

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 61 (1986)

Artikel: Untere Schranken für den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen.
Autor: Huber, Heinz
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-46918>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Untere Schranken für den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen

HEINZ HUBER

1. Einleitung

1.1 Auf jeder kompakten Riemannschen Fläche \mathcal{F} vom Geschlecht $g > 1$ gibt es eine einzige Metrik konstanter Krümmung -1 , welche mit der konformen Struktur von \mathcal{F} verträglich ist: die Poincaré-Metrik. Der zugehörige Laplace-Beltrami-Operator $-\Delta$ besitzt ein diskretes Spektrum:

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad (\lambda_n \rightarrow +\infty).$$

Es ist bekannt ([1]–[3]), dass es eine positive untere Schranke für $\lambda = \lambda_1$ gibt, die nur vom Durchmesser D von \mathcal{F} abhängt; insbesondere hat Buser [2] gezeigt, dass¹⁾

$$\lambda \geq \left(4 \sin \frac{D}{2}\right)^{-2}.$$

Eine bessere Abschätzung ist zu erwarten, wenn neben dem Durchmesser noch weitere geometrische Daten von \mathcal{F} berücksichtigt werden. Wir betrachten in dieser Arbeit das Volumen von \mathcal{F} :

$$A = \int_{\mathcal{F}} d\omega = 4\pi(g-1)$$

und den “Injektivitätsradius” $d = l/2$, (l ist die Länge der kürzesten geschlossenen Geodätischen auf \mathcal{F}). Wir beweisen folgendes Theorem:

$$\lambda \geq \min\left(\frac{1}{4}, \sigma\right) \quad \sigma = 2\left(2 - \operatorname{Tg}^2 \frac{d}{2}\right) \operatorname{Tg}^2 \frac{d}{2} / (g-1)D^2 \quad (\text{I})$$

¹⁾ Die hyperbolischen Funktionen werden im folgenden mit Sin, Cos, Tg bezeichnet.

Zum Vergleich von (1) und (I) betrachten wir die Menge Σ_g aller Flächen vom Geschlecht $g \geq 2$ mit $\operatorname{Tg}^2 \frac{d}{2} > \frac{2}{5}$ und $D < 4 \log 2g$. (Es ist leicht zu sehen, dass $D > \log 2g$ für jede Fläche vom Geschlecht g). Die Abschätzung (1) von Buser liefert dann

$$\lambda(\mathcal{F}) > (2^6 g^4 + 2^{-2} g^{-4} - 4)^{-1} \quad \forall \mathcal{F} \in \Sigma_g.$$

Dagegen ergibt (I) ein erheblich besseres Resultat:

$$\lambda(\mathcal{F}) > \frac{2}{25}(g-1)^{-1}(\log 2g)^{-2} \quad \forall \mathcal{F} \in \Sigma_g.$$

Andererseits kann man der Arbeit [5] von F. Jenni leicht entnehmen: Es gibt eine hyperelliptische Fläche $\mathcal{F}_g \in \Sigma_g$ mit

$$\lambda(\mathcal{F}_g) \sim 2g^{-1}, \quad (g \rightarrow \infty).$$

1.2 Zum Beweis von (I) dürfen wir annehmen, dass

$$0 < \lambda < \frac{1}{4}. \tag{1}$$

Wir zeigen, dass dann $\lambda \geq \sigma$. Dazu wählen wir eine zu λ gehörige reellwertige Eigenfunktion ϕ mit

$$\int_{\mathcal{F}} \phi^2 d\omega = 1. \tag{2}$$

Wegen $\lambda \neq 0$ gilt:

$$\int_{\mathcal{F}} \phi d\omega = 0. \tag{3}$$

In §2 werden wir beweisen, dass unter der Voraussetzung (1)

$$\nabla \phi = \|\operatorname{grad} \phi\|^2 \leq \lambda/4\pi I \tag{4}$$

$$I = \frac{1}{2} \left(2 - \operatorname{Tg}^2 \frac{d}{2} \right) \operatorname{Tg}^2 \frac{d}{2}. \tag{5}$$

Da \mathcal{F} kompakt ist, gibt es zu zwei beliebigen Punkten $p, q \in \mathcal{F}$ stets einen

geodätischen Weg γ von p nach q mit der Länge

$$\int_{\gamma} ds = \text{dist}(p, q) \leq D.$$

Daher wird

$$\begin{aligned} (\phi(p) - \phi(q))^2 &= \left(\int_{\gamma} \frac{d\phi}{ds} ds \right)^2 \leq \int_{\gamma} \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 ds \cdot \int_{\gamma} ds \\ &\leq \int_{\gamma} (\nabla \phi) ds \cdot \int_{\gamma} ds \leq \lambda D^2 / 4\pi I. \end{aligned} \quad (6)$$

Definieren wir

$$K_m := A^{m-2} \int_{\mathcal{F} \times \mathcal{F}} (\phi(p) - \phi(q))^{2m} d\omega_p d\omega_q, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

so folgt aus (6)

$$K_m \leq (\lambda D^2 A / 4\pi I)^m = (\lambda D^2 (g-1) / I)^m. \quad (8)$$

Nun sei

$$\mathbb{N}^* = \{m \in \mathbb{N} \mid 2^{2m-1} \leq K_m\}. \quad (9)$$

Für $m \in \mathbb{N}^*$ folgt dann aus (8)

$$\lambda D^2 (g-1) / I \geq 2^{2-1/m}.$$

Falls \mathbb{N}^* eine unendliche Menge ist, können wir daraus schliessen, dass

$$\lambda D^2 (g-1) / I \geq 4,$$

womit wegen (5) Theorem (I) bewiesen wäre.

Nun folgt aus (2), (3) und der Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F} \times \mathcal{F}} (\phi(p) - \phi(q))^2 d\omega_p d\omega_q &= 2A, \\ \int_{\mathcal{F} \times \mathcal{F}} (\phi(p) - \phi(q))^4 d\omega_p d\omega_q &= 2A \int_{\mathcal{F}} \phi^4 d\omega + 6 \geq 8. \end{aligned} \quad (10)$$

Diese Ungleichung besagt gerade, dass

$$2 \in \mathbb{N}^*. \quad (11)$$

Sei nun $m \in \mathbb{N}^*$ und $m' = 2m - 1$. Dann folgt aus den Definitionen (7) und (9):

$$2^{m'} \leq A^{(m'-3)/2} \int_{\mathcal{F} \times \mathcal{F}} (\phi(p) - \phi(q))^{m'} (\phi(p) - \phi(q)) d\omega_p d\omega_q.$$

Daraus und aus (10) schliessen wir mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung:

$$2^{2m'} \leq A^{m'-3} \int_{\mathcal{F} \times \mathcal{F}} (\phi(p) - \phi(q))^{2m'} d\omega_p d\omega_q \cdot 2A = 2K_{m'}.$$

Daher ist mit $m \in \mathbb{N}^*$ auch $m' = 2m - 1 \in \mathbb{N}^*$. Daraus folgt wegen (11), dass \mathbb{N}^* tatsächlich eine unendliche Menge ist. Damit ist Theorem (I) bewiesen bis auf die Gradientenabschätzung (4).

1.3 Man kann leicht eine obere Schranke für D angeben, die nur von d und A abhängt. Sei

$$B_p(r) = \{q \in \mathcal{F} \mid \text{dist}(p, q) \leq r\}.$$

Dann gilt

$$\int_{B_p(r)} d\omega = 2\pi(\cos r - 1) < A \quad \text{für } r \leq d, \quad (12)$$

also insbesondere

$$\cos d - 1 < A/2\pi = 2(g - 1). \quad (13)$$

Es gibt daher eine natürliche Zahl n derart, dass

$$n < \frac{2(g - 1)}{\cos d - 1} \leq n + 1. \quad (14)$$

Wir zeigen, dass

$$D \leq 2nr \quad \text{mit} \quad \cos r = 1 + \frac{2(g - 1)}{n + 1} \quad (15)$$

und somit

$$D < \frac{4(g-1)d}{\cos d - 1}. \quad (16)$$

In der Tat: Es gibt zwei Punkte $a, b \in \mathcal{F}$ mit $\text{dist}(a, b) = D$ und ein geodätisches Segment der Länge D mit den Endpunkten a, b . Dieses Segment zerlegen wir durch die Punkte $p_0 = a, p_1, \dots, p_n = b$ in n Stücke gleicher Länge D/n . Dann gilt offenbar

$$\text{dist}(p_i, p_j) \geq D/n \quad \text{für } i \neq j. \quad (17)$$

Definieren wir nun $r > 0$ durch

$$\cos r = 1 + \frac{2(g-1)}{n+1},$$

so ist wegen (14) $r \leq d$ und daher nach (12)

$$\sum_{j=0}^n \int_{B_{p_j}(r)} d\omega = 4\pi(g-1) = \int_{\mathcal{F}} d\omega.$$

Daher können $B_{p_0}(r), \dots, B_{p_n}(r)$ nicht paarweise disjunkt sein. (Sonst wäre nämlich die offene Menge $\mathcal{F} - \bigcup_{j=0}^n B_{p_j}(r)$ leer und somit \mathcal{F} nicht zusammenhängend). Folglich gibt es zwei Indices $i \neq j$ und einen Punkt $q \in B_{p_i}(r) \cap B_{p_j}(r)$. Dann ist aber

$$\text{dist}(p_i, p_j) \leq \text{dist}(p_i, q) + \text{dist}(p_j, q) \leq 2r$$

und somit wegen (17) $D \leq 2nr$.

1.4 Aus (16) folgt

$$\frac{1}{D} > \frac{1}{4(g-1)} \frac{\cos d - 1}{d} = \frac{1}{4(g-1)} \frac{\sin d}{d} \text{Tg} \frac{d}{2}.$$

Daraus ergibt sich für die Schranke σ in Theorem (I) die Abschätzung

$$\sigma > \sigma^*(d) = \frac{1}{8(g-1)^3} \left(\frac{\sin d}{d} \right)^2 \left(2 - \text{Tg}^2 \frac{d}{2} \right) \text{Tg}^4 \frac{d}{2}. \quad (18)$$

$\sigma^*(d)$ ist offensichtlich eine monoton wachsende Funktion von d . Daher folgt aus (13)

$$\sigma^*(d) < \sigma^*(d_0), \quad \cos d_0 - 1 = 2(g-1) \geq 2.$$

Daraus ergibt sich aber leicht, dass stets $\sigma^*(d) < 1/4$. Daher folgt nun aus (I) und (18) das Theorem

$$\lambda \geq \mu(d)(g-1)^{-3} \quad \mu(d) = \frac{1}{8} \left(\frac{\sin d}{d} \right)^2 \left(2 - \operatorname{Tg}^2 \frac{d}{2} \right) \operatorname{Tg}^4 \frac{d}{2}. \quad (\text{II})$$

2. Die Abschätzung von $\nabla \phi$

2.0 Wir versehen den Einheitskreis $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ mit der hyperbolischen Metrik

$$ds^2 = 4(1 - |z|^2)^{-2} |dz|^2, \quad (1)$$

welche die konstante Krümmung -1 besitzt. Für die hyperbolische Distanz der Punkte 0 und z ergibt sich:

$$\rho(0, z) = \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}, \quad |z| = \operatorname{Tg} (\rho(0, z)/2). \quad (2)$$

Mit geodätischen Polarkoordinaten

$$r = \rho(0, z), \quad \theta = \arg z$$

wird

$$ds^2 = dr^2 + \sin^2 r \, d\theta^2.$$

Daher ergibt sich für das Volumenelement und die Beltrami-Operatoren der Metrik (1):

$$d\omega = \sin r \, dr \, d\theta \quad (3)$$

$$\nabla = \|\operatorname{grad}\|^2 = \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \sin^{-2} r \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 \quad (4)$$

$$\Delta = \sin^{-1} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \sin^{-2} r \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (5)$$

2.1 Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt $p \in \mathcal{F}$. Da das Geschlecht von \mathcal{F} grösser als eins ist, gibt es eine konforme Ueberlagerungsabbildung $\Pi: E \rightarrow \mathcal{F}$ mit

$$\Pi(0) = p. \quad (6)$$

Da jede Decktransformation von Π eine Isometrie der Differentialgeometrie (1) ist, können wir diese Geometrie mit Π von E auf \mathcal{F} verpflanzen und erhalten (unabhängig von der Wahl von $p \in \mathcal{F}$) die in der Einleitung charakterisierte Poincaré-Metrik auf \mathcal{F} . Wir definieren:

$$\begin{aligned} f(r, \theta) &= F(x, y) = (\phi \circ \Pi)(z), \\ r &= \rho(0, z), \theta = \arg z, z = x + iy. \end{aligned} \quad (7)$$

Setzen wir noch

$$\alpha = F_x(0, 0), \beta = F_y(0, 0), \quad (8)$$

so folgt aus (1) und (6), (7)

$$(\nabla \phi)(p) = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2) \quad (9)$$

Die Ueberlagerungsabbildung Π ist injektiv auf

$$K = \{z \in E \mid \rho(0, z) < d\}$$

(Siehe z.B. [4] 3.2). Daher wird

$$\int_K \nabla(\phi \circ \Pi) d\omega = \int_{\Pi(K)} \nabla \phi d\omega \leq \int_{\mathcal{F}} \nabla \phi d\omega = \lambda.$$

Daraus folgt wegen (3), (4) und (7):

$$\int_0^d \left(\int_0^{2\pi} f_r^2(r, \theta) d\theta \right) \sin r dr + \int_0^d \left(\int_0^{2\pi} f_\theta^2(r, \theta) d\theta \right) \sin^{-1} r dr \leq \lambda. \quad (10)$$

2.2 Wir stellen nun die Funktion $f(r, \theta)$ durch eine Fourier-Reihe dar:

$$f(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(r) e^{in\theta}. \quad (11)$$

Da f reellwertig ist, gilt

$$c_{-n} = \overline{c_n}. \quad (12)$$

Wir interessieren uns insbesondere für $c_1(r)$ und zeigen zunächst

$$\lim_{r \rightarrow 0} c_1(r)/r = \frac{1}{4}(\alpha - i\beta). \quad (13)$$

In der Tat: Aus (7), (8) und (2) ergibt sich

$$\begin{aligned} f(r, \theta) &= \phi(p) + |z| (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta) + O(|z|^2) \\ &= \phi(p) + \frac{1}{2} \operatorname{Tg} \frac{r}{2} ((\alpha - i\beta)e^{i\theta} + (\alpha + i\beta)e^{-i\theta}) + O\left(\operatorname{Tg}^2 \frac{r}{2}\right). \end{aligned}$$

Somit wird

$$c_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-i\theta} d\theta = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta) \operatorname{Tg} \frac{r}{2} + O\left(\operatorname{Tg}^2 \frac{r}{2}\right).$$

2.3 Zur Berechnung von $c_1(r)$ benötigen wir die Legendre-Funktion

$$F_\lambda(x) := P_\nu(x), \quad \nu(\nu + 1) = -\lambda.$$

Sie ist im Intervall $[1, \infty)$ Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} (x^2 - 1) F'_\lambda(x) + \lambda F_\lambda(x) = 0; \quad (14)$$

sie ist regulär an der Stelle $x = 1$ und es gilt

$$F_\lambda(1) = 1. \quad (15)$$

Daraus ergibt sich sofort

$$F'_\lambda(1) = -\frac{\lambda}{2}. \quad (16)$$

Definieren wir

$$G_\lambda(x) = (x^2 - 1)^{1/2} F'_\lambda(x), \quad x > 1, \quad (17)$$

so gilt

$$\frac{d}{dx} (x^2 - 1) G'_\lambda(x) + \left(\lambda - \frac{1}{x^2 - 1} \right) G_\lambda(x) = 0. \quad (18)$$

Wir zeigen nun:

$$c_1(r) = \gamma G_\lambda(\cos r), \quad |\gamma|^2 = \lambda^{-2} (\nabla \phi)(p). \quad (19)$$

Zunächst bemerken wir: Aus (4) und (7) folgt

$$f_r^2(r, \theta) \leq M = \max_{\mathcal{F}} \nabla \phi.$$

Daraus ergibt sich:

$$|c'_1(r)| \leq M^{1/2}. \quad (20)$$

Die Eigenfunktion ϕ erfüllt auf \mathcal{F} die Gleichung $\Delta \phi + \lambda \phi = 0$. Daraus folgt wegen (5) und (7):

$$\sin^{-1} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \sin^{-2} r \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \lambda f = 0.$$

Hieraus ergibt sich sofort eine gewöhnliche Differentialgleichung für

$$c_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-i\theta} d\theta:$$

$$\sin^{-1} r \frac{d}{dr} (\sin r c'_1(r)) + (\lambda - \sin^{-2} r) c_1(r) = 0.$$

Führen wir die neue Variable $x = \cos r$ ein und definieren

$$h(x) = c_1(r), \quad x = \cos r, \quad r > 0, \quad (21)$$

so wird

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 1)h'(x) + \left(\lambda - \frac{1}{x^2 - 1}\right)h(x) = 0, \quad x > 1. \quad (22)$$

$h(x)$ erfüllt also dieselbe Differentialgleichung wie $G_\lambda(x)$. Wir betrachten deshalb die Wronski-Determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} G_\lambda(x) & h(x) \\ G'_\lambda(x) & h'(x) \end{vmatrix}.$$

Aus (18) und (22) folgt $\frac{d}{dx}(x^2 - 1)W(x) = 0$ und somit

$$W(x) = \frac{c}{x^2 - 1}, \quad x > 1, \quad (23)$$

mit einer gewissen Konstanten c . Andererseits folgt aber aus (13), (17), (20), (21), dass die Determinante $W(x)$ für $x \downarrow 1$ beschränkt ist. Somit muss $c = 0$ sein. Dann sind aber h und G_λ linear abhängig: Es gibt eine Konstante γ derart, dass

$$c_1(r) = \gamma G_\lambda(\cos r).$$

Daraus und aus (16), (17) ergibt sich:

$$\lim_{r \rightarrow 0} c_1(r)/r = -\frac{\lambda}{2} \gamma.$$

Somit wird wegen (13)

$$\gamma = \frac{1}{2\lambda}(-\alpha + i\beta)$$

und daher wegen (9): $|\gamma|^2 = \lambda^{-2}(\nabla\phi)(p)$. Damit ist die Behauptung (19) bewiesen.

2.4 Aus (11) folgt:

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c'_n(r)|^2 = \int_0^{2\pi} f_r^2(r, \theta) d\theta$$

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n(r)|^2 = \int_0^{2\pi} f_\theta^2(r, \theta) d\theta$$

Hieraus und aus (17), (19) ergibt sich wegen $c_{-1} = \overline{c_1}$:

$$4\pi\lambda^{-2}(\nabla\phi)(p)(G'_\lambda(\cos r))^2 \sin^2 r \leq \int_0^{2\pi} f_r^2(r, \theta) d\theta$$

$$4\pi\lambda^{-2}(\nabla\phi)(p)(F'_\lambda(\cos r))^2 \sin^2 r \leq \int_0^{2\pi} f_\theta^2(r, \theta) d\theta$$

Daraus folgt nun wegen (10):

$$4\pi\lambda^{-2}J(\cos d)(\nabla\phi)(p) \leq \lambda \quad (24)$$

mit

$$J(y) = \int_1^y (x^2 - 1)(G'_\lambda(x))^2 dx + \int_1^y (F'_\lambda(x))^2 dx, \quad y > 1. \quad (25)$$

2.5 Nun haben wir noch $J(y)$ nach unten abzuschätzen! Aus (18) folgt:

$$\int_1^y G_\lambda \frac{d}{dx} (x^2 - 1) G'_\lambda dx + \int_1^y \left(\lambda - \frac{1}{x^2 - 1} \right) G_\lambda^2 dx = 0.$$

Daraus ergibt sich durch partielle Integration des ersten Terms:

$$\int_1^y (x^2 - 1)(G'_\lambda)^2 dx = \frac{1}{2}(y^2 - 1) \frac{d}{dy} G_\lambda^2(y) + \int_1^y \left(\lambda - \frac{1}{x^2 - 1} \right) G_\lambda^2 dx. \quad (26)$$

Wegen (17) ist aber

$$\int_1^y \left(\lambda - \frac{1}{x^2 - 1} \right) G_\lambda^2 dx = \lambda \int_1^y (x^2 - 1)(F'_\lambda(x))^2 dx - \int_1^y (F'_\lambda(x))^2 dx.$$

Somit folgt aus (25), (26):

$$J(y) = \frac{1}{2}(y^2 - 1) \frac{d}{dy} G_\lambda^2(y) + \lambda \int_1^y (x^2 - 1)(F'_\lambda(x))^2 dx. \quad (27)$$

Aus (17) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(y^2 - 1) \frac{d}{dy} G_\lambda^2(y) &= \frac{1}{2}(y^2 - 1) \frac{d}{dy} (y^2 - 1)(F'_\lambda(y))^2 \\ &= \frac{1}{2}(y^2 - 1) \left[F'_\lambda(y) \frac{d}{dy} (y^2 - 1) F'_\lambda(y) + F''_\lambda(y) (y^2 - 1) F'_\lambda(y) \right]. \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen (14):

$$\frac{1}{2}(y^2 - 1) \frac{d}{dy} G_\lambda^2(y) = -\lambda(y^2 - 1)F_\lambda(y)F'_\lambda(y) - y(y^2 - 1)(F'_\lambda(y))^2. \quad (28)$$

Weiter folgt aus (14)

$$\lambda \int_1^y F_\lambda \frac{d}{dx} (x^2 - 1) F'_\lambda dx + \lambda^2 \int_1^y F_\lambda^2 dx = 0.$$

Daraus ergibt sich durch partielle Integration des ersten Terms

$$\lambda \int_1^y (x^2 - 1)(F'_\lambda(x))^2 dx = \lambda(y^2 - 1)F_\lambda(y)F'_\lambda(y) + \lambda^2 \int_1^y F_\lambda^2(x) dx. \quad (29)$$

Nun folgt aus (27)–(29):

$$J(y) = \lambda^2 \int_1^y F_\lambda^2(x) dx - \frac{y}{y^2 - 1} [(y^2 - 1)F'_\lambda(y)]^2.$$

Schliesslich folgt nochmals aus (14)

$$(y^2 - 1)F'_\lambda(y) = -\lambda \int_1^y F_\lambda(x) dx.$$

Somit wird

$$\lambda^{-2}J(y) = \int_1^y F_\lambda^2(x) dx - \frac{y}{y^2 - 1} \left(\int_1^y F_\lambda(x) dx \right)^2. \quad (30)$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \left(\int_1^y F_\lambda(x) dx \right)^2 &\leq \int_1^y \frac{1+x^2}{x^2} dx \cdot \int_1^y \frac{x^2}{1+x^2} F_\lambda^2(x) dx \\ &= \frac{y^2 - 1}{y} \int_1^y \frac{x^2}{1+x^2} F_\lambda^2(x) dx. \end{aligned}$$

Somit folgt aus (30)

$$\lambda^{-2}J(\cos d) \geq \int_1^{\cos d} \frac{F_\lambda^2(x)}{1+x^2} dx.$$

Für $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{4}$ gilt aber

$$F_\lambda(x) \geq F_{1/4}(x) > 0 \quad \text{für } x \geq 1.$$

(Siehe [4], Lemma 4 pag. 221). Somit wird

$$\lambda^{-2}J(\cos d) \geq \int_1^{\cos d} \frac{F_{1/4}^2(x)}{1+x^2} dx = \int_0^{\operatorname{Tg}^2(d/2)} F_{1/4}^2\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \frac{dt}{1+t^2}. \quad (31)$$

Nach [4], (21)–(23), pag. 219–220 gilt:

$$F_{1/4}\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = (1-t)^{1/2} E(t) \quad (32)$$

$$E(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1-t \sin^2 u)^{-1/2} du = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 t^n \quad (33)$$

$$c_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}. \quad (34)$$

Somit folgt aus (31)

$$\lambda^{-2}J(\cos d) \geq \int_0^{\operatorname{Tg}^2(d/2)} (1-t) \frac{E^2(t)}{1+t^2} dt. \quad (35)$$

Wegen (34) gilt für $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq t < 1$:

$$(1-\alpha t)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n/2} (\alpha^2 t)^{n/2}.$$

Daraus folgt nach der Ungleichung von Cauchy:

$$\frac{1}{1-\alpha t} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 t^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^2 t)^n \right) = \frac{E(t)}{1-\alpha^2 t}.$$

Daraus ergibt sich für $\alpha = t$, $0 \leq t < 1$:

$$E(t) \geq \frac{1-t^3}{1-t^2} = 1 + \frac{t^2}{1+t} \geq 1 + \frac{t^2}{2}$$

und somit

$$E^2(t) \geq 1 + t^2.$$

Daher folgt aus (35)

$$\lambda^{-2} J(\cos d) \geq \int_0^{\operatorname{Tg}^2(d/2)} (1-t) dt = \frac{1}{2} \left(2 - \operatorname{Tg}^2 \frac{d}{2} \right) \operatorname{Tg}^2 \frac{d}{2}.$$

Damit folgt aus (24):

$$(\nabla \phi)(p) \leq \lambda/4\pi I, \quad I = \frac{1}{2} \left(2 - \operatorname{Tg}^2 \frac{d}{2} \right) \operatorname{Tg}^2 \frac{d}{2}.$$

Dies ist die in 1. (4) angekündigte Gradientenabschätzung.

LITERATUR

- [1] HUBER, H., *Ueber den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Mannigfaltigkeiten konstanter negativer Krümmung*, Archiv Math. (Basel) 26 (1975) 178–182.
- [2] BUSER, P.; *Untersuchungen über den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Flächen*, Dissertation Basel 1976.
- [3] BUSER, P.; *Ueber den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Flächen*, Comment. Math. Helv. 54 (1979) 477–493.
- [4] HUBER, H.; *Ueber die Eigenwerte des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen*, Comment. Math. Helv. 51 (1976) 215–231.
- [5] JENNI, F. *Ueber das Spektrum des Laplace-Operators auf einer Schar kompakter Riemannscher Flächen*, Diss. Basel (1981).

*Mathematisches Institut der Universität Basel
Rheinsprung 21 CH – 4051 Basel*

Erhalten 8 August 1985