, B_2$  deux sous-groupes de Borel opposés de  $SL(2, k)$ , et  $T = B_1 \cap B_2$ . On vérifie facilement que si  $B = B_1 \times B_2$ , alors  $BH$  est ouvert dans  $G$ , et que de plus  $P = B$ , et  $L = C = T \times T$  est un sous-groupe de Levi de  $P$  adapté à  $H$ ; l'espace homogène  $G/H$  est de rang 1.

Soient  $x_1, x_2 \in k^2$  tels que chaque  $x_i$  soit un vecteur propre de  $B_i$ , et que  $\det(x_1, x_2) = 1$ . L'application  $f: G \rightarrow k$  telle que  $f(s, t) = \det(s^{-1}x_1, t^{-1}x_2)$  pour  $s, t \in SL(2, k)$ , est un élément de  $\mathcal{P}_+^H$ . On vérifie sans peine que  $f$  engendre le monoïde  $\mathcal{P}_+^H$ , et que l'espace vectoriel engendré par les  $(sf)(s'f)$ , où  $s, s' \in G$ , contient les fonctions constantes sur  $G$ . A l'aide de la remarque précédente (qui s'applique car  $G/H$  est affine), on en déduit que  $\Sigma$  est engendré par  $(-\alpha, +\alpha)$ , où  $\alpha$  est la racine de  $B_1$  par rapport à  $T$ . On aurait pu aussi déterminer  $\Sigma$  en remarquant que tout caractère de  $C$ , trivial sur  $C \cap H$ , est proportionnel à  $(-\alpha, +\alpha)$ .

2) Soit  $G = SL(3, k)$ ; soient  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $k^3$ , et  $(e_1^*, e_2^*, e_3^*)$  la base duale. Soit  $H$  le sous-groupe de  $G$  qui stabilise les droites  $ke_1^*$ , et  $k(e_1^* + e_2^*)$ . Soient  $B$  le sous-groupe de Borel de  $G$  qui fixe le drapeau  $(e_1, e_2, e_3)$ , et  $T$  le tore standard de  $B$ . On peut vérifier que  $BH$  est ouvert dans  $G$ , que  $P = B$  et que  $T$  est adapté à  $H$ .

Soient  $f_1, f_2, f_3$  les applications de  $G$  dans  $k$  définies par:  $f_1(s) = \langle e_3^*, se_3 \rangle$ ;  $f_2(s) = \langle e_1, se_1^* \rangle$ ;  $f_3(s) = \langle e_1, s(e_1^* + e_2^*) \rangle$ . Alors  $f_1, f_2, f_3$  engendrent librement le monoïde  $\mathcal{P}_+$ , et pour tout  $s \in G$  tel que  $se_1 = e_2$ , on a  $f_1 = f_2(sf_3) - (sf_2)f_3$ . Avec les notations précédentes, on a  $f_1 = [\omega_2, \chi_1]$ ;  $f_2 = [\omega_1, \chi_2]$  et  $f_3 = [\omega_1, \chi_1^{-1}\chi_2^{-1}]$  où  $\chi_1, \chi_2$  sont des caractères de  $H$  et  $\omega_1, \omega_2$  les poids fondamentaux de  $T$ .

D'autre part, on a  $\dim(T \cap H) = 1$ , donc  $G/H$  est de rang 1. On en déduit que  $\Sigma$  est engendré par le caractère  $-2\omega_1 + \omega_2 = -\alpha_1$  de  $T$ . Dans cet exemple,  $G/H$  n'est pas quasi-affine.

3) Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 4 sur  $k$ , muni d'une forme symplectique non dégénérée  $(\cdot | \cdot)$ . Notons  $G$  le groupe symplectique associé;  $D, D'$  deux droites de  $E$ , non orthogonales pour  $(\cdot | \cdot)$ ;  $H$  le stabilisateur de  $D$  et de  $D'$  dans  $G$ . Alors  $H$  est isomorphe à  $k^* \times SL(2, k)$ . Choisissons une base  $(e_1, e_2, e_{-2}, e_{-1})$  de  $E$  telle que  $(e_1 | e_{-1}) = (e_2 | e_{-2}) = 1$  et que les autres produits soient nuls. Soient  $B$  (resp.  $T$ ) le sous-groupe de  $G$  formé des matrices triangulaires supérieures (resp. diagonales) dans la base considérée.

Si  $D$  (resp.  $D'$ ) est engendrée par  $x = 3e_1 + 2e_2 - \frac{1}{2}e_{-2} + e_{-1}$  (resp.  $x' = -3e_1 + 2e_2 + \frac{1}{2}e_{-2} + e_{-1}$ ), on peut vérifier que  $BH$  est ouvert dans  $G$  et que le monoïde  $\mathcal{P}_+$  est engendré librement par  $f_1, f_2, f_3$ , où  $f_1(s) = (e_1 | sx)$ ,  $f_2(s) = (e_1 | sx')$ ,  $f_3(s) = (e_1 | sx)(e_2 | sx') - (e_1 | sx')(e_2 | sx)$  pour tout  $s \in G$ . En outre  $P = B$ , et  $T$  est un tore maximal de  $B$  adapté à  $H$ .

Soient  $\chi$  le poids de l'opération de  $H$  sur  $D$ , et  $\pi_1, \pi_2$  les poids fondamentaux de  $G$ ; alors  $f_1 = [\pi_1, \chi]$   $f_2 = [\pi_1, -\chi]$ ,  $f_3 = [\pi_2, 1]$  avec les notations de 4.1.

Notons  $\mathbb{P}(E)$  l'espace projectif de  $E$ , et  $Gr_2(E)$  la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension 2 dans  $E$ . Soit  $X$  la sous-variété de  $\mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(E) \times Gr_2(E)$  formée des triplets  $(d, d', p)$  tels que le plan  $p$  contienne les droites  $d$  et  $d'$ . Soit  $P$  le plan engendré par  $D$  et  $D'$ . On peut vérifier que  $(X, (D, D', P))$  est un plongement lisse, sans couleur de  $G/H$ , dont les orbites non ouvertes sont:

$$\mathcal{O}_1 = \{(d, d, p) \in X \mid p \text{ non isotrope}\},$$

$$\mathcal{O}_2 = \{(d, d', p) \in X \mid p \text{ isotrope, } d \neq d'\},$$

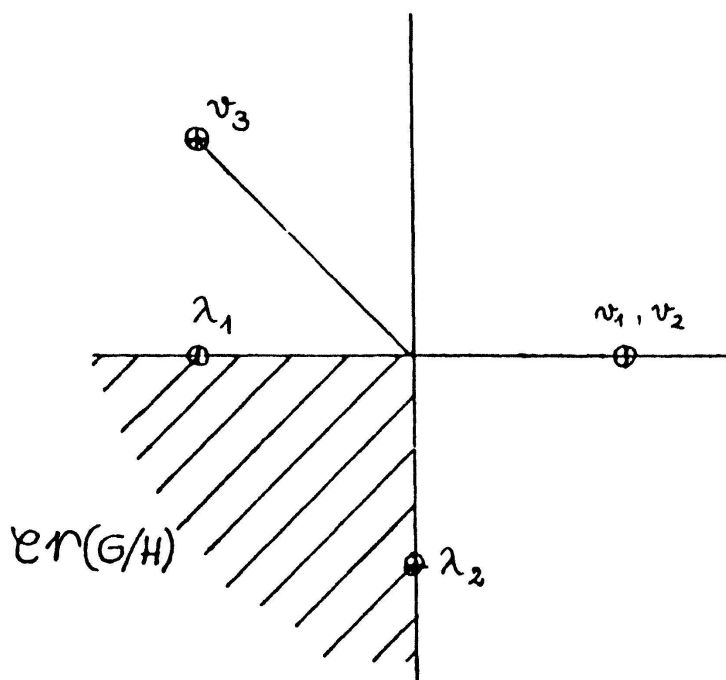
$$\mathcal{O}_3 = \{(d, d, p) \in X \mid p \text{ isotrope}\}.$$

L'orbite  $\mathcal{O}_3$  est fermée, isomorphe à  $G/B$ . Le complémentaire de l'orbite ouverte  $\mathcal{O}$  dans  $X$  est formé des deux diviseurs lisses et transverses  $\bar{\mathcal{O}}_1 = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_3$  et  $\bar{\mathcal{O}}_2 = \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3$ .

On peut vérifier que les sous-groupes à un paramètre  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de  $T$  tels que  $\lambda_1(t) = \text{diag}(t^{-1}, t, t^{-1}, t)$  et  $\lambda_2(t) = \text{diag}(t^{-1}, t^{-1}, t, t)$  sont adaptés aux plongements élémentaires d'orbites fermées  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$ . On en déduit que  $\Sigma$  est engendrée par les deux racines négatives courtes (on peut aussi le montrer par les méthodes de 4.2, en étudiant les groupes d'isotropie des plongements élémentaires  $\mathcal{O} \cup \mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O} \cup \mathcal{O}_2$ , dont les valuations associées engendrent  $\mathcal{CV}(G/H)$ ).

L'ensemble  ${}^B\mathcal{D}(G/H)$  est formé des trois diviseurs  $B$ -stables de  $G/H$  définis par  $f_1, f_2, f_3$ . Notons  $v_1, v_2, v_3$  les valuations correspondantes.

Dans  $Y(T/T \cap H) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}\lambda_1 \oplus \mathbb{Q}\lambda_2$ , on obtient la figure suivante:





Le plongement normal (simple, complet), associé à  $\mathcal{V} = \{\lambda_2\}$  et  $\mathcal{D} = \{v_3\}$  à l'aide de 2.7, n'est autre que  $(\mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(E), (D, D'))$ .

## 5. Le normalisateur d'un sous-groupe sphérique

Dans cette partie, on étudie le normalisateur  $N_G(H)$  de  $H$  dans  $G$ , et on retrouve et améliore les résultats de [P1].

**5.1 PROPOSITION.** *Soit  $H^0$  la composante neutre de  $H$ : alors  $BH^0 = BH$ , et le normalisateur de  $H^0$  dans  $G$  est l'ensemble des  $s \in G$  tels que  $BHs = BH$ .*

*Remarque.* On verra plus loin (Corollaire 5.2) que  $H$  et  $H^0$  ont le même normalisateur dans  $G$ .

*Démonstration.* Soit  $K$  l'ensemble des  $s \in G$  tels que  $BHs = BH$ ; c'est un sous-groupe de  $G$  qui contient  $H$ . Soit  $s \in N_G(H^0)$ : alors  $BsH^0 = BH^0s$  est ouvert dans  $G$ , donc  $BsH^0$  rencontre l'ouvert  $BH^0$ , d'où  $s \in BH^0$ . Par suite,  $BN_G(H^0) = BH$ , d'où  $BH = BH^0$  et  $N_G(H^0) \subseteq K$ .

Réciproquement, montrons que  $K \subseteq N_G(H^0)$ . Notons  $\mathcal{P}_+$  l'ensemble des vecteurs propres (non nuls) de  $B$  (opérant par translations à gauche) et de  $H^0$  (opérant par translations à droite) dans  $k[G]$ ; alors  $\mathcal{P}_+$  est l'ensemble des  $f \in k[G]$  telles que  $f$  ne s'annule pas sur  $BH = BH^0$  [BLV; 2.1]. Par conséquent, l'opération par translations à droite de  $K$  laisse stable  $\mathcal{P}_+$ , donc aussi l'ensemble des vecteurs propres de  $H^0$  dans  $k[G]$ . On en déduit que l'opération par translations à droite de  $K$  dans  $k(G)$  laisse stable le corps  $k(G)^{H^0}$ . Donc on a bien  $K \subset N_G(H^0)$ , qui est le groupe de  $G$ -automorphismes de  $G/H^0$ . ■

**5.2** Soit  $f \in \mathcal{P}_+$  telle que l'ensemble des zéros de  $f$  soit  $G - BH$ . Soient  $M$  un  $G$ -module simple,  $m \in M$  et  $\mu \in M^*$  tels que  $f = \mu(\cdot m)$  (cf. 2.5). Soit  $df(1)$  la différentielle de  $f$  en  $1 \in G$ ; c'est un élément du dual de l'algèbre de Lie de  $G$ . Notons  $L^f$  le groupe d'isotropie de  $df(1)$ ; d'après [BLV; 3.5] c'est un sous-groupe de Levi de  $P$ , adapté à  $H$ .

**PROPOSITION.** i) *On a  $N_G(H^0) = H^0(C^f \cap N_G(H^0))$ , où  $C^f$  est la composante neutre du centre de  $L^f$ .*

ii) *Si de plus  $f$  s'annule avec la même multiplicité sur toutes les composantes irréductibles de  $G - BH$ , alors  $N_G(H^0)$  est le stabilisateur de  $km$ .*

*Démonstration.* i) Puisque  $BH = BN_G(H^0)$ , on voit que l'on a  $P =$

$\{s \in G \mid sBN_G(H^0) = BN_G(H^0)\}$  et que  $L^f$  est un sous-groupe de Levi de  $P$  adapté à  $N_G(H^0)$ . Par suite, la multiplication de  $G$  induit des isomorphismes

$$P^u \times C^f N_G(H^0) \rightarrow PN_G(H^0) = PH^0 \leftarrow P^u \times C^f H^0.$$

En particulier,  $C^f N_G(H^0) = C^f H^0$ , d'où i).

ii) Soit  $s \in G$  tel que  $sm \in km$ . Il existe alors  $\alpha \in k^*$  tel que  $sm = \alpha m$ , d'où  $f(gs) = \alpha f(g)$  pour tout  $g \in G$ . Donc  $BH = \{g \in G \mid f(g) \neq 0\}$  est stable par translations à droite par  $s$ . Par conséquent, d'après 5.1 le groupe  $N_G(H^0)$  contient le stabilisateur de  $km$ .

Pour prouver l'inclusion opposée, il suffit d'après i) de montrer que  $C^f \cap N_G(H)$  stabilise  $km$ . Or, pour tout  $s \in C^f \cap N_G(H)$ , la conjugaison par  $s$  laisse stable  $BH$ , donc fixe  $f$  (d'après l'hypothèse sur  $f$ ). On en déduit que  $sm$  est proportionnel à  $m$ , d'où la proposition. ■

**COROLLAIRE.** On a  $N_G(H) = N_G(H^0) = H(C^f \cap N_G(H))$ ; en particulier  $N_G(H)/H$  est diagonalisable.

*Démonstration.* Il suffit de prouver que  $N_G(H) = N_G(H^0)$ . Il est clair que  $N_G(H) \subset N_G(H^0)$ . Réciproquement, soit  $s \in N_G(H^0)$ : alors  $H^0 \subset sHs^{-1} \subset N_G(H^0)$ . Puisque  $N_G(H^0)/H^0 \cong (C^f \cap N_G(H^0))/(C^f \cap H^0)$  est abélien, on en déduit que  $sHs^{-1} = H$ , i.e.  $s \in N_G(H)$ . ■

**5.3 PROPOSITION.** Soient  $\lambda \in Y(C)$  et  $v_\lambda$  la valuation de  $k(G/H)$  associée à  $\lambda$  (cf. 2.8). Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $v_\lambda$  et  $-v_\lambda$  sont dans  $\mathcal{CV}(G/H)$ .
- (ii)  $\lambda$  est à valeurs dans  $N_G(H)$ .

*Démonstration.* (i)  $\Rightarrow$  (ii): On utilise les notations de 4.1. L'hypothèse signifie que  $\lambda$  est orthogonal à  $\Sigma$ , c'est-à-dire que si  $f = [\omega, \chi]$ ,  $f' = [\omega', \chi']$  et  $\varphi = [\pi, \chi + \chi']$  sont dans  $\mathcal{P}_+$  et  $\varphi$  est dans l'espace vectoriel engendré par  $\{(sf)(s'f') \mid s, s' \in G\}$ , alors  $\langle \lambda, \pi \rangle = \langle \lambda, \omega \rangle + \langle \lambda, \omega' \rangle$ . Cette condition signifie que l'action de  $k^*$  sur  $\mathcal{P}^H$  définie par  $\lambda$ , se prolonge en une action de  $k^*$  sur  $k(G)^H$  qui commute aux translations à gauche. Donc  $\lambda$  est à valeurs dans le groupe des  $G$ -automorphismes de  $G/H$ , c'est-à-dire dans  $N_G(H)$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) est conséquence immédiate de 2.8. ■

**COROLLAIRE.** Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) Il existe un plongement simple normal, complet sans couleur de  $G/H$

(alors d'après 2.7, c'est l'unique plongement associé à  $\mathcal{CV}(G/H)$  tout entier).

(ii) Le cône  $\mathcal{CV}(G/H)$  est saillant.

(iii)  $N_G(H)/H$  est fini.

*Démonstration.* (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) résulte de 2.7, et (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) de la Proposition 5.3 et du Corollaire 5.2. ■

*Remarque.* Soit  $G/H$  un espace symétrique, i.e.  $H$  est le groupe des points fixes d'un automorphisme involutif du groupe semisimple  $G$ . Alors la condition (iii) du corollaire est remplie; l'unique plongement simple, normal, sans couleur de  $G/H$  a été défini et étudié dans [DP1] et [DP2] en vue d'applications à la géométrie énumérative.

**5.4 PROPOSITION.** Soient  $(X, x)$  un plongement élémentaire de  $G/H$ , et  $v$  la valuation associée. Alors l'opération à droite de  $N_G(H)/H$  sur  $G/H$  se prolonge à  $X$ . Si de plus  $-v \notin \mathcal{CV}(G/H)$ , alors le quotient  $X/N_G(H)$  existe, et est un plongement élémentaire de  $G/N_G(H)$ .

*Démonstration.* Le cas où  $-v \in \mathcal{CV}(G/H)$  se traite facilement à l'aide de 5.3. On suppose donc que  $-v \notin \mathcal{CV}(G/H)$ . Soient  $f$ ,  $L^f$  et  $C^f$  comme en 5.2. Choisissons un sous-groupe à un paramètre  $\lambda$  de  $C^f$ , adapté à  $(X, x)$ ; soit  $x' = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)x$ . Alors  $C^f \cdot x \cup C^f \cdot x'$  est un plongement élémentaire de  $C^f/(C^f \cap H)$  (voir 2.10). D'après la Proposition 5.3, quitte à remplacer  $\lambda$  par un multiple de  $\lambda$ , on peut supposer que  $N_G(H) \cap \text{Im}(\lambda) = \{1\}$ .

Le quotient de  $C^f \cdot x \cup C^f \cdot x'$  par  $C^f \cap N_G(H)$  existe donc, et est un plongement élémentaire de  $C^f/(C^f \cap N_G(H))$ . Remarquons que d'après le Corollaire 5.2,  $C^f \cap N_G(H)$  s'envoie surjectivement sur  $N_G(H)/H$ . La proposition résulte alors du résultat de structure locale de  $X$  rappelé en 2.9. ■

A l'aide de cette proposition, on définit une application  $\pi: \mathcal{CV}(G/H) \rightarrow \mathcal{CV}(G/N_G(H))$  (si  $v$  et  $-v$  sont dans  $\mathcal{CV}(G/H)$ , alors  $\pi(v) = 0$ ). On voit facilement que  $\pi$  est le quotient par  $\Sigma^\perp$  (et  $\Sigma^\perp$  est le plus grand sous-espace vectoriel de  $V$  contenu dans  $\mathcal{CV}(G/H)$ ). En particulier, le cône des valuations de  $G/N_G(H)$  est saillant.

On peut ainsi retrouver le résultat principal de [P1], utilisé en 3.7 (les troisième et cinquième parties sont bien sûr indépendantes . . . ).

**COROLLAIRE.** Pour un sous-groupe sphérique  $H$  de  $G$ , les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $\mathcal{CV}(G/H)$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .
- (ii)  $H$  contient un sous-groupe unipotent maximal de  $G$ .

*Démonstration.* La condition (i) signifie que  $\mathcal{CV}(G/N_G(H))$  est réduit à  $\{0\}$ , donc que  $N_G(H)$  est un sous-groupe parabolique de  $G$ . Comme  $N_G(H)/H$  est un groupe diagonalisable, il est clair que (i) équivaut à (ii). ■

## RÉFÉRENCES

- [A1] D. N. AKHIEZER, *Actions with a finite Number of Orbits*. *Funct. Analysis Appl.* 19 (1985) 1–4.
- [A2] D. N. AKHIEZER, *Equivariant completion of homogeneous algebraic varieties by homogeneous divisors*. *Ann. Glob. Analysis and Geometry*, vol. 1, (1983) 49–78.
- [BO] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, chapitre VIII. Diffusion C.C.L.S., Paris 1975.
- [B1] M. BRION, *Valuations des espaces homogènes sphériques*. Prépublication de l'Institut Fourier 50, Grenoble 1986.
- [B2] M. BRION, *Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques*. *Manuscripta Math.* 55 (1986) 191–198.
- [BLV] M. BRION, D. LUNA et TH. VUST, *Espaces homogènes sphériques*. *Inventiones Math.* 84 (1986) 617–632.
- [D] V. I. DANILOV, *The geometry of toric varieties*. *Russian Math. Surveys* 33 (1978), pp. 97–154.
- [DP1] C. DECONCINI et C. PROCESI, *Complete symmetric varieties*. In: F. Gherardelli (ed.), *Invariant Theory*. Springer Lecture Notes 996, Berlin 1983.
- [DP2] C. DECONCINI et C. PROCESI, *Complete Symmetric Varieties II*. In: R. Hotta (ed.), *Algebraic Groups and Related Topics*. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1985.
- [K] G. KEMPF, F. KNUDSEN, D. MUMFORD et B. SAINT-DONAT, *Toroidal Embeddings*. Springer Lecture Notes 339, Berlin 1974.
- [KR] H. KRAFT, *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*. Vieweg, Braunschweig 1985.
- [LV] D. LUNA et TH. VUST, *Plongements d'espaces homogènes*. *Comm. Math. Helv.* 58 (1983) 186–245.
- [MF] D. MUMFORD et J. FOGARTY, *Geometric Invariant Theory*. Second enlarged edition. Springer 1982.
- [P1] F. PAUER, *Caractérisation valuative d'une classe de sous-groupes d'un groupe algébrique*. C.R. du 109e Congrès nat. Soc. sav., Dijon 1984, Sci., III, pp. 159–166.
- [P2] F. PAUER, *Normale Einbettungen von  $G/U$* . *Math. Ann.* 257 (1981) 371–396.
- [S] H. SUMIHIRO, *Equivariant Completion*. *J. Math. Kyoto Univ.* 14 (1974) 1–28.
- [V] TH. VUST, *Sur la théorie des invariants des groupes classiques*. *Ann. Inst. Fourier* 26 (1976) 1–31.

*Institut Fourier*  
*Université de Grenoble*  
*F-38402 Saint-Martin-d'Hères*

*Institut für Mathematik*  
*Universität Innsbruck*  
*A-6020 Innsbruck*

Reçu le 1er Avril 1986