Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 62 (1987)

Artikel: Sur un groupe remarquable de difféomorphisms du cercle.
Autor: Ghys, Etienne / Sergiescu, Vlad
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47346

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 20.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 62 (1987) 185–239 0010–2571/87/020185–55$01.50 + 0.20/0
© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel

Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle

ETIENNE GHYS et VLAD SERGIESCU

Introduction

L'étude de la cohomologie du groupe discret des difféomorphismes du cercle est motivée par son lien avec les problèmes de classification homotopique des feuilletages de codimension 1 (voir par exemple [Ser]). Pour détecter des classes de cohomologie non triviales, on est ramené à la recherche de sous-groupes dont l'homologie est calculable. A part les groupes abéliens, les sous-groupes étudiés jusqu'à présent se construisent essentiellement à partir de l'action projective de $SL(2, \mathbb{R})$ sur le cercle $S^1 \simeq P^1(\mathbb{R})$. ([Bot], [Tsu 1], [Tsu 2] . . .). Dans ce travail, nous nous intéressons aux propriétés homologiques et dynamiques d'un groupe de nature différente.

Soit $\tilde{G}$ le groupe des homéomorphismes g de $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes:

1. $g(x+1) = g(x) + 1$
2. g est affine par morceaux.
3. Si x est un point de discontinuité de la dérivée de g, alors x et $g(x)$ sont des nombres dyadiques, c'est-à-dire des rationnels du type $p \cdot 2^q$ avec p et q entiers relatifs.
4. En tout point, les dérivées à gauche et à droite de g sont des puissances entières de 2.
5. $g(0)$ est un nombre dyadique.

La propriété 1 montre qu'un élément de $\tilde{G}$ définit naturellement un homéomorphisme du cercle S^1, identifié à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On désigne par G le groupe des homéomorphismes de S^1 ainsi obtenu.

On note F le sous-groupe de G formé des éléments qui fixent 0 (mod $\mathbb{Z}$) et F' le sous-groupe de F constitué des éléments dont le germe en 0 est trivial.

Ces groupes sont apparus dans plusieurs contextes: logique, algèbre, topologie. R. J. Thompson [MK–TH], [?]), motivé par le "problème des mots", a construit un groupe infini, simple de présentation finie, plongé dans le groupe des homéomorphismes du cercle. Il s'avère que l'image de ce plongement n'est autre que G (bien que nous n'utiliserons pas ce fait). Le groupe F est relié au problème des idempotents homotopiques [Dyd], [Fr–He]; récemment K. Brown et R.

Geoghegan ont démontré que F est un groupe de type FP_∞, de dimension cohomologique infinie, bien que sans torsion ([Br–Ge] et [Br]). Par ailleurs F ne contient pas de sous-groupes libres à deux générateurs [Br–Sq].

L'étude que nous proposons du groupe G est basée sur la dynamique de son action sur le cercle. Nous verrons que des méthodes apparues précédemment en théorie des feuilletages permettent le calcul explicite de la cohomologie de G et éclairent sa structure. Inversement, les propriétés algébriques et homologiques de G sont reliées à d'intéressantes propriétés qualitatives des feuilletages qui leur sont associés.

Les discussions et la correspondance que nous avons eues avec plusieurs mathématiciens nous ont constamment stimulées. D. Sullivan nous a suggéré d'étudier ce groupe d'un point de vue dynamique. Nous avons utilisé avec profit les preprints que P. Greenberg et S. Jekel nous ont communiqués. C'est grâce à R. Geoghegan et R. Strebel que nous avons eu connaissance, entre autres, de [?]. D. McDuff et A. Haefliger se sont intéressés à ce travail et nous ont encouragés durant sa rédaction.

Nous les remercions tous pour leur gentillesse.

Le premier auteur remercie par ailleurs l'IHES pour son hospitalité.

I. Enoncé des résultats

Tel que nous l'avons défini, le groupe G est un groupe d'homéomorphismes du cercle. Le théorème suivant montre qu'il est possible de "lisser" ce groupe sans changer sa dynamique topologique.

THEOREME A. *Il existe un homéomorphisme h du cercle tel que hGh^{-1} est constitué de difféomorphismes de classe C^∞ de S^1.*

Nous verrons plus loin qu'il existe un grand nombre de tels homéomorphismes h. Par ailleurs, nous construirons d'autres plongements de G dans le groupe $\mathrm{Diff}^\infty_+(S^1)$ des difféomorphismes de S^1, de classe C^∞, qui respectent l'orientation.

Un théorème fondamental de J. Mather établit une équivalence homologique entre le classifiant du groupe discret $\mathrm{Diff}^\infty_c(\mathbb{R})$ des difféomorphismes C^∞ de $\mathbb{R}$ à support compact d'une part, et l'espace des lacets du classifiant $B\Gamma^\infty_1$ des Γ-structures de Haefliger de codimension 1 d'autre part ([Mat]). W. Thurston a donné une version de ce théorème pour le groupe $\widetilde{\mathrm{Diff}}^\infty_+(S^1)$, revêtement universel de $\mathrm{Diff}^\infty_+(S^1)$. Une approche de ces théorèmes et de certaines généralisations, basée sur l'utilisation des monoïdes de plongements, est due à D. McDuff et G. Segal [McD 1], [Seg 3]. Nous étendons cette méthode aux groupes

qui nous intéressent. En utilisant un théorème récent de P. Greenberg sur le classifiant des pseudo-groupes linéaires par morceaux, nous explicitons des espaces simples ayant le même type d'homologie que les espaces d'Eilenberg–Maclane BG, $B\tilde{G}$ et BF'. Notre démarche est en quelque sorte inverse de celle de J. Mather et W. Thurston qui utilisaient l'équivalence d'homologie pour analyser $B\Gamma_1^\infty$ à partir du groupe $\mathrm{Diff}_c^\infty(\mathbb{R})$.

Si X est un espace topologique pointé, nous noterons ΩX l'espace des lacets pointés et LX l'espace X^{S^1} des lacets libres. Le groupe S^1 opère sur LX de façon naturelle; nous noterons $\mathscr{L}X$ le "quotient homotopique", c'est-à-dire le quotient de $LX \times ES^1$ par l'action diagonale de S^1 (où ES^1 désigne l'espace total du S^1-fibré universel).

THEOREME B. *Il existe des applications continues*

$$BF' \to \Omega S^3$$
$$B\tilde{G} \to LS^3$$
$$BG \to \mathscr{L}S^3$$

qui induisent des isomorphismes en homologie entière.

Ce théorème permet la détermination des anneaux de cohomologie des groupes F, F', $\tilde{G}$, G. Rappelons d'abord quelques notations. Si A est un anneau commutatif, on note $A[x]$ la A-algèbre graduée des polynômes en une variable x de degré pair $|x|$. Soit $\Lambda(u)$ la $\mathbb{Z}$-algèbre extérieure engendrée par un générateur u de degré impair $|u|$. Enfin, on note $\Gamma[x]$ l'anneau gradué des puissances divisées engendré par un générateur x de degré pair; c'est par définition l'anneau libre engendré par des éléments x_n $(n \geqslant 1)$ tels que $x_1 = x$ et

$$x_n \cdot x_p = \frac{(n+p)!}{n!\,p!} x_{n+p}.$$

La cohomologie entière de $\mathscr{L}S^3$ n'est pas connue. C'est pour cette raison que nous n'explicitons que la structure rationnelle de la cohomologie de G. Voir cependant [Hin] pour des informations sur la cohomologie de $\mathscr{L}S^3$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$.

COROLLAIRE C. *Les anneaux de cohomologie entière de F, F', $\tilde{G}$ sont*

respectivement:

$$H^*(F;\mathbb{Z}) \simeq \Lambda(u_1, u_2) \otimes \Gamma[\alpha] \quad avec \quad |u_1| = |u_2| = 1 \quad et \quad |\alpha| = 2$$
$$H^*(F', \mathbb{Z}) \simeq \Gamma[\alpha] \quad avec \quad |\alpha| = 2$$
$$H^*(\tilde{G};\mathbb{Z}) \simeq \Gamma[\alpha] \otimes \Lambda(\beta) \quad avec \quad |\alpha| = 2 \quad et \quad |\beta| = 3.$$

De plus, on a:

$$H^1(G;\mathbb{Z}) = 0.$$

Le groupe $H^2(G;\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Il existe des générateurs α et χ de $H^2(G;\mathbb{Z})$, naturels dans $H^2(\mathcal{L}S^3;\mathbb{Z})$, tels que:

$$H^*(G;\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[\alpha, \chi]/\alpha \cdot \chi = 0 \quad avec \quad |\alpha| = 2 \quad et \quad |\chi| = 2.$$

Par une méthode différente, K. Brown et R. Geoghegan avaient déjà calculé la structure additive de $H^*(F;\mathbb{Z})$ ([Br–Ge]).

En prenant des coefficients réels, ces résultats présentent une analogie surprenante avec les cohomologies continues (ou de Gelfand–Fuchs) de $\mathrm{Diff}_c^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$. Rappelons que celles-ci sont respectivement isomorphes à $\mathbb{R}[gv]$ et $\mathbb{R}[gv, eu]/gv \cdot eu = 0$ où gv est la classe de Godbillon–Vey (intégrée sur la fibre) et eu est la classe d'Euler [Ha 2]. Il est naturel d'interpréter les générateurs α et χ à partir de cette analogie.

THEOREME D. *L'élément χ de $H^2(G;\mathbb{Z})$ n'est autre que la classe d'Euler de l'extension*

$$0 \to \mathbb{Z} \to \tilde{G} \to G \to 1.$$

Les puissances de la classe d'Euler sont non nulles dans $H^*(G;\mathbb{Q})$ et donc dans $H^*(\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1);\mathbb{Q})$. (D'après le théorème A).

La non nullité des puissances de la classe d'Euler dans $H^*(\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1), \mathbb{Q})$ est un résultat de S. Morita [Mor]. Il nous semble intéressant de retrouver ce phénomène dans un groupe explicite aussi "petit" que G.

L'interprétation de la classe α est plus délicate. Rappelons tout d'abord que la classe de Godbillon–Vey dans $H^2(\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1), \mathbb{R})$ peut être représentée par le

"2-cocycle de Bott–Thurston" suivant (voir [Bott]):

$$gv(u, v) = \frac{1}{2}\int_{S^1} \begin{vmatrix} \operatorname{Log} Dv & \operatorname{Log} D(u \circ v) \\ D \operatorname{Log} Dv & D \operatorname{Log} D(u \circ v) \end{vmatrix} dx.$$

Ce cocycle, bien qu'ayant un sens si u et v sont deux éléments de G est évidemment nul dans ce cas car $D \operatorname{Log} Du$ est alors nul presque partout.

La classe α apparait cependant comme un analogue discrétisé de gv où la différentielle D est remplacée par une différence finie. Plus précisément, si $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}$ est une fonction admettant des limites latérales en tout point, on notera $\Delta\varphi : S^1 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\Delta\varphi(x) = \varphi(x_+) - \varphi(x_-)$. En notant u'_d la dérivée à droite, on a

THEOREME E. *La fonction* $\overline{gv} : G \times G \to \mathbb{Z}$ *définie par*;

$$\overline{gv}(u, v) = \sum_{x \in S^1} \begin{vmatrix} \operatorname{Log}_2 v'_d & \operatorname{Log}_2 (u \circ v)'_d \\ \Delta \operatorname{Log}_2 v'_d & \Delta \operatorname{Log}_2 (u \circ v)'_d \end{vmatrix} (x)$$

est un cocycle dont la classe de cohomologie est l'élément 2α *de* $H^2(G; \mathbb{Z})$ *décrit dans le corollaire C.*

On remarquera que la somme définissant $\overline{gv}$ est en fait finie.

Pour un plongement de G dans $\mathrm{Diff}^\infty_+(S^1)$ donné par le théorème 1, on pourrait être tenté d'interpréter α comme étant l'image réciproque de la classe de Godbillon–Vey par ce plongement. Il n'en est rien, comme le montre le théorème suivant.

THEOREME F. *Soit* $\phi : G \to \mathrm{Diff}^2_+(\mathrm{S}^1)$ *un morphisme quelconque. Alors l'image de l'invariant de Godbillon–Vey par* ϕ^* *est nulle dans* $H^2(G; \mathbb{R})$.

Nous abordons maintenant l'étude qualitative des actions de G sur le cercle.

Rappelons que si un groupe agit sur le cercle, sa dynamique topologique peut être de trois types différents (voir par exemple [He–Hi]):

1. Il existe une orbite finie.
2. Toutes les orbites sont denses.
3. Il existe une orbite dont l'adhérence est un ensemble de Cantor, appelé minimal exceptionnel.

Il est clair que les actions de G sur S^1 fournies par le théorème A ont toutes

leurs orbites denses. Nous verrons qu'une action non triviale de G sur S^1 ne peut avoir d'orbite finie. Par contre, le cas 3 peut effectivement se produire:

THEOREME G. *Il existe des représentations* $\phi : G \to \mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ *possédant un minimal exceptionnel.*

Il résulte facilement des théorèmes D et F et de la formule de Hopf qu'il existe une surface compacte orientée Σ et une représentation $\phi : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{Diff}^\infty_+(S^1)$ ayant un minimal exceptionnel et telle que le nombre d'Euler est non nul. Nous avons réussi à construire un exemple explicite:

THEOREME H. *Soit* Σ_{12} *la surface compacte orientée de genre* 12. *Il existe une représentation* $\phi : \pi_1(\Sigma_{12}) \to \mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ *qui a un minimal exceptionnel et telle que le nombre d'Euler du* S^1*-fibré associé est égal à* 1.

Ce théorème contraste avec le résultat de [Gh 1] où il est montré que la classe d'Euler rationnelle d'un groupe de difféomorphismes *analytiques* du cercle est nulle en présence d'un minimal exceptionnel. Remarquons que si $\phi : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{Diff}^\infty_+(S^1)$ possède un minimal exceptionnel, alors son nombre d'Euler $eu(\phi)$ satisfait l'inégalité de Milnor–Wood "forte" $|eu(\phi)| < |\chi(\Sigma)|$ [Gh 1]. On pourrait se demander dans quelle mesure cette dernière inégalité est optimale.

Le théorème G entraîne le résultat suivant:

COROLLAIRE I. *Les groupes F et G sont isomorphes à des sous-groupes discrets de* $\mathrm{Diff}^1_c(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)$, *munis de la topologie* C^1.

Ainsi F et G sont des sous-groupes discrets de "groupes de Lie" simples de dimension infinie; ceci pourrait être relié au fait qu'ils sont de type FP_∞ (voir [Br–Ge]).

Une conséquence d'un théorème classique de Denjoy et du théorème G est le

COROLLAIRE J. *Tous les éléments de G ont un nombre de rotation rationnel. Par ailleurs, tout rationnel est le nombre de rotation d'un élément de G.*

Enfin, nous nous intéressons à la classification des actions de G sur S^1.

Rappelons que si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux représentations de G dans $\mathrm{Homéo}^+(S^1)$, on dit que ϕ_1 est semi-conjugué à ϕ_2 s'il existe une application continue

monotone h de S^1 dans S^1 de degré 1 telle que, pour tout g de G, on a $h \circ \phi_1(g) = \phi_2(g) \circ h$.

THEOREME K. *Soit* $\phi : G \to \mathrm{Diff}^2(S^1)$ *une représentation non triviale. Alors,* ϕ *est semi-conjuguée à l'injection de* G *dans* Homéo (S^1).

En fait, nous donnerons une description précise de toutes les représentations $\phi : G \to \mathrm{Diff}^r(S^1)$ $(r \geq 2)$ à C^r-conjugaison près (voir théorème III-3-17).

COROLLAIRE L. *Il existe des représentations non triviales de* G *dans* $\mathrm{Diff}^r(S^1)$ $(r \geq 2)$ *qui sont semi-structurellement stables dans le sens suivant: toute représentation* ϕ' *proche de* ϕ *est semi-conjuguée à* ϕ.

Ce corollaire nous semble intéressant car ces actions stables sont de nature différente des exemples déjà connus: essentiellement les groupes abéliens et les groupes fuchsiens.

En conclusion, ces résultats semblent confirmer l'idée de K. Brown et R. Geoghegan suivant laquelle G est l'analogue d'un sous-groupe arithmétique Γ d'un groupe de Lie simple H de $\mathbb{R}$-rang supérieur à 2. Dans notre cas, $\mathrm{Diff}^1(S^1)$ joue le rôle de H (Corollaire I) et l'action de G sur S^1 est analogue à l'action de Γ sur H/P où P est un sous-groupe parabolique. La théorie des groupes arithmétiques montre que les propriétés de Γ sont proches de celles de H (voir [Zim]). Par exemple, Γ est "résiduellement simple" (de même de G est simple). Il existe un rapport étroit entre la cohomologie de Γ et la cohomologie continue de H (de même la cohomologie de G est analogue à la cohomologie de Guelfand–Fuchs de S^1). De la même façon, le théorème K est semblable au théorème de Margulis affirmant que sous des conditions très générales, un morphisme de $\Gamma \subset H$ dans H se prolonge à H. Il serait intéressant de trouver un cadre général qui puisse contenir les groupes arithmétiques ainsi que des groupes tels que G. Par ailleurs, cette analogie soulève naturellement quelques problèmes: F est-il moyennable ([Br–Sq]), G possède-t-il la propriété T de Kazhdan?

Cet article est organisé de la façon suivante. Dans la partie II, consacrée aux questions cohomologiques, nous démontrons successivement les théorèmes B, C, D, E. La partie III est consacrée aux propriétés qualitatives; on y démontre les théorèmes A, G, J, H, I, K, L, F, E. Bien que la partie III s'appuie sur la partie II; sa lecture pourrait être faite directement après avoir pris connaissance des notations générales en II-1.

CONTENU

II. Propriétés quantitatives

II.1 *Préliminaires*
II.2 *Des espaces ayant la même homologie que les groupes F', $\tilde{G}$, G*
II.3 *La cohomologie des groupes F', F, $\tilde{G}$, G*
II.4 *L'interprétation des générateurs de la cohomologie de G*

III. Propriétés qualitatives

III.1 *Construction des lissages*
III.2 *Corollaires de l'existence de minimaux exceptionnels*
III.3 *"Unicité" des lissages*
III.4 *Corollaires du théorème K.*

Bibliographie

II. Propriétés quantitatives

II.1. *Préliminaires*

Dans cette section nous fixons des notations et nous faisons quelques rappels.

Notons $\mathbb{Q}_2 \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des nombres dyadiques et soit $GA(\mathbb{Q}_2)$ le groupe affine dyadique, c'est-à-dire le groupe des bijections affines de $\mathbb{R}$ du type

$$x \to 2^n x + \frac{p}{2^q} \quad \text{avec} \quad n, p, q \text{ entiers relatifs.}$$

Si x est un réel, nous noterons T_x la translation d'amplitude x. Soit R_x la rotation de S^1 correspondant à T_x.

On désigne par $\Gamma(\mathbb{R})$ le pseudo-groupe des homéomorphismes locaux de $\mathbb{R}$ qui sont $GA(\mathbb{Q}_2)$ par morceaux: $h \in \Gamma(\mathbb{R})$ si pour toute composante connexe I de son domaine de définition il existe une suite strictement croissante de nombres dyadiques $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sans point d'accumulation et une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $GA(\mathbb{Q}_2)$ tels que $h \mid [x_n, x_{n+1}] = \gamma_n \mid [x_n, x_{n+1}]$.

Le monoïde des auto-plongements de $\mathbb{R}$ qui appartiennent à $\Gamma(\mathbb{R})$ est noté $M(\mathbb{R})$. Il est clair que le groupe $\tilde{G}$ défini dans l'Introduction est contenu dans $M(\mathbb{R})$. Soit $PL_2(\mathbb{R})$ le groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ qui appartiennent à $\Gamma(\mathbb{R})$.

On définit de même le pseudo-groupe $\Gamma(S^1)$. Le monoïde $M(S^1)$ qui lui correspond est alors précisément le groupe G.

Un argument dans [McD 1] p. 436 montre que les classifiants $B\Gamma(\mathbb{R})$ et $B\Gamma(S^1)$ ont même type d'homotopie que nous noterons parfois $B\Gamma$ simplement.

Passons à quelques rappels sur l'homologie et l'homotopie des monoïdes (voir aussi [McD 2] et [Seg 1], [Seg 2], [Seg 3]).

Soit M un monoïde topologique qui agit à gauche sur un espace topologique X. On désigne par $\mathscr{C}(M \backslash\backslash X)$ la catégorie topologique dont l'espace des objets est X et celui des morphismes est $M \times X$; le morphisme (m, x) ayant x comme source et mx comme but. Soit $M \backslash\backslash X$ la réalisation géométrique du nerf de $\mathscr{C}(M \backslash\backslash X)$ c'est-à-dire du complexe semi simplicial associé. On note $BM = M \backslash\backslash *$ le classifiant du monoïde M. Lorsque M est un groupe discret, BM est une espace d'Eilenberg–MacLane $K(M, 1)$.

Dans la suite les réalisations géométriques sont prises au sens fin sauf pour les classifiants $B\Gamma$ des groupoïdes ou en relation avec eux (voir [McD2] §3 et [Seg 2] Ap. A pour des détails sur ceci ainsi que sur des questions connexes). En particulier, si e est l'élément neutre d'un monoïde M alors $Be \subset BM$ est le point base de BM.

Avant de rappeler deux résultats sur les classifiants des monoïdes, introduisons les notions clé de fibrations homologiques et homotopiques.

Soit B un espace connexe pointé en b_0, $p : E \to B$ une application continue et $F \subset p^{-1}(b_0)$ un sous-espace de $p^{-1}(b_0)$.

DEFINITION 1.1. *La donnée $F \to E \xrightarrow{p} B$ est une fibration homologique (resp. homotopique) si l'inclusion naturelle de F dans la fibre homotopique de p en b_0 est une équivalence d'homologie entière (resp. une équivalence d'homotopie faible).*

En particulier, une suite spectrale relie les homologies des espaces F, E et B.

La propostion suivante est due à G. Segal et D. McDuff.

PROPOSITION 1.2 [MD–Se]. *Si le monoïde M agit sur l'espace X par des équivalences d'homologie (resp. d'homotopie faible) alors*

$$X \to M \backslash\backslash X \to M \backslash\backslash *$$

est une fibration homologique (resp. homotopique). □

En considérant des actions à droite, nous obtenons des notions duales et 1.2 reste vrai.

En particulier, soit K un sous-monoïde discret M et soit $M//K$ le classifiant de l'action droite de K sur M.

COROLLAIRE 1.3 [Seg 3]. *Si $M//K$ est un espace contractile alors l'inclusion $BK \to BM$ est une équivalence d'homotopie. Ceci a lieu en particulier si la condition suivante est vérifiée:*

(*) Le monoïde M est régulier à gauche (i.e. $mn_1 = mn_2$ entraîne $n_1 = n_2$) et, pour $m_1, m_2 \in M$, il existe $m \in M$, $k_1, k_2 \in K$ tels que $mk_1 = m_1$ et $mk_2 = m_2$.

Une deuxième conséquence très utile de 1.2 est:

COROLLAIRE 1.4. [Seg 3]. *Soit $1 \to K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} N \to 1$ une suite exacte de monoïdes discrets (i.e. i injective, π est surjective et $Im(i) = \pi^{-1}(e)$) telle que:*

(i) *Pour $n \in N$, il existe $s_n \in M$ tel que l'application $k \to s_n k$ de K dans $\pi^{-1}(n)$ est bijective.*

(ii) *L'endomorphisme $C_n : K \to K$ défini par la relation $ks_n = s_n C_n(k)$ est une équivalence d'homologie. (Cette condition est vérifiée si pour $k_1, \ldots, k_p \in K$ il existe $k \in K$ inversible tel que $C_n(k_i) = k^{-1}k_i k$ $(i = 1, \ldots, p)$. Alors, $BK \to BM \to BN$ est une fibration homologique.*

Dans la suite, les équivalences et le type d'homotopie sont considérés au sens faible.

II.2. *Des espaces ayant même homologie que les groupes F', $\tilde{G}$ et G.*

Dans cette section, nous commençons la démonstration du théorème B. Nous nous inspirons des techniques employées par D. McDuff et G. Segal dans leur démonstration du théorème de Mather–Thurston et de ses généralisations.

Nous nous proposons d'établir des équivalences homologiques entre l'espace BF' (resp. $B\tilde{G}$) et l'espace $\Omega B\Gamma$ (resp. $LB\Gamma$).

La situation présente diffère de celle traitée par D. McDuff et G. Segal dans la mesure où les groupes qui nous intéressent sont dénombrables et ne possèdent pas de topologie "continue" comme c'est les cas pour $\mathrm{Diff}(S^1)$ par exemple. Cependant si on considère que la version "continue" du groupe G est le groupe de tous les homéomorphismes du cercle, les arguments de [McD 1] et [McD 2] peuvent s'adapter à notre situation.

Nous avons cherché toutefois à rendre la démonstration accessible au lecteur qui n'est pas familier avec [Seg 3] et [McD 1] d'autant que le fait que nous nous intéressons à des groupes qui agissent sur le cercle ou sur la droite simplifie

sensiblement de nombreux arguments. Cette section pourrait être donc aussi considérée comme une introduction à [McD 1].

Nous remercions D. McDuff pour nous avoir aidé spontanément dans la présentation de cette section.

Nous commençons avec une proposition qui exprime une connexité faible dans le pseudo-groupe $\Gamma(\mathbb{R})$. Elle permet de lui appliquer certains raisonnements qui dans [McD 1] et [Seg 3] sont faits pour le pseudogroupe C^∞.

PROPOSITION 2.1. *Soient $\alpha_1 < \alpha_2$, $\beta_1 < \beta_2$ quatre nombres dyadiques. Il existe $\varphi \in PL_2(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(\alpha_1) = \beta_i$, $i = 1, 2$.*

Démonstration. Quitte à composer avec des translations dyadiques, nous pouvons supposer que $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Il suffira alors de construire pour un dyadique $\gamma > 0$, un homéomorphisme $\varphi_\gamma \in PL_2(\mathbb{R})$ tel que $\varphi_\gamma(0) = 0$ et $\varphi_\gamma(1) = \gamma$. En effet, le composé $\varphi_{\beta_2} \circ \varphi_{\alpha_2}^{-1}$ enverra alors α_2 sur β_2. De plus, on peut supposer que $\gamma < 1$, en utilisant eventuellement pour ceci une homothétie.

Ecrivons alors

$$\gamma = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{i_k}} \quad i_0 < \cdots < i_n.$$

Posons

$$\varphi_\gamma(x) = x \quad \text{pour} \quad x \leq 0,$$
$$\varphi_\gamma(x) = x - 1 + \gamma \quad \text{pour} \quad x \geq 1$$

et définissons φ_γ sur $[0, 1]$ en imposant que sa pente soit égale à $1/2^{i_k - k - 1}$ sur les intervalles $[1 - 1/2^k,\ 1 - 1/2^{k+1}]$, $0 \leq k \leq n - 1$ et à $1/2^{i_n - n}$ sur l'intervalle $[1 - 1/2^n, 1]$. □

Nous allons maintenant décrire une équivalence d'homologie entre les espaces BF' et $\Omega B\Gamma$. Nous identifions librement F' au sous-groupe des éléments de $PL_2(\mathbb{R})$ dont le support est contenu dans $]0, 1[$.

Notons $I_0 =]-\infty, 0[$ et $I_1 = [1, \infty[$ et soit $M(\mathbb{R}, I_1, \text{rel}\, I_0)$ le sous-monoïde de $M(\mathbb{R})$ formé des plongements φ tels que $\varphi = id$ au voisinage de I_0 et $\varphi(I_1) \subset I_1$. Soit $\hat{M}(I_1)$ le monoïde des germes au voisinage de I_1 des plongements de $\Gamma(\mathbb{R})$ qui envoient I_1 dans I_1. Ainsi si $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2 \in \hat{M}(I_1)$ alors $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2$ s'il existe un ouvert $V \supset I_1$ tel que $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ pour $x \in V$.

Un morphisme de monoïdes

$$M(\mathbb{R}, I_1, \text{rel}\, I_0) \xrightarrow{p} \hat{M}(I_1)$$

est défini par restriction. Il est clair que son noyau est exactement F'.

PROPOSITION 2.2. *La suite des monoïdes discrets* $1 \to F' \to M(\mathbb{R}, I_1, \text{rel}\, I_0) \xrightarrow{p} \hat{M}(I_1) \to 1$ *est exacte et induit une fibration homologique des espaces classifiants.*

Démonstration. Soit $\hat{\psi} \in \hat{M}(I_1)$. On choisit deux dyadiques $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$ tels que $\hat{\psi}$ est défini au voisinage de $]\alpha_2, \infty[$. D'après 2.1, il existe $\varphi \in PL_2(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(\alpha_1) = \alpha_1$, et $\varphi(\alpha_2) = \hat{\psi}(\alpha_2)$. L'élément de $M(\mathbb{R}, I_1, \text{rel}\, I_0)$ qui est égal à id. (resp. φ, $\hat{\psi}$) sur $]-\infty, \alpha_1]$ (resp. $[\alpha_1, \alpha_2]$, $[\alpha_2, +\infty[$) se projette sur $\hat{\psi}$ par l'application p. La suite de monoïdes est donc exacte.

La deuxième affirmation est une application de 1.4. (voir [Seg 2]). Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in M(\mathbb{R}, I_1, \text{rel}\, I_0)$. Si $p(\varphi_1) = p(\varphi_2)$ alors $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_0$ est bien définie ce qui assure la condition 1.4.i.

Si $s_1, \ldots, s_p \in F'$, $\varphi \in M(\mathbb{R}, I_1, \text{rel}\, I_0)$, on choisit à l'aide de 2.1 un élément $\psi \in F'$ qui coïncide avec φ sur $\varphi^{-1}(\bigcup_{i=1}^p \text{supp}\, s_i)$. Ainsi $\varphi^{-1} s_i \varphi = \psi^{-1} s_i \psi$ et la condition 1.4.ii est vérifiée. □

La proposition 2.2 est utile grâce au:

LEMME 2.3. *L'espace* $M(\mathbb{R}, I_1, \text{rel}\, I_0)$ *est contractile.*

Démonstration (voir [Seg 3]). Rappelons qu'une catégorie est filtrante si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

1. Si f et g sont deux morphismes entre les objets y et z, il existe un objet x et un morphisme $h : x \to y$ tels que $f \circ h = g \circ h$.
2. Si x et y sont deux objets, il existe un objet z et deux morphismes $f : z \to x$ et $g : z \to y$.

La classifiant d'une catégorie filtrante est contractile (Voir [Qui]).

Le monoïde $M(\mathbb{R}, \text{rel}\, I_0)$ des éléments de $M(\mathbb{R})$ qui fixent un voisinage de I_0 a un classifiant contractile. En effet, la catégorie $\mathscr{C}(M(\mathbb{R}, \text{rel}\, I_0) \backslash\backslash *)$ est filtrante.

Il résulte de 1.3(*) que l'inclusion $M(\mathbb{R}, I_1, \text{rel}\, I_0) \subset M(\mathbb{R}, \text{rel}\, I_0)$ est une équivalence d'homotopie. Ainsi, $BM(\mathbb{R}, I_1, \text{rel}\, I_0)$ est contractile. □

Rappelons qu'un résultat fondamental de Segal ([Seg 3 prop. 1.3]) assure que le classifiant du monoïde discret des autoplongements C^∞ de $\mathbb{R}$ a même type

d'homotopie que le classifiant de Haefliger $B\Gamma^1_\infty$. Ce résultat et sa démonstration restent vrais pour le monoïde $M(\mathbb{R})$ et le pseudo-groupe $\Gamma(\mathbb{R})$.

On arrive alors à la description de type d'homologie de F'.

THEOREME 2.4. *Il existe une équivalence d'homologie entre les espaces BF' et $\Omega B\Gamma$.*

Démonstration. Il est assez simple de montrer que l'espace $B\hat{M}(I_1)$ a même type d'homotopie que le classifiant des autoplongements de $]1, \infty[$, donc que $BM(\mathbb{R})$.

Il résulte de 2.2, 2.3 et du résultat de Segal cité plus haut qu'il existe une fibration homologique d'espace total contractile, d'espace de base équivalent à $B\Gamma(\mathbb{R})$ et dont la fibre est équivalente à BF'. Dans cette situation, il est classique que BF' a même type d'homologie que $\Omega B\Gamma$.

Remarquons que dans la suite (cf. 2.10) nous allons expliciter une équivalence d'homologie entre ces deux espaces. □

Dans la dernière partie de cette section nous construisons une équivalence d'homologie entre l'espace $B\tilde{G}$ et l'espace des lacets libres $LB\Gamma$. Pour un modèle convenable, cette équivalence sera munie d'une propriété d'équivariance qui permettra d'en déduire une équivalence d'homologie $BG \to \mathscr{L}B\Gamma$.

Dans un premier temps, nous relions l'homologie des groupes F' et $\tilde{G}$. Il n'est pas possible de plonger F' dans $\tilde{G}$ comme sous-groupe normal. Cependant, il existe une fibration homologique dont la fibre et l'espace total ont les homologies des groupes F' et $\tilde{G}$.

Soit $\tilde{I}$ l'intervalle $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ et $\tilde{M}(\mathbb{R}, \tilde{I})$ le sous-monoïde de $\tilde{G}$ formé des éléments qui préservent $\tilde{I}$. La proposition qui suit joue un rôle essentiel. C'est une version de 2.1 de [McD 2]. Sa démonstration est repoussée à la fin de cette section.

PROPOSITION 2.5. *L'inclusion $\tilde{M}(\mathbb{R}, \tilde{I}) \subset \tilde{G}$ induit une équivalence d'homotopie entre les classifiants.*

Soit I l'image de l'intervalle $\tilde{I}$ par la projection $\mathbb{R} \to S^1$. Notons $M(S^1, \text{rel}\, I)$, $M(S^1, I)$, (resp. $\hat{M}(I)$) les sous-monoïdes de G formé des éléments qui sont égaux à id au voisinage de $\bar{I}$, qui préservent I (resp. le monoïde des germes en $\bar{I}$ des plongements $(V, I) \to (S^1, I)$ où V est un voisinage de $\bar{I}$).

PROPOSITION 2.6. *Il existe une suite exacte de monoïdes $1 \to M(S^1, \text{rel}\, I) \to M(S^1, I) \to \hat{M}(I) \to 1$ qui induit une fibration homologique.*

Démonstration. L'exactitude de la suite se démontre comme dans 2.2 à l'aide de 2.1. De même la propriété homologique est une application de 1.4. □

Notons $\mathcal{H}(S^1, \text{rel}\, I)$, $\mathcal{H}(S^1, I)$ (resp. $\mathcal{H}(I)$) les monoïdes de tous les homéomorphismes de S^1 définis de façon similaire à $M(S^1, \text{rel}\, I)$, $M(S^1, I)$ (resp. le monoïde des autoplongements continus de $\bar{I}$) et munis de leurs topologies naturelles.

COROLLAIRE 2.7. *Il existe une fibration homologique*:

$$M(S^1, \text{rel}\, I)\backslash\backslash\mathcal{H}(S^1, \text{rel}\, I) \to M(S^1, I)\backslash\backslash\mathcal{H}(S^1, I) \to \hat{M}(I)\backslash\backslash\mathcal{H}(I)$$

Démonstration. Il suffit de comparer cette suite d'espaces à celle de la proposition précédente compte tenu de 1.2 et de la contractibilité des monoïdes $\mathcal{H}(S^1, \text{rel}\, I)$, $\mathcal{H}(S^1, I)$ et $\mathcal{H}(I)$. □

Soit $j: S^1 \to B\Gamma(S^1)$ l'application naturelle qui envoie $x \in S^1$ sur l'objet $\{x\}$ de la catégorie associée à $\Gamma(S^1)$. Désignons par $L(B\Gamma(S^1), \text{rel}\, I)$ l'espace des applications $S^1 \to B\Gamma(S^1)$ qui coïncident avec j_0 sur un voisinage de $\bar{I}$.

On a une fibration homotopique

$$L(B\Gamma(S^1), \text{rel}\, I) \to LB\Gamma(S^1) \to \text{Map}\,(I, B\Gamma(S^1))$$

où les flèches sont l'inclusion et la restriction. Puisque I est contractile, il s'agit essentiellement de la fibration:

$$\Omega B\Gamma \to LB\Gamma \to B\Gamma$$

Dans la proposition 2.8 toutes les réalisations géométriques sont supposées épaissies (ceci ne change pas le type d'homotopie des espaces qui interviennent dans 2.7) voir [MD 2] p. 108 et Appendice.

Nous allons la comparer à la fibration de 2.7. Soit $\mathcal{H}$ le groupe des homéomorphismes du cercle qui respectent l'orientation.

PROPOSITION 2.8. *Il existe une application* $\Phi: (G\backslash\backslash\mathcal{H}) \times S^1 \to B\Gamma(S^1)$ *qui induit des applications* f_i, $i = 1, 2, 3$ *et le diagramme commutatif*:

$$\begin{array}{ccccc}
M(S^1, \text{rel } 1)\backslash\backslash\mathcal{H}(S^1, \text{rel I}) & \longrightarrow & M(S^1, \text{rel I})\backslash\backslash\mathcal{H}(S^1, \text{rel I}) & \to & \hat{M}(I)\backslash\backslash\mathcal{H}(I) \\
\downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\
L(B\Gamma, \text{rel } I) & \longrightarrow & LB\Gamma & \longrightarrow & \text{Map}\,(I, B\Gamma)
\end{array}$$

Démonstration. Le groupe G agit sur $\mathscr{H} \times S^1$ par $g \cdot (h, \theta) = (gh, \theta)$. Les espaces $(G \backslash\backslash \mathscr{H}) \times S^1$ et $G \backslash\backslash (\mathscr{H} \times S^1)$ sont homéomorphes.

Rappelons qu'au pseudo-groupe $\Gamma(S^1)$, on associe la catégorie topologique $\mathscr{C}(\Gamma(S^1)$ dont les objets sont les points et les morphismes sont les germes d'homéomorphismes locaux de $\Gamma(S^1)$. Il suffira de définir un foncteur continu $\Phi : \mathscr{C}(G \backslash\backslash \mathscr{H} \times S^1) \to \mathscr{C}(\Gamma(S^1))$. Pour un objet $(h, \theta) \in \mathscr{H} \times S^1$ on pose $\Phi(h, \theta) = h(\theta)$. Si $g : (h, \theta) \to (h', \theta)$ est un morphisme, on définit $\Phi(g)$ comme étant le germe g en $h(\theta)$. On vérifie alors que Φ induit naturellement les applications f_1, f_2 et f_3 qui font commuter le diagramme de 2.8. □

Remarque 2.9. Considérons l'application $f : G \backslash\backslash \mathscr{H} \to LB\Gamma(S^1)$ induite par Φ. Le groupe S^1 agit naturellement à droite sur $G \backslash\backslash \mathscr{H}$ et sur $LB\Gamma(S^1)$. Pour $\lambda \in LB\Gamma(S^1)$, $\theta \in S^1$ on pose $\lambda \cdot \theta = \lambda \circ R_\theta$. Si $h \in \mathscr{H}$ on pose $h \cdot \theta = h \circ R_\theta$ et si g est un morphisme de h à h', on pose $g\theta = g$: on a en effet, $g \circ h \circ R_\theta = h' \circ R_\theta$.

L'application f est équivariante par rapport à l'action de S^1. La vérification est immédiate à partir de la définition du foncteur Φ.

On peut maintenant démontrer le

THEOREME 2.10. *L'application f induit une équivalence d'homologie $G \backslash\backslash \mathscr{H} \to LB\Gamma(S^1)$. Par ailleurs, les espaces $B\tilde{G}$ et $G \backslash\backslash \mathscr{H}$ ont même type d'homotopie.*

Démonstration. Montrons d'abord que l'application $f_2 : M(S^1, I) \backslash\backslash \mathscr{H}(S^1, I) \to LB\Gamma$ est une équivalence d'homologie. En effet, $\pi_1(B\Gamma) = 0$ par un argument direct ou bien en utilisant le fait (voir II 3) que $B\Gamma$ est une sphère S^3. On peut alors appliquer le théorème classique de comparaison des suites spectrales, pourvu que f_1 et f_3 soient des équivalences d'homologie. Le fait que f_3 est une équivalence d'homotopie est essentiellement le résultat de Segal $BM(\mathbb{R}) \simeq B\Gamma(\mathbb{R})$.

Nous avons vu dans 2.4 que BF' et $\Omega B\Gamma$ ont même type d'homologie. La preuve donnée s'adapte pour montrer que f_1 est une équivalence d'homologie. Notons pour ceci J_0, J_1 et J l'image sur S^1 des intervalles $[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$, $[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}]$ et $[\frac{1}{8}, \frac{7}{8}]$. Le preuve de 2.2 donne une fibration homologique

$$BM(J, \operatorname{rel} J_0 \cup J_1) \to B\hat{M}(J, J_1, \operatorname{rel} J_0) \to B\hat{M}(J_1).$$

L'application f permet de la comparer à la fibration suivante comme en 2.8:

$$\operatorname{Map}(J, \operatorname{rel} J_0 \cup J_1, B\Gamma) \to \operatorname{Map}(J, \operatorname{rel} J_0, B\Gamma) \to \operatorname{Map}(J_1, B\Gamma).$$

(Les notations sont similaires à celles déjà utilisées). Le même argument basé sur le théorème de comparaison des suites spectrales et sur 2.3, 2.4, donne alors que f_1 est une équivalence d'homologie.

Nous avons donc montré que $f_2 : M(S^1, I) \backslash\backslash \mathscr{H}(S^1, I) \to LB\Gamma$ est une équivalence d'homologie. Pour terminer, montrons que l'inclusion naturelle $M(S^1, I) \backslash\backslash \mathscr{H}(S^1, I) \to G \backslash\backslash H$ induit une équivalence d'homotopie. D'après 2.5, l'inclusion $\tilde{M}(\mathbb{R}, \tilde{I}) \subset \tilde{G}$ et une équivalence d'homotopie. Par ailleurs, les monoïdes $\tilde{M}(\mathbb{R}, \tilde{I})$ et $M(S^1, I)$ sont évidemment isomorphes. Si $\tilde{\mathscr{H}}$ désigne le groupe (contractile) des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ qui commutent avec la translation T_1, il suffit de montrer qu'il existe une équivalence d'homotopie $\tilde{G} \backslash\backslash \tilde{\mathscr{H}} \to G \backslash\backslash \mathscr{H}$. Le lecteur se persuadera lui même de ceci en considérant le diagramme naturel suivant dans lequel les flèches horizontales sont des équivalences et les colonnes sont des fibrations

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H} \arrow[d] & \mathbb{Z} \backslash\backslash \tilde{\mathscr{H}} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \backslash\backslash * \arrow[d] \\
G \backslash\backslash \mathscr{H} \arrow[d] & \tilde{G} \backslash\backslash \tilde{\mathscr{H}} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{G} \backslash\backslash * \arrow[d] \\
G \backslash\backslash * \arrow[r, equal] & G \backslash\backslash * \arrow[r, equal] & G \backslash\backslash *
\end{tikzcd} \qquad \square$$

COROLLAIRE 2.11. *L'espace classifiant BG et l'espace $\mathscr{L}B\Gamma$ ont même type d'homologie.*

Démonstration. Nous avons déjà remarqué que l'application $f : G \backslash\backslash \mathscr{H} \to LB\Gamma(S^1)$ est équivariante par rapport à l'action naturelle de S^1. Elle induit alors un morphisme de fibrations:

$$\begin{tikzcd}
G \backslash\backslash \mathscr{H} \arrow[r] \arrow[d] & LB\Gamma \arrow[d] \\
(G \backslash\backslash \mathscr{H}) // S^1 \arrow[r] \arrow[d] & LB\Gamma // S^1 \arrow[d] \\
* // S^1 \arrow[r] & * // S^1
\end{tikzcd}$$

D'après le théorème précédent, et en comparant les suites spectrales des deux fibrations, il résulte que $(G \backslash\backslash \mathscr{H}) // S^1 \to LB\Gamma // S^1$ est une équivalence homologique. On conclut en remarquant que $(G \backslash\backslash \mathscr{H}) // S^1 \simeq G \backslash\backslash (\mathscr{H} // S^1) \simeq G \backslash\backslash *$ et que $LB\Gamma // S^1$ est un modèle pour l'espace $\mathscr{L}B\Gamma$ comme il est bien connu. $\square$

Nous terminons ce paragraphe avec la démonstration de la proposition 2.5,

c'est-à-dire du fait que l'inclusion $B\tilde{M}(\mathbb{R}, \tilde{I}) \to B\tilde{G}$ est une équivalence d'homotopie. Pour ceci, nous montrons que l'espace $\tilde{M}(\mathbb{R}, \tilde{I}) \backslash\backslash \tilde{G}$ est contractile. Malheureusement, la condition $*$ de 1.3 n'est pas vérifiée, ce qui complique la démonstration.

Démonstration de 2.5. Considérons l'action diagonale de $\tilde{M}(\mathbb{R}, \tilde{I})$ sur le produit $\tilde{I} \times \tilde{G}$. Il suffit de montrer que l'espace $\tilde{M}(\mathbb{R}, \tilde{I}) \backslash\backslash \tilde{I} \times \tilde{G}$ est contractile: en effet, la projection naturelle induit une équivalence d'homotopie $\tilde{M}(\mathbb{R}, \tilde{I}) \backslash\backslash \tilde{I} \times \tilde{G} \to \tilde{M}(\mathbb{R}, \tilde{I}) \backslash\backslash \tilde{G}$.

Soit $\pi : \tilde{M}(\mathbb{R}, \tilde{I}) \backslash\backslash \tilde{I} \times \tilde{G} \to \mathbb{R}$ l'application induite qui envoie l'objet (x, g) sur $g^{-1}x$. Nous allons voir que π est une équivalence d'homotopie.

Tout d'abord la fibre de π en un point $x \in \mathbb{R}$ est contractile. En effet, elle s'identifie à la réalisation de la sous-catégorie pleine $\mathscr{C}_x \subset \mathscr{C}(\tilde{M}(\mathbb{R}, \tilde{I}) \backslash\backslash \tilde{G})$ dont les objets sont les éléments $g \in \tilde{G}$ tels que $x \in g^{-1}(\tilde{I})$. Montrons que $\mathscr{C}_x$ est une catégorie filtrante. Il suffit de produire pour $g, h \in 0b\mathscr{C}$ un objet k et des morphismes de k à g et h. Pour ceci, choisissons $k \in \tilde{G}$ tel que $x \in k^{-1}(\tilde{I}) \subset g^{-1}(\tilde{I}) \cap h^{-1}(I)$ à l'aide de la prop. 2.1. Alors $k \in 0b\mathscr{C}_x$ et $gk^{-1} \in \tilde{M}(\mathbb{R}, \tilde{I})$, $hk^{-1} \in \tilde{M}(\mathbb{R}, \tilde{I})$ sont les morphismes cherchés.

Pour montrer que π est une équivalence d'homotopie, nous allons utiliser [Seg 3] A.5 qui assure que ceci est vrai dès que les fibres vérifient une condition de régularité locale.

Plus précisément, soit $\Phi : \mathscr{C}(\tilde{M}(\mathbb{R}, \tilde{I}) \backslash\backslash \tilde{G}) \to \mathrm{Top}\,\mathbb{R}$ le foncteur à valeurs dans les ouverts de $\mathbb{R}$ défini ainsi: pour $g \in \tilde{G}$ on pose $F(g) = g^{-1}(\tilde{I})$; si $m : g \to mg$ est un morphisme, alors $F(m)$ est l'inclusion $g^{-1}(\tilde{I}) \subset g^{-1}m^{-1}(\tilde{I})$.

Soit $\Phi \backslash\backslash \mathscr{C}$ la réalisation de la catégorie dont les objets sont les couples (g, x) avec $x \in \Phi(g) = g^{-1}(\tilde{I})$ et les morphismes de (g, x) à (g', x') forment un ensemble vide si $x \neq x'$ et égal à hom (g, g') si $x = x'$. Il est immédiat que $\Phi \backslash\backslash \mathscr{C}$ s'identifie à $\mathscr{C}(\tilde{M}(\mathbb{R}, \tilde{I}) \backslash\backslash \tilde{I} \times \tilde{G})$ et d'après [Seg 3] A.5 on conclut que l'application π est une équivalence. □

II.3. *La cohomologie des groupes F', F, $\tilde{G}$, G*

Dans cette section, nous démontrons le théorème B et C. Nous présentons d'abord un théorème de P. Greenberg sous une forme qui nous est convenable. Un corollaire de ce théorème sera le fait que le classifiant $B\Gamma$ a le type d'homotopie de la sphère S^3.

Soit K un groupe d'homéomorphismes de $\mathbb{R}$ qui préservent l'orientation et agit analytiquement sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire tel que pour tout ouvert U, si $g \mid U = id_{|U}$ alors $g = id$.

Soit Γ^a le pseudo groupe des restrictions des éléments de K à des ouverts de

$\mathbb{R}$. Soit Γ^p le pseudo-groupe des homéomorphismes locaux qui sont "Γ^a par morceaux". Plus précisément $h \in \Gamma^p$ s'il existe un ensemble discret de "singularités" appartenant à l'orbite $K(0)$ en dehors duquel h est un élément de Γ^a.

Désignons par K_0 le stabilisateur de K en 0 et par Γ_0^0 le groupe des germes en 0 des éléments de Γ^p qui fixent 0. Le lemme suivant est clair.

LEMME 3.1. *Γ_0^p est isomorphe à $K_0 \times K_0$.*

Soient p_d et p_g les projections naturelles de Γ_0^p sur K_0. Désignons par R le "push out" homotopique du diagramme c'est-à-dire le double "mapping cylinder" qui lui est associé.

$$\begin{tikzcd} B\Gamma_0^p \arrow[r, "Bp_g"] \arrow[d, "Bp_d"'] & BK_0 \arrow[d, dashed] \\ BK_0 \arrow[r, dashed] & R \end{tikzcd}$$

Considérons les applications naturelles $BK_0 \to B\Gamma_0^p$ et $BK_0 \to BK$. A l'aide du diagramme précédent, elles donnent lieu au diagramme:

$$** \qquad \begin{tikzcd} BK_0 \arrow[r] \arrow[d] & R \\ BK & \end{tikzcd}$$

THEOREME 3.2 (P. Greenberg) [Gr-2]. *L'espace classifiant $B\Gamma^p$ a le même type d'homotopie faible que le "push-out" homotopique du diagramme **.*

Supposons à partir de maintenant qu K et le groupe affine dyadique $GA(\mathbb{Q}_2)$.

LEMME 3.3. *L'espace R, "push out" du diagramme*

$$* \qquad \begin{tikzcd} B\Gamma_0^p \arrow[r, "Bp_g"] \arrow[d, "Bp_d"'] & BK_0 \\ BK_0 & \end{tikzcd}$$

est une sphère S^3

Démonstration. Il est clair que $K_0 \simeq \mathbb{Z}$, $\Gamma_0^p \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Il est classique que le

"double mapping cylinder" du diagramme

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ \downarrow & & \\ S^1 & & \end{array}$$

est une sphère S^3. □

Pour déterminer le type d'homotopie du classifiant $B\Gamma$ il nous reste, d'après le théorème 3.2 et le lemme précédent à déterminer le "push-out homotopique" du diagramme:

$$** \quad \begin{array}{ccc} BK_0 \simeq S^1 & \longrightarrow & R \simeq S^3 \\ \downarrow & & \\ BK & & \end{array}$$

COROLLAIRE 3.4. *L'espace $B\Gamma$ a le type d'homotopie de S^3*

Démonstration. Appliquons au "double mapping-cylinder" les théorèmes de van-Kampen et de Mayer–Vietoris.

Montrons d'abord que $\pi_1(B\Gamma) = 0$. Il suffit pour cela de prouver que le sous-groupe normal engendré par K_0 est tout le groupe dyadique $K = GA(\mathbb{Q}_2)$. Soit $\mathcal{N}(K_0)$ ce sous-groupe. Il est clair que la conjugaison intérieure de l'homothétie $x \to 2x$ par la translation $x + 1/2^n$ $n \geq 0$ est dans $\mathcal{N}(K_0)$. C'est dire que l'application $x \to 2(x + 1/2^n) - 1/2^n = 2x + 1/2^n$ est dans $\mathcal{N}(K_0)$, d'où $x \to x + 1/2^n$ est dans $\mathcal{N}(K_0)$. Donc $\mathcal{N}(K_0) = K$.

Montrons maintenant que l'inclusion $K_0 \to K$ est une équivalence d'homologie entière. La suite de Wang de l'extension:

$0 \to \mathbb{Q}_2 \to K \to \mathbb{Z} \to 0$ donne:

$$\cdots \to H_k(\mathbb{Q}_2) \xrightarrow{A_* - id_*} H_k(\mathbb{Q}_2) \to H_k(K) \to H_{k-1}(\mathbb{Q}_2) \to \cdots$$

où $A : \mathbb{Q}_2 \to \mathbb{Q}_2$ est la multiplication par 2.

Si $k \geq 2$ le groupe $H_k(\mathbb{Q}_2)$ est nul car tout sous-groupe de type fini de $\mathbb{Q}_2$ est cyclique. On en déduit que $H_k(K) = 0$ pour $k \geq 3$.

Puisque $A - id = id$, la suite exacte

$$0 \to H_2(K) \to H_1(\mathbb{Q}_2) \to H_1(\mathbb{Q}_2) \to H_1(K) \to H_0(\mathbb{Q}_2) \to H_0(\mathbb{Q}_2)$$

donne $H_2(K) = 0$ et $H_1(K) \simeq \mathbb{Z}$. Il en résulte que l'inclusion $BK_0 \to BK$ est une équivalence d'homologie.

Finalement, l'application $S^3 \simeq R \to B\Gamma$ déduite du diagramme $**'$ est une équivalence d'homotopie; ceci résulte de la suite de Mayer–Vietoris de $**'$, compte tenu de la 1-connexité de $B\Gamma$ et de l'équivalence d'homologie $BK_0 \to BK$. □

Remarque 3.5. Il résulte de 2.4 et de [Gr 1] qu'une équivalence homotopique $S^3 \to B\Gamma$ est obtenue en classifiant le "feuilletage de Reeb affine" sur S^3.

Nous arrivons à la:

Démonstration du théorème B. Elle résulte de 2.4, 2.10, 2.11 et 3.4. □

Dans la seconde partie de la section nous démontrons le théorème C.

Nous précisons d'abord la cohomologie des groupes F' et $\tilde{G}$. D'après le théorème B, le premier a l'homologie de l'espace des lacets ΩS^3. Le deuxième a même homologie que l'espace des lacets libres LS^3. Remarquons que LS^3 s'identifie à $\Omega S^3 \times S^3$ a l'aide de la structure multiplicative de S^3. Puisque la cohomologie de l'espace ΩS^3 est une algèbre de puissances divisées ([Spa] Chap IX) engendrée par un générateur de degré 2, on en déduit la:

PROPOSITION 3.6. *La cohomologie $H^*(F'; \mathbb{Z})$ est isomorphe à l'algèbre des puissances divisées $\Gamma[\alpha]$ avec $|\alpha| = 2$.*

La cohomologie $H^*(\tilde{G}; \mathbb{Z})$ est isomorphe au produit tensoriel $\Gamma[\alpha] \otimes \Lambda(\beta)$, $|\alpha| = 2$, $|\beta| = 3$, d'une algèbre de puissances divisées et d'une algèbre extérieure.

Nous explicitons maintenant la cohomologie entière de F.

PROPOSITION 3.7. *Pour tout $n \geq 1$, on a $H^n(F; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.*

Démonstration. Considérons la suite exacte:

$$1 \to F' \to F \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to 0.$$

Ramarquons d'abord que $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ opère trivialement sur $H^*(F'; \mathbb{Z})$. Ceci

résulte du fait qu'il existe des élèments de F dont la dérivée en 0 (resp. 1) est égale à 2 et dont le support est arbitrairement proche de 0 (resp. 1).

Le terme E_2 de la suite spectrale de l'extension considérée est:

$$\begin{array}{c|cccc}
H^*(F';\mathbb{Z}) & \mathbb{Z} & \mathbb{Z}^2 & \mathbb{Z} & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z}^2 & \mathbb{Z} & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & & \mathbb{Z}^2 & \mathbb{Z} & 0 \quad 0 \qquad H^*(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z};\mathbb{Z})
\end{array}$$

La proposition en résulte car la suite spectrale dégénère au terme E_2. □

COROLLAIRE 3.8. *Le groupe $H^1(F;\mathbb{Z})$ est engendré par les préimages u_1, u_2 des générateurs de $H^1(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z};\mathbb{Z})$. Le groupe $H^2(F;\mathbb{Z})$ est engendré par la préimage u_1u_2 du générateur de $H^2(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z};\mathbb{Z})$ et par un élément qui est la restriction à F du générateur α de $H^2(\tilde{G};\mathbb{Z})$.*

Démonstration. La première affirmation est une conséquence immédiate de la suite exacte

$$0\to H^2(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z};\mathbb{Z})\to H^2(F;\mathbb{Z})\to H^2(F';\mathbb{Z})\to 0.$$

Le groupe F se plonge naturellement dans $\tilde{G}$. L'inclusion $F'\to\tilde{G}$ correspond en homologie à l'application $H_*(\Omega S^3;\mathbb{Z})\to H_*(LS^3;\mathbb{Z})$. C'est donc un isomorphisme en dimension paire. Il en résulte que la restriction du générateur α de $H^2(\tilde{G};\mathbb{Z})$ et l'élément u_1u_2 engendrent $H^2(F;\mathbb{Z})$. □

Remarque 3.9. Dans la suite, on notera α le générateur de $H^2(\tilde{G};\mathbb{Z})$ et ses restrictions à F et F'. Remarquons que $\alpha^n/n!$ existe dans $H^*(F,\mathbb{Z})$ également.

La proposition qui suit donne la structure multiplicative de $H^*(F;\mathbb{Z})$.

PROPOSITION 3.10. *L'anneau de cohomologie entière $H^*(F;\mathbb{Z})$ est isomorphe au produit tensoriel $\Lambda(u_1,u_2)\otimes\Gamma[\alpha]$ où $|u_1|=|u_2|=1$ et $|\alpha|=2$.*

Démonstration. Nous devons montrer que pour $k\geq 0$,

$$H^{2k+1}(F;\mathbb{Z}) \text{ est engendré par } u_1\frac{\alpha^k}{k!} \quad\text{et}\quad u_2\frac{\alpha^k}{k!}$$

$$H^{2k+2}(F;\mathbb{Z}) \text{ est engendré par } u_1u_2\frac{\alpha^k}{k!} \quad\text{et}\quad \frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!}.$$

La suite spectrale donne un isomorphisme:

$$H^{2k+1}(F;\mathbb{Z}) \simeq E_\infty^{1,2k} \simeq E_\infty^{1,0} \otimes E_\infty^{0,2k} \simeq H^1(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z};\mathbb{Z}) \otimes H^{2k}(F';\mathbb{Z}).$$

Il en résulte facilement que $u_1(\alpha^k/k!)$ et $u_2(\alpha^k/k!)$ engendrent $H^{2k+1}(F;\mathbb{Z})$.

Considérons maintenant la suite exacte:

$$0 \to E_\infty^{2,2k} \to H^{2k+2}(F;\mathbb{Z}) \to E_\infty^{0,2k+2} \to 0.$$

L'image de $\alpha^{k+1}/(k+1)!$ dans $E_\infty^{0,2k+2} \simeq H^{2k+2}(F';\mathbb{Z})$ engendre ce groupe. Pour terminer, il suffit de remarquer que l'élément $u_1u_2(\alpha^k/k!)$ est un générateur de $E_\infty^{2,2k} \simeq E_\infty^{2,0} \otimes E_\infty^{0,2k}$. □

Nous nous intéressons enfin à la cohomologie de G. Nous savons déjà, d'après le théorème B, que l'espace BG a la même homologie que $\mathscr{L}S^3$. Soit χ la classe d'Euler du fibré $S^1 \to LS^3 \times ES^1 \to \mathscr{L}S^3$.

PROPOSITION 3.11. *Le groupe $H^1(G;\mathbb{Z})$ est nul. Le groupe $H^2(G;\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Puisque $LS^3 = \Omega S^3 \times S^3$ est simplement connexe, $\mathscr{L}S^3$ l'est également et donc $H^1(G;\mathbb{Z}) = 0$. De plus la suite de Gysin:

$$0 \to H^0(\mathscr{L}S^3;\mathbb{Z}) \xrightarrow{u\chi} H^2(\mathscr{L}S^3;\mathbb{Z}) \to H^2(LS^3;\mathbb{Z}) \to 0$$

montre que $H^2(\mathscr{L}S^3;\mathbb{Z})$ est un groupe abélien libre à deux générateurs. □

Considérons le générateur β du groupe cyclique $H^3(LS^3;\mathbb{Z})$.

PROPOSITION 3.12. *$H^2(\mathscr{L}S^3;\mathbb{Z})$ est engendré par χ et par l'image $\alpha = f\beta$ où $f: H^3(LS^3,\mathbb{Z}) \to H^2(\mathscr{L}S^3;\mathbb{Z})$ est l'intégration sur la fibre.*

Démonstration. Il résulte de la suite de Gysin que χ et α engendrent $H^2(\mathscr{L}S^3;\mathbb{Z})$ pourvu que le composé $\mathbb{Z} \simeq H^3(LS^3;\mathbb{Z}) \to H^2(\mathscr{L}S^3;\mathbb{Z}) \xrightarrow{p^*} H^2(LS^3;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ soit un isomorphisme.

Soit $\pi: T_1S^3 \to S^3$ le fibré tangent unitaire à S^3. Une application $f: T_1S^3 \to LS^3$ est définie en associant à un élément $(x, v) \in T_1S^3$ la géodésique issue de x dans la direction v. Il est facile de voir que f est équivariante par rapport aux actions de

S^1 sur T_1S^3 et LS^3 et induit un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \simeq H_2(T_1S^3;\mathbb{Z}) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "f_2"'] & H_2(T_1S^3/S^1;\mathbb{Z}) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & H_3(T_1S^3;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \arrow[d, "f_3"'] \\
\mathbb{Z} \simeq H_2(LS^3;\mathbb{Z}) \arrow[r, "p_*"] & H_2(\mathcal{L}S^3;\mathbb{Z}) \arrow[r, "f"] & H_3(LS^3;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Ramarquons que T_1S^3 est homéomorphe à $S^2 \times S^3$.

Nous allons montrer que f_2 et le composé $H_2(T_1S^3;\mathbb{Z}) \to H_2(T_1S^3/S^1;\mathbb{Z}) \to H_3(T_1S^3;\mathbb{Z})$ sont des multiplications par ± 2 et que f_3 est un isomorphisme. Ceci implique que le composé $H_2(LS^3;\mathbb{Z}) \to H_2(\mathcal{L}S^3;\mathbb{Z}) \to H_3(LS^3;\mathbb{Z})$ est un isomorphisme et démontre la proposition.

Considérons une fibre $S = \pi^{-1}(x_0)$ comme générateur de $H_2(T_1S^3;\mathbb{Z})$. Il est clair que $f_{|S}: S \to LS^3$ envoie un élément $(x_0, v) \in S$ sur la géodésique issue en x_0 dans la direction v. Il résulte de [Spa], théorème 8.5.9 que $f(S)$ représente le double d'un générateur de $H_2(LS^3;\mathbb{Z}) = H_2(\Omega S^3;\mathbb{Z})$. L'application f_2 est donc bien la multiplication par ± 2.

Le fait que f_3 soit isomorphisme résulte du triangle commutatif:

$$\begin{tikzcd}
H_3(T_1S^3;\mathbb{Z}) \arrow[rr] \arrow[dr, "\cong"'] & & H_3(LS^3;\mathbb{Z}) \arrow[dl, "\cong"] \\
& H_3(S^3;\mathbb{Z}) &
\end{tikzcd}$$

dans lequel les projections sur S^3 induisent des isomorphismes.

Finalement, justifions que le composé $H_2(T_2S^3;\mathbb{Z}) \to H_2(T_1S^3/S^1;\mathbb{Z}) \to H_3(T_1S^3;\mathbb{Z})$ est la multiplication par ± 2. L'image de la fibre $S = \pi^{-1}(x_0)$ par ce composé est égale au S^1-saturé de S. En utilisant l'involution $\sigma: T_1S^3 \to T_1S^3$ qui est l'application antipodale dans chaque fibre, on vérifie que le nombre d'intersection de S avec son S^1-saturé est égal à ± 2. Donc, le composé $H_2(T_1S^3;\mathbb{Z}) \to H_2(T_1S^3/S^1;\mathbb{Z}) \to H_3(T_1S^3;\mathbb{Z})$ est la multiplication par ± 2. Ceci achève la démonstration de 3.12. □

Considérons maintenant la classe $\chi \in H^2(\mathcal{L}S^3;\mathbb{Q})$.

PROPOSITION 3.13. *Pour $k \geqslant 1$, les puissances $\chi^k \in H^{2k}(\mathcal{L}S^3;\mathbb{Q})$ sont non nulles.*

Démonstration. Il s'agit d'un argument classique. L'action de S^1 sur LS^3 a des points fixes, i.e. les lacets constants. Soit $\{\omega\}$ un tel lacet. Le diagramme

commutatif:

$$\begin{array}{ccc} BS^1 \cong \{\omega\} \times ES^1 & \longrightarrow & \mathscr{L}S^3 \\ \cong\downarrow & & \downarrow \\ BS^1 & \xrightarrow{id} & BS^1 \end{array}$$

produit une section de l'application $\mathscr{L}S^3 \to BS^1$ et le résultat suit de la structure multiplicative de $\mathbb{C}P^\infty$. □

Le théorème suivant est en fait connu. Nous en donnons une démonstration élémentaire.

THEOREME 3.14. *Les classes α et χ engendrent librement la cohomologie $H^*(\mathscr{L}S^3; \mathbb{Q})$ modulo la relation $\alpha \cdot \chi = 0$.*

Démonstration. Il est clair, d'après la suite de Gysin, que $\chi \cup \alpha = \chi \cup f\beta = 0$. Montrons par récurrence que

$H^{2n-2}(\mathscr{L}S^3) = 0$ pour $n \geq 1$

$H^{2n}(\mathscr{L}S^3)$ est engendré par χ^n et α^n pour $n \geq 0$.

(tous les coefficients dans $\mathbb{Q}$). Supposons que ceci soit vrai pour $n \leq p$. La suite de Gysin donne:

$$H^{2p-1}(\mathscr{L}S^3) \to H^{2p+1}(\mathscr{L}S^3) \to H^{2p+1}(LS^3) \xrightarrow{f} H^{2p}(\mathscr{L}S^3).$$

Comme $H^{2p-1}(\mathscr{L}S^3) = 0$, il suffit de montrer que f est injective. Ceci résulte de ce que $f\beta p^*(\alpha^{p-1}) = \alpha^p$ est non-nulle d'après l'hypothèse de récurrence. Donc $H^{2p+1}(\mathscr{L}S^3) = 0$.

Pour déterminer $H^{2p+2}(\mathscr{L}S^3)$, on considère la suite exacte

$$H^{2p+1}(LS^3) \to H^{2p}(\mathscr{L}S^3) \xrightarrow{u\chi} H^{2p+2}(\mathscr{L}S^3) \xrightarrow{p^*} H^{2p+2}(LS^3) \to 0$$

Il est clair que $p^*(\alpha^{p+1}) \neq 0$. D'après l'hypothèse de récurrence et 3.13, l'image $H^{2p}(\mathscr{L}S^3) \xrightarrow{\chi} H^{2p+2}(\mathscr{L}S^3)$ est engendrée par l'élément non-nul χ^{p+1}. Finalement, α^{p+1} et χ^{p+1} engendrent librement $H^{2p+2}(\mathscr{L}S^3)$. □

Démonstration du théorème C. Elle résulte du théorème B et de 3.6, 3.10 et 3.14. □

Enfin, signalons brièvement que les résultats de cette section permettent de retrouver la simplicité des groupes F' et G qui sera utilisée dans la partie III.

THEOREME 3.15. *Les groupes F' et G sont simples.*

Démonstration. Il résulte de 3.6 et de 3.11 que F' et G sont des groupes parfaits. L'argument classique de Higman–Epstein [Eps], appliqué à l'aide de 2.1, montre que ces groupes sont simples. □

II.4. *L'Interprétation des générateurs de la cohomologie du groupe G.*

Dans cette section, nous démontrons les théorèmes D et E.

Rappelons que le second groupe de cohomologie $H^*(G;\mathbb{Z})$ est engendré par les générateurs α et χ. Le résultat suivant identifie le générateur χ et prouve le théorème D.

THEOREME 4.1. *Le générateur χ est exactement la classe d'Euler de l'action de G sur S^1. Ses puissances sont non-nulles dans $H^*(G;\mathbb{Q})$.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser la naturalité de la classe d'Euler et les diagramme considérés à la fin de la preuve de 2.10 et dans 2.11 pour identifier l'élément χ. La non-nullité des puissances de χ et une conséquence de 3.11. □

L'identification de la classe $\alpha \in H^2(G;\mathbb{Z})$ est liée à la classe de Godbillon–Vey et au cocycle correspondant en cohomologie des groupes.

Faisons d'abord quelques conventions jusqu'à la fin de cette section. Nous allons considérer la cohomologie des groupes à l'aide des cochaînes normalisées homogènes ou non homogènes. Les conventions habituelles sont respectées à l'exception du fait que nous travaillons avec des cochaînes homogènes à droite. Le passage d'une n-cochaîne homogène $\bar{c}$ à la n-cochaîne non-homogène, c sera alors donné par

$$c(g_1, \ldots, g_n) = \bar{c}(g_1, \ldots, g_n, g_2 \cdots g_n, \ldots, g_n, e).$$

Pour un groupe K nous notons $\hat{\mathscr{C}}^*(K)$ (resp. $\mathscr{C}^*(K)$) les cochaînes homogènes à droite (resp. non homogènes).

La différentielle $d : \hat{\mathscr{C}}^n(K) \to \hat{\mathscr{C}}^{n+1}(K)$ est donnée par la formule

$$d\hat{c}(k_0, \ldots, k_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \hat{c}(k_0, \ldots, \hat{k}_i, \ldots, k_{n+1}).$$

La différentielle $\delta : \mathscr{C}^n(K) \to \mathscr{C}^{n+1}(K)$ est

$$\delta c(k_1, \ldots, k_{n+1}) = c(k_2, \ldots, k_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i c(k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i k_{i+1}, \ldots, k_{n+1}) + (-1)^{n+1} c(k_1, \ldots, k_n).$$

Rappelons la suite exacte de Gysin–Hochschild–Serre de l'extension centrale

$$0 \to \mathbb{Z} \to \tilde{G} \xrightarrow{p} G \to 1.$$

PROPOSITION 4.2 [Ho–Se]. *Il existe une longue suite exacte*

$$\to H^{k-1}(G;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\nu\chi} H^{k+1}(G;\mathbb{Z}) \xrightarrow{p^*} H^{k+1}(\tilde{G};\mathbb{Z}) \xrightarrow{f} H^k(G;\mathbb{Z}) \to H^{k+2}(G;\mathbb{Z}) \cdots.$$

Remarque 4.3. Il sera important pour la suite de bien contrôler la définition de l'intégrale sur la fibre $f : H^{k+1}(\tilde{G};\mathbb{Z}) \to H^k(G;\mathbb{Z})$.

La description suivante peut-être extraite de [Ho–Se].

Soit $[\varphi] \in H^{k+1}(\tilde{G};\mathbb{Z})$. En utilisant la suite spectrale de l'extension

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \tilde{G} \to G \to 1,$$

On peut choisir le cocycle non-homogène φ tel qu'il soit indentiquement nul dès que deux arguments se trouvent dans le centre $\mathbb{Z}$. C'est dire que φ est de filtration 2.

Considérons la cochaîne non homogène $\varphi(i(1), \ldots) \in \mathscr{C}^k(\tilde{G};\mathbb{Z})$.

Il résulte de [Ho–Se] p. 132 et 125 que cette cochaîne est en fait un cocycle et se trouve dans $\mathscr{C}^k(G;\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathscr{C}^k(\tilde{G};\mathbb{Z})$. Sa classe de cohomologie est bien définie et est égale à $f[\varphi]$. □

Nous allons définir maintenant une famille de cocycles dans $H^2(G;\mathbb{Z})$.

Soit $[\varphi] \in H^2(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z};\mathbb{Z})$ la classe de cohomologie d'un cocycle homogène normalisé φ. Il est immédiat qu'on peut choisir φ dans une classe donnée tel que sa restriction au sous-groupe diagonal $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ soit identiquement nulle. Avec ce choix, on a:

PROPOSITION 4.4. *Soit $A\varphi \in \mathscr{C}^2(G;\mathbb{Z})$ la cochaîne normalisée donnée par*:

$$A_\varphi(f, g, h) = \sum_{x \in \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}} \varphi\begin{pmatrix} \mathrm{Log}_2 f'_g(x) & \mathrm{Log}_2 g'_g(x) & \mathrm{Log}_2 h'_g(x) \\ \mathrm{Log}_2 f'_d(x) & \mathrm{Log}_2 g'_d(x) & \mathrm{Log}_2 h'_d(x) \end{pmatrix}.$$

Alors A_φ est bien définie. C'est en fait un cocycle de G.

Démonstration. Il est clair qu'en dehors d'un nombre fini de points x, les dérivées à gauche et à droite de f, g, h sont respectivement égales. Puisque φ s'annulle sur le sous-groupe diagonal $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, la somme qui définit A est en fait finie.

Montrons que la cochaîne A_φ est homogène. Si $k \in G$, on a:

$$A_\varphi(f \circ k, g \circ k, h \circ k) = \sum_{x \in \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}} \varphi\begin{pmatrix} \mathrm{Log}_2 f'_g(k(x)) + \mathrm{Log}_2 k'_g(x), & \mathrm{Log}_2 g'_g(k(x)) + \mathrm{Log}_2 k'_g(x), & \mathrm{Log}_2 h'_g(k(x)) + \mathrm{Log}_2 k'_g(x) \\ \mathrm{Log}_2 f'_d(k(x)) + \mathrm{Log}_2 k'_d(x), & \mathrm{Log}_2 g'_d(k(x)) + \mathrm{Log}_2 k'_d(x), & \mathrm{Log}_2 h'_d(k(x)) + \mathrm{Log}_2 k'_d(x) \end{pmatrix}$$

Puisque φ est homogène, cette somme est égale à:

$$\sum_{x \in \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}} \varphi\begin{pmatrix} \mathrm{Log}_2 f'_g(k(x)) & \mathrm{Log}_2 g'_g(k(x)) & \mathrm{Log}_2 h'_g(k(x)) \\ \mathrm{Log}_2 f'_d(k(x)) & \mathrm{Log}_2 g'_d(k(x)) & \mathrm{Log}_2 h'_d(k(x)) \end{pmatrix}.$$

Il est donc clair que

$$A_\varphi(f \circ k, g \circ k, h \circ k) = A_\varphi(f, g, h)$$

Le fait que A_φ soit un cocycle est immédiat à partir du fait que, pour chaque x, A_φ est un cocycle. □

COROLLAIRE 4.5. *La cochaîne non-homogène* $\overline{gv} \in \mathscr{C}^2(G; \mathbb{Z})$ *définie par*:

$$\overline{gv}(f, g) = \sum_{x \in \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}} \begin{vmatrix} \mathrm{Log}_2 g'_g(x) & \mathrm{Log}_2 (f \circ g)'_g(x) \\ \mathrm{Log}_2 g'_d(x) & \mathrm{Log}_2 (f \circ g)'_d(x) \end{vmatrix}$$

est un cocycle.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que ce cocycle est bien celui décrit dans l'énoncé des résultats. Il suffit pour cela de soustraire la première ligne à la seconde dans le déterminant.

Soit $\varphi \in \hat{\mathscr{C}}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ la cochaîne

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

On vérifie sans peine que φ est un cocycle et la cochaîne non homogène qui lui correspond est précisément $\overline{gv}$. □

La démonstration du théorème E, c'est-à-dire du fait que $[\overline{gv}] = 2\alpha$ dans $H^2(G;\mathbb{Z})$ se fait en plusieurs temps.

LEMME 4.6. *Il existe un entier p tel que $[\overline{gv}] = p \cdot \alpha$.*

Démonstration. Considérons l'intégrale sur la fibre;

$$f : H^3(\tilde{G};\mathbb{Z}) \to H^2(G;\mathbb{Z}).$$

De par sa définition (section II-3), α est l'image par f du générateur de $H^3(\tilde{G};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Pour montrer le lemme, il suffit donc de montrer que $\overline{gv}$ est aussi dans l'image de f. Pour cela, nous allons construire un cocycle ω de $\mathscr{C}^3(\tilde{G}, \mathbb{Z})$ tel que $f[\omega] = [\overline{gv}]$ dans $H^2(G;\mathbb{Z})$.

Considérons tout d'abord la cochaîne $\hat{\omega} \in \mathscr{C}^3(\tilde{G};\mathbb{Z})$ définie par:

$$\hat{\omega}(f, g, h, k) = \sum_{x \in \mathbb{Q}_2 \cap [0,1[} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ [f(x)] & [g(x)] & [h(x)] & [k(x)] \\ \operatorname{Log} f'_g(x) & \operatorname{Log} g'_g(x) & \operatorname{Log} h'_g(x) & \operatorname{Log} k'_g(x) \\ \operatorname{Log} f'_d(x) & \operatorname{Log} g'_d(x) & \operatorname{Log} h'_d(x) & \operatorname{Log} k'_d(x) \end{vmatrix}$$

où [ ] désigne ici la partie entière. Comme précédemment, on vérifie que $\hat{\omega}$ est un cocycle. Il en résulte que la cochaîne non homogène ω associée à $\hat{\omega}$, est un cocycle:

$$\omega(f, g, h) = \sum_{x \in \mathbb{Q}_2 \cap [0,1[} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ [fgh(x)] & [gh(x)] & [h(x)] & [x] \\ \operatorname{Log}(fgh)'_g(x) & \operatorname{Log}(gh)'_g(x) & \operatorname{Log} h'_g(x) & 0 \\ \operatorname{Log}(fgh)'_d(x) & \operatorname{Log}(gh)'_d(x) & \operatorname{Log} h'_d(x) & 0 \end{vmatrix}$$

Une vérification immédiate montre que ω est de filtration 2, c'est-à-dire, s'annulle dès que deux arguments se trouvent dans le centre $\mathbb{Z} \hookrightarrow \tilde{G}$. D'après la remarque 4.3 $f[\omega]$ est la classe de cohomologie du cocycle:

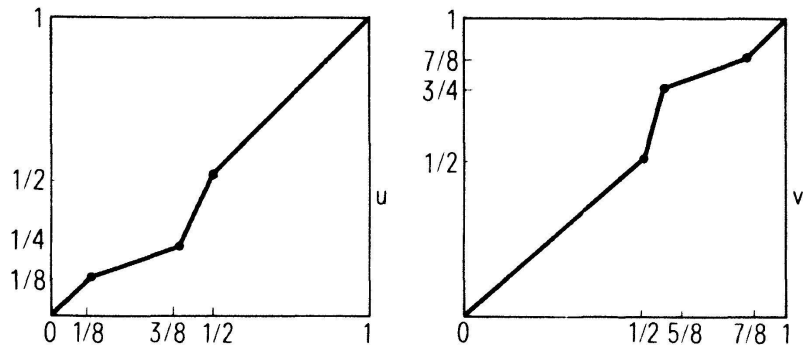
$$(f, g) \mapsto \omega(x+1, f, g),$$

c'est-à-dire:

$$(f, g) \to \sum \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ [fg(x)]+1 & [fg(x)] & [g(x)] & [x] \\ \operatorname{Log}(fg)'_g(x) & \operatorname{Log}(fg)'_g(x) & \operatorname{Log} g'_g(x) & 0 \\ \operatorname{Log}(fg)'_d(x) & \operatorname{Log}(fg)'_d(x) & \operatorname{Log} g'_d(x) & 0 \end{vmatrix} = \overline{gv}(f, g). \quad \square$$

Pour montrer le théorème E, c'est-à-dire que $[\overline{gv}] = 2\alpha$, nous allons évaluer chaque membre de l'égalité $[\overline{gv}] = p\alpha$ sur un cycle bien choisi.

Considérons les éléments u et v de F' dont les graphes sont les suivants:



Comme u et v commutent, la chaîne $\sigma = (u, v) - (v, u)$ est un cycle (non homogène).

LEMME 4.7. *La classe d'homologie de σ est un générateur de $H_2(F'; \mathbb{Z})$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \hat{\mathscr{C}}^2(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ un cocycle choisi comme dans la proposition 4.3 et tel que $[\varphi] \in H^2(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}; \mathbb{Z})$ soit le générateur qui vaut 1 sur le cycle non-homogène $(e_1, e_2) - (e_2, e_1)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\bar{A}_\varphi$ la cochaîne non homogène associée à φ par 4.3. Alors

$$\bar{A}_\varphi((u, v) - (v, u)) = \sum_{x \in \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}} \varphi\begin{pmatrix} \operatorname{Log}(u \circ v)'_g(x), \operatorname{Log} v'_g(x), 0 \\ \operatorname{Log}(u \circ v)'_d(x), \operatorname{Log} v'_d(x), 0 \end{pmatrix}$$
$$- \sum_{x \in \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}} \varphi\begin{pmatrix} \operatorname{Log}(v \circ u)'_g(x), \operatorname{Log} u'_g(x), 0 \\ \operatorname{Log}(v \circ u)'_d(x), \operatorname{Log} u'_d(x), 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\operatorname{Supp}(u) \cap \operatorname{Supp}(v) = \frac{1}{2}$, et que le cocycle φ est normalisé, la sommation se réduit à sa valeur en $x = \frac{1}{2}$.

On obtient alors:

$$\bar{A}_\varphi((u, v) - (v, u)) = \varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \varphi\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

d'après le choix de φ. □

Le lemme suivant, joint à 4–6, termine la démonstration du théorème E car α n'est défini qu'au signe près.

LEMME 4.8. *On a* $\overline{gv}(\sigma) = 2$ *et* $\alpha(\sigma) = \pm 1$.

Démonstration. La première égalité est un calcul semblable à celui du lemme précédent. Quant à l'égalité $\alpha(\sigma) = \pm 1$, nous avons déjà vu que l'inclusion $F' \to G$ induit un isomorphisme entre $H^2(G; \mathbb{Z})$ et $H^2(F'; \mathbb{Z})$. Comme, d'après II-3, l'application $H^2(G; \mathbb{Z}) \to H^2(\tilde{G}; \mathbb{Z})$ envoie α sur le générateur de $H^2(G; \mathbb{Z})$, il résulte que α définit un générateur de $H^2(F'; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. Par conséquent $\alpha(\sigma) = \pm 1$. □

III. Propriétés qualitatives

III.1. *Construction des lissages*

Le but de cette section est de démontrer les théorèmes A et G, c'est-à-dire de construire des morphismes du groupe G dans $\mathrm{Diff}^\infty(S^1)$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homéomorphisme vérifiant les propriétés suivantes:

(I) Pour tout réel x, on a $f(x+1) = f(x) + 2$.

(II) $f(0) = 0$.

Nous nous proposons d'associer à chaque homéomorphisme f satisfaisant (I) et (II) une représentation φ_f de G dans Homéo (S^1). L'image de φ_f sera constituée de difféomorphismes de classe C^∞ si f vérifie une condition supplémentaire décrite plus bas. Dans le cas particulier où $f(x) = 2x$, la représentation φ_f sera l'inclusion canonique de G dans Homéo (S^1).

Rappelons que nous avons noté respectivement $\mathbb{Q}_2$, $GA(\mathbb{Q}_2)$ et $PL_2(\mathbb{R})$ les groupes des nombres dyadiques, des bijections affines dyadiques et des homéomorphismes qui sont $GA(\mathbb{Q}_2)$ par morceaux (voir II-1). La transformation $x \to 2^n x + p/2^q$ de $GA(\mathbb{Q}_2)$ est notée $(2^n, p/2^q)$. En identifiant un nombre dyadique x à la translation T_x, on obtient les inclusions naturelles:

$$\mathbb{Q}_2 \subset GA(\mathbb{Q}_2) \subset PL_2(\mathbb{R}).$$

Nous allons tout d'abord construire une représentation θ_f de $PL_2(\mathbb{R})$ dans Homéo $(\mathbb{R})$. Celle ci sera définie sur $\mathbb{Q}_2$ puis étendue successivement à $GA(\mathbb{Q}_2)$ et à $PL_2(\mathbb{R})$.

LEMME 1.1. *L'application*

$$\theta_f : \frac{p}{2^q} \in \mathbb{Q}_2 \to f^{-q} \circ T_p \circ f^q \in \text{Homéo}(\mathbb{R})$$

est bien définie et donne un morphisme de groupes.

Démonstration. Il s'agit tout d'abord de vérifier que $\theta_f(p/2^q)$ ne dépend que du rationnel $p/2^q$. Pour cela, nous devons montrer que $\theta_f(p/2^q) = \theta_f(2p/2^{q+1})$ c'est-à-dire:

$$f^{-q} \circ T_p \circ f^q = f^{-q-1} \circ T_{2p} \circ f^{q+1}$$
$$T_p = f^{-1} \circ T_{2p} \circ f$$

ou encore

$$f(x+p) = f(x) + 2p.$$

Ceci est une conséquence de la propriété (I).

Le fait que θ_f est un morphisme est clair:

$$\theta_f\left(\frac{p}{2^q} + \frac{p'}{2^q}\right) = f^{-q} \circ T_{p+p'} \circ f^q = f^{-q} \circ T_p \circ T'_p \circ f^q \circ f^{-q} \circ T'_p \circ f^q$$
$$= \theta_f\left(\frac{p}{2^q}\right) + \theta_f\left(\frac{p'}{2^q}\right). \quad \square$$

Remarque 1.2. La propriété (I) et la définition de θ_f montrent que si p est un entier, alors $\theta_f(p) = T_p$.

Nous étendons maintenant θ_f à $GA(\mathbb{Q}_2)$:

LEMME 1.3. *L'application*:

$$\left(2^n, \frac{p}{2^q}\right) \in GA(\mathbb{Q}_2) \mapsto \theta_f\left(\frac{p}{2^q}\right) \circ f^n \in \text{Homéo}\,(\mathbb{R})$$

est un morphisme de groupes que nous noterons encore θ_f.

Démonstration. Ceci résulte immédiatement de la propriété suivante que l'on vérifie sans difficulté

$$f \circ \theta_f(x) \circ f^{-1} = \theta_f\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}_2. \quad \square$$

Enfin, nous étendons θ_f à $PL_2(\mathbb{R})$. Soit $h \in PL_2(\mathbb{R})$. Par définition, il existe

une suite strictement croissante et sans points d'accumulation $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres dyadiques et une suite γ_n dans $GA(\mathbb{Q}_2)$ telles que:

$$h_{|[x_n,x_{n+1}]} = \gamma_{n|[x_n,x_{n+1}]}.$$

Cette suite n'est pas unique pour un h fixé: il est toujours possible d'ajouter de nouveaux points dans un intervalle $[x_n, x_{n+1}]$, même si h est affine sur cet intervalle. Notons $\bar{x}_n$ le réel $\theta_f(x_n)(0)$.

LEMME 1.4. *La suite de réels $\bar{x}_n$ est strictement croissante et sans points d'accumulation dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Puisque f est un homéomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$, la définition de θ_f montre que si $p/2^q$ est positif, on a:

$$\theta_f\left(\frac{p}{2^q}\right)(x) > x \text{ pour tout réel } x.$$

Par conséquent, si x_1 et x_2 sont deux nombres dyadiques tels que $x_1 > x_2$, on a $\theta_f(x_1)(0) < \theta_f(x_2)(0)$. □

Nous définissons alors une application $\theta_f(h):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, à priori discontinue, de la façon suivante:

$$\theta_f(h)_{|[\bar{x}_n,\bar{x}_{n+1}[} = \theta_f(\gamma_n)_{|[\bar{x}_n,\bar{x}_{n+1}[}.$$

Il est clair que $\theta_f(h)$ est bien défini et ne dépend pas du choix de la suite x_n. Il est tout aussi clair que θ_f est une extension de la représentation préalablement définie $\theta_f: GA(\mathbb{Q}_2)\to \text{Homéo}(\mathbb{R})$.

LEMME 1.5. *Si $h \in PL_2(\mathbb{R})$, l'application $\theta_f(h)$ est continue.*

Démonstration. Il s'agit de vérifier la continuité de $\theta_f(h)$ au point $\bar{x}_n$. Nous devons montrer que:

$$\theta_f(\gamma_n)(\bar{x}_n) = \theta_f(\gamma_{n-1})(\bar{x}_n),$$

c'est-à-dire:

$$\theta_f(\gamma_n \circ T_{x_n})(0) = \theta_f(\gamma_{n-1} \circ T_{x_n})(0)$$

ou encore:

$$\theta_f(T_{-x_n} \circ \gamma_{n-1}^{-1} \circ \gamma_n \circ T_{x_n})(0) = 0.$$

Puisque h est continue, on a $\gamma_n(x_n) = \gamma_{n-1}(x_n)$ et $T_{-x_n} \circ \gamma_{n-1}^{-1} \circ \gamma_n \circ T_{x_n}$ est donc un élément de $GA(\mathbb{Q}_2)$ qui fixe 0, c'est-à-dire un élément du type $(2^N, 0)$. L'égalité que nous voulons montrer est alors claire car:

$$\theta_f(2^N, 0) = f^N$$

et f fixe 0 d'après (II). □

LEMME 1.6. $\theta_f : PL_2(\mathbb{R}) \to$ Homéo $(\mathbb{R})$ *est un morphisme de groupes.*

Démonstration. En effet, pour évaluer $\theta_f(h_1 \circ h_2)$, on peut choisir une suite x_n telle que h_2 est affine sur les intervalles $[x_n, x_{n+1}]$ et h_1 est affine sur les intervalles $[h_2(x_n), h_2(x_{n+1})]$. La définition de θ_f montre alors que $\theta_f(h_1) \circ \theta_f(h_2) = \theta_f(h_1 \circ h_2)$. □

LEMME 1.7. *Si $\tilde{g} \in \tilde{G}$, c'est-à-dire si $\tilde{g} \in PL_2(\mathbb{R})$ et $\tilde{g}(x+1) = \tilde{g}(x) + 1$, alors* $\theta_f(\tilde{g})(x+1) = \theta_f(\tilde{g})(x) + 1$.

Demonstration. Ceci est une conséquence, d'une part, du fait que θ_f est un morphisme et, d'autre part, de la remarque 1.2 suivant laquelle $\theta_f(p) = T_p$. □

D'après le lemme précédent, θ_f permet de définir, par passage au quotient, une représentation φ_f de G dans Homéo (S^1). Avant de décrire plus précisément les propriétés de φ_f, nous allons montrer qu'il est possible de choisir f pour que $\varphi_f(G)$ soit constitué de difféomorphismes du cercle.

Considérons la propriété suivante $(1 \leq r \leq \infty)$: (III$_r$) f est de classe C^r, $f'(0) = 1$ et $f^{(k)}(0) = 0$ pour $2 \geq k \leq r$.

LEMME 1.8. *Si f vérifie la condition* (III$_r$), *alors l'image de θ_f (et donc de φ_f) est constituée de difféomorphismes de classe C^r.*

Démonstration. En reprenant les notations de la démonsration du lemme 1.5, il s'agit de montrer que, pour $1 \geq k \leq r$, on a:

$$\theta_f(\gamma_n)^{(k)}(\bar{x}_n) = \theta_f(\gamma_{n-1})^{(k)}(\bar{x}_n).$$

Ceci est une conséquence du fait que le $r^{\text{ème}}$ jet de $\theta_f(T_{-x_n} \circ \gamma_{n-1}^{-1} \circ \gamma_n \circ T_{x_n}) = f^N$ est celui de l'identité au point 0. □

Nous montrons maintenant que toutes les représentations φ_f que nous venons de construire sont semi-conjuguées à l'inclusion canonique de G dans Homéo (S^1). Le lemme suivant est bien connu.

LEMME 1.9. *Soit $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homéomorphisme vérifiant les conditions* (I) *et* (II). *Alors, il existe une application continue croissante $H:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que*:

$$H(x+1) = H(x) + 1$$
$$H(f(x)) = 2H(x).$$

Démonstration. Nous avons déjà observé que l'application $i:\mathbb{Q}_2 \to \mathbb{R}$ définie par $i(x) = \theta_f(x)(0)$ est strictement croissante:

Soit $H: i(\mathbb{Q}_2) \to \mathbb{Q}_2 \hookrightarrow \mathbb{R}$ l'inverse de i. Puisque H est strictement croissante, H se prolonge en une application croissante, encore notée H, de $\overline{i(\mathbb{Q}_2)}$ dans $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{Q}_2$ est dense dans $\mathbb{R}$, l'application $H: \overline{i(\mathbb{Q}_2)} \to \mathbb{R}$ est continue. On prolonge alors H à $\mathbb{R}$ en imposant à H d'être constante sur les composantes connexes de $\mathbb{R} - \overline{i(\mathbb{Q}_2)}$. On obtient ainsi une application H continue croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Le fait que H vérifie les propriétés requises provient du fait que:

$$i(x+1) = \theta_f(x+1)(0) = \theta_f(1) \circ \theta_f(x)(0) = \theta_f(x)(0) + 1 = i(x) + 1$$
$$i(2x) = \theta_f(2x)(0) = f \circ \theta_f(x)(0) = f(i(x)). \quad \square$$

COROLLAIRE 1.10. *Si f vérifie les conditions* (I) *et* (II), *la représentation φ_f est semi-conjuguée à l'injection canonique de G dans* Homéo (S^1).

Démonstration. L'application H donnée par le lemme précédent définit une application continue $\bar{H}$ de S^1 dans S^1. Par construction même de φ_f et puisque $H(f(x)) = 2H(x)$, cette application $\bar{H}$ est une semi-conjugaison entre φ_f et l'injection canonique de G dans Homéo (S^1). □

Pour démontrer le théorème A, il faut montrer qu'il est possible de choisir f vérifiant (I), (II) et (III) et tel que l'application H donnée par le lemme 1–9 est un homéomorphisme. Pour montrer ce fait, nous allons d'abord montrer que les orbites de φ_f peuvent s'obtenir simplement à partir de f.

Si f vérifie (I) et (II), f définit évidemment une application continue $\bar{f}: S^1 \to S^1$ de degré topologique 2. Par "relation d'équivalence engendrée par $\bar{f}$", nous

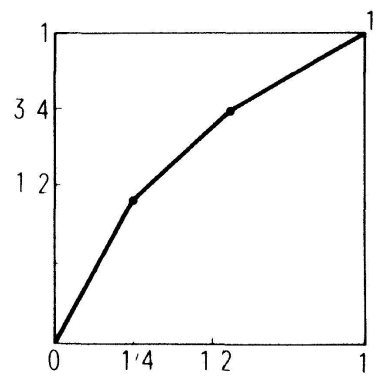
entendons la relation d'équivalence $\sim$ sur S^1 engendrée par $x \sim \bar{f}(x)$ pour tout x de S^1.

LEMME 1.11. *Les orbites de φ_f sont exactement les classes d'équivalences de la relation d'équivalence engendrée par $\bar{f}$.*

Démonstration. Il est évident que les classes d'équivalences de la relation engendrée par $\bar{f}$ sont les projections sur S^1 des classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}_f$ sur $\mathbb{R}$ engendrée par $x \sim x+1$ et $f(x) \sim x$. Nous allons montrer que les classes d'équivalences de $\mathcal{R}_f$ sont exactement les orbites de la représentation θ_f de $\tilde{G}$ dans Homéo $(\mathbb{R})$.

Considérons tout d'abord deux points x_1 et x_2 de $\mathbb{R}$ qui sont dans la même orbite de $\tilde{G}$. Il existe donc un élément $\tilde{g}$ de $\tilde{G}$ tel que $x_2 = \theta_f(\tilde{g})(x_1)$. Par définition de G, il existe un intervalle fermé contenant x_1 tel que la restriction de $\theta_f(\tilde{g})$ à cet intervalle est égale à la restriction d'un homéomorphisme du type $\theta_f(\gamma)$ où $\gamma \in GA(\mathbb{Q}_2)$. Comme $\theta_f(GA(\mathbb{Q}_2))$ est engendré par f et par la translation T_1, les orbites de $\theta_f(\tilde{G})$ sont contenues dans les classes d'équivalence de $\mathcal{R}_f$.

Réciproquement, considérons l'élément $\tilde{g}$ de $\tilde{G}$ dont la restriction à l'intervalle $[0, 1]$ est donnée par le graphe suivant:



Sur l'intervalle $[\bar{0}, \bar{\frac{1}{4}}]$, $\tilde{g}$ coïncide avec l'application $x \to 2x$. Par conséquent, sur l'intervalle $[\bar{0}, \bar{\frac{1}{4}}]$, $\varphi_f(\tilde{g})$ coïncide avec f. (Rappelons que nous avons noté $\bar{x} = \theta_f(x)(0)$). Par conséquent, si $x \in [\bar{0}, \bar{\frac{1}{4}}]$, x et $f(x)$ sont dans la même orbite de $\varphi_f(G)$. Si $x \in [\bar{\frac{1}{4}}, \bar{\frac{1}{2}}]$, on considère l'élément $\tilde{g}' = T_{1/2} \circ \tilde{g} \circ T_{1/4}^{-1}$ de G. Celui-ci coïncide avec l'application $x \to 2x$ sur l'intervalle $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ et on conclut de la même façon. On procède de manière similaire sur $[\bar{\frac{1}{2}}, \bar{\frac{3}{4}}], [\bar{\frac{3}{4}}, \bar{1}], \ldots$. Par conséquent, pour tout x de $\mathbb{R}$, les points x et $f(x)$ sont dans la même orbite de $\theta_f(\tilde{G})$. Puisque, par ailleurs, $x + 1 = \theta_f(T_1)(x)$, les classes d'équivalence de $\mathcal{R}_f$ sont contenues dans les orbites de $\theta_f(\tilde{G})$. $\square$

LEMME 1.12. *Supposons que f vérifie les conditions* (I), (II) *et la condition*

(IV) *ci-dessous*:

(IV) $|f(x)-f(y)|>|x-y|$ *pour tout couple de réels distincts* (x, y). *Alors, l'application* H *fournie par le lemme* 1–9 *est un homéomorphisme.*

Démonstration. Cette condition (IV) signifie que $\bar{f}$ est "topologiquement expansive" (voir [Shu]).

Nous avons déjà vu que H est surjective. Supposons que H n'est pas injective et notons $\Omega \subset \mathbb{R}$ la réunion des intervalles ouverts maximaux sur lesquels H est constante. Supposons Ω non vide. D'après 1–9, on a:

$$T_1(\Omega) = \Omega$$
$$f(\Omega) = \Omega.$$

D'après la première égalité, le maximum des longueurs des composantes connexes de Ω est atteint. Soit Ω_0 une composante de longueur maximale. D'aprés la seconde égalité, $f(\Omega_0)$ est aussi une composante connexe de Ω. Mais la condition (IV) montre que la longueur de $f(\Omega_0)$ est strictement supérieure à celle de Ω_0, ce qui est contraire au choix de Ω_0. □

Nous avons donc montré le théorème A:

THEOREME 1.13. *Si* f *vérifie les conditions* (I), (II), (III_∞) *et* (IV), *alors* φ_f *est une représentation de* G *dans* $\mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ *qui est topologiquement conjuguée à l'inclusion canonique de* G *dans* $\mathrm{Homéo}(S^1)$.

Démonstration. En effet, d'après 1.12, la semi-conjugaison $\bar{H}$ est en fait une conjugaison topologique. □

Nous montrons maintenant que φ_f peut posséder un minimal exceptionnel, c'est-à-dire le théorème G.

PROPOSITION 1.14. *Supposons que* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *vérifie les conditions* I, II *et la condition* V *suivante*:

(V) f *possède au moins deux points fixes.*

Alors, φ_f *possède un minimal exceptionnel.*

Démonstration. La condition (I) montre que si α et β sont deux points fixes de f, alors $|\beta-\alpha|<1$. L'intervalle $]\alpha, \beta[$ de $\mathbb{R}$ se projette alors injectivement sur un ouvert V de S^1 tel que $\bar{f}^n(V)=V$ pour tout $n\geq 0$. Observons que l'ouvert

$\bar{f}^{-1}(V)$ est la réunion de deux composantes connexes dont l'une est V. De la même façon, $\bar{f}^{-n}(V)$ est la réunion de 2^n intervalles disjoints dont 2^{n-1} forment $f^{-(n-1)}(V)$. Par conséquent, la réunion $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bar{f}^{-n}(V)$ est un ouvert de S^1 qui n'est pas S^1 tout entier. Comme il est clair que $\bar{f}(\Omega) = \Omega$ et $\bar{f}^{-1}(\Omega) = \Omega$, on en déduit que Ω est un ouvert propre de S^1 saturé par la relation d'équivalence engendrée par $\bar{f}$ et donc invariant par $\varphi_f(G)$ d'après 1.11. En particulier, les points de $S^1 - \Omega$ ont une orbite non dense. Comme, par ailleurs, φ_f ne peut avoir d'orbite finie d'après 1.10, c'est donc que φ_f possède un minimal exceptionnel. □

III.2. *Corollaires de l'existence de minimaux exceptionnels*

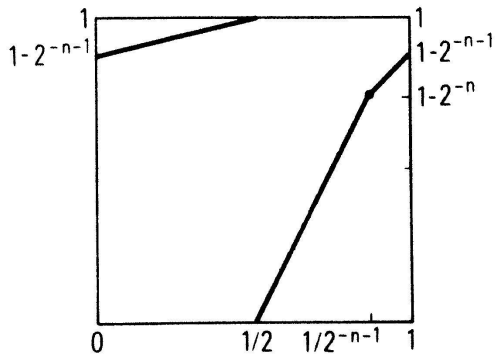
Le premier corollaire immédiat est le corollaire J.

THEOREME 2.1. *Si $g \in G$, alors le nombre de rotation de l'homéomorphisme g de S^1 est rationnel.*

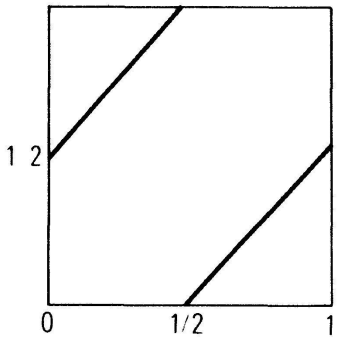
Démonstration. Deux homéomorphismes du cercle qui sont semi-conjugués ont le même nombre de rotation. Il suffit donc de montrer que $\varphi_f(g)$ a un nombre de rotation rationnel. Si f satisfait les conditions I, II, III_2 et V alors $\varphi_f(g)$ est un diffèomorphisme de S^1, de classe C^2, dont les orbites ne peuvent être denses, d'après 1.14. Le théorème est alors une conséquence du théorème de Denjoy selon lequel un difféomorphisme du cercle de classe C^2 dont le nombre de rotation est irrationnel a toutes ses orbites denses (voir par exemple [He–Hi]). □

PROPOSITION 2.1. *Pour tout nombre rationnel, il existe un élément de G dont le nombre de rotation est égal à ce rationnel.*

Démonstration. Soit n un entier supérieur ou égal à 0. On considère l'élément g_n de G dont le graphe est le suivant:

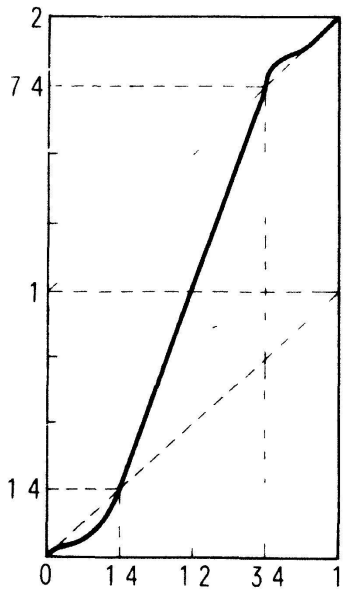


Le graphe de g_0 est particulier:



Le lecteur vérifiera aisément que g_n est un élément dont l'ordre est exactement $n+2$. (L'idée de considérer ces éléments g_n provient de [?]). Par conséquent, les puissances de g_n fournissent des éléments dont les nombres de rotation sont les éléments de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ du type $p/(n+2) \bmod \mathbb{Z}$. On obtient ainsi tous les éléments de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. $\square$

Nous abordons maintenant la démonstration du corollaire I. Nous allons montrer que $\varphi_f(G)$ est discret dans $\mathrm{Diff}^1(S^1)$ muni de la topologie C^1 pour un choix très particulier de f. Le même résultat resterait vrai pour une classe plus générale de difféomorphismes f, mais nous faisons ce choix pour simplifier les calculs. Choisissons donc f du type suivant:



Le difféomorphisme f est affine de pente 3 sur $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ et vérifie les propriétés (I), (II), (III_∞), et (V).

THEOREME 2.3. *Si f est du type décrit ci-dessus, alors $\varphi_f(G)$ (resp. $\varphi_f(F)$) est discret dans* $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)$ *(resp.* $\mathrm{Diff}^1_c(\mathbb{R})$*) muni de la topologie C^1.*

Démonstration. Soit $K \subset [0, 1]$ l'ensemble de Cantor "standard" construit sur l'intervalle $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Précisément K est obtenu de la façon suivante; on définit inductivement des ouverts Ω_n par $\Omega_0 = \emptyset$ et Ω_{n+1} est la réunion des intervalles ouverts I_i dont les centres sont les centres des composantes connexes J_i de $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] - \Omega_n$ et dont les longueurs $|I_i|$ sont les tiers des longueurs $|J_i|$ des intervalles correspondants. L'ensemble de Cantor K est alors $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] - \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n$. Soit $\bar{K} \subset S^1$ l'ensemble de Cantor obtenu par projection de $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. L'examen du graphe de f montre que $\bar{K}$ est invariant (positivement et négativement) par $\bar{f}$. Rappelons que nous avons noté $\bar{f}$ l'application de degré 2 induite par f sur le cercle. En fait, on peut vérifier que $\bar{K}$ est l'unique minimal exceptionnel de $\varphi_f(G)$.

Observons que la dérivée de f sur K est égale à 3. On en déduit que, si $g \in G$, alors la dérivée de $\varphi_f(g)$ sur $\bar{K}$ ne prend comme valeurs que des puissances entières de 3. Plus précisément, soit $h: S^1 \to S^1$ la semi-conjugaison entre $\varphi_f: G \to \mathrm{Diff}(S^1)$ et l'inclusion naturelle de G dans $\mathrm{Homéo}^+(S^1)$ donnée par le corollaire 1.10. Si x est un point de $\bar{K}$ qui est un point d'accumulation bilatéral de $\bar{K}$ (i.e. $x \notin \partial(S^1 - \bar{K})$), alors $h(x)$ est un point de S^1 qui n'est pas dans $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$. On a alors la propriété suivante: La dérivée de g en $h(x)$ (qui existe car $h(x) \notin \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$) est 2^n si et seulement si la dérivée de $\varphi_f(g)$ en g est 3^n.

Nous devons montrer que $\varphi_f(G)$ est discret dans $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)$. D'après l'observation précédente, si la dérivée de $\varphi_f(g)$ est uniformément proche de 1 sur S^1, elle est nécessairement égale à 1 sur $\bar{K}$. La dérivée de g aux points non dyadiques de S^1 est alors elle aussi égale à 1 ce qui signifie que g est une rotation.

Il nous reste à montrer que si g est une rotation telle que $\varphi_f(g)$ est suffisamment C^1-proche de l'identité, alors g est l'identité. Nous n'utiliserons en fait que la C^0-proximité. Notons que l'affirmation correspondante pour le plongement canonique de G dans $\mathrm{Homéo}^+(S^1)$ serait fausse: Les rotations dyadiques forment évidemment un sous-groupe non discret de $\mathrm{Homéo}^+(S^1)$. Supposons donc $\varphi_f(g)$ suffisamment C^0-proche de l'identité: Observons que $\varphi_f(g)$ permute les composantes connexes de $S^1 - \bar{K}$ qui sont de longeur $\frac{1}{2}(1/3^n)$ $(n \in \mathbb{N})$. L'intervalle de longueur maximale de $S^1 - \bar{K}$ est unique: C'est $I =]-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}[$ (mod $\mathbb{Z}$) et sa longueur est $+\frac{1}{2}$. Si $\varphi_f(g)$ est C^0-proche de l'identité: $\varphi_f(g)(I)$ est un intervalle de $S^1 - \bar{K}$ de longueur proche de $\frac{1}{2}$ et donc de longueur $\frac{1}{2}$. Dans ce cas $\varphi_f(g)(I)$ ne peut qu'être égal à I. Par conséquent, g fixe l'imae de I par h qui est un point car h "écrase" les composantes connexes de $S^1 - \bar{K}$ sur un point. Puisqu'une rotation ayant un point fixe est l'identité, ceci termine la démonstration du théorème dans le cas de $\varphi_f(G)$. Le cas de $\varphi_f(F)$ est tout à fait similaire. □

Avant de démontrer le théorème H, montrons tout d'abord le résultat suivant:

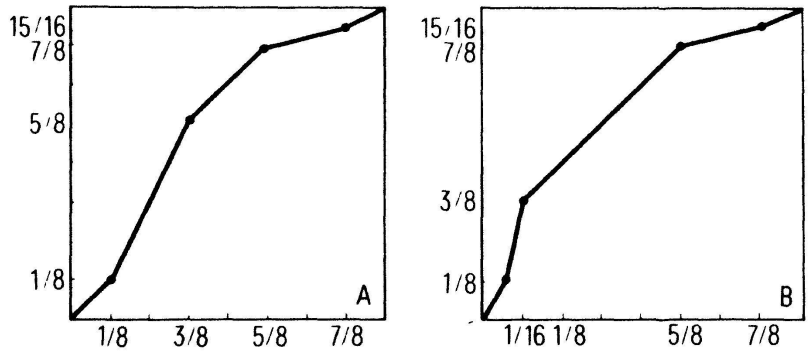
PROPOSITION 2.4. *Il existe une surface compacte orientée Σ et une représentation $\varphi : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ ayant les propriétés suivantes:*

i) *φ possède un minimal exceptionnel.*
ii) *Le nombre d'Euler du fibré en cercles au dessus de Σ associé à φ est égal à* 1.

Démonstration. Nous savons que la classe d'Euler χ est non nulle dans G. Il existe donc, d'après le théorème de Hopf, une surface orientée Σ et un morphisme $i : \pi_1(\Sigma) \to G$ tels que l'évaluation de $i^*\chi$ sur la classe fondamentale de Σ est égale à 1. Si f vérifie les conditions I, II, III$_\infty$, la représentation $\varphi = \varphi_f \circ i$ vérifie évidemment la propriété ii). Si, de plus, f vérifie les conditions V, $\varphi(\pi_1(\Sigma))$ preserve un ensemble de Cantor contenu dans S^1. Pour montrer que Σ vérifie la condition i), il nous reste à montrer que $\varphi(\pi_1(\Sigma))$ ne peut pas avoir d'orbite finie. Mais, sans une telle situation, l'orbite finie fournirait une "section multiforme" pour le S^1-fibré associé au dessus de Σ et le nombre d'Euler de ce fibré serait nul contrairement à ce qu'affirme la propriété ii). □

La démonstration précédente n'est pas constructive et ne donne aucune information sur le genre de Σ. L'intérêt du théorème H par rapport à la proposition 2.4 est donc son aspect explicite.

Soient A et B les éléments de G dont les graphes sont les suivants:



On pose:

$$A_1 = A_5 = A_7 = A_{11} = R_{1/8} A R_{-1/8}$$
$$A_2 = A_6 = A_8 = A_{12} = R_{-1/8} A R_{1/8}$$
$$A_3 = A_9 = R_{5/8} A R_{-5/8}$$
$$A_4 = A_{10} = R_{3/8} A R_{-3/8}.$$

On définit de même B_i $(1 < i \leq 12)$ en remplaçant A par B dans les formules précédentes.

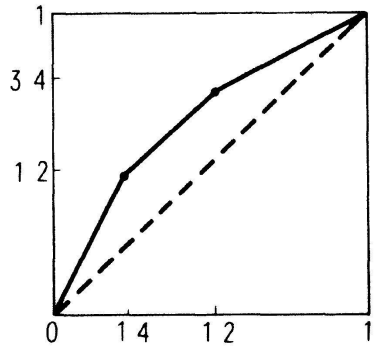
THEOREM 2.5. *Avec les notations précédentes, on a*:

$$\sum_{i=1}^{12} [A_i, B_i] = id$$

Cette égalité définit une représentation i du groupe fondamental de la surface Σ_{12} *de genre* 12 *dans* G. *La classe d'Euler* $i^*\chi$ *évaluée sur la classe fondamentale de* Σ *est égale à* $+1$.

Démonstration. Evidemment, le lecteur pourra vérifier par lui-même l'égalité annoncée! Nous allons nous contenter d'indiquer la méthode utilisée pour obtenir cette représentation explicite.

Soit $g \in G$ l'élément dont le graphe est le suivant:



On vérifie immédiatement que $(gR_{1/2})^3 = id$, ce qui peut s'écrire

$$gR_{1/2}gR_{-1/2}g = R_{1/2} \tag{1}$$

Par conséquent,

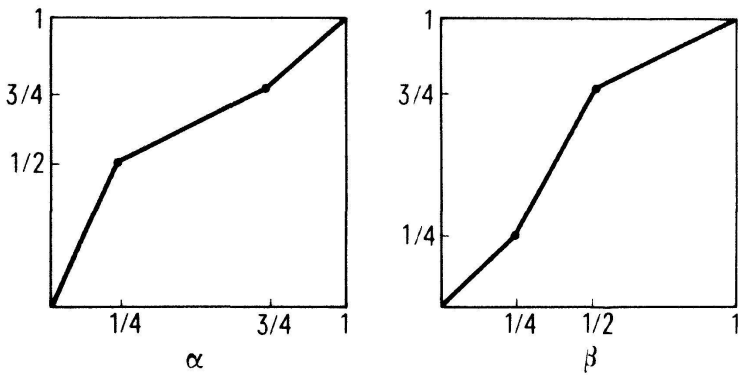
$$[g(R_{1/2}gR_{-1/2})g]^2 = id \tag{2}$$

Si l'on parvient à écrire g comme un produit de deux commutateurs, l'égalité précédente fournit un produit de douze commutateurs égal à l'identité. Vérifions tout d'abord que le nombre d'Euler de la représentation $i : \pi_1(\Sigma_{12}) \to G$ correspondant à cette relation est non nul. Pour cela, rappelons l'algorithme de Milnor (voir [He–Hi], par exemple), permettant de calculer le nombre d'Euler associé à une représentation du type $\prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i] = id$ dans $\mathrm{Diff}_+(S^1)$. On choisit des relevés $\tilde{a}_i$ et $\tilde{b}_i$ de a_i et b_i dans $\widetilde{\mathrm{Diff}}_+(S^1)$ et on forme le produit $\prod_{i=1}^{k} [\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]$. Celui ci ne dépend pas des choix de $\tilde{a}_i$ et $\tilde{b}_i$; c'est une translation entière. L'amplitude de cette translation est le nombre d'Euler cherché.

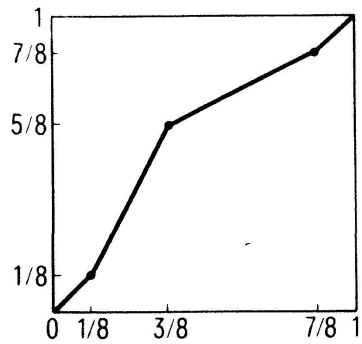
Dans notre cas, si g est un produit $[a_1, b_1][a_2, b_2]$ notre relation s'écrit

$\prod_{i=1}^{12}[a_i, b_i] = id$ où les a_i, b_i sont obtenus simplement à partir de la relation (2). Par exemple $a_3 = R_{1/2}a_1R_{-1/2}$ et $b_3 = R_{1/2}b_1R_{-1/2}$. Si l'on choisit un relevé $\tilde{a}_1$, $\tilde{b}_1$, $\tilde{a}_2$, $\tilde{b}_2$ pour a_1, b_1, a_2, b_2, on en déduit des relevés "naturels" $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_i$ pour a_i, b_i $(1 \leq i \leq 12)$. Par exemple, on pose $\tilde{a}_3 = T_{1/2}\tilde{a}_1T_{-1/2}$ où $T_{1/2}$ est la translation d'amplitude 1/2. Dans ces conditions, la quantité $\prod_{i=1}^{12}[\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]$ que nous cherchons à évaluer est le carré de $\prod_{i=1}^{6}[\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]$ car $\tilde{a}_{6+i} = \tilde{a}_i$ et $\tilde{b}_{6+i} = \tilde{b}_i$ $(1 \leq i \leq 6)$. Par ailleurs, la relation (1) montre que $\prod_{i=1}^{6}[\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]$ est une translation du type $x \to x + n + 1/2$ (avec $n \in \mathbb{Z}$). Son carré est donc une translation d'amplitude impaire et donc non nulle comme nous voulions le montrer.

Il nous reste donc à exprimer g comme un produit de deux commutateurs. On vérifie que g est le produit des deux éléments α, β de G dont les graphes sont:



Il est clair que $R_{1/8}\alpha R_{-1/8}$ et $R_{-1/8}\beta R_{1/8}$ sont tous les deux égaux à l'élément γ suivant:



Pour terminer, il nous suffit donc de montrer que γ est une commutateur. Dans [Fr–He], il est montré que F' est le premier groupe de commutateurs de F. La démonstration de ce fait est suffisamment constructive et permet effectivement d'exprimer γ comme un commutateur ce qui permet finalement de terminer la détermination de la représentation $\varphi : \pi_1(\Sigma_{12}) \to G$ que nous cherchions. Pour terminer, disons simplement que le caractère explicite de cette construction permet d'évaluer précisément le nombre d'Euler associé (nous avons vu qu'il est impair). Le résultat est celui annoncé dans le théorème, c'est-à-dire 1. □

III.3. *"Unicité" des lissages*

L'essentiel de cette section consiste à démontrer le théorème K, c'est-à-dire qu'une représentation non triviale de G dans $\mathrm{Diff}^2(S^1)$ est semi-conjuguée à l'inclusion canonique de G dans Homéo (S^1).

Fixons donc un morphisme non trivial $\varphi: G \to \mathrm{Diff}^2_+(S^1)$ $(r \geq 2)$. Puisque G est simple (voir II-3.15), φ est injective. Nous identifions souvent $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$ au sous-groupe de G (et donc de Homéo (S^1)) formé des rotations d'angle dyadique. Pour simplifier l'exposition, nous commencerons par faire l'hypothèse suivante:

(H) Pour tout x de S^1, l'orbite de x par $\varphi(\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z})$ est dense dans S^1.

PROPOSITION 3.1. *Si l'hypothèse* (H) *est vérifiée, il existe un homéomorphisme h de S^1 tel que $h \circ \varphi \circ h^{-1}(\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z})$ est formé de rotations du cercle d'angles dyadiques.*

Démonstration. Puisque $\varphi(\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z})$ est un sous-groupe abélien de $\mathrm{Homéo}_+(S^1)$, il préserve une mesure de probabilité μ sur S^1.

Sous l'hypothèse (H), μ est sans atomes et son support est le cercle tout entier. Si l'on utilise μ pour paramétrer le cercle, on obtient alors un homéomorphisme h de S^1 tel que $h \circ \varphi \circ h^{-1}(\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z})$ est formée de rotations. En considérant l'angle de ces rotations, on obtient un morphisme ρ de $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Il est immédiat que l'image d'un tel morphisme est contenue dans $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$. □

Remarquons que $\rho: \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est injectif. On vérifie qu'une telle injection est nécessairement un automorphisme de $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$.

LEMMA 3.2. *L'automorphisme ρ de $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$ est égal à $+id$ ou $-id$. En composant éventuellement h avec une symétrie, l'image de la rotation R_x de $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$ par $h \circ \varphi \circ h^{-1}$ est donc précisément cette même rotation R_x.*

Ce lemme sera une conséquence rapide du suivant:

LEMME 3.3. *Soit eu la classe d'Euler dans $H^2(\mathrm{Diff}^r_+(S^1); \mathbb{Z})$. Pour démontrer le théorème K, on peut toujours supposer que $\varphi^*(eu) = \pm\chi$.*

Demonstration de 3.2 *à partir de* 3.3. D'après 3.3., ρ se relève en un morphisme $\tilde{\rho}: \mathbb{Q}_2 \to \mathbb{Q}_2$ tel que $\tilde{\rho}(1) = \pm 1$. On a donc $\rho(x) = \pm x$. □

Demonstration de 3.3. Nous savons que $\varphi(eu) = n\alpha + p \cdot \chi$ $(n, p \in \mathbb{Z})$ (théorème C). Montrons que n est nul. Soit $\sigma = (u, v) - (v, u)$ le 2-cycle de G

dérit en II. 4–8. Nous avons vu que $\alpha(\sigma) = \pm 1$. Puisque toute représentation de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ dans Homéo$^+(S^1)$ a une classe d'Euler nulle (voir par exemple [He–Hi]), les entiers $\varphi^*(eu)(\sigma)$ et $\chi(\sigma)$ sont nuls. L'égalité $\varphi^*(eu) = n\alpha + p\chi$ évaluée sur σ donne alors $n = 0$.

Supposons que $p \neq \pm 1$, et considérons le revêtement à p feuillets de $\mathrm{Diff}^r_+(S^1)$ identifié au groupe $\mathrm{Diff}^r_+(S^1, R_{1/p})$ formé des difféomorphismes commutant avec $R_{1/p}$. Dans ces conditions, φ se relève en un morphisme φ_1 de G dans $\mathrm{Diff}^r_+(S^1, R_{1/p})$. On a évidemment $\varphi_1^*(eu) = \pm\chi$. Si l'on démontre le théorème K pour les représentations telles que $\varphi^*(eu) = \pm\chi$, on en déduira que φ_1 est semi-conjuguée à l'inclusion de G dans Homéo$^+(S^1)$. Mais ceci est impossible car un groupe semi-conjugué à G ne peut évidemment pas commuter avec la rotation non trivale $R_{1/p}$. □

Soit I un intervalle fermé de S^1 dont les deux extrémités sont dyadiques (i.e. éléments de $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$). Notons G_I le sous-groupe de G formé des éléments dont le support est contenu dans l'intérieur de I. Ces sous-groupes G_I sont sans torsion et simples car ils sont évidemment isomorphes à F' (voir II 3.15). L'observation de base est la suivante: les intérieurs de deux intervalles I_1 et I_2 sont disjoints si et seulement si tous les éléments de G_{I_1} commutent avec tous les éléments de G_{I_2}. Une telle situation est analysée par le lemme suivant:

LEMME 3.4. *Soint Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes simples, non triviaux et sans torsion de* $\mathrm{Diff}^2(S^1)$. *On suppose que les éléments de Γ_1 commutent avec ceux de Γ_2. Alors, si $\gamma_1 \in \Gamma_1$ et $x \in S^1$ sont tels que $\gamma_1(x) \neq x$, on a nécessairement $\gamma_2(x) = x$ pour tout γ_2 de Γ_2.*

Démonstration. Nous utiliserons un théorème de N. Koppel [Kop] dont une version peut s'exprimer de la façon suivante [Tsu 1]; si γ_1 et γ_2 sont deux difféomorphismes de S^1, de classe C^2, qui commutent et tels que $\mathrm{Fix}(\gamma_1) \neq \emptyset$ et $\mathrm{Fix}(\gamma_2) \neq \emptyset$, alors $\partial(\mathrm{Fix}(\gamma_1)) \subset \mathrm{Fix}(\gamma_2)$.

Commençons par supposer que tous les éléments de Γ_1 et de Γ_2 ont des points fixes. Fixons un élément γ_1 de Γ_1 et considérons l'ouvert $S^1 - \partial(\mathrm{Fix}(\gamma_1))$. Les composantes connexes de cet ouvert sont de deux types: ou bien γ_1 est l'identité sur cette composante, ou bien γ_1 n'a pas de point fixe sur cet intervalle. Notons A_i les composantes du premier type et B_j celles du second; on a $S^1 - \partial\,\mathrm{Fix}(\gamma_1)) = (UA_i) \cup (UB_j)$. Si $\gamma_2 \in \Gamma_2$, le théorème de N. Kopell montre que $\partial(\mathrm{Fix}(\gamma_1))$ est formé de points fixes de γ_2. Par conséquent, Γ_2 opère sur chacune des composantes A_i et B_j. En fixant j, on obtient ainsi une représentation:

$$\gamma_2 \in \Gamma_2 \to \gamma_{2|\bar{B}_j} \in \mathrm{Diff}(\bar{B}_j).$$

Comme Γ_2 commute avec γ_1, l'image de ce morphisme est contenue dans le groupe des difféomorphismes de l'intervalle $\bar{B}_j$ qui commutent avec $\gamma_{1|B_j}$. Comme $\gamma_{1|\bar{B}_j}$ n'a pas de point fixe, ce dernier groupe est abélien (c'est aussi un corollaire du théorème de N. Koppel, voir [Tsu 1]). Puisque Γ_2 est simple, ce morphisme est trivial, ce qui montre que γ_2 est l'identité sur les intervalles où γ_1 n'est pas l'identité et c'est précisément ce que nous voulions montrer.

Il nous reste à montrer que l'hypothèse suivant laquelle tous les éléments de Γ_1 et Γ_2 ont des points fixes est inutile.

Montrons d'abord qu'un élément γ de Γ_1 ou de Γ_2 a nécessairement un point périodique. Dans le cas contraire, d'après le théorème de Denjoy, γ serait conjugué à une rotation irrationnelle et le groupe des homéomorphismes de S^1 qui commutent avec γ serait donc conjugué au groupe des rotations et donc abélien. Or le commutant d'un élément de Γ_1 (resp. Γ_2) n'est certainement pas abélien, car il contient le groupe simple Γ_2 (resp. Γ_1).

Soit γ_2 un élément non trivial de Γ_2. D'après ce que nous venons de voir, une puissance non triviale γ_2^q de γ_2 possède un point fixe. Comme Γ_1 commute avec Γ_2, le groupe Γ_1 préserve globalement $\mathrm{Fix}\,(\gamma_2^q)$ et donc $\partial(\mathrm{Fix}\,(\gamma_2^q))$ (qui est non vide car Γ_2 est sans torsion). On obtient ainsi un morphisme:

$$\psi : \Gamma_1 \to \text{Homéo}\,(\partial\,\mathrm{Fix}\,(\gamma_2^q)).$$

Si γ_1 est un élément non trivial de Γ_1, une de ses puissances γ_1^l a un point fixe et on peut donc appliquer le lemme de N. Koppel à γ_1^l et γ_1^q. On obtient ainsi $\psi(\gamma_1^l) = id$ et ψ n'est donc pas injective (Γ_1 est sans torsion). Puisque Γ_1 est simple, ψ est trivial, ce qui montre que tous les éléments de Γ_1 ont des points fixes (au moins $\partial\,\mathrm{Fix}\,(\gamma_2^l)$). Ceci termine la démonstration du lemme. □

Appliquons ce lemme à la situation qui nous intéresse. Notons $\varphi' = h \circ \varphi \circ h^{-1}$ où h désigne encore l'homéomorphisme donné par 3-1. Si I est un intervalle fermé de S^1 d'extrémités dyadiques, on note

$$U_I = \{x \in S^1 \mid \exists \gamma \in G_I,\ \varphi'(\gamma)(x) \neq x\} \subset S^1.$$

Le lemme précédent montre que si I_1 et I_2 sont deux intervalles dont les intérieurs sont disjoints, alors U_{I_1} et U_{I_2} sont deux ouverts (non vides) et disjoints.

Les lemmes suivants résultent de la définition de U_I et d'une observation précédente.

LEMME 3.5. *Si $g \in G$ et si I est un intervalle fermé de S^1 d'extrémités dyadiques, on a $U_{g(I)} = \varphi'(g)(U_I)$.*

LEMME 3.6. *Si $x \in \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$ et I est un intervalle, on a $U_I \cap U_{I+x} = \emptyset$.*

C'est cette dernière propriété qui permet essentiellement de caractériser ces ouverts U_I. Le lemme suivant est élémentaire, nous en laissons la démonstration au lecteur.

LEMME 3.7. *Soit $I \subset S^1$ un intervalle fermé de longueur $|I|$ strictement inférieure à $\frac{1}{2}$ et Ω un ouvert de S^1 ayant la propriété suivante:*

$$\mathring{I} \cap (\mathring{I} + x) = \emptyset \text{ si et seulement si } \Omega \cap (\Omega + x) = \emptyset \ (x \in \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}).$$

Alors, il existe un unique intervalle fermé J de longueur minimale qui contient Ω et la longueur de J est égale à celle de I.

Revenant à notre situation, on voit que, si $|I| < \frac{1}{2}$, il existe un unique intervalle fermé V_I contenant U_I et de longueur $|I|$. Il est clair que si $I_1 \subset I_2$, alors $V_{I_1} \subset V_{I_2}$.

LEMME 3.8. *Quitte à conjuguer φ' par une rotation, on a $V_I = I$ pour tout I tel que $|I| < \frac{1}{2}$.*

Démonstration. L'intervalle $V_{[0,1/4]}$ est de longueur $\frac{1}{4}$. En conjugant φ' par une rotation, on peut donc supposer que $V_{[0,1/4]} = [0, \frac{1}{4}]$. On a alors $V_{[1/4,1/2]} = V_{[0,1/4]+1/4} = \frac{1}{4} + [0, \frac{1}{4}] = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ d'après 3.5 et 3.2. De même $V_{[1/2,3/4]} = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ et $V_{[3/4,1]} = [\frac{3}{4}, 1]$. Les deux intervalles $V_{[0,1/8]}$ et $V_{[1/8,1/4]}$ sont de longueur $\frac{1}{8}$, différent l'un de l'autre par la rotation d'angle $\frac{1}{8}$ et sont contenus dans $V_{[0,1/4]} = [0, \frac{1}{4}]$. C'est donc que $V_{[0,1/8]} = [0, \frac{1}{8}]$ et $V_{[1/8,3/4]} = [\frac{1}{8}, \frac{3}{4}]$. Par des arguments similaires, on montre que $V_I = I$ pour tout intervalle I d'extrémités dyadiques tel que $|I| < \frac{1}{2}$. □

PROPOSITION 3.9. *Si φ vérifie l'hypothèse (H), φ est topologiquement conjugué à l'injection de G dans* Homéo (S^1).

Démonstration. Nous allons montrer que $\varphi' = id$. Soit $g \in G$, $x \in \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$ et I un intervalle fermé d'extrémités dyadiques dont l'extrémité gauche est x et tel que $|I| < \frac{1}{2}$ et $|g(I)| < \frac{1}{2}$. On a:

$$\begin{aligned} V_{g(I)} &= g(I) && \text{(lemme 3.8)} \\ &= \varphi'(g)(V_I) && \text{(lemme 3.5)} \\ &= \varphi'(g)(I) && \text{(lemme 3.8).} \end{aligned}$$

Puisque $g(I) = \varphi'(g)(I)$, leurs extrémités gauches sont égales, c'est-à-dire que $\varphi'(g)(x) = x$. Par densité de $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$ dans S^1, on conclut que $\varphi' = id$. □

Nous cherchons maintenant à nous débarasser de l'hypothèse (H).

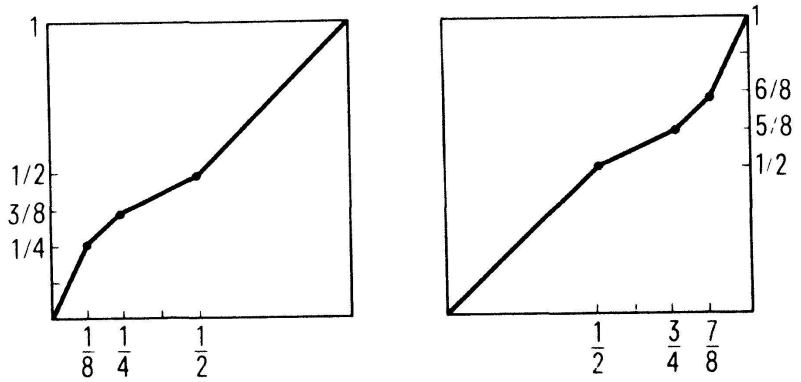
LEMME 3.10. *Soit $\varphi : G \to \mathrm{Diff}^2(S^1)$ une représentation quelconque. Alors, il existe un point x de S^1 fixe par $\varphi(F)$.*

Démonstration. Soit I_n l'intervalle $[2^{-n}, 1-2^{-n}]$ de S^1 et U_n l'ouvert de S^1 défini par:

$$U_n = \{x \in S^1 \mid \exists \gamma \in G_{I_n} \ \varphi(\gamma)(x) \neq x\}.$$

Le fermé $S^1 - U_n$ est non vide car il contient les points non fixes de $\varphi(g)$ où g est à support dans $[0, 2^{-n+1}]$ d'après 3.4. Soit $K \subset S^1$ l'intersection décroissante de ces fermés $S^1 - U_n$. La définition même de K montre que $\varphi(F')$ est l'identité sur K.

Soient g_1 et g_2 les deux éléments de G dont les graphes sont les suivants:



Comme $I_n \subset g_1(I_n) \subset I_{n-1}$ et $I_n \subset g_2(I_n) \subset I_{n-1}$ $(n \geq 2)$, on a $U_n \subset \varphi(g_1)(U_n) \subset U_{n-1}$ et $U_n \subset \varphi(g_2)(U_n) \subset U_{n-1}$. Il en résulte que $\varphi(g_1)$ et $\varphi(g_2)$ préservent globalement K. Comme nous avons vu que $\varphi(g_1)$ et $\varphi(g_2)$ ont au moins un point fixe (voir la démonstration de 3.4), et comme $\varphi(g_1)$ et $\varphi(g_2)$ commutent, on en déduit que $\varphi(g_1)$ et $\varphi(g_2)$ ont un point fixe commun x_0 dans K. Observons maintenant que tout élément de F s'écrit sous la forme $g_1^n g_2^m g$ où $g \in F'$. Comme $\varphi(g_1)$ et $\varphi(g_2)$ fixent x_0 et que $\varphi(F')$ est l'identité sur K, on conclut que x_0 est fixé par $\varphi(F)$. □

LEMME 3.11. *Soit $\varphi : G \to \mathrm{Diff}^2(S^1)$ une représentation non triviale. Alors $\varphi(G)$ possède un unique minimal dans S^1 qui est aussi l'unique minimal de $\varphi(\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z})$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\varphi(G)$ ne peut avoir d'orbite finie. En effet, une telle orbite fournirait une représentation de G sur un groupe fini cyclique et la simplicité de G entraîne alors que l'orbite finie devrait être un point fixe. Mais le groupe des homéomorphismes de S^1 qui fixent un point est un groupe sans torsion, de sorte que ce groupe ne peut contenir $\varphi(G)$ dont la torsion est non triviale.

Deux cas sont alors possibles:

i) Les orbites de $\varphi(G)$ sont denses dans S^1, i.e. $\varphi(G)$ possède un unique minimal $\mathcal{M}$ qui est S^1.

ii) $\varphi(G)$ possède un unique minimal exceptionnel $\mathcal{M} \subset S^1$.

Dans les deux cas $\mathcal{M}$ est contenu dans l'ensemble des points d'accumulations de n'importe quelle orbite de $\varphi(G)$.

Les actions effectives de $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$ sur le cercle peuvent être décrites de la façon suivante:

a) L'action possède un unique minimal $\mathcal{N} \subset S^1$.

b) Il existe une semi-conjugaison $h: S^1 \to S^1$ entre l'action considérée et une action de $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$ sur S^1 par rotations.

c) Si $\mathcal{N} \neq S^1$ et si γ est un élément non trivial de $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$, alors γ envoie une composante connexe de $S^1 - \mathcal{N}$ sur une composante connexe distincte.

Ces trois propriétés se montrent facilement en utilisant une mesure de probabilité μ sur S^1 invariante par $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$. Le support de μ est le minimal $\mathcal{N}$ et l'intégrale de μ définit la semi-conjugaison h.

La propriété c) montre que si $x \in S^1$, l'orbite de x par $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$ ne peut contenir qu'au plus un point dans chaque composante de $S^1 - \mathcal{N}$. Il en résulte que, pour tout x de S^1, l'ensemble des points d'accumulation de l'orbite de x par $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$ coïncide avec $\mathcal{N}$.

Soit x_0 un point de S^1 fixé par $\varphi(F)$ (lemme 3.8). Comme tout élément de G s'écrit sous la forme $g_1 \cdot g_2$ où $g_1 \in \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$ et $g_2 \in F$, on a $\varphi(G)(x_0) = \varphi(\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z})(x_0)$. En considérant les point d'accumulation de $\varphi(\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z})(x_0)$, on obtient $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Comme $\mathcal{N}$ est clairement contenu dans $\mathcal{M}$, on obtient l'égalité cherchée $\mathcal{M} = \mathcal{N}$. $\square$

Nous pouvons démontrer le théorème K.

THEOREME 3.12. *Toute représentation non triviale* $\varphi: G \to \mathrm{Diff}^2(S^1)$ *est semi-conjuguée à l'inclusion canonique de* G *dans* Homéo (S^1).

Démonstration. Si les orbites de $\varphi(G)$ sont denses, le lemme précédent montrent que φ vérifie la propriété (H) et nous avons déjà montré le théorème (3.9).

Si $\varphi(G)$ possède un minimal exceptionnel $\mathcal{M}$, on considère une application continue monotone $h:S^1 \to S^1$ de degré topologique 1, telle que $h(\mathcal{M}) = S^1$ et h est constante sur les composantes connexes de $S^1 - \mathcal{M}$. On peut alors construire une représentation $\varphi' : G \to \text{Homéo}(S^1)$ qui est semi-conjugée à φ par h. Evidemment, les orbites de φ' sont denses dans S^1.

On vérifie qu'un groupe d'homéomorphismes se S^1 qui est semi-conjugué à un groupe de difféomorphismes de classe C^2 vérifie lui aussi le théorème de N. Koppel. Tous les arguments précédents peuvent donc s'appliquer à φ' de sorte que φ' est topologiquement conjugué à l'inclusion de G dans Homéo (S^1). □

Pour terminer cette section, nous allons décrire les représentations de G dans $\text{Diff}^2(S^1)$ à conjugaison différentiable près et non pas seulement à semi-conjugaison près. Le cas où les orbites de $\varphi(G)$ sont denses est facile.

THEOREME 3.13. *Soit* $\varphi : G \to \text{Diff}^r_+(S^1)$ $(r \geq 2)$ *une représentation non triviale telle que toutes les orbites de* $\varphi(G)$ *sont denses. Alors, il existe un difféomorphisme* f *de* $\mathbb{R}$ *satisfaisant les conditions* (I), (II) *et* (III$_r$) *tel que* φ *et* φ_f *sont conjugués par une rotation.*

Démonstration. L'application $m : x \in S^1 \to 2x \in S^1$ n'est pas un élément de G, mais il existe un recouvrement de S^1 par des intervalles ouverts I_i et des éléments g_i de G tels que $m_{|I_i} = g_{i|I_i}$. Soit h une conjugaison topologique entre φ et l'inclusion naturelle de G dans Homéo (S^1) et soit $\bar{f} : S^1 \to S^1$ l'application définie par $\bar{f}_{|h^{-1}(I_i)} = \varphi(g_i)_{|h^{-1}(I_i)}$. Il est clair que $\bar{f}$ est bien défini et ne dépend pas du choix des I_i et des g_i. De plus, $\bar{f}$ est évidemment de classe C^r. Evidemment, $f(h^{-1}(0)) = h^{-1}(0)$, de sorte que, en conjugant φ par une rotation, on peut supposer que $\bar{f}$ fixe 0. Le relevé f de $\bar{f}$ à $\mathbb{R}$ tel que $f(0) = 0$ satisfait alors les condition I, II, et III$_r$. Les constructions précédentes montrent alors que, après conjugaison par une rotation, on a $\varphi = \varphi_f$. □

Les représentations φ qui ne sont que semi-conjuguées à l'inclusion de G dans Homéo (S^1) sont plus délicates à décrire complètement. Commençons par montrer un lemme:

LEMME 3.14. *Soit* $\varphi : G \to \text{Diff}^2(S^1)$ *une représentation non triviale et* h *une semi-conjuaison entre* φ *et l'inclusion de* G *dans* Homéo (S^1). *Soit* I *un intervalle fermé de* S^1 *d'extrémités dyadiques et* g *un élément de* G *tel que* $g_{|I} = id$. *Alors* $\varphi(g)_{|h^{-1}(\mathring{I})} = id$.

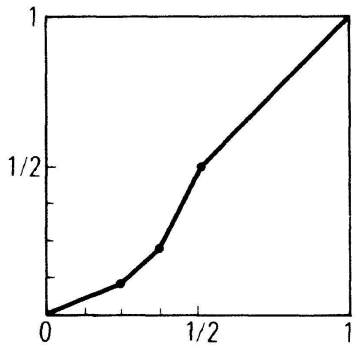
Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ l'unique minimal de $\varphi(g)$. On pose:

$$W_I = \{x \in S^1 \mid \forall g \in G,\ g_{|I} = id \Rightarrow \varphi(g)(x) = x\}$$

La semi-conjugaison montre que:

$$W_I \cap \mathcal{M} = h^{-1}(I) \cap \mathcal{M}.$$

Pour simplifier, prenons $I = [0, \frac{1}{2}]$ et considérons alors l'élément g_1 de G dont le graphe est le suivant:



Soit $g \in G$ tel que $g_{|I} = id$. Les éléments $\varphi(g_1)$ et $\varphi(g)$ commutent et préservent l'intervalle $J = h^{-1}(]0, \frac{1}{2}[)$. Par aileurs, $\varphi(g_1)$ n'a pas de points fixes sur J alors que $\varphi(g)$ fixe tous les points de $\mathcal{M} \cap J$. On peut donc appliquer le théorème de N. Koppel pour conclure que $\varphi(g)_{|J} = id$ et donc que $\varphi(g)_{|h^{-1}(\mathring{I})} = id$. □

Le théorème suivant montre que les représentations φ ayant une orbite non denses sont "presque" conjuguées à une représentation du type φ_f.

THEOREME 3.15. *Soit* $\varphi : G \to \mathrm{Diff}^r(S^1)$ $(r \geq 2)$ *une représentation non triviale ayant une orbite non dense et h une semi-conjugaison entre* φ *et l'inclusion de G dans* Homéo (S^1). *Il existe un difféomorphisme f de* $\mathbb{R}$ *satisfaisant les conditions* (I), (II) *et* (III$_r$) *et une rotation R de* S^1 *ayant la propriété suivante. Si* $g \in G$ *et si* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *sont les points de* S^1 *où g n'est pas différentiable, alors* $\varphi(g)$ *et* $R\varphi_f R^{-1}(g)$ *coïncident sur* $S^1 - h^{-1}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.

Démonstration. On reprend les notations de la démonstration du théorème 3.13. Le lemme précédent montre précisément que l'application $\bar{f} : S^1 \to S^1$ définie par $f_{|h^{-1}(I_i)} = \varphi(g_i)_{|h^{-1}(I_i)}$ est bien définie et ne dépend pas du choix des I_i et de g_i. Cette application est de classe C^r et nous verrons plus bas qu'il existe un point fixe pour $\bar{f}$ tel que le $r^{\text{ème}}$ jet de $\bar{f}$ en ce point est celui de l'identité. En conjugant

φ par une rotation R, on peut donc supposer qu'un relevé f de $\bar{f}$ à $\mathbb{R}$ satisfait les propriétés (I), (II), et (III$_r$). Le fait que $\varphi(g)$ et $R\varphi_f R^{-1}(g)$ coïncident sur $S^1 - h^{-1}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ résulte alors de la définition de f. □

Il nous reste à décrire $\varphi(g)$ sur $h^{-1}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Remarquons que $h^{-1}(0)$ est la projection dans S^1 de l'intervalle maximal J de $\mathbb{R}$ dont les extrémités sont des points fixes de f.

LEMME 3.16. *On se place dans les conditions du théorème* 3.15. *Si $g \in F$, le difféomorphisme $\varphi(g)$ de l'intervalle $J = h^{-1}(0) = [\alpha, \beta]$ ne dépend que des dérivées à gauche et à droite de g en* 0. *Ceci définit donc une représentation ψ de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ dans* Diff (J) *ayant les propriétés suivantes:*

i) *Le $r^{\text{ème}}$ jet de $\psi(m, n)$ en α est celui de f^m en α.*

ii) *Le $r^{\text{ème}}$ jet de $\psi(m, n)$ en β est celui de f^m en β.*

iii) $\psi(1, 1) = f_{[\alpha,\beta]}$.

Démonstration. La première assertion est une conséquense du lemme 3.14; si g_1 et g_2 sont des éléments de F ayant mêmes dérivées à droite et à gauche en 0, alors le germe de $g_1^{-1}g_2$ en 0 est trivial et le germe de $\varphi(g_1^{-1}g_2)$ au voisinage de $h^{-1}(0)$ est donc lui aussi trivial. Les propriétés i) et ii) résultent du théorème 3.15; si g est un élément de F dont les dérivées à gauche et à droite en 0 sont 2^m et 2^n, alors d'après 3.13, $\varphi(g)$ coïncide avec $\bar{f}^m$ sur un "demi-voisinage gauche" de α et avec $\bar{f}^n$ sur un "demi-voisinage droit de β". La propriété iii) résulte aussi de 3.15; si les dérivées à gauche et à droite de $g \in F$ en 0 sont égales à 2, alors g est différentiable en 0 et $\varphi(g)$ coïncide donc avec $\varphi_f(g)$ au voisinage de $h^{-1}(0)$, c'est-à-dire avec $\bar{f}$ au voisinage de $h^{-1}(0) = [\alpha, \beta]$. □

Si un C^r-difféomorphisme de $[0, 1]$ ne possède pas de point fixe où son $r^{\text{ème}}$ jet est celui de l'identité, il en est de même pour tout difféomorphisme non trivial qui commute avec lui (voir [Tsu 1]). Comme le jet de $\psi(0, 1)$ est trivial en α, cette remarque montre qu'il existe au moins un point de $[\alpha, \beta]$ fixe par $\bar{f}$ et tel que le $r^{\text{ème}}$ jet de $\bar{f}$ en ce point est trivial. C'est cette affirmation qui manquait à la démonstration de 3.15.

Nous pouvons décrire maintenant les représentations non triviales $\varphi : G \to$ Diff^r (S^1) à conjugaison différentiable près.

THEOREME 3.17. *A conjugaison par une rotation près, la donnée d'une représentation non triviale φ de G dans* Diff^r (S^1) *est équivalente à la donnée des deux objets suivants:*

1) *Un difféomorphisme f de $\mathbb{R}$ satisfaisant* I, II, *et* III$_r$.

2) *Un morphisme* $\psi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathrm{Diff}^r([\alpha, \beta])$ (*où* $[\alpha, \beta]$ *est l'intervalle maximal fixe par* f) *vérifiant* i), ii) *et* iii).

La donnée de 2) *est inutile lorsque les orbites de* $\varphi(G)$ *sont denses car alors* $\alpha = \beta$.

Démonstration. Nous avons déjà vu comment associer un couple (f, ψ) à une représentation φ. Montrons comment construire φ à partir d'un tel couple. Soit h une semi-conjugaison entre $\bar{f}$ et $x \in S^1 \to 2x \in S^1$ (Lemme 1.9). Soit $g \in G$ et $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ les points de S^1 où g n'est pas différentiable. Posons $y_i = g(x_i)$. Sur $X = S^1 - h^{-1}\{x_1, \ldots, x_k\}$, on pose $\varphi(s)_{|X} = \varphi_f(g)_{|X}$. Il nous reste à définir $\varphi(g)$ sur les intervalles du type $h^{-1}(x_1)$. Observons que $R_{-y_1} g R_{x_1}$ est un élément de F et que R_{-y_1} et R_{x_1} sont différentiables partout, de sorte que $\varphi(R_{x_1})$ et $\varphi(R_{-y_1})$ sont déjà définis. Pour définir $\varphi(g)$ sur $h^{-1}(x_1)$, il nous suffit donc de définir $\varphi(g)$ sur $h^{-1}(0) = [\alpha, \beta]$ lorque $g \in F$. On pose alors $\varphi(g)_{|h^{-1}(0)} = \psi(m, n)$ où 2^m et 2^n sont les dérivées à gauche et à droite de g en 0. Il est facile de vérifier que l'on définit bien ainsi une représentation φ de G dans $\mathrm{Diff}^r(S^1)$. □

III.4. *Corollaires du théorème K*

Le corollaire L est maintenant clair: si $\varphi : G \to \mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ est topologiquement conjugué à l'inclusion canonique de G dans Homéo (S^1), alors φ est évidemment semi-structurellement stable.

Nous démontrons maintenant le théorème F relatif à l'invariant de Godbillon-Vey. Commençons par quelques rappels concernant cet invariant. Soit $B\Gamma_2^1$ le classifiant de Haefliger des Γ-structures transversalement orientées, de codimension 1 et de classe C^2. L'invariant de Godbillon–Vey est une classe de cohomologie, que nous notons GV, dans $H^3(B\Gamma_2^1; \mathbb{R})$. Le S^1-fibré au-dessus de $B\,\mathrm{Diff}_+^2(S^1)$ associé à l'action de $\mathrm{Diff}_+^2(S^1)$ sur S^1 a le type d'homotopie de $B\,\widetilde{\mathrm{Diff}}_+^2(S^1)$. Ce fibré est muni d'une Γ_2^1-structure "horizontale" qui est classifiée par une application $q : B\,\widetilde{\mathrm{Diff}}_+^2(S^1) \to B\Gamma_2^1$ défine à homotopie près. L'image réciproque q^*GV est une classe de cohomologie, notée encore GV dans $H^3(B\,\widetilde{\mathrm{Diff}}_+^2(S^1); \mathbb{R}) \simeq H^3(\widetilde{\mathrm{Diff}}_+^2(S^1); \mathbb{R})$. L'image de GV par le morphisme d'intégration sur la fibre $H^3(\widetilde{\mathrm{Diff}}_+^2(S^1); \mathbb{R}) \to H^2(\widetilde{\mathrm{Diff}}_+^2(S^1); \mathbb{R})$ est une classe de cohomologie que nous notons gv (voir par exemple [Mi–TS] ou [Mor]). Nous nous proposons de montrer que, pour toute représentation $\varphi : G \to \mathrm{Diff}_+^2(S^1)$, on a $\varphi^*(gv) = 0$ dans $H^2(G; \mathbb{R})$. Soit eu la classe d'Euler dans $H^2(\mathrm{Diff}_+^2(S^1); \mathbb{Z})$.

LEMME 4.19. *Si* $\varphi : G \to \mathrm{Diff}_+^2(S^1)$ *est un morphisme non trivial, on a* $\varphi^*(eu) = \pm\chi$.

Démonstration. La façon la plus rapide de montrer ce lemme est d'utiliser le théorème K et d'observer que la classe d'Euler est invariante par semi-congaison respectant l'orientation (voir [Gh2]). □

Quitte à conjuguer φ par une symétrie, nous pouvons donc supposer que $\varphi^*(eu) = \chi$. Nous avons donc un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{Z} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\tilde{G} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \widetilde{\mathrm{Diff}}^2_+(S^1) \\
\downarrow & & \downarrow \\
G & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Diff}^2_+(S^1) \\
\downarrow & & \downarrow \\
1 & & 1
\end{array}$$

LEMME 4.10. *Pour toute représentation* $\varphi : G \to \mathrm{Diff}^2_+(S^1)$, *il existe un réel* k *tel que* $\varphi^*(gv) = k\alpha$ *dans* $H^2(G; \mathbb{R})$.

Démonstration. On peut supposer que φ est non trivale. La naturalité de l'intégration sur la fibre montre que $\tilde{\varphi}^*(gv)$ est aussi l'image de $\varphi^*(GV)$ par l'intégration sur la fibre $H^3(\tilde{G}; \mathbb{R}) \to H^2(G; \mathbb{R})$. Comme $H^3(\tilde{G}; \mathbb{R})$ est engendré par la classe β et que l'intégrale sur la fibre de β n'est autre que $\alpha \in H^2(C; \mathbb{R})$, on obtient le résultat. □

Nous terminons maintenant la démonstration du théorème F.

THEOREME 4.11. *Pour toute représentation* $\varphi : G \to \mathrm{Diff}^2_+(S^1)$, *on a* $\varphi^*(gv) = 0$.

Démonstration. Utilisons de nouveau le cycle $\sigma = (u, v) - (v, u)$ fourni par le lemme II.4.8. Comme l'invariant de Godbillon–Vey d'une représentation de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ dans $\mathrm{Diff}^2_+(S^1)$ est nul (voir [Her]), on a $\varphi^*(gv)(\sigma) = 0$. Par ailleurs, nous savons que $\alpha(\sigma) = 1$ (lemme II.4.8). En évaluant l'égalité $\varphi^*(gv) = k\alpha$ sur σ, on obtient alors que k est nul. □

BIBLIOGRAPHIE

[Bot] R. BOTT, *On some formulas for the characteristic classes of group actions, Springer Lecture Notes N° 652,* p. 25–61 (1978), appendice par R. Brooks.

[Br–Sq] M. G. BRIN, C. C. SQUIER, *Groups of piece-wise linear homeomorphisms of the real line,* Invent. Math. *79* (1985) 485–498.

[Br] K. S. BROWN *Finiteness properties of groups,* preprint 1986.

[Br–Ge] K. S. BROWN, R. GEOGHEGAN, *An infinite dimensional torsion free FP_∞ group,* Invent. Math. *77* (1984) 367–381.

[Dyd] J. DYDAK, *A simple proof that pointed FANR-spaces are regular fundamental retracts of A.N.R's.* Bull Acad. Pol. Sci. (Ser. Sci. Math. Astr. Phys.) *25* (1977) 55–62.

[Eps] D. EPSTEIN, *The simplicity of certain groups of homeomorphisms,* Compositio Math, *22* (1970) 165–173.

[Fr–He] P. FREYD and A. HELLER, *Splitting homotopy idempotents, II,* Mimeographed, U. Penn., 1979.

[Gh–1] E. GHYS, *Classe d'Euler et minimal exceptionnel, à paraître dans Topology.*

[Gh–2] E. GHYS, *Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée, A paraître dans Contemporary Mathematics,* Proceedings colloque Lefschetz, Mexico 1984.

[Gr–1] P. GREENBERG, *Classifying spaces for foliations with isolated singularities,* preprint.

[Gr–2] P. GREENBERG, *Actions of pseudo-groups,* preprint.

[Ha–1] A. HAEFLIGER, *Homotopy and integrability,* in Springer Lecture Notes n° 179 (1971) 133–163.

[Ha–2] A. HAEFLIGER, *Sur les classes caractéristiques des feuilletages,* Séminaire Bourbaki, exposé 412, 1970–71.

[He–Hi] G. HECTOR and U. HIRSCH, *Introduction to the geometry of foliations, Part B,* Vieweg, Wiesbaden, 1983.

[Her] M. HERMAN, *The Godbillon–Vey invariant of foliations by planes of T^3,* Geometry and Topology, Rio de Janeiro, Springer Lecture Notes, n° 597 (1976) 294–307.

[Hin] N. HINGSTON, *Equivariant Morse theory and closed geodesics,* J. Differential Geometry, *19* (1984) 85–116.

[Ho–Se] G. HOCHSCHILD and J.-P. SERRE, *Cohomology of group extensions,* Trans. Amer. Math. Soc. *74* (1953) 110–134.

[Kop] N. KOPPEL, *Commuting diffeomorphisms,* Global Analysis, Symp. Pure Math. Vol. XIV, A.M.S. (1970) 165–184.

[McD1] D. MCDUFF, *Foliations and monoïds of embeddings,* in Geometric Topology; ed. Cantrell, Academic Press (1979), 429–444.

[McD2] D. MCDUFF, *The homology of some groups of diffeomorphisms,* Comment. Math. Helvetici *55* (1980) 97–129.

[MD–Se] D. MCDUFF and G. B. SEGAL, *Homology fibrations and the group completion theorem,* Invent. Math. *31* (1976) 279–284.

[MK–Th] R. MCKENZIE and R. J. THOMSON, *An elementary construction of unsolvable problems in group theory,* Word Problems, W. W., Cannonito, F. B., Lyndon, R. C. (eds). Amsterdam North Holland.

[Mat] J. MATHER, *Integrability in codimension one,* Comment. Math. Helv., *48* (1973) 1925–233.

[Mi–Ts] T. MIZUTANI and T. TSUBOI, *Foliations without holonomy and foliated bundles,* Sci. Rep. Satama Univ., *9* (1979) 45–55.

[Mor] S. MORITA, *Nontriviality of the Gelfand–Fuchs characteristic classes for flat S^1-bundles,* Osaka J. Math. *21* (1984) 545–563.

[Qui] D. G. QUILLEN, *Higher algebraic K-theory I,* in Algebraic K-theory I, 85–147. Lecture Notes in Mathematics, n° 341. Springer 1973.

[Seg1] G. B. SEGAL, *Classifying spaces and spectral sequences,* Pub. Math. I.H.E.S., *34* (1968) 105–112.

[Seg 2] G. B. SEGAL, *Categories and cohomology theory*, Topology, *13* (1974) 293–312.

[Seg 3] G. B. SEGAL, *Classifying spaces related to foliations*, Topology, *17* (1978) 367–382.

[Ser] F. SERGERAERT, *BΓ (d'après Mather et Thurston)*, Séminaire Bourbaki exposé n° 524 (1978).

[Shu] M. SHUB, *Expanding maps, Global Analysus*, Proc. Symp. Pure Math. *14* (1970) Amer. Math. Soc., 273–276.

[Spa] E. H. SPANIER, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York 1966.

[Tsu 1] T. TSUBOI, *On 2-cycles of B* Diff (S^1) *which are represented by foliated S^1-bundles over T^2*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, *31* 2 (1981), 1–59.

[Tsu 2] T. TSUBOI, *Foliated cobordism classes of certain foliated S^1-bundles over surfaces*, Topology vol. *23*, n° 2, p. 233–244, 1984.

[Zim] R. J. ZIMMER, *Ergodic theory and semisimple groups*, Monographs in Mathematics, Vol. *81* Birkhäuser (1984).

[?] Notes manuscrites d'auteur inconnu décrivant des groupes simples, infinis, de présentation finie (dûs à R. J. Thomson). L'un de ces groupes est G.

Univ. des Sciences et Techniques de Lille I
U.E.R. de Math. pures et Appliquées,
U.A. 751 au C.N.R.S.
59655 Villeneuve d'Ascq Cédex (France).

Reçu, le 10 janvier 1986