

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 61 (1986)

**Artikel:** Forme de Blanchfield et cobordisme d'entrelacs bords.  
**Autor:** Duval, Julien  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46950>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Forme de Blanchfield et cobordisme d'entrelacs bords

JULIEN DUVAL

## 0. Introduction

Pour généraliser la forme de Blanchfield des noeuds [B] [L1] aux entrelacs bords à  $m$  composantes on peut envisager d'employer le revêtement abélien libre ou bien le revêtement libre du complémentaire de l'entrelacs (cf [S1] et [S2]). Algébriquement les deux options présentent des difficultés supplémentaires par rapport aux noeuds dues dans le premier cas à la dimension homologique de  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^m]$  et dans le second à la non-commutativité de  $\mathbb{Z}[F_m]$  l'anneau du groupe libre à  $m$  générateurs. Cependant la similitude des dimensions homologiques de  $\mathbb{Z}[F_m]$  et de  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$  permet d'étendre les méthodes de J. Levine [L1] aux entrelacs bords. Nous obtenons ainsi les résultats suivants:

L'homologie médiane du revêtement libre du complémentaire d'un entrelacs bord en dimension impaire porte une dualité analogue à la forme de Blanchfield des noeuds et on peut réaliser toutes les dualités a priori possibles par des entrelacs simples. En corollaire on peut caractériser les polynômes de Laurent apparaissant comme polynômes d'Alexander d'entrelacs simples et donner des exemples d'entrelacs non scindables comme dans [CS1] et [Ka].

La forme de Blanchfield permet également d'identifier le groupe de cobordisme des entrelacs bords en dimension impaire  $C_{2k-1}(F_m)$  pour  $k \geq 3$  à un groupe de Witt de formes d'enlacement, généralisant le résultat de C. Kearton pour les noeuds [K]. Le calcul de  $C_{2k-1}(F_m)$  a été effectué dans le cas général pour la première fois par S. E. Cappel et J. L. Shaneson dans [CS1] en termes de  $\Gamma$ -groupes de chirurgie homologique et récemment par K. H. Ko [Ko] en termes de matrices de Seifert dans la lignée du calcul de Levine pour les noeuds [L2]. Notre démonstration consiste, dans l'esprit de [CS1], à interpréter la forme de Blanchfield comme une obstruction de chirurgie duale de J. R. Smith [Smi] au moyen de résultats de P. Vogel [V1] [V2] liant dans une suite exacte le groupe de Witt et les groupes de chirurgies homologique et classique.

Les résultats de cet article ont été annoncés dans [D]. Je voudrais remercier Jean Barge, qui m'a donné ce thème de recherche, pour ses encouragements et son aide constante, ainsi que Pierre Vogel qui m'a mis sur la piste de l'anneau  $\Lambda$ .

Ce travail est organisé de la manière suivante: Après des définitions (§1) nous

étudions l'homologie du revêtement libre (§2 et 3) et construisons la forme de Blanchfield (§4 et 5). Les §6 et 7 sont consacrés au théorème de réalisation et à ses applications aux polynômes d'Alexander et aux entrelacs non scindables tandis qu'aux §8 et 9 nous calculons  $C_{2k-1}(F_m)$ .

## 1. Définitions et notations

On travaille dans la catégorie différentiable. Un *entrelacs*  $L$  de dimension  $n$  à  $m$  composantes est une sous-variété lisse orientée dans la sphère orientée  $S^{n+2}$ , homéomorphe à la somme disjointe de  $m$  sphères  $S^n$ .

Il est dit *bord* si ses composantes bordent dans  $S^{n+2}/m$  sous-variétés lisses orientables et disjointes. Notons  $X$  le *complémentaire* d'un voisinage tubulaire de  $L$  dans  $S^{n+2}$ . Son bord  $\partial X$  est homéomorphe à  $m$  exemplaires du produit  $S^1 \times S^n$  et en reliant les cercles  $S^1 \times *$  en évidence dans  $\partial X$  à un point-base de  $X$  on construit les  $m$  *méridiens* de l'entrelacs. D'après [G] [CS1] la condition d'être bord coïncide pour  $L$  avec l'existence d'un homomorphisme  $\theta: \pi_1(X) \rightarrow F_m$  envoyant méridiens ordonnés sur générateurs ordonnés du groupe libre à  $m$  générateurs  $F_m$ . Un  $F_m$ -*entrelacs* [CS1] sera la donnée d'un entrelacs bord  $L$  et d'un tel homomorphisme  $\theta$ . Notons  $X_*$  le complémentaire de l'entrelacs trivial à  $m$  composantes. D'après [CS1] il n'y a pas d'obstruction à matérialiser  $\theta$  en une application de degré 1,  $f:(X, \partial X) \rightarrow (X_*, \partial X_*)$  vérifiant les propriétés:

- i)  $f$  induit  $\theta$  au niveau des groupes fondamentaux;
- ii)  $f/\partial X$  est un homéomorphisme;
- iii)  $f$  est une équivalence d'homologie entière, i.e. induit des isomorphismes en homologie entière.

A un  $F_m$ -entrelacs on peut associer le *revêtement libre*  $\tilde{X}$  de son complémentaire, revêtement régulier de groupe  $F_m$  induit par  $\theta$ .

De même on a le revêtement libre  $\tilde{X}_*$  de  $X_*$ , et d'après la propriété i) de  $f$  on peut relever  $f$  en  $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}_*$ .

On notera  $A$  l'*anneau de groupe à involution*  $\mathbb{Z}[F_m]$  identifié également à  $\mathbb{Z}\langle X_1, \dots, X_m, X_1^{-1}, \dots, X_m^{-1} \rangle$  l'anneau des polynômes de Laurent non commutatifs à  $m$  indéterminées ainsi que  $\mathcal{F}: A \rightarrow \mathbb{Z}$  son *augmentation*. L'homologie entière de  $X$  a une structure de  $A$ -module à gauche via  $\theta$  que l'on notera  $H_*(X, A)$  tandis que la cohomologie de  $X$  à valeurs dans  $A$  sera notée  $H^*(X, A)$ . Finalement, pour un  $A$ -module à gauche (resp. à droite)  $M$  on indiquera par:

- $\bar{M}$  la  $A$ -structure à droite (resp. à gauche) induite par l'involution de  $A$ ;
- $t(M)$  la  $\mathbb{Z}$ -torsion de  $M$ ;
- $f(M)$  le quotient de  $M$  par  $t(M)$ ;
- $e^i(M)$  le  $A$ -module à droite (resp. à gauche)  $\text{Ext}_A^i(M, A)$ .

## 2. Homologie libre d'un $F_m$ -entrelacs

Comme pour les noeuds [L1], la dualité de Poincaré sur le revêtement libre  $\tilde{X}$  du complémentaire d'un  $F_m$ -entrelacs permet de déterminer les modules  $H_i(X, A)$  au dessus de la dimension moitié par ceux qui sont en dessous. Plus précisément on a le:

**THÉORÈME 2.1.** *Soit  $(L, \theta)$  un  $F_m$ -entrelacs de dimension  $n \geq 1$ ; on a les isomorphismes*

$$\begin{aligned} e^2(t(H_{n-i}(X, A))) &\xrightarrow{\sim} \overline{t(H_i(X, A))} \text{ pour tout } i; \\ \overline{f(H_i(X, A))} &\xrightarrow{\sim} e^1(f(H_{n+1-i}(X, A))) \text{ pour } i \neq 0, n+1. \end{aligned}$$

La preuve suit celle de [L1] qui consiste à “raffiner” algébriquement la dualité de Poincaré avec ici des différences provenant du fait que l'anneau  $A$  n'est plus commutatif ni noethérien dès que  $m \geq 2$ . Il conserve néanmoins de bonnes propriétés:

### PROPOSITION 2.2.

- i)  $A$  est cohérent, i.e. le noyau d'un homomorphisme entre  $A$ -modules de présentation finie est de présentation finie;
- ii)  $A$  est de dimension globale 2;
- iii) les  $A$ -modules projectifs de type fini sont libres;
- iv) l'idéal d'augmentation  $I$  est libre de base les  $X_i - 1$  pour  $i = 1, \dots, m$ . De plus  $\bigcap_{n=0}^{\infty} I^n = 0$ ;
- v) on a des propriétés analogues à iv) pour l'anneau  $\mathbb{Z}_r[F_m]$ ;
- vi)  $\mathbb{Q}[F_m]$  est un F.I.R., i.e. tous ses idéaux (à droite ou à gauche) sont libres; en particulier  $\mathbb{Q}[F_m]$  est de dimension globale 1.

La majeure partie de cette proposition est citée dans [S1]. L'égalité  $\bigcap_{n=0}^{\infty} I^n = 0$  résulte d'un théorème de [F] ainsi que v) en adaptant la démonstration tandis que la partie vi) provient de [Ba] cha. IV, §5.

*Démonstration du théorème 2.1.* Pour éviter les problèmes dûs au bord de  $X$  et aux dimensions 0 et  $n+1$ , il est préférable de travailler avec l'homologie  $H_*$  du cône désuspendu de  $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}_*$  ainsi que sa cohomologie  $H^*$  à coefficients  $A$ . La différence avec  $H_*(X, A)$  n'est pas grande car,  $f$  étant de degré 1, on a des suites exactes courtes scindées:  $0 \rightarrow H_i \rightarrow H_i(X, A) \xrightarrow{\tilde{f}_*} H_i(X_*, A) \rightarrow 0$  et, de plus,  $H_*(X_*, A)$  est nul sauf  $H_0(X_*, A) = \mathbb{Z}$  et  $H_{n+1}(X_*, A) = A^{m-1}$ . On a donc les isomorphismes:

$$t(H_i) \xrightarrow{\sim} t(H_i(X, A)) \text{ pour tout } i \text{ et } f(H_i) \xrightarrow{\sim} f(H_i(X, A)) \text{ pour } i \neq 0, n+1. \quad (1)$$

Toujours puisque  $f$  est de degré 1 et  $f/\partial X$  est un homéomorphisme, la dualité de Poincaré sur  $X$  à coefficients  $A$  produit les isomorphismes  $\bar{H}_i \xrightarrow{\sim} H^{n+2-i}$  ([W] p. 25).

Comme  $A$  est de dimension 2 et si l'on sait que  $\text{Hom}_A(H_*, A) = 0$  – ce qui sera montré dans le §3 – la suite spectrale des coefficients universels calculant  $H^*$  dégénérera en des suites exactes courtes  $0 \rightarrow e^2(H_{n-i}) \rightarrow H^{n+2-i} \rightarrow e^1(H_{n+1-i}) \rightarrow 0$  ([L1], p. 6) que l'on interprète via  $D^{-1}$  en:

$$0 \rightarrow e^2(H_{n-i}) \rightarrow \bar{H}_i \rightarrow e^1(H_{n+1-i}) \rightarrow 0. \quad (2)$$

Pour conclure il suffit d'analyser les  $\mathbb{Z}$ -torsions et les quotients  $\mathbb{Z}$ -libres des termes de (2). Pour cela il faut remarquer que les modules  $H_*$  sont d'un type particulier dont l'étude algébrique fait l'objet du prochain paragraphe.

### 3. Modules de type $L$

Ils sont introduits par N. Sato dans [S1] qui montre les deux propositions suivantes, résultant des propriétés de  $A$  et de la  $\mathbb{Z}$ -acyclicité du cône de  $f$ :

**PROPOSITION–DÉFINITION 3.1.** *Soit  $M$  un  $A$ -module à droite de présentation finie. On a les équivalences:*

- i)  $\text{Tor}_q^A(M, \mathbb{Z}) = 0$  pour tout  $q$ ;
- ii) le  $\mathbb{Z}$ -morphisme  $M^m \xrightarrow{\sim} M$ ,  $(h_1, \dots, h_m) \mapsto \sum_{i=1}^m h_i(X_i - 1)$  est un isomorphisme;
- iii)  $M$  a une résolution libre  $0 \rightarrow A^r \xrightarrow{U} A^s \xrightarrow{V} A^t \rightarrow M \rightarrow 0$  avec  $r + t = s$  et les p.g.c.d. des mineurs d'ordre  $r$  de  $\mathcal{F}(U)$  et d'ordre  $t$  de  $\mathcal{F}(V)$  valent 1.

Un module satisfaisant à l'une de ces propriétés sera dit *de type  $L$* .

**PROPOSITION 3.2.** *Les modules  $H_i$  sont de type  $L$  pour tout  $i$ .*

Pour  $m = 1$  on retrouve les modules de type  $K$  de [L1]. Dès que  $m \geq 2$  leur comportement diffère dans certains domaines. Par exemple la condition ii) de la définition force un module de type  $L$  à avoir une  $\mathbb{Z}$ -torsion nulle ou infinie si  $m \geq 2$ . Toujours sous cette condition un module de type  $L$  n'est pas nécessairement de  $A$  torsion: Prenons le quotient de  $\mathbb{Z}\langle X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1} \rangle$  par l'idéal à droite engendré par  $X_1 - 1 + X_1^{-1}$ . C'est un module de type  $L$  et la classe de  $X_2 + 1$  n'y est pas de  $A$ -torsion car sinon on aurait une relation de dépendance entre  $X_2 + 1$  et  $X_1 - 1 + X_1^{-1}$ . L'idéal à droite  $(X_2 + 1, X_1 - 1 + X_1^{-1})_d$  serait alors

principal dans  $\mathbb{Q}\langle X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1} \rangle$  (cf. prop. 2.2vi)) ce qui est impossible comme on le voit en passant à  $\mathbb{Q}[X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1}]$  par abélianisation des variables. Cependant d'autres propriétés des modules de type  $K$  se conservent bien:

**LEMME 3.3.** *Soit  $M$  un module de type  $L$ ; alors  $\text{Hom}_A(M, A) = \text{Hom}_A(M, \mathbb{Z}_r[F_m]) = 0$*

Ce résultat termine la justification de la suite exacte (2) puisque les modules  $H_i$  sont de type  $L$ . Montrons par exemple que  $\text{Hom}_A(M, A) = 0$ . Soit  $\varphi$  dans  $\text{Hom}_A(M, A)$ . D'après la propriété ii) d'un module de type  $L$ ,  $h$  dans  $M$  s'écrit  $\sum_{i=1}^m h_i(X_i - 1)$  et donc  $\varphi(h) = \sum_{i=1}^m \varphi(h_i)(X_i - 1)$ . Donc si  $I$  est l'idéal d'augmentation de  $A$  on obtient l'égalité  $\text{Im}(\varphi) \cdot I = \text{Im}(\varphi)$  qui donne par itération  $\text{Im}(\varphi) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} I^n = 0$  (prop. 2.2iv)).

Egalement de la même manière que pour les modules de type  $K$  on a les isomorphismes suivants pour  $M$  de type  $L$  tel que  $f(M)$  soit de présentation finie:

$$e^1(f(M)) \xrightarrow{\sim} e^1(M) \quad \text{et} \quad e^2(M) \xrightarrow{\sim} e^2(t(M)). \quad (3)$$

Ce résultat se montre en analysant la longue suite exacte des Ext tirée de  $0 \rightarrow t(M) \rightarrow M \rightarrow f(M) \rightarrow 0$  (cf [L1]) à la lumière du lemme suivant:

**LEMME 3.4. i)** *Soit  $M$  un  $A$ -module à droite de présentation finie, alors  $e^2(M)$  est de  $\mathbb{Z}$ -torsion;*

*ii) Soit  $M$  de type  $L$ , alors  $e^1(M)$  est sans  $\mathbb{Z}$ -torsion.*

*Démonstration.* Pour le i) il suffit de voir que  $\mathbb{Q}[F_m] \otimes_A \text{Ext}_A^2(M, A)$  est nul. Or, comme  $\mathbb{Q}[F_m]$  est plat sur  $A$  et que  $M$  a une résolution libre finie (par cohérence de  $A$ ),  $\mathbb{Q}[F_m] \otimes_A \text{Ext}_A^2(M, A)$  est isomorphe à  $\text{Ext}_{\mathbb{Q}[F_m]}^2(M \otimes_A \mathbb{Q}[F_m], \mathbb{Q}[F_m])$  qui est nul puisque  $\mathbb{Q}[F_m]$  est de dimension 1 (prop. 2.2vi)).

Le ii) résulte du morceau de la suite des Ext:  $\text{Hom}_A(M, \mathbb{Z}_r[F_m]) \rightarrow e^1(M) \xrightarrow{x_r} e^1(M)$  tirée de  $0 \rightarrow A \xrightarrow{x_r} A \rightarrow \mathbb{Z}_r[F_m] \rightarrow 0$  et du lemme 3.3.

En mettant ensemble (2), (3) et le lemme 3.4 on achève la preuve du théorème 2.1.

*Remarque.* Dans le cas classique ( $n = 1$ ) le théorème 2.1 fournit des renseignements sur le noyau  $G$  de  $\underline{\theta}: \pi_1(X) \rightarrow F_m$ . En effet  $G/G' = H_1(X, A)$  et donc  $G/G'$  est sans  $\mathbb{Z}$ -torsion car  $t(G/G') \xrightarrow{\sim} e^2(t(\mathbb{Z})) = 0$ . De plus  $G/G'$  est de type  $L$ , en particulier si  $G$  n'est pas parfait ( $G \neq G'$ ) et  $m \geq 2$  alors  $G/G'$  n'est pas de type fini sur  $\mathbb{Z}$  et  $G$  n'est pas de type fini (cf prop. 3.1ii)).

#### 4. Formes d'enlacement et l'anneau $\Lambda$

En dimension impaire  $n = 2k - 1$  le théorème 2.1 donne un isomorphisme  $\overline{f(H_k(X, A))} \xrightarrow{\sim} e^1(f(H_k(X, A)))$ . C'est une dualité car  $e^1(M)$  est la bonne notion de dual (avec bidualité) pour un module  $M$  de type  $L$  sans  $\mathbb{Z}$ -torsion, comme le suggère la proposition suivante montrée par Levine dans le cadre des noeuds [L1]:

**PROPOSITION-DÉFINITION 4.1.** *Modules de type S.*

a) Soit  $M$  de type  $L$ , on a les équivalences:

- i)  $M$  est sans  $\mathbb{Z}$ -torsion;
- ii)  $e^2(M) = 0$ ;
- iii)  $M$  a une résolution  $0 \rightarrow A^q \xrightarrow{T} A^q \rightarrow M \rightarrow 0$  avec  $\det(\mathcal{F}(T)) = \pm 1$ ;

un module de type  $L$  satisfaisant à l'une de ces propriétés est dit de type  $S$ .

b) Soit  $M$  de type  $S$ , alors  $e^1(e^1(M))$  est canoniquement isomorphe à  $M$ .

On peut ainsi donner un sens à la symétrie d'une telle dualité:

**DÉFINITION 4.2.**  *$\varepsilon$ -forme d'enlacement.* C'est un couple  $(M, \varphi)$  où:

- i)  $M$  est de type  $S$  et  $\varphi : M \xrightarrow{\sim} \overline{e^1(M)}$  est un isomorphisme;
- ii)  $\varphi$  est  $\varepsilon$ -symétrique pour  $\varepsilon = \pm 1$ , i.e. si  $\hat{\varphi}$  est la duale de  $\varphi$  ( $\hat{\varphi} : M \xrightarrow{\sim} \overline{e^1(e^1(M))} \xrightarrow{\varphi^*} \overline{e^1(M)}$ ), alors  $\hat{\varphi} = \varepsilon\varphi$ .

On peut retrouver une définition plus familière des formes d'enlacement [V1] en termes de dualité à valeurs dans  $\Lambda/A$ , l'anneau  $\Lambda$  étant une extension adéquate de  $A$ . Pour cela, on voudrait pouvoir inverser toute matrice de présentation d'un module de type  $S$  dans  $\Lambda$ . Notons  $\Sigma$  l'ensemble de ces matrices de présentation, i.e. des matrices carrées  $T$  à coefficients dans  $A$  telles que  $\det(\mathcal{F}(T)) = \pm 1$ , où  $\mathcal{F}: A \rightarrow \mathbb{Z}$  est l'augmentation. Dans le cas commutatif ( $m = 1$ ),  $\Lambda$  est simplement l'anneau de fractions obtenu en inversant les polynômes de  $A$  d'augmentation  $\pm 1$ , i.e. tous les déterminants des matrices de  $\Sigma$ . Pour  $m > 1$ , la construction doit faire intervenir  $\Sigma$  tout entier et l'anneau  $\Lambda$  est alors engendré par  $A$  et autant de générateurs  $T'_{ij}$  que de coefficients  $T_{ij}$  pour chaque matrice  $T$  de  $\Sigma$ , soumis aux relations  $T'T = TT' = Id$ . Il en résulte un homomorphisme  $\lambda : A \rightarrow \Lambda$  d'anneaux à involution (car  $\Sigma$  est stable par l'involution qui à  $T$  associe son adjointe  $T^*$ ) possédant la propriété universelle suivante ([C], p. 255): si  $\mu : A \rightarrow B$  est un homomorphisme d'anneaux  $\Sigma$ -inversible (i.e. les matrices de  $\mu(\Sigma)$  sont inversibles dans  $B$ ), alors il se factorise de manière

unique via  $\lambda$ :

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow \lambda & \\ A & & B \\ & \searrow \mu & \end{array}$$

De plus, comme  $\mathbb{Q}[F_m]$  est un F.I.R. (prop. 2.2vi)), il possède un corps des fractions universel  $K$  ([C], p. 283). On en déduit que  $\lambda$  est injectif puisque l'enchaînement  $A \hookrightarrow \mathbb{Q}[F_m] \hookrightarrow K$  est injectif et  $\Sigma$ -inversible. Voici l'interprétation des formes d'enlacement à l'aide de  $\Lambda$ :

**PROPOSITION 4.3.** *Soit  $(M, \varphi)$  une  $\varepsilon$ -forme d'enlacement, alors  $e^1(M)$  est isomorphe à  $\text{Hom}_A(M, \Lambda/A)$  et  $\varphi$  induit une forme  $M \otimes_{\mathbb{Z}} M \rightarrow \Lambda/A$  non dégénérée et  $\varepsilon$ -hermitienne au sens habituel pour l'involution de  $\Lambda/A$ .*

En effet, on déduit de la suite exacte courte  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\lambda} \Lambda \rightarrow \Lambda/A \rightarrow 0$  la suite exacte  $\text{Hom}_A(M, \Lambda) \rightarrow \text{Hom}_A(M, \Lambda/A) \xrightarrow{\partial^*} e^1(M) \rightarrow \text{Ext}_A^1(M, \Lambda)$ . Or,  $M$  étant de type  $S$ , il a une résolution courte  $0 \rightarrow A^q \xrightarrow{T} A^q \rightarrow M \rightarrow 0$  avec  $T$  (et donc  $T^*$ ) dans  $\Sigma$ . Il s'en suit que  $\text{Hom}_A(M, \Lambda) = \text{Ker}(\lambda(T^*))$  et  $\text{Ext}_A^1(M, \Lambda) = \text{Coker}(\lambda(T^*))$  sont nuls car  $\lambda(T^*)$  est inversible, et donc  $\partial^*$  est un isomorphisme.

*Remarque.* Pour cette traduction des formes d'enlacement, toute extension de  $A$   $\Sigma$ -inversible conviendrait également (par exemple le corps des fractions  $K$  de  $\mathbb{Q}[F_m]$ ), on a choisi parmi elles l'extension universelle  $\Lambda$ .

## 5. La forme de Blanchfield

En dimension impaire la dualité fournie par le théorème 2.1 sur l'homologie médiane est symétrique:

**THÉORÈME 5.1.** *Soit  $(L, \theta)$  un  $F_m$ -entrelacs de dimension  $2k - 1$ ,  $k \geq 1$ . L'isomorphisme  $\overline{f(H_k(X, A))} \xrightarrow{\sim} e^1(f(H_k(X, A)))$  est une  $(-1)^{k+1}$ -forme d'enlacement que l'on appellera forme de Blanchfield du  $F_m$ -entrelacs et notera  $B(L, \theta)$ .*

*Remarque.* Dans le cas des noeuds ( $m = 1$ ) on retrouve la forme de Blanchfield de [L1].

Pour montrer cette symétrie on va traduire plus géométriquement la forme de Blanchfield ([L1], p. 13). Triangulons  $X$  et appelons  $X^1$  le complexe dual de  $X$ , on a alors une forme d'intersection  $A$ -linéaire à gauche:  $C_q(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} C_{2k+1-q}(\tilde{X}^1) \rightarrow A$ ,  $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$  telle que:

- i)  $\alpha \cdot \beta = (-1)^{q(2k+1-q)} \overline{\beta \cdot \alpha};$
  - ii)  $\partial\alpha \cdot \partial\beta = (-1)^q \alpha \cdot \partial\beta$  où  $\alpha$  est une  $q$ -chaîne et  $\beta$  une  $(2k+2-q)$ -chaîne.
- (4)

On en déduit une forme  $I: H_{k+1}(X, \Lambda/A) \otimes_{\mathbb{Z}} H_k(X, A) \rightarrow \Lambda/A$  qui à  $\sigma$  dans  $H_{k+1}(X, \Lambda/A)$  représenté par  $\sum_{\text{finie}} \lambda_i \otimes \alpha_i$  dans  $\Lambda \otimes_A C_{k+1}(\tilde{X})$  et à  $\tau$  dans  $H_k(X, A)$  représenté par le cycle  $\beta$  associe  $I(\sigma, \tau) = \sum_{\text{finie}} (\beta \cdot \alpha_i) \bar{\lambda}_i \bmod A$ .

Soit alors  $\partial_*: H_{k+1}(X, \Lambda/A) \rightarrow H_k(X, A)$  le bord en homologie associé à la suite exacte de coefficients  $0 \rightarrow A \rightarrow \Lambda \rightarrow \Lambda/A \rightarrow 0$ . Les relations (4) impliquent:

$$I(\sigma, \partial_* \sigma') = (-1)^{k+1} \overline{I(\sigma', \partial_* \sigma)} \quad \text{pour } \sigma \text{ et } \sigma' \text{ dans } H_{k+1}(X, \Lambda/A). \quad (5)$$

De plus  $\partial_*$  est en fait un isomorphisme ce qui permet de construire une forme  $B': \overline{H_k(X, A)} \xrightarrow{\partial_* - 1} \overline{H_{k+1}(X, \Lambda/A)} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(H_k(X, A), \Lambda/A)$ . L'égalité (5) montre que  $B'$  est  $(-1)^{k+1}$ -symétrique et il n'est pas difficile de voir que  $B'$  induit précisément la forme de Blanchfield sur  $f(H_k(X, A))$  (prop. 4.3). Prouvons pour finir que  $\partial_*$  est inversible. Il suffit pour celà de montrer la nullité de  $H_{k+1}(X, \Lambda)$  et  $H_k(X, \Lambda)$  ou encore (cf §2) l'acyclicité de  $\Lambda \otimes_A C_*(\tilde{f})$ . Or,  $f$  étant une équivalence d'homologie entière,  $\mathbb{Z} \otimes_A C_*(\tilde{f})$  est acylique. On dispose donc d'une homotopie à zéro de ce complexe que l'on peut relever en un morphisme  $H$  sur  $C_*(\tilde{f})$  puisque  $C_*(\tilde{f})$  est libre sur  $A$  et que l'augmentation  $\mathcal{F}$  est surjective. Par construction de  $H$  on a  $\mathcal{F}(\partial H + H\partial) = Id$  et donc  $\partial H + H\partial$  est inversible dans  $\Lambda$ . Si  $K$  est son inverse, on vérifie que  $HK$  est une homotopie à zéro de  $\Lambda \otimes_A C_*(\tilde{f})$ .

## 6. Le théorème de réalisation

Il s'agit de la réalisation de toutes les formes d'enlacement par des formes de Blanchfield d'*entrelacs simples*, i.e. de  $F_m$ -entrelacs  $(L, \theta)$  de dimension  $2k-1$ ,  $k \geq 2$  vérifiant que  $\theta$  est un isomorphisme et  $\pi_i(X) = 0$  pour  $1 < i < k$ . Homotopiquement, le complémentaire d'un tel entrelacs (non trivial) est le plus simple possible [G]. De plus, par le théorème 2.1,  $H_k(X, A)$  est déjà de type  $S$ . La forme de Blanchfield d'un entrelacs simple correspond donc à l'enchaînement

$$\overline{H_k(X, A)} \xrightarrow{\sim} \overline{H_k(X, \partial X, A)} \xrightarrow{\sim} H^{k+1}(X, A) \xrightarrow{\sim} e^1(H_k(X, A)).$$

**THÉORÈME 6.1.** Soit  $(M, \varphi)$  une  $\varepsilon$ -forme d'enlacement. Alors pour tout entier  $k \geq 3$ , pair si  $\varepsilon = -1$  et impair si  $\varepsilon = +1$ , il existe un entrelacs simple de dimension  $2k - 1$  dont la forme de Blanchfield est isomorphe à  $(M, \varphi)$ .

Ici l'isomorphisme de deux formes d'enlacement  $(M_i, \varphi_i)$   $i = 1, 2$  signifie l'existence d'un isomorphisme  $\psi$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow[\sim]{\psi} & M_2 \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ \overline{e^1(M_1)} & \xleftarrow[\sim]{\psi^*} & \overline{e^1(M_2)}. \end{array}$$

*Démonstration du théorème 6.1.* Elle consiste, dans l'esprit de [L1] (th. 12.1), à construire une variété à bord connexe par attachements d'anses sur un modèle standard, puis à "disjoindre" le bord pour obtenir le complémentaire de l'entrelacs désiré.

Pour commencer on constate, comme dans la proposition 12.3 de [L1], que  $\varphi$  admet un relèvement symétrique à une résolution de  $M$ : Il existe deux matrices carrées  $T$  et  $S$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A^q & \xrightarrow{T} & A^q & \longrightarrow & M & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varepsilon S^* & & \downarrow S & & \downarrow \varphi & \\ 0 & \longrightarrow & A^q & \xrightarrow{T^*} & A^q & \longrightarrow & \overline{e^1(M)} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

avec  $\det(\mathcal{F}(T)) = \pm 1$  et  $ST$  est  $\varepsilon$ -symétrique paire i.e.  $ST$  est de la forme  $R + \varepsilon R^*$ .

Puis on construit la variété à bord connexe grâce à ces matrices:

**LEMME 6.2.** Soit  $k \geq 3$ , pair si  $\varepsilon = -1$ , impair si  $\varepsilon = +1$ . Il existe une variété à bord  $N$  de dimension  $2k + 1$  telle que:

- i)  $\pi_1(\partial N) \cong \pi_1(N) \cong F_m$ ,  $\pi_i(N) = 0$  pour  $1 < i < k$ ;
- ii) on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A^q & \xrightarrow{T} & A^q & \longrightarrow & \overline{H_k(N, A)} & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varepsilon S^* & & \downarrow S & & \downarrow J & \\ 0 & \longrightarrow & A^q & \xrightarrow{T^*} & A^q & \longrightarrow & H^{k+1}(N, A) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

où  $J$  provient de la forme d'intersection de  $N$  (cf §5);

iii)  $\partial N$  est difféomorphe à la somme connexe  $\#_{i=1}^m (S^1 \times \Sigma_i)$  où les  $\Sigma_i$  sont des sphères topologiques.

Admettons provisoirement ce résultat. On construit le complémentaire  $X$  désiré de la manière suivante: Si  $Y$  est la variété obtenue par somme connexe des  $m$  variétés  $S^1 \times \Sigma_i \times [0, 1]$  dans les bords  $S^1 \times \Sigma_i \times 0$ , son bord  $\partial Y$  est difféomorphe à  $\partial N \sqcup_{i=1}^m (S^1 \times \Sigma_i)$ . On pose  $X = N \cup_{\partial N} Y$ . C'est bien un complémentaire d'entrelacs car si l'on "rebouche" le bord de  $X$  par  $\sqcup_{i=1}^m (D^2 \times \Sigma_i)$  on obtient une sphère d'homotopie (propriétés i) et ii) de  $N$ ) donc topologique [Sm1] qu'on peut supposer être  $S^{2k+1}$  en modifiant la structure différentiable de  $X$  dans un petit disque. Enfin grâce aux propriétés de  $N$  cet entrelacs est simple et porte une forme de Blanchfield isomorphe à  $(M, \varphi)$ .

Il reste à montrer le lemme 6.2 pour clore la preuve du théorème:

*Construction de  $N$ .* Notre modèle de départ est

$$N_0 = \#_{i=1}^m (S^1 \times D^{2k})_i \#_{j=1}^q (S^k \times D^{k+1})_j$$

où le symbole  $\#_\partial$  signifie que l'on fait la somme connexe dans les bords. On a  $\pi_1(\partial N_0) \cong \pi_1(N_0) \cong F_m$ ,  $\pi_i(\partial N_0) = \pi_i(N_0) = 0$  pour  $1 < i < k$ ,  $\pi_k(N_0) \cong A^q$  et  $\pi_k(\partial N_0)$  est libre sur  $A$  de base les  $e_j = [(S^k \times *)_j]$  et  $f_j = [(* \times S^k)_j]$  pour  $j = 1, \dots, q$ . Soient maintenant les classes de  $\pi_k(\partial N_0)$  données par:  $a_l = \sum_{j=1}^q \bar{t}_{jl} e_j + \sum_{j=1}^q s_{jl} f_j$  pour  $l = 1, \dots, q$  où les  $t_{jl}$  et  $s_{jl}$  sont les coefficients des matrices  $T$  et  $S$ . Puisque  $ST$  est  $\varepsilon$ -symétrique paire, on vérifie qu'intersections mutuelles et autointersections des classes  $a_l$  (cf [W] p. 45) dans  $\partial N_0$  sont nulles. On peut ainsi construire, par le procédé de Whitney ( $k \geq 3$ ), des plongements disjoints  $\psi_l: S^k \times D^k \hookrightarrow \partial N_0$  dont les âmes représentent les  $a_l$ . On attache  $q$   $k+1$ -anses à  $N_0$  le long des  $\psi_l$  pour obtenir  $N = N_0 \cup_{\psi} \sqcup_{l=1}^q (D^{k+1} \times D^k)_l$ . Par construction  $N$  satisfait déjà aux conditions i) de l'énoncé.

*Démonstration de ii).* En utilisant la décomposition en anses de la variété  $N$  on vérifie que  $C_{k+1}(N, A)$  est libre de base les âmes des anses  $(D^{k+1} \times *)_l$ ,  $l = 1, \dots, q$ , que  $C_k(N, A)$  est libre de base les sphères  $(S^k \times *)_j$ ,  $j = 1, \dots, q$  et que le bord  $\partial: C_{k+1}(N, A) \rightarrow C_k(N, A)$  a  $\bar{T}$  comme matrice dans ces bases par construction des plongements  $\psi_l$ . On en déduit la suite exacte  $0 \rightarrow A^q \xrightarrow{T} A^q \rightarrow H_k(N, A) \rightarrow 0$ . En faisant de même pour la cohomologie dans les bases duals on obtient la suite exacte  $0 \rightarrow A^q \xrightarrow{T^*} A^q \rightarrow H^{k+1}(N, A) \rightarrow 0$ . Enfin en calculant les

intersections des chaînes des bases précédentes, on trouve:

$$(D^{k+1} \times *)_i \cdot_N (S^k \times *)_j = \psi_i(S^k \times *) \cdot_{\partial N_0} (S^k \times *)_j = s_{ij} \text{ ce qui justifie}$$

la commutation du diagramme.

*Reconnaissance du bord de  $N$ .* Par construction de  $N$  on a une flèche  $g: \partial N \rightarrow \#_{i=1}^m (S^1 \times S^{2k-1})_i$ . C'est une équivalence d'homotopie car  $H_{k-1}(\partial N, A) = H_k(\partial N, A) = 0$  ce qui résulte du fait que  $J$ , et donc l'homomorphisme  $H_k(N, A) \rightarrow H_k(N, \partial N, A)$ , sont des isomorphismes (diagramme ii)), ainsi que d'une analyse de la longue suite exacte d'homologie relative de  $N$  (cf [L1], p. 37). On est donc dans la situation du théorème 3 de [Ca] qui permet de scinder  $\partial N$  en une somme connexe de  $m$  variétés du type d'homotopie de  $S^1 \times S^{2k-1}$  donc de la forme  $(S^1 \times \Sigma_i) \# \Sigma'_i$  (cf [L1], p. 38) où les variétés  $\Sigma_i$  et  $\Sigma'_i$  sont des sphères topologiques de dimensions respectives  $2k - 1$  et  $2k$ . En attachant des 2-anses le long des cercles ainsi en évidence dans  $\partial N$  on vérifie que la somme connexe  $\#_{i=1}^m \Sigma'_i$  borde une variété contractile, donc est difféomorphe à  $S^{2k}$  [Sm2]. On en déduit le difféomorphisme  $\partial N \xrightarrow{\sim} \#_{i=1}^m (S^1 \times \Sigma_i)$ .

## 7. Applications du théorème de réalisation

### 7.1. Exemples de modules d'Alexander

Appelons *module d'Alexander* le module  $\overline{H_k(X, A)}$  pour un entrelacs simple de dimension  $2k - 1$ . Les théorèmes 5.1 et 6.1 caractérisent les  $A$ -modules à droite apparaissant comme module d'Alexander: Il faut et il suffit qu'ils soient de type  $S$  et supportent une  $(-1)^{k+1}$ -forme d'enlacement.

*Par exemple.* Soit  $T$  une matrice carrée à coefficients dans  $A$  telle que  $\det(\mathcal{F}(T)) = \pm 1$ . Si  $T$  est symétrique (resp. antisymétrique) alors pour tout entier  $k \geq 3$  impair (resp. pair) il existe un entrelacs simple de dimension  $2k - 1$  dont le module d'Alexander est de présentation  $T$ .

En effet il suffit de remarquer que  $M = \text{Coker}(T)$  supporte une  $\varepsilon$ -forme d'enlacement évidente  $\varphi$  dont une résolution est:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A^q & \xrightarrow{T} & A^q & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varepsilon Id & & \downarrow Id & & \downarrow \varphi \\ 0 & \longrightarrow & A^q & \xrightarrow{T^*} & A^q & \longrightarrow & \overline{e^1(M)} \longrightarrow 0. \end{array}$$

En particulier, en dimension  $2k - 1$  avec  $k$  impair on obtient comme modules d'Alexander tous les *modules cycliques*  $A/\bar{a}A$  où  $\bar{a} = a$  et  $\mathcal{F}(a) = \pm 1$ .

### 7.2. Exemples de polynômes d'Alexander

Les polynômes d'Alexander sont liés au *revêtement abélien libre*  $\hat{X}$  de  $X$  associé au noyau de l'abélianisation  $\pi_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}^m$ . Notons  $B$  l'anneau de groupe  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^m] = \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m, X_1^{-1}, \dots, X_m^{-1}]$ . Soit  $L$  un entrelacs simple de dimension  $2k - 1$ . D'après [S2] le  $B$ -module  $H_k(\hat{X})$  admet une présentation de la forme  $0 \rightarrow B^q \xrightarrow{T} B^q \rightarrow H_k(\hat{X}) \rightarrow 0$ . Le *polynôme d'Alexander* de  $L$ , noté  $P_L$ , est le déterminant de  $T$ . C'est un invariant du module  $H_k(\hat{X})$  vérifiant les propriétés suivants [S2]:

$$P_L(1, \dots, 1) = \pm 1 \quad \text{et} \quad \bar{P}_L = P_L \tag{6}$$

qui, en fait, caractérisent les polynômes d'Alexander:

**COROLLAIRE.** *Soit  $p$  un polynôme de  $B$  vérifiant (6); alors il existe un entrelacs simple de dimension  $2k - 1$ ,  $k$  impair  $\geq 3$ , dont  $p$  est le polynôme d'Alexander.*

En effet, on peut toujours trouver un polynôme  $q$  relevant  $p$  dans  $A$  et tel que  $\bar{q} = q$  et  $\mathcal{F}(q) = \pm 1$ . Par les exemples 7.1 il existe un entrelacs simple de la bonne dimension et de module d'Alexander  $A/qA$  qui convient.

**Remarque.** Pour  $k$  pair  $\geq 3$ , la même méthode permet de réaliser comme polynôme d'Alexander le déterminant  $p$  d'une matrice antisymétrique à coefficients dans  $B$  si  $p(1, \dots, 1) = \pm 1$ , par exemple les polynômes de la forme  $1 + p_1 p_2$  avec  $\bar{p}_i = -p_i$ .

### 7.3. Exemples d'entrelacs à 2 composantes non cobordants à des entrelacs scindés.

Un problème important de la théorie des entrelacs – resté ouvert jusqu'à l'article de Cappell et Shaneson [CS1] (cf aussi [Ka]) – a été de savoir s'il existait des entrelacs non cobordants à des *entrelacs scindés*, i.e. à des entrelacs dont les composantes sont plongées dans des disques disjoints de la sphère ambiante. La réponse est qu'il y en a beaucoup: Le cobordisme des entrelacs ne se réduit pas au cobordisme de leurs noeuds composantes. On va en exhiber des exemples à 2 composantes grâce au théorème de réalisation mais auparavant rappelons une condition nécessaire de cobordisme (cf [SS] Th. 3.2):

**DÉFINITION.** Deux entrelacs (quelconques)  $L_0$  et  $L_1$  sont *cobordants* s'il existe une sous-variété lisse orientée  $V$  de codimension 2 dans  $S^{n+2} \times [0, 1]$  telle que:

- i)  $V$  coïncide avec  $L_0$  et  $L_1$  aux niveaux 0 et 1;
- ii)  $V$  est homéomorphe à  $L_0 \times [0, 1]$ .

*Critère.* Si  $L_0$  et  $L_1$  sont deux entrelacs simples à 2 composantes cobordants il existe un polynôme  $q$  dans  $\mathbb{Z}[X, X^{-1}]$  tel que  $P_{L_0}(X, X)P_{L_1}(X, X) = \pm q\bar{q}$ .

Nos exemples sont les entrelacs simples à 2 composantes  $L_r$  de polynôme d'Alexander  $P_{L_r}(X_1, X_2) = 1 + r(X_1 - X_1^{-1})(X_2 - X_2^{-1})$ ,  $r$  entier positif, fournis par le paragraphe précédent. Ces entrelacs satisfont les trois propriétés:

- i)  $L_r$  est brunnien, i.e. a des composantes non-nouées;
- ii)  $L_r$  n'est pas cobordant à l'entrelacs trivial;
- iii)  $L_r$  n'est pas cobordant à  $L_{r'}$  pour  $r \neq r'$ .

Ils répondent bien au problème car un entrelacs brunnien cobordant à un entrelacs scindé est forcément cobordant à l'entrelacs trivial. Montrons ces trois faits:

Pour le i) il suffit de remarquer que les composantes de  $L_r$  sont des noeuds simples de polynôme d'Alexander égal à  $P_{L_r}(X, 1)$  ou  $P_{L_r}(1, X)$  c'est-à-dire à 1. Ces composantes ont ainsi des complémentaires du même type d'homotopie que celui du noeud trivial, elles sont donc non-nouées [L3].

Les points ii) et iii) résultent du critère cité. En effet, les polynômes  $P_{L_r}(X, X)$  sont irréductibles dans  $\mathbb{Z}[X, X^{-1}]$ , comme on le voit en les décomposant dans  $\mathbb{R}[X, X^{-1}]$ .

## 8. Le contexte du $F_m$ -cobordisme

Pour avoir une notion de cobordisme adaptée aux  $F_m$ -entrelacs et compatible à la somme connexe, il est nécessaire de renforcer la définition du paragraphe précédent:

**DÉFINITION 8.1 [CS1].** Deux  $F_m$ -entrelacs  $(L_0, \theta_0)$  et  $(L_1, \theta_1)$  sont  $F_m$ -*cobordants* s'il existe un cobordisme  $V$  dans  $S^{n+2} \times [0, 1]$  (cf le §7) avec en outre:

iii) Si  $U$  est le complémentaire d'un voisinage tubulaire de  $V$  dans  $S^{n+2} \times [0, 1]$  prolongeant  $X_0$  et  $X_1$  aux niveaux 0 et 1, il existe  $\theta: \pi_1(U) \rightarrow F_m$  coïncidant, à un automorphisme intérieur de  $F_m$  près, avec les  $\theta_i$  via les homomorphismes naturels  $\pi_1(X_i) \rightarrow \pi_1(U)$ ,  $i = 0, 1$ .

Géométriquement celà correspond à l'existence de  $m$  sous-variétés disjointes dans  $S^{n+2} \times [0, 1]$  bordant les composantes de  $V$  [Ko].

**NOTATION.** On appelle  $C_n(F_m)$  l'ensemble des  $F_m$ -entrelacs de dimension  $n$  à  $F_m$ -cobordisme près.

Il existe une *somme connexe* pour les entrelacs bords [Ko] qui fait de  $C_n(F_m)$  un groupe abélien. On la voit ainsi: Plaçons notre premier entrelacs bord dans l'hémisphère Nord de  $S^{n+2}$ , et le second dans l'hémisphère Sud, ainsi que leurs surfaces de Seifert respectives. On connecte alors chaque composante du premier entrelacs à la composante correspondante du second via le bord d'un  $n$ -épaississement d'un arc évitant (sauf à ses extrémités) toutes les surfaces de Seifert.

Par ailleurs d'après [CS1] le groupe  $C_n(F_m)$  est trivial pour  $n$  pair. Dans le cas  $n$  impair, on dispose d'un objet – la forme de Blanchfield – dont on aimerait bien faire un invariant de  $F_m$ -cobordisme. Pour celà, il faut définir une relation d'équivalence sur les formes d'enlacement:

**DÉFINITION 8.2.** Soit  $(M, \varphi)$  une  $\varepsilon$ -forme d'enlacement.

- a) Soit  $I$  un sous-module de  $M$  et  $i:I \hookrightarrow M$  son injection canonique. L'*orthogonal*  $I^\perp$  de  $I$  pour  $\varphi$  est le sous-module  $\varphi^{-1}(\text{Ker}(i^*))$  de  $M$ .
- b) La forme  $(M, \varphi)$  est *neutre* s'il existe un sous-module  $I$  de  $M$  tel que:
  - i)  $I$  et  $M/I$  sont de type  $S$ ;
  - ii)  $I^\perp = I$ .

Un tel sous-module  $I$  de  $M$  sera appelé un *lagrangien* de  $(M, \varphi)$ .

**NOTATION.** On appelle  $W^\varepsilon(A, \Sigma)$  le groupe quotient du monoïde – pour la somme orthogonale – des  $\varepsilon$ -formes d'enlacement par la relation d'équivalence engendrée par:  $(M_1, \varphi_1) \sim (M_2, \varphi_2) \Leftrightarrow (M_1 \oplus M_2, \varphi_1 \oplus -\varphi_2)$  est neutre.

*Remarques.* a) En utilisant la définition des formes d'enlacement faisant intervenir l'anneau  $\Lambda$  on retrouve ainsi un groupe de Witt au sens de [V1].

b) En travaillant davantage on peut montrer qu'en fait la relation  $\sim$  est déjà une relation d'équivalence.

On a également un critère de neutralité qui sera utile:

**PROPOSITION 8.3.** Soient  $(M, \varphi)$  une  $\varepsilon$ -forme d'enlacement et  $I$  un sous-module de type  $S$  de  $M$ . On suppose de plus que  $I$  est contenu dans son orthogonal  $I^\perp$  et que  $I^\perp/I$  est de  $\mathbb{Z}$ -torsion. Alors  $(M, \varphi)$  est neutre.

*Démonstration.* On se propose de voir que  $I^\perp$  est un lagrangien de  $(M, \varphi)$ . Il n'est pas difficile de montrer que  $I^\perp$  et  $M/I^\perp$  sont de type  $L$ , grâce au lemme des 5 par exemple, et donc de type  $S$  puisque  $I^\perp$  est sans  $\mathbb{Z}$ -torsion et que  $M/I^\perp$  s'injecte, par définition de  $I^\perp$ , dans  $e^1(I)$  lui aussi sans  $\mathbb{Z}$ -torsion (lemme 3.4).

Vérifions l'égalité  $I^{\perp\perp} = I^\perp$ . Si l'on précise les inclusions en présence par  $I \hookrightarrow I^\perp \hookrightarrow M$  on a  $I^\perp = \varphi^{-1}(\text{Ker}(i^* \circ j^*))$  et  $I^{\perp\perp} = \varphi^{-1}(\text{Ker}(j^*))$ . Il suffit donc de prouver l'injectivité de  $i^*$ , qui résulte de la suite exacte

$$e^1(I^\perp/I) \rightarrow e^1(I^\perp) \xrightarrow{i^*} e^1(I) \quad \text{tirée de } 0 \rightarrow I \xrightarrow{i} I^\perp \rightarrow I^\perp/I \rightarrow 0$$

par dualisation, sachant que  $e^1(I^\perp/I) \cong e^1(f(I^\perp/I)) = 0$  (isomorphismes (3)).

## 9. Calcul du $F_m$ -cobordisme

**THÉORÈME 9.1.** Pour  $k \geq 3$ , la forme de Blanchfield produit un isomorphisme de groupes abéliens  $B : C_{2k-1}(F_m) \rightarrow W^{(-1)^{k+1}}(A, \Sigma)$ ,  $[(L, \theta)] \mapsto [B(L, \theta)]$ .

*Démonstration.* Il suffit de voir que  $B$  est bien définie, additive et injective puisque sa surjectivité résulte du théorème de réalisation 6.1.

*Compatibilité de  $B$  aux relations d'équivalence.* Soient  $(L_0, \theta_0)$  et  $(L_1, \theta_1)$  deux  $F_m$ -entrelacs  $F_m$ -cobordants. Montrons que  $\varphi = B(L_0, \theta_0) \oplus -B(L_1, \theta_1)$  est neutre: On dispose du complémentaire  $U$  du cobordisme et de  $\theta : \pi_1(U) \rightarrow F_m$  coïncidant avec  $\theta_0$  et  $\alpha \circ \theta_1$  via les inclusions. L'automorphisme intérieur  $\alpha$  de  $F_m$  ne va pas jouer de rôle car on peut vérifier que  $B(L_1, \theta_1)$  et  $B(L_1, \alpha \circ \theta_1)$  sont isomorphes. On peut donc supposer que l'action de  $F_m$  induite par  $\theta$  sur le revêtement libre de  $U$  prolonge celles induites par les  $\theta_i$  sur les revêtements  $\tilde{X}_i$ . En interprétant la dualité de Poincaré à coefficients  $A$  sur  $U$  avec les méthodes des §2 et 3, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} e^1(f(H_k(U, A))) & \xrightarrow{i^*} & e^1(f(H_k(X_0, A))) \oplus e^1(f(H_k(X_1, A))) & \xrightarrow{\partial^*} & e^1(f(H_{k+1}(U, \partial U, A))) \\ \downarrow & & \downarrow \varphi & & \downarrow \\ \overline{f(H_{k+1}(U, \partial U, A))} & \xrightarrow{\partial^*} & \overline{f(H_k(X_0, A))} \oplus \overline{f(H_k(X_1, A))} & \xrightarrow{i^*} & \overline{f(H_k(U, A))} \end{array}$$

où les lignes sont “presque” exactes: Par exemple  $\text{Ker}(i_*)/\text{Im}(\partial_*)$  est de  $\mathbb{Z}$ -torsion. On vérifie que le module  $I = \text{Im}(\partial_*)$ , dont l'orthogonal pour  $\varphi$  est

$\text{Ker}(i_*)$  (cf le diagramme), satisfait aux hypothèses de la proposition 8.3. Donc  $\varphi$  est neutre.

*Additivité de  $B$ .* Puisque chaque classe de  $F_m$ -cobordisme contient un entrelacs simple [CS1] il suffit de voir que la forme de Blanchfield d'une somme connexe  $(L, \theta)$  de deux entrelacs simples  $(L_i, \theta_i)$ ,  $i = 0, 1$ , est équivalente à  $B(L_0, \theta_0) \oplus B(L_1, \theta_1)$ . Plaçons  $L_0$  et  $L_1$  dans les hémisphères Nord et Sud de la sphère ambiante  $S^{2k+1}$ . La donnée des isomorphismes  $\theta_i$  fournit des méridiens privilégiés des  $L_i$  basés en un même point, et donc  $m$  arcs reliant les composantes correspondantes des entrelacs et intersectant la sphère équateur  $S^{2k}$  transversalement en  $m$  points distincts. On construit la somme connexe le long de ces arcs.

Soient  $X$  le complémentaire de  $L$ ,  $M_0$  et  $M_1$  les parties de  $X$  situées respectivement dans les hémisphères Nord et Sud,  $Y_*$  (resp.  $Z_*$ ) le complémentaire de l'entrelacs trivial de  $m$  sphères (resp. disques) de codimension 2 dans  $S^{2k}$  (resp.  $(D^{2k+1}, S^{2k})$ ). On a les difféomorphismes  $M_i \cup_{Y_*} Z_* \simeq X_i$  qui montrent que les variétés  $M_i$  sont proches des complémentaires  $X_i$  des entrelacs  $L_i$ . En particulier les homologies  $H_k(M_i, A)$  portent des formes d'enlacement isomorphes à  $B(L_i, \theta_i)$ . Grâce au difféomorphisme  $X \simeq M_0 \cup_{Y_*} M_1$  et à des arguments standards on voit que  $L$  est un entrelacs simple muni d'un isomorphisme  $\theta$  induit par les  $\theta_i$  et que  $B(L, \theta)$  est isomorphe à  $B(L_0, \theta_0) \oplus B(L_1, \theta_1)$ .

*Injectivité de  $B$ .* Soit  $(L, \theta)$  un  $F_m$ -entrelacs dont la forme de Blanchfield est équivalente à zéro; il faut montrer que  $(L, \theta)$  est  $F_m$ -cobordant à l'entrelacs trivial.

La première étape est de ramener ce problème à un énoncé de chirurgie duale au sens de [Smi]. En effet si  $X$  est le complémentaire de  $L$  et  $f:(X, \partial X) \rightarrow (X_*, \partial X_*)$  une matérialisation de  $\theta$  (cf §1), on a le résultat suivant ([CS1] p. 35, [Ko]):

**LEMME 9.2.** *Soit un cobordisme abstrait  $F:(U, X, X_1, \partial X \times [0, 1]) \rightarrow (X_* \times [0, 1], X_* \times 0, X_* \times 1, \partial X_* \times [0, 1])$  tel que:*

i) *l'image de l'homomorphisme  $\pi_1(X) \rightarrow \pi_1(U)$  engendre normalement  $\pi_1(U)$ ;*

ii)  *$F/X = f$ ;  $F/X_1$  et  $F/\partial X \times [0, 1]$  sont des équivalences d'homotopie;*

iii)  *$F$  est une équivalence en homologie entière;*

*alors  $(L, \theta)$  est  $F_m$ -cobordant à l'entrelacs trivial.*

Pour cela on montre, grâce au théorème du  $h$ -cobordisme ( $k \geq 3$ ), que  $U$  est le complémentaire d'un  $F_m$ -cobordisme ambiant et  $X_1$  est alors le complémentaire de l'entrelacs trivial par le critère homotopique de non-nouage de [G].

La deuxième étape est la construction d'un cobordisme satisfaisant aux hypothèses du lemme 9.2. Comme dans [Smi] (th. 3.5) on procède en deux temps: Par chirurgie classique sur  $f$  on obtient un cobordisme vérifiant les hypothèses i) et ii) puis par chirurgie homologique [CS2] sur ce cobordisme on satisfait en plus la condition iii).

Dans ce but on va relier la forme de Blanchfield aux obstructions de chirurgie par la suite exacte

$$L_{2k+2}(F_m) \xrightarrow{i} \Gamma_{2k+2}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\partial} W^{(-1)^{k+1}}(A, \Sigma) \xrightarrow{j} L_{2k+1}(F_m) \rightarrow 0 \quad (7)$$

où les groupes  $L_*$  et  $\Gamma_*$  sont les groupes de chirurgies classique [W] et homologique [CS2]. Elle se déduit de la suite relative pour la localisation  $\lambda: A \rightarrow \Lambda: L_{2k+2}^h(A) \rightarrow L_{2k+2}^h(\Lambda) \rightarrow L_{2k+2}^h(\lambda) \rightarrow L_{2k+1}^h(A) \rightarrow L_{2k+1}^h(\Lambda)$  [W] après les identifications dues à Vogel:

$$L_*^h(\Lambda) \simeq \Gamma_*^h(\mathcal{F}) \text{ [V2]} \quad \text{et} \quad L_{2k+2}^h(\lambda) \simeq W^{(-1)^{k+1}}(A, \Sigma) \text{ [V1]}$$

sachant que  $\Gamma_{2k+1}^h(\mathcal{F})$  est un sous-groupe de  $L_{2k+1}^h(e)$  [CS2] qui est nul ([W] §13A). Le  $h$  en exposant tombe car le groupe de Whitehead  $Wh(F_m)$  est nul [Ba]. Cette suite exacte (7) est également une version simplifiée de la suite exacte 4.1 de [Smi] et en possède les propriétés de naturalité par rapport aux obstructions géométriques (cf [Smi], p. 439).

On peut maintenantachever la preuve de l'injectivité de  $B$ : L'application  $f: X \rightarrow X_*$  a une obstruction de chirurgie  $\sigma(f)$  dans  $L_{2k+1}(F_m)$ . Par naturalité de (7)  $\sigma(f) = j(B(L, \theta)) = 0$  et donc, par chirurgie dans l'intérieur de  $X$ , on construit un cobordisme  $G$  entre  $f$  et une équivalence d'homotopie  $f_2: X_2 \rightarrow X_*$  vérifiant les conditions i) et ii) du lemme 9.2. À  $G$  on peut associer son obstruction de chirurgie homologique  $\sigma_G(G)$  dans  $\Gamma_{2k+2}(\mathcal{F})$ . La naturalité de (7) assure que  $\partial(\sigma_G(G)) = B(L, \theta) = 0$  et donc, puisque (7) est exacte, il existe  $\beta$  dans  $L_{2k+2}(F_m)$  tel que  $i(\beta) = \sigma_G(G)$ . Grâce au théorème 6.5 de [W] on réalise  $(-\beta)$  comme l'obstruction de chirurgie d'un cobordisme  $H$  entre  $f_2$  et une équivalence d'homotopie  $f_1: X_1 \rightarrow X_*$ . En recollant  $G$  et  $H$  sur  $f_2$  on obtient un cobordisme dont l'obstruction de chirurgie homologique est nulle, par construction. On pourra donc le "chirurgiser" pour obtenir l'équivalence d'homologie entière désirée.

*Remarque finale.* Dans [CS1] Cappell et Shaneson obtenaient la suite exacte scindée:

$$0 \rightarrow \tilde{\Gamma}_{2k+2}(\mathcal{F}) \rightarrow C_{2k-1}(F_m) \rightarrow (P_{2k})^m \rightarrow 0$$

pour  $k \geq 3$  et où  $\tilde{\Gamma}_{2k+2}(\mathcal{F}) = \text{Coker } (L_{2k+2}(F_m) \rightarrow \Gamma_{2k+2}(\mathcal{F}))$  et  $P_{2k} = \mathbb{Z}_2$  (resp.  $\mathbb{Z}$ ) si  $k$  est pair (resp. impair).

Le lien avec notre résultat réside dans la naturalité de la suite (7) qui assure la commutativité du diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \tilde{\Gamma}_{2k+2}(\mathcal{F}) & \rightarrow & C_{2k-1}(F_m) & \rightarrow & (P_{2k})^m \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & B \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \tilde{\Gamma}_{2k+2}(\mathcal{F}) & \rightarrow & W^{(-1)^{k+1}}(A, \Sigma) & \rightarrow & L_{2k+1}(F_m) \rightarrow 0 \end{array}$$

où l'isomorphisme de droite provient de résultats classiques ([Ca], [Sh] et [W] §13A).

## BIBLIOGRAPHIE

- [Ba] H. BASS, *Algebraic K-theory*, W. A. Benjamin, Inc., New-York, 1968.
- [B] R. BLANCHFIELD, *Intersection theory of manifolds with operators with applications to knot theory*, Annals of Math. 65 (1957), 340–356.
- [Ca] S. E. CAPPELL, *A splitting theorem for manifolds*, Invent. Math. 33 (1976), 69–170.
- [CS1] —— et J. L. SHANESON, Link cobordism, Comment. Math. Helv. 55 (1980), 20–49.
- [CS2] ——, *The codimension two placement problem and homology equivalent manifolds*, Annals of Math. 99 (1974), 277–348.
- [C] P. M. COHN, *Free rings and their relations*, London, New-York, Academic Press, 1971.
- [D] J. DUVAL, *Forme de Blanchfield et cobordisme d'entrelacs bords*, C.R.A.S. 299 (1984), 935–938.
- [F] R. H. FOX, *Free differential calculus*, Annals of Math. 57 (1953), 547–560.
- [G] M. A. GUTIERREZ, *Boundary links and an unlinking theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. 171 (1972), 491–499.
- [Ka] A. KAWAUCHI, *On links not cobordant to split links*, Topology 19 (1980), 321–334.
- [K] C. KEARTON, *Cobordism of knots and Blanchfield duality*, J. London Math. Soc. 10 (1975), 406–408.
- [Ko] K. H. KO, *Seifert matrices and boundary links*, Ph.D. Thesis.
- [L1] J. LEVINE, *Knot modules I*, Trans. amer. Math. Soc. 229 (1977), 1–50.
- [L2] ——, *Knot cobordism in codimension two*, Comm. Math. Helv. 44 (1968), 229–244.
- [L3] ——, *Unknotting spheres in codimension two*, Topology 4 (1965), 9–16.
- [S1] N. SATO, *Free coverings and modules of boundary links*, Trans. Amer. Math. Soc. 264 (1981), 499–505.
- [S2] ——, *Algebraic invariants of boundary links*, Trans. Amer. Math. Soc. 265 (1981), 359–374.
- [Sh] J. L. SHANESON, *Wall's surgery obstruction groups for  $\mathbb{Z} \times G$* , Annals of Math. 90 (1969), 296–334.
- [SS] Y. SHINOHARA et D. W. SUMNERS, *Homology invariants of cyclic coverings with applications to links*, Trans. Amer. Math. Soc. 163 (1972), 101–121.
- [Sm1] S. SMALE, *Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than 4*, Annals of Math. 74 (1961), 391–406.
- [Sm2] ——, *On the structure of manifolds*, Amer. J. Math. 84 (1962), 387–399.
- [Smi] J. R. SMITH, *Complements of codimension two submanifolds, III, Cobordism theory*, Pacific J. Math. 94 (1981), 423–484.

- [V1] P. VOGEL, *Localisation non commutative de formes quadratiques, Algebraic K-theory*, Proc. Oberwolfach 1980, part II, Lect. Notes in Math. 967, 376–389, Springer-Verlag.
- [V2] ——, *On the obstruction group in homology surgery*, Publ. Math. IHES, 55 (1982), 165–206.
- [W] C. T. C. WALL, *Surgery on compact manifolds*, London, New-York, Academic Press, 1970.

*Université Louis Pasteur  
Institut de mathématiques,  
7 rue Descartes 67000 Strasbourg.*

Reçu le 29 août 1985