

Zeitschrift:	Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber:	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band:	61 (1986)
Artikel:	Transformation de Poisson de formes différentielles. Le cas de l'espace hyperbolique.
Autor:	Gaillard, Pierre-Yves
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-46949

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Transformation de Poisson de formes différentielles. Le cas de l'espace hyperbolique

PIERRE-YVES GAILLARD

1. Introduction

Dans ce travail, on définit, en suivant une idée de Thurston [24, Chapitre 11], une transformation de Poisson qui, à une p -forme sur le bord de l'espace hyperbolique, associe une p -forme harmonique cofermée sur cet espace. Cette transformation commute aux isométries hyperboliques et s'étend aux p -hyperformes, qui sont par définition les sections hyperfonction du fibré des p -formes. On étudie cette transformation, et on répond aux quatre questions suivantes:

- 1) Quelles sont les propriétés élémentaires de cette application?
- 2) Quel est son noyau et quelle est son image?
- 3) Quelles sont les transformées des courants?
- 4) Quel est le comportement vers le bord des transformées?

Les réponses à ces quatre questions figurent respectivement dans les théorèmes 1, 2, 3 et 4 – énoncés au §2.1.2.

On prouve ces théorèmes à l'aide d'une expression explicite de la transformation de Poisson en termes de fonctions hypergéométriques (lemme fondamental, voir §4.1) qui généralise un résultat de Helgason [10] et Minemura [16]. On utilise largement les méthodes développées par ces deux auteurs.

Pour obtenir une telle expression explicite, nous avons dû considérer plus généralement des formes différentielles à valeurs dans un fibré homogène en droites sur le bord de l'espace hyperbolique. Les transformées sont alors des p -formes cofermées sur l'espace hyperbolique qui sont vecteurs propres du laplacien.

Les questions 1), 2), 3) et 4) ont encore un sens dans ce cadre plus général, et les théorèmes 1', 2', 3' et 4' y répondent respectivement (voir §2.2.2).

Dans le cas $p = 0$, les quatre problèmes énoncés plus haut avaient déjà été résolus – et ceci pour n'importe quel espace symétrique riemannien de type non compact.

En ce qui concerne la question 2), Helgason a conjecturé – et prouvé dans plusieurs cas particuliers – qu'une fonction propre de tous les opérateurs

différentiels invariants était la transformée de Poisson d'une section hyperfonction d'un fibré homogène en droites convenable sur la frontière maximale. Kashiwara *et al.* [12], à l'aide de l'analyse microlocale, ont prouvé cette conjecture en toute généralité. Un corollaire d'un très beau théorème de W. Schmid [20] réduit cependant ce résultat à la caractérisation des transformées de sections K -finies – caractérisation qui avait été donnée par Helgason. Le théorème de Schmid s'applique à la situation examinée ici. Plus précisément, il permet de déduire immédiatement les théorèmes 2 (§2.1.2) et 2' (§2.2.2) du lemme fondamental (§4.1). Les preuves présentées ici sont directes et n'utilisent pas ce résultat.

Pour ce qui est de la question 3), Lewis a montré en rang un que les transformées des sections distribution sont précisément les fonctions propres des opérateurs différentiels invariants qui satisfont une certaine condition de croissance [14]. Le résultat de Lewis comporte toutefois une certaine restriction. (Ce théorème ne s'applique par exemple pas à la transformation de Poisson classique des distributions en fonctions harmoniques sur les espaces hyperboliques de dimension impaire.) Oshima et Sekigushi, de nouveau en utilisant des techniques d'analyse microlocale, ont levé cette restriction et, surtout, ont généralisé ces résultats aux espaces symétriques affines [18].

On donne ici une preuve du cas non traité par Lewis qui repose sur une simple identité entre fonctions hypergéométriques (lemme 7, §5.2). On obtient cette identité grâce au fait qu'on considère la transformation de Poisson des formes différentielles. Cela introduit un paramètre supplémentaire – le degré p des formes – dans les équations différentielles qui interviennent. Ainsi, même pour résoudre certains problèmes relatifs aux fonctions, il peut être utile de considérer des formes différentielles.

Les théorèmes 4 et 4' (énoncés aux §2.1.2 et §2.2.2 respectivement) mettent en évidence un phénomène de convergence non tangentielle, qui avait été observé par Michelson [15, Theorem 3.4] pour $p = 0$, sur des espaces symétriques un peu plus généraux. La preuve du cas $p = 0$ s'adapte sans difficulté au cas p quelconque, ainsi que me l'a fait remarquer P. Sjögren.

Le principal enseignement qui se dégage de ce travail me semble être le suivant. Les transformées étudiées ici sont non seulement des vecteurs propres du laplacien, mais elles sont aussi *cofermées*. Il faut donc, pour caractériser l'image de la transformation de Poisson, faire appel à un opérateur différentiel invariant (la codifférentielle) allant d'un fibré (celui des p -formes) dans un *autre* fibré (celui des $(p - 1)$ -formes). C'est sans doute le phénomène qui se produit dans le cas général.

En outre, dans le cas $p = 0$ (en rang quelconque), le module de Harish-Chandra des fonctions K -finies d'un espace propre de tous les opérateurs

différentiels invariants est isomorphe, via la transformation de Poisson, à un module de Harish-Chandra de la série principale. C'est la version K -finie de la conjecture de Helgason (version prouvée, rappelons-le, par Helgason lui-même). Donc, pour $p = 0$ l'étude de la transformation de Poisson ne fait pas apparaître de représentations qui ne sont pas dans la série principale. En règle générale, ce phénomène se manifeste également dans les cas examinés ici. On constate cependant une exception intéressante. Le module des $(n - 1)/2$ -formes harmoniques cofermées K -finies sur l'espace hyperbolique de dimension (impaire) n – qui ne contient qu'un seul sous-module non trivial – ne se plonge pas dans la série principale (théorème 6, §6.1).

La motivation originelle de cette recherche vient de la théorie des feuilletages. En effet, Haefliger a montré comment la question de savoir si une variété compacte feuilletée admet une métrique riemannienne rendant toutes les feuilles minimales est liée à l'existence de courants invariants par le pseudogroupe d'holonomie transverse [8]. Si ce pseudogroupe est équivalent à l'action sur le bord de l'espace hyperbolique d'un sous-groupe discret cocompact du groupe des isométries hyperboliques, la transformation de Poisson permet de détecter ces courants. Cette idée avait déjà été utilisée avec succès par Haefliger et Li-Banghe [9] (voir aussi §6.2 plus loin).

Certains résultats présentés ici ont été annoncés dans [6] et [7].

Le texte ci-dessous est une version condensée de ma thèse de doctorat à l'Université de Genève (Suisse). Parmi toutes les personnes qui m'ont aidé au cours de ce travail, je tiens à remercier tout particulièrement André Haefliger, qui m'a proposé ce sujet et m'a toujours donné les bons conseils aux bons moments, ainsi que Pierre de la Harpe, Wilfried Schmid et Georges Skandalis, membres du jury.

2. Résultats

Dans ce travail, on désigne par H^n l'espace hyperbolique de dimension n muni de la métrique de courbure -1 et d'une orientation. On désigne par ∂H^n le bord (ou frontière ou encore sphère à l'infini) de H^n . Par isométrie hyperbolique, on entend une isométrie qui ne préserve pas nécessairement l'orientation de H^n .

2.1. Transformation des p -formes usuelles

2.1.1. Définitions

Considérons d'abord l'*application “visuelle”* V_x de la sphère unité S_x de l'espace $T_x H^n$ tangent à H^n en x , sur ∂H^n . Cette application envoie chaque vecteur unitaire tangent à H^n en x sur le point de ∂H^n vers lequel tend la

demi-géodésique issue de ce vecteur. L'application V_x est conforme (pour s'en convaincre, on peut penser au modèle de la boule pour H^n et placer x au centre).

Soient α une p -forme sur ∂H^n et ξ un p -vecteur tangent à H^n en x . On va définir la valeur $\langle \phi_p \alpha, \xi \rangle$ de la transformée $\phi_p \alpha$ de α sur ξ . Pour cela, on considère l'image inverse $V_x^* \alpha$ de α par l'application visuelle. C'est une p -forme sur S_x . Plaçons-nous sur l'espace euclidien $T_x H^n$ et oublions un instant l'espace hyperbolique. Choisissons un point u de S_x , translatons ξ de l'origine à u et projetons-le orthogonalement pour obtenir un p -vecteur $\tilde{\xi}$ tangent à S_x en u (voir Figure 1), sur lequel on évalue $V_x^* \alpha$. En faisant varier le point u , on obtient une fonction sur S_x ; sa moyenne sera la valeur cherchée:

$$\langle \phi_p \alpha, \xi \rangle = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S_x} \langle V_x^* \alpha, \tilde{\xi} \rangle i_v \omega(x) \quad (1)$$

où $|S^{n-1}|$ est le volume de la sphère unité de \mathbb{R}^n , ω est la forme volume hyperbolique et i_v est le produit intérieur par le champ de vecteur normal extérieur unitaire v sur S_x .

Lorsque n est impair et $p = (n - 1)/2$, on peut définir un opérateur \mathbb{C} -linéaire $*$ sur les p -formes sur ∂H^n de la façon suivante. On choisit une métrique riemannienne sur ∂H^n compatible avec la structure conforme et on prend

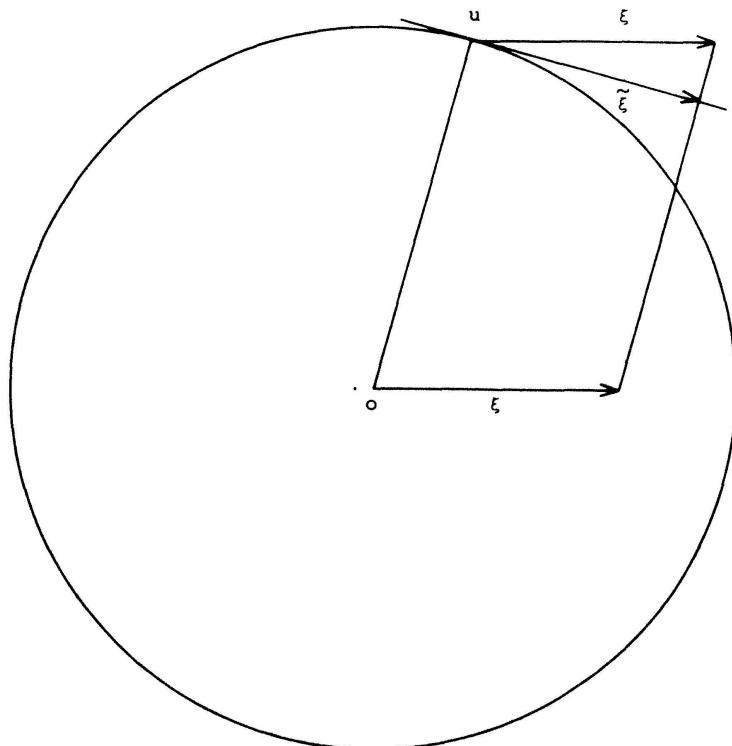


Figure 1

l'opérateur $*$ correspondant à cette métrique. Cet opérateur ne dépend pas du choix de la métrique. Cela est dû au fait que l'étoile sur $\Lambda^p \mathbb{R}^{2p}$ est invariante par homothéties.

Définissons une p -hyperforme sur ∂H^n comme étant une forme linéaire continue sur l'espace des $(n - 1 - p)$ -formes analytiques sur ∂H^n .

(On dira “ p -hyperforme” au lieu de “ p -hyperforme sur ∂H^n ” et, lorsque le contexte le permettra, “ p -forme” au lieu de “ p -forme sur H^n ” ou “ p -forme sur ∂H^n .”)

On munit l'espace des p -hyperformes de la topologie forte. L'accouplement naturel entre formes de degrés complémentaires, donné par l'intégrale sur ∂H^n du produit extérieur, permet de plonger les p -formes dans les p -hyperformes. La différentielle d s'étend aux p -hyperformes, de même que, pour $p = (n - 1)/2$, l'opérateur $*$ provenant de la structure conforme de ∂H^n . Une $(n - 1)/2$ hyperforme dont l'étoile est fermée sera dite *cofermée*. Toute $(n - 1)/2$ hyperforme s'écrit de façon unique comme somme d'une hyperforme fermée et d'une hyperforme cofermée.

La transformation de Poisson Φ_p s'étend facilement aux p -hyperformes.

Désignons par $C^{-\omega}(\Lambda^p T^* \partial H^n)$ l'espace des p -hyperformes sur ∂H^n et par $C^0(\Lambda^p T^* H^n)$ l'espace des p -formes continues sur H^n .

DÉFINITION 1. On appelle transformation de Poisson l'application linéaire continue

$$\Phi_p : C^{-\omega}(\Lambda^p T^* \partial H^n) \rightarrow C^0(\Lambda^p T^* H^n)$$

décrise ci-dessus.

On verra que les transformées sont en fait harmoniques. La topologie la plus naturelle sur les formes harmoniques est la topologie C^0 (qui coïncide avec la topologie C^∞).

2.1.2. Résultats

Le premier théorème énonce les propriétés élémentaires de la transformation de Poisson Φ_p .

THÉORÈME 1. *La transformation de Poisson Φ_p est caractérisée par les propriétés suivantes:*

- a) Φ_0 est la transformation de Poisson usuelle
- b) Φ_p commute aux isométries hyperboliques
- c) les transformées sont harmoniques et cofermées

- d) $(n - 1 - 2p)\Phi_{p+1}d = (n - 1 - p)d\Phi_p$, $p = 0, \dots, n - 2$
- e) $\Phi_{p+1}d = p^*\Phi_p^*$, $p = (n - 1)/2$
- f) $d\Phi_{n-1}\alpha = (1 - n)(\int_{\partial H^n} \alpha)\omega$, où ω est la forme volume hyperbolique.

Ce théorème sera prouvé au §3.

THÉORÈME 2. Si $p \neq (n - 1)/2$, Φ_p est un isomorphisme topologique de l'espace des p -hyperformes sur ∂H^n sur l'espace des p -formes harmoniques cofermées sur H^n muni de la topologie de la convergence compacte. Si $p = (n - 1)/2$, le noyau de Φ_p est l'espace des p -hyperformes cofermées, tandis que son image est l'espace des p -formes fermées et cofermées sur H^n .

Dans tous les cas, pour $p \neq 0$, Φ_p induit un isomorphisme de l'espace des p -hyperformes exactes sur l'espace des p -formes fermées et cofermées sur H^n .

DÉFINITION 2. On dira qu'une p -forme sur l'espace hyperbolique croit lentement si sa norme est majorée par une fonction de la forme $x \rightarrow a \exp(d(x_0, x))$ où $d(x_0, x)$ est la distance de x à un point fixe x_0 de H^n et où a et b sont des constantes convenables.

THÉORÈME 3. La transformée d'une p -hyperforme est la transformée d'un courant si et seulement si elle croit lentement.

Si c'est le cas, on peut majorer l'ordre du courant par une constante dépendant de la croissance de la transformée, et vice-versa.

En ce qui concerne le comportement vers le bord des transformées, on a le résultat suivant. Posons:

$$C_p = \frac{2^{p+1}}{n} \frac{\Gamma(n - 2p)}{\Gamma(n - p)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - p\right)}.$$

THÉORÈME 4. Supposons $p < n - 1/2$.

- a) Si α est une p -forme mesurable essentiellement bornée sur ∂H^n continue au point u alors $\Phi_p\alpha$ s'étend en une p -forme continue sur $H^n \cup \{u\}$ dont la valeur en u est celle de $C_p\alpha$.
- b) Soient x_0 un point de H^n et R un nombre positif. Si u est un point de ∂H^n , on désigne par T_u le tube des points de H^n dont la distance à la géodésique passant par x_0 et u est inférieure à R (voir Figure 2). Soit α une p -forme L^q sur ∂H^n , avec $1 < q \leq \infty$. Alors presque tous les points u de ∂H^n possèdent

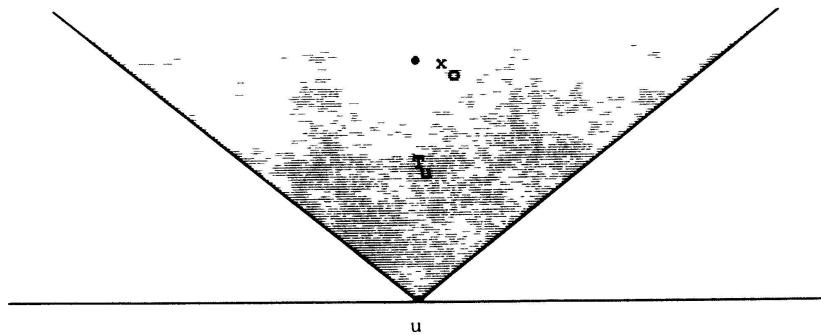


Figure 2

la propriété suivante: Si x est un point de T_u qui tend vers u , alors $(\Phi_p \alpha)(x)$ tend vers $C_p \alpha(u)$.

2.2. Transformation des p -formes à valeurs dans un fibré homogène en droites

2.2.1. Définitions

Soit $f: M \rightarrow N$ une application différentiable entre deux variétés riemanniennes.

NOTATION 1. $f'(x): T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ est l'application tangente à f au point x de M .

NOTATION 2. $\|f'(x)\|$ est la norme d'opérateur de $f'(x)$.

Remarque 1. Si M et N ont la même dimension m et si f est conforme, alors un m -vecteur de norme 1 tangent à M en x est appliqué par f sur un m -vecteur de norme $\|f'(x)\|^m$ tangent à N en $f(x)$. Par ailleurs, si f et g sont conformes, on a:

$$\|(f \circ g)'(x)\| = \|f'(g(x))\| \|g'(x)\|.$$

Supposons maintenant que $M = N$ est munie seulement d'une structure conforme, que $f(x) = x$, et que f est conforme.

NOTATION 3. $\|f'(x)\|$ est la norme commune des valeurs propres de $f'(x)$.

On observera que les notations 2 et 3 sont cohérentes.

Soit s un nombre complexe. On va définir un fibré homogène en droites $D^s \rightarrow \partial H^n$.

Pour cela, on commence par définir une fonction positive Q sur $H^n \times \partial H^n \times H^n$. Soit (y, u, x) un point de $H^n \times \partial H^n \times H^n$. Considérons les applications

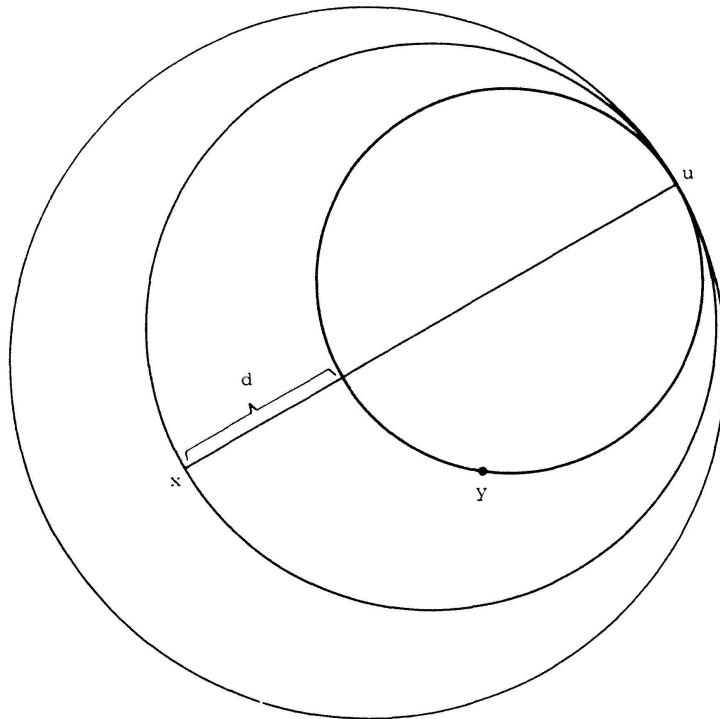


Figure 3

visuelles V_x et V_y définies au §2.1.1, et posons:

$$Q(y, u, x) = \|(V_y^{-1} \circ V_x)'(V_x^{-1}(u))\|$$

(voir notation 2 ci-dessus).

Remarquons qu'on a: $Q(y, u, x) = e^{\varepsilon d}$, où d est la distance entre les horosphères “centrées” en n passant par x et par y , et ε vaut $+1$ ou -1 selon que la demi-géodésique (x, u) coupe ou ne coupe pas l’horosphère passant par y et u (voir Figure 3).

Cette fonction Q est invariante (par les isométries hyperboliques) et satisfait – en vertu de la remarque 1 ci-dessus – la relation de “cocycle”:

$$Q(z, u, y)Q(y, u, x) = Q(z, u, x).$$

Disons que les triples (x, u, ξ) et (y, v, η) de $H^n \times \partial H^n \times \mathbb{C}$ sont équivalents si et seulement si:

$$u = v, \quad \eta = Q(y, u, x)^{-s} \xi.$$

Désignons par $(x, u, \zeta)^s$ la classe de (x, u, ζ) . L’ensemble de ces classes possède une structure naturelle de fibré homogène en droites sur ∂H^n . La

projection est définie par $(x, u, \zeta)^s \rightarrow u$ et l'isométrie hyperbolique g agit par:

$$g(x, u, \zeta)^s = (gx, gu, \zeta)^s.$$

NOTATION 4. On désigne par D^s le fibré homogène en droites sur ∂H^n défini ci-dessus.

La signification géométrique du paramètre s est la suivante. Si l'isométrie g fixe le point u de ∂H^n , on a:

$$g(x, u, \zeta)^s = \|g'(u)\|^{-s}(x, u, \zeta)^s$$

(voir notation 3).

A côté de ce modèle intrinsèque du fibré D^s , il sera commode de disposer du modèle plus concret que voici.

Soit U un ouvert de ∂H^n muni d'une métrique riemannienne compatible avec la structure conforme. Définissons le noyau de Poisson P sur $H^n \times U$ par:

$$P(x, u) = \|(V_x^{-1})'(u)\| \quad (2)$$

(voir notation 2).

Le rapport entre P et Q est le suivant:

$$Q(y, u, x) = P(y, u)P(x, u)^{-1}.$$

Notons que $P(x, u)$ et $P(y, u)$ dépendent de la métrique de U , mais pas leur quotient.

Remarquons que si f est une fonction continue et bornée sur U , son extension harmonique est donnée par:

$$(\Phi_0 f)(x) = |S^{n-1}|^{-1} \int_{u \in U} f(u) P(x, u)^{n-1} \omega(u)$$

où ω est la forme volume provenant de la métrique de U (voir remarque 1).

Munissons le fibré trivial $U \times \mathbb{C}$ sur U de l'action suivante. Si u est un point de U et g une isométrie hyperbolique telle que gu est encore dans U , alors g agit sur le vecteur (u, ζ) de $U \times \mathbb{C}$ par:

$$g(u, \zeta) = (gu, \|g'(u)\|^{-s} \zeta),$$

où $\|g'(u)\|$ est défini à l'aide de la métrique de U (voir notation 2).

NOTATION 5. On désigne par $U \times_s \mathbb{C}$ le fibré trivial sur U muni de l'action ci-dessus.

On vérifie sans peine que l'application

$$\begin{aligned} i^s : U \times_s \mathbb{C} &\rightarrow D^s \mid U \\ (u, \zeta) &\mapsto (x, u, P(x, u)^{-s} \zeta)^s \end{aligned} \tag{3}$$

est un isomorphisme équivariant ($D^s \mid U$ est la restriction de D^s à U).

Considérons le cas particulier où $U = \partial H^n$ est muni de la métrique qui rend l'application visuelle V_x isométrique, x étant au point fixé de H^n . L'isomorphisme (3), noté i_x^s , est alors simplement donné par:

$$i_x^s(u, \zeta) = (x, u, \zeta)^s. \tag{4}$$

Il permet d'associer à une p -hyperformes α à dans D^s une p -hyperforme usuelle notée $(i_x^s)^* \alpha$.

Soit λ un nombre complexe. Définissons l'espace $C^{-\omega}(\Lambda^p T^* \partial H^n, D^{\lambda-p})$ des p -hyperformes à valeurs dans $D^{\lambda-p}$ comme étant le dual topologique (muni de la topologie forte) de l'espace des $(n-1-p)$ -formes analytiques à valeurs dans $D^{p-\lambda}$. Cette définition est justifiée par la remarque 2 plus bas. Rappelons que $C^0(\Lambda^p T^* H^n)$ est l'espace des p -formes continues sur H^n .

DÉFINITION 3. On appelle transformation de Poisson l'application linéaire continue

$$\Phi_p^\lambda : C^{-\omega}(\Lambda^p T^* \partial H^n, D^{\lambda-p}) \rightarrow C^0(\Lambda^p T^* H^n)$$

définie par

$$(\Phi_p^\lambda \alpha)(x) = (\Phi_p(i_x^{\lambda-p})^* \alpha)(x).$$

On a: $\Phi_p^p = \Phi_p$.

La signification géométrique du paramètre λ est la suivante. Si α est une p -forme à valeurs dans $D^{\lambda-p}$ définie au point u de ∂H^n , et si l'isométrie g fixe u , alors l'action de g sur α est donnée par

$$g \cdot \alpha = \|g'(u)\|^{-\lambda} h \cdot \alpha$$

(voir notation 3), où h est une isométrie telle que $hu = u$ et $\|h'(u)\| = 1$.

En particulier si $\lambda = -p$, α est un p -vecteur tangent.

Le *produit extérieur* d'une p -forme à valeurs dans $D^{\lambda-p}$ par une q -forme à valeurs dans $D^{\mu-q}$ est une $(p+q)$ -forme à valeurs dans $D^{\lambda+\mu-p-q}$.

Remarque 2. L'intégrale du produit extérieur fournit un accouplement naturel entre les p -formes à valeurs dans $D^{\lambda-p}$ et les $(n-1-p)$ -formes à valeurs dans $D^{n-1-\lambda-(n-1-p)} = D^{p-\lambda}$.

La *conjuguée complexe* d'une p -forme α à valeurs dans $D^{\lambda-p}$ est une p -forme $\bar{\alpha}$ à valeurs dans $D^{\bar{\lambda}-p}$ ($\bar{\lambda}$ est le conjugué complexe de λ).

Définissons l'opérateur \mathbb{C} -linéaire

$$*: \Lambda^p T^* \partial H^n \otimes D^{\lambda-p} \rightarrow \Lambda^{n-1-p} T^* \partial H^n \otimes D^{\lambda-(n-1-p)}$$

comme suit. Soit α une p -forme usuelle définie au point u de ∂H^n . Désignons par $*^x$ l'opérateur étoile correspondant à la métrique sur ∂H^n qui rend l'application V_x isométrique (x est un point de H^n). On pose alors

$$*((x, u, 1)^{\lambda-p} \alpha) = (x, u, 1)^{\lambda-(n-1-p)} *^x \alpha. \quad (5)$$

Il résulte des observations ci-dessus que si $\operatorname{Re} \lambda = n - 1/2$, alors le produit scalaire sur les p -formes à valeurs dans $D^{\lambda-p}$ défini par

$$(\alpha | \beta) = \int_{\partial H^n} \alpha \wedge * \beta$$

($* \beta$ est la conjuguée complexe de $* \beta$) est invariant. (Il est clair en effet que les opérations définies plus haut sont invariantes.)

2.2.2. Résultats

Les théorèmes 1 (assertions *b*) et *c*), 2, 3 et 4 ont des analogues pour Φ_p^λ , qu'on appellera respectivement théorèmes 1', 2', 3' et 4'.

THÉORÉME 1'. *La transformation de Poisson Φ_p^λ commute aux isométries hyperboliques. De plus, les transformées par Φ_p^λ sont cofermées et vecteurs propres du laplacien pour la valeur propre $(\lambda-p)(n-1-\lambda-p)$.*

THÉORÈME 2'. *Fixons un entier p , $0 \leq p \leq n-1$.*

a) *Si λ est un entier plus grand que $n-1$, le noyau de*

$$\Phi_p^\lambda: C^{-\omega}(\Lambda^p T^* \partial H^n, D^{\lambda-p}) \rightarrow C^0(\Lambda^p T^* H^n)$$

est de codimension finie.

- b) Si $\lambda = n - 1 - p$, on a $(2p + 1 - n)\Phi_p^{n-1-p} \circ \Phi_p^{n-1-p} = * d\Phi_{n-1-p}$ où l'étoile dans le membre de gauche désigne l'isomorphisme naturel de l'espace des $(n - 1 - p)$ -hyperformes sur l'espace des p -hyperformes à valeurs dans D^{n-1-2p} (voir (5), §2.2.1). Le noyau et l'image de Φ_p^{n-1-p} sont donc donnés par le théorème 2.
- c) Dans les autres cas, Φ_p^λ est un isomorphisme topologique de l'espace des p -hyperformes à valeurs dans $D^{\lambda-p}$ sur l'espace des p -formes cofermées sur H^n qui sont vecteurs propres du laplacien pour la valeur propre $(\lambda - p)(n - 1 - \lambda - p)$.

Le lemme fondamental (§4.1) fournira une description explicite du noyau de Φ_p^λ dans le cas a).

Le théorème 3' s'énonce comme le théorème 3:

THÉORÈME 3'. *La transformée d'une p -hyperforme à valeurs dans $D^{\lambda-p}$ est la transformée d'un courant (à valeurs dans $D^{\lambda-p}$) si et seulement si elle croît lentement.*

Afin d'énoncer le théorème 4', on introduit quelques notations.

Identifions conformément H^n (muni de sa métrique de courbure -1) à une boule de ∂H^{n+1} . Soit s un nombre complexe.

NOTATION 6. Désignons par D_n^s le fibré noté D^s jusqu'ici (voir notation 4, §2.2.1) et par D_{n+1}^s le fibré analogue sur ∂H^{n+1} .

Soient α une p -forme sur ∂H^n à valeurs dans D_{n+1}^s et ξ un champ de p -vecteurs sur ∂H^{n+1} . Posons $\lambda = p + s$. Le fibré $H^n \times_s \mathbb{C}$ (notation 5, §2.2.1) s'identifie, en tant que fibré homogène, au fibré trivial $H^n \times \mathbb{C}$ (muni de l'action $g \cdot (x, \zeta) = (gx, \zeta)$). On peut donc considérer la section $i_\xi \Phi_p^\lambda \alpha$ (i est le produit intérieur) du fibré trivial comme une section de $H^n \times_s \mathbb{C}$.

On va définir un plongement j qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 H^n \times_s \mathbb{C} & \xrightarrow{i^s} & D_{n+1}^s | H^n & \hookrightarrow & D_{n+1}^s \\
 & \searrow i_\xi \Phi_p^\lambda \alpha & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & & H^n & \hookrightarrow & \partial H^{n+1} \hookleftarrow \partial H^n
 \end{array}$$

en posant:

$$j((x, u, \zeta)^s) = (z, u, P(z, u)^{-s})^s. \quad (6)$$

(L'isomorphisme i^s et la fonction P sont définis respectivement par (3) et (2), §2.2.1.)

En faisant les identifications induites par i^s et j , on peut considérer que Φ_p^λ transforme des p -formes sur ∂H^n à valeurs dans $D_{n+1}^{\lambda-p}$ en des p -formes sur H^n à valeurs dans le même fibré:

$$\Phi_p^\lambda : C^{-\omega}(\Lambda^p T^* \partial H^n, D_{n+1}^{\lambda-p}) \rightarrow C^0(\Lambda^p T^* H^n, D_{n+1}^{\lambda-p}).$$

THÉORÈME 4'. *Il existe une constante $C_p(\lambda)$ telle que:*

- a) *L'assertion a) du théorème 4 est encore vraie mutatis mutandis si on remplace dans son énoncé Φ_p par Φ_p^λ (ou plus précisément Φ_p par $i^s \circ \Phi_p^\lambda$ et α par $j \circ \alpha$), l'hypothèse $p < n - 1/2$ par l'hypothèse $\operatorname{Re} \lambda < n - 1/2$, C_p par $C_p(\lambda)$.*
- b) *Il en va de même pour l'assertion b) du théorème 4.*

Le lemme fondamental (§4.1) montrera

$$C_p(\lambda) = 2^{\lambda+1} \frac{n-1-\lambda-p}{n} \frac{\Gamma(n-1-2\lambda)}{\Gamma(n-\lambda)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-\lambda\right)}.$$

3. Preuve des théorèmes 1 et 1'

3.1. Le noyau φ_p^λ de la transformation de Poisson Φ_p^λ

Définissons la $(p, n-1-p)$ -forme double (voir [19, §7]) φ_p^λ sur $H^n \times \partial H^n$ à valeurs dans $D^{p-\lambda}$. Soient ξ un p -vector tangent à H^n en x et η un $(n-1-p)$ -vecteur tangent à ∂H^n en u . Posons

$$\langle \varphi_p^\lambda, \xi \otimes \eta \rangle = \frac{(-1)^{np}}{|S^{n-1}|} \langle \omega(x), V_x^{-1}(u) \wedge \xi \wedge (V_x^{-1})_* \eta \rangle(x, u, 1)^{p-\lambda}$$

où $|S^{n-1}|$ désigne le volume de la sphère unité de \mathbb{R}^n et ω la forme volume hyperbolique de H^n . On vérifie alors le lemme suivant.

LEMME 1. *La transformation de Poisson Φ_p^λ est donnée par le noyau*

invariant φ_p^λ , i.e.

$$\Phi_p^\lambda \alpha = \int_{\partial H^n} \varphi_p^\lambda \wedge \alpha.$$

Remarquons que la transformation Φ_p^λ et le noyau φ_p^λ sont tous deux définis d'une façon qui rend leur invariance manifeste.

LEMME 2. *Les transformées Φ_p^λ sont cofermées et vecteurs propres du laplacien pour la valeur propre $(\lambda - p)(n - 1 - \lambda - p)$.*

Preuve. Le noyau φ_p^λ est une $(p, n - 1 - p)$ -forme double sur $H^n \times \partial H^n$ à valeurs dans $D^{p-\lambda}$. Soient μ un $(n - 1 - p)$ -vecteur en un point u de ∂H^n et ζ un vecteur de $D^{\lambda-p}$ au point u . Définissons la p -forme β sur H^n par

$$\langle \beta, \xi \rangle = \langle \zeta, \langle \varphi_p^\lambda, \xi \otimes \eta \rangle \rangle$$

Il suffit de montrer que β est cofermée et vecteur propre du laplacien pour la valeur propre $(\lambda - p)(n - 1 - \lambda - p)$.

Prenons le demi-espace $x_n > 0$ de \mathbb{R}^n , muni de la métrique $x_n^{-2}(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)$, pour modèle de H^n et plaçons le point u à l'infini. On peut supposer

$$\beta(e_n) = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p \quad (e_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n),$$

car β ne contient pas le facteur dx_n . On en déduit, par équivariance de Φ_p^λ

$$\beta = x_n^{n-1-\lambda-p} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p.$$

et on achève la preuve du lemme par un calcul direct et facile.

Afin de donner une expression explicite du noyau $\varphi_p = \varphi_p^p$, introduisons les notations suivantes.

NOTATION 7.

$$H^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\},$$

$$\mathbb{R}^{n-1} = \{u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid u_n = 0\},$$

$$\partial H^n = \mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\},$$

$$e_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n,$$

$$f_j(x, u) = \begin{cases} \frac{x_j - u_j}{|x - u|^2}, & u \neq \infty \\ x_j, & u = \infty \end{cases} \quad (x, u) \in H^n \times \partial H^n, j = 1, \dots, n,$$

$P = f_n$ est le noyau de Poisson, $\partial/\partial u_j(\infty)$ (resp. $du_j(\infty)$) est l'image directe de $\partial/\partial u_j(0)$ (resp. $du_j(0)$) par la réflexion $u \rightarrow u/|u|^2$, $(i = 1, \dots, n-1)$, S est le groupe des permutations de $\{1, \dots, n-1\}$, ε_σ est le signe de la permutation,

$$I_p = \{i \in S \mid i(1) < \dots < i(p), i(p+1) < \dots < i(n-1)\}$$

$$\psi_p^\sigma = \varepsilon_\sigma d_x f_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge d_x f_{\sigma(p)} \otimes du_{\sigma(p+1)} \wedge \dots \wedge du_{\sigma(n-1)}$$

$$\varepsilon = \varepsilon(u) = \begin{cases} 1, & u \in \mathbb{R}^{n-1} \\ -1, & u = \infty \end{cases}$$

$|S^{n-1}|$ est le volume de la sphère unité de \mathbb{R}^n .

LEMME 3. *On a*

$$\varphi_p = (-1)^{np+n} \varepsilon \frac{2^{n-1-2p}}{|S^{n-1}|} P^{n-1-2p} \sum \psi_p^i,$$

où i parcourt I_p . De plus on a, au point $(e_n, 0)$

$$d_x P = -dx_n, \quad d_x f_j = dx_j, \quad d_x d_u f_j = -dx_n \otimes du_j.$$

Preuve. Pour vérifier que l'égalité du lemme est vraie au point (e_n, ∞) de $H^n \times \partial H^n$, il faut calculer $u = V_{e_n}(\zeta)$. La figure 4 représente le plan contenant

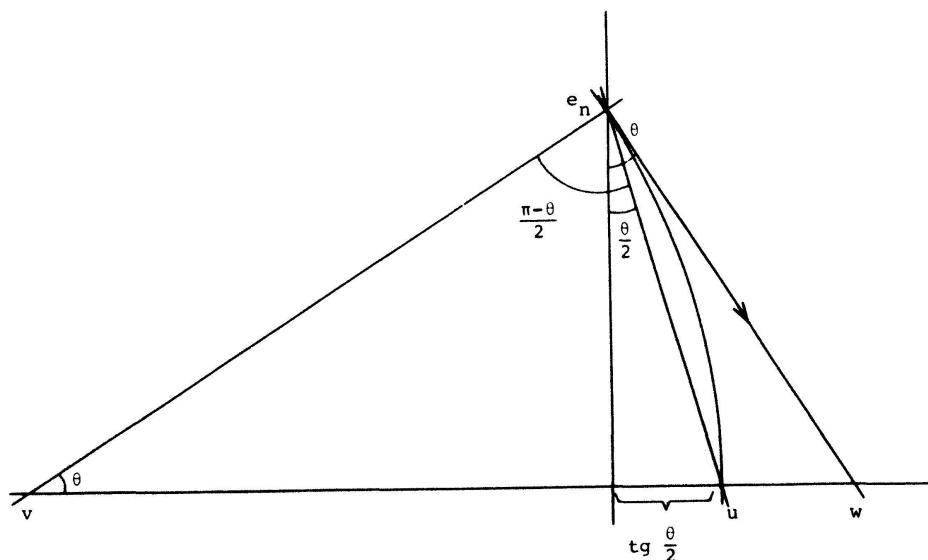


Figure 4

e_n , 0 et ζ . Par similitude des triangles $(0, e_n, w)$ et $(0, v, e_n)$ l'angle θ que le vecteur ζ forme avec $(e_n, 0)$ se retrouve comme indiqué en v . Le triangle (u, v, e_n) étant isocèle, son angle en e_n vaut $(\pi - \theta)/2$. L'angle $(0, e_n, w)$ est donc

$$\frac{\pi - \theta}{2} + \theta - \frac{\pi}{2} = \frac{\theta}{2}.$$

Il en résulte que la distance de u à 0 est $\operatorname{tg}(\theta/2)$. L'application tangente à l'application visuelle V_{e_n} en $V_{e_n}^{-1}(0)$ – vue comme endomorphisme de \mathbb{R}^{n-1} – est donc l'homothétie de rapport

$$\left(\frac{d}{d\theta} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)_{\theta=0} = \frac{1}{2}.$$

On obtient ainsi l'expression de φ_p en $(e_n, 0)$. En utilisant les isométries $x \rightarrow ax + b$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}^{n-1}$, on trouve la valeur de φ_p en (x, ∞) pour tout x dans H^n . L'isométrie $x \rightarrow x/|x|^2$ donne $\varphi_p(x, 0)$. Enfin, par translation parallèle à \mathbb{R}^{n-1} , on obtient l'expression du lemme.

3.2. Preuve du théorème 1

Les transformations $d\Phi_p$, $\Phi_{p+1}d$ et $*\Phi_{(n-1)/2}*$ sont données respectivement par les noyaux $d_x\varphi_p$, $(-1)^{n-1-p}d_u\varphi_{p+1}$ et $(-1)^{(n-1)/2}*_x*_u\varphi_{(n-1)/2}$. On a

$$\sum_{i \in I_p} \psi_p^i = \frac{1}{p!(n-1-p)!} \sum_{\sigma \in S} \psi_p^\sigma$$

(Voir notation 7, §3.1).

D'après le lemme 2, on a

$$\varphi_p = (-1)^{np+n} \varepsilon \frac{2^{n-1-p}}{|S^{n-1}|} P^{n-1-2p} \sum \psi_p^i, \quad i \in I_p,$$

et, en $(e_n, 0)$:

$$\begin{aligned} d_u \psi_{p+1} &= 2(p+1) \psi_p^\sigma \wedge dx_n \\ *_x *_u \psi_p &= -\psi_p^\sigma \wedge dx_n, \quad p = \frac{n-1}{2}. \end{aligned}$$

D'où (toujours en $(e_n, 0)$):

$$\begin{aligned} d_x \varphi_p &= -(n-1-2p)dx_n \wedge \varphi_p \\ d_u \varphi_{p+1} &= (-1)^n(n-1-p)\varphi_p \wedge dx_n \\ *_x *_u \varphi_p &= -\varphi_p \wedge dx_n, \quad p = \frac{n-1}{2}. \end{aligned}$$

Les assertions d), e) et f) du théorème 1 découlent alors immédiatement de ces trois relations et de la première phrase de la preuve.

Prouvons que les propriétés a), b), c), d) et f) du théorème 1 caractérisent bien la transformation de Poisson Φ_p . D'après la réciprocité de Frobenius, il existe une bijection linéaire entre d'une part l'espace des transformations linéaires continues et équivariantes par rapport aux isométries hyperboliques de p -hyperformes sur ∂H^n en p -formes sur H^n , et, d'autre part, l'espace

$$\text{Hom}_{O_{n-1}}(\Lambda^p \mathbb{C}^{n-1}, \Lambda^p \mathbb{C}^n),$$

où O_{n-1} est le groupe orthogonal de \mathbb{R}^{n-1} , qui est isomorphe au stabilisateur d'un point de $H^n \times \partial H^n$. Or cet espace est engendré (sur \mathbb{C}) par l'inclusion naturelle. Cela montre que Φ_p est déterminée à un facteur près sur l'équivariance. La conclusion désirée découle alors de a), d), e) et f).

4. Lemme fondamental

4.1. Enoncé

Prenons pour modèle de l'espace hyperbolique la boule unité B^n de \mathbb{R}^n avec la métrique $4(dx_1^2 + \dots + dx_n^2)/(1 - |x|^2)^2$. On va énoncer un lemme fondamental qui donne une expression explicite des transformées des p -formes O_n -finies à valeurs dans $D^{\lambda-p}$ (O_n désigne ici, et dans la suite, le groupe orthogonal de \mathbb{R}^n).

Il s'agit du résultat essentiel de ce travail. Pour énoncer ce lemme, il faut introduire un certain nombre de notations. Posons:

$$\begin{aligned} V^p &= \{p\text{-formes } O_n\text{-finies sur } S^{n-1}\} \\ W^p &= \begin{cases} \{p\text{-formes } O_n\text{-finies fermées}\}, & p \neq n-1 \\ \{p\text{-formes } O_n\text{-finies exactes}\}, & p \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

On désigne par $W^{p\perp}$ l'orthogonal de W^p dans V^p (pour le produit scalaire

O_n -invariant usuel). Pour tout entier non négatif k , on pose encore:

$$W_k^p = \{\alpha \in W^p \mid \Delta\alpha = (k+p)(k+n-p)\alpha\}$$

$$(W^{p-1\perp})_k = \{\alpha \in W^{p-1\perp} \mid \Delta\alpha = (k+p)(k+n-p)\alpha\}$$

où Δ est la laplacien de S^{n-1} .

Voici les décompositions de W^p et de $W^{p\perp}$ en sous- O_n -modules irréductibles non nuls:

$$W^p = \begin{cases} W_0^0 = \mathbb{C} & \text{si } p = 0 \\ \bigoplus_{k=0}^{\infty} W_k^p & \text{si } p \neq 0 \end{cases}$$

$$W^{p\perp} = \begin{cases} \bigoplus_{k=0}^{\infty} (W^{p\perp})_k & \text{si } p \neq n-1 \\ (W^{n-1\perp})_0 & \text{si } p = n-1 \end{cases}$$

Les seuls O_n -isomorphismes entre tous les modules irréductibles ci-dessus sont donnés par la différentielle (8) d de $(W^{p-1\perp})_k$ sur W_k^p .

On trouvera ces résultats dans [11, §4.6] et [3, ch.7, §15].

L'espace des p -formes O_n -finies à valeurs dans $D^{\lambda-p}$ est O_n -isomorphe à V^p via $(i_0^{\lambda-p})^*$ (voir (4), §2.2.1).

CONVENTION. On identifie les deux espaces ci-dessus au moyen de l'isomorphisme O_n -équivariant $(i_0^{\lambda-p})^*$.

On prendra bien garde au fait que cette identification n'est pas compatible avec l'action des isométries hyperboliques infinitésimales.

Définissons les coordonnées polaires (ρ, θ) par

$$\rho : B^n \setminus \{0\} \rightarrow]0, 1[$$

$$x \mapsto |x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

$$\theta : B^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$$

$$x \mapsto \frac{x}{|x|}$$

Enfin posons:

$$\begin{aligned}
 F_{\lambda k}(z) &= F\left(1 + \lambda - \frac{n}{2}, 1 + \lambda + k; 1 + \frac{n}{2} + k; z\right), \\
 f_{\lambda k}^p(\rho) &= \frac{2\rho}{(k+p)(k+n-p)} \left[\rho^2(1-\rho^2)F'_{\lambda k}(\rho^2) + \frac{k+n-p}{2}(1-\rho^2)F_{\lambda k}(\rho^2) \right. \\
 &\quad \left. + (n-1-\lambda-p)\rho^2F_{\lambda k}(\rho^2)\right], \\
 c_k^p(\lambda) &= \frac{2^{p+1}}{n} \frac{(n-\lambda)(n-\lambda+1)\cdots(n-\lambda+k-1)}{\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{n}{2}+k\right)}. \tag{9}
 \end{aligned}$$

LEMME FONDAMENTAL:

a) *L'application linéaire $\omega \rightarrow \omega^\lambda$ définie sur V^p par*

$$\begin{aligned}
 (d\alpha)^\lambda &= \rho^{p-1+k}(1-\rho^2)^{\lambda-p}\{f_{\lambda k}^p(\rho)\theta^*d\alpha + (1-\rho^2)F_{\lambda k}(\rho^2)d\rho \wedge \theta^*\alpha\}, \\
 \text{pour } \alpha &\in (W^{p-1\perp})_k, p = 1, \dots, n-1 \\
 \beta^\lambda &= \rho^{p+1+k}(1-\rho^2)^{\lambda-p}F_{\lambda k}(\rho^2)\theta^*\beta, \\
 \text{pour } \beta &\in (W^{p\perp})_k, p = 0, \dots, n-1, \\
 1^\lambda &= F_{\lambda, -1}(\rho^2) \quad \{1 \text{ est la fonction constante égale à 1}\}
 \end{aligned}$$

est un O_n -isomorphisme de V^p sur l'espace des p -formes sur $B^n \setminus \{0\}$ qui sont O_n -finies, cofermées, vecteurs propres du laplacien pour la valeur propre $(\lambda-p)(n-1-\lambda-p)$ et bornées au voisinage de 0.

b) *Si Φ_p^λ désigne la transformation de Poisson des p -formes sur S^{n-1} à valeurs dans $D^{\lambda-p}$ et si α et β sont comme ci-dessus, on a:*

$$\begin{aligned}
 \Phi_p^\lambda d\alpha &= \frac{(k+p)(k+n-p)}{2} c_k^p(\lambda) (d\alpha)^\lambda \\
 \Phi_p^\lambda \beta &= (n-1-\lambda-p) c_k^p(\lambda) \beta^\lambda \\
 \Phi_0^\lambda 1 &= 1^\lambda = F_{\lambda, -1}(\rho^2).
 \end{aligned}$$

Remarques:

1) Lorsque $\lambda = p$ ou $\lambda = n - 1 - p$, l'expression de $\rho_{\lambda k}^p$ se simplifie comme suit

(preuve au §5.2):

$$f_{pk}^p(\rho) = f_{n-1-p,k}^p(\rho) = \frac{\rho}{p+k} F_{p-1,k}(\rho^2).$$

2) Il découle de l'assertion b) du lemme fondamental que les p -formes $(d\alpha)^\lambda$ et β^λ sont en fait analytiques en 0. En effet, ces formes sont dans l'image de Φ_p^λ ou de $\Phi_p^{n-1-\lambda}$, sauf pour β^λ dans le cas $\lambda = p = (n-1)/2$. Mais on a

$$\beta^p = (1-p^2)^{p-\mu} \frac{F_{pk}(\rho^2)}{F_{\mu k}(\rho^2)} \beta^\mu$$

avec β^μ analytique en 0 si $\mu \neq p$, et $F_{pk}/F_{\mu k}$ analytique en 0. On reviendra sur ce cas exceptionnel dans le théorème 6 (§6.1).

4.2. Preuve de l'assertion a)

Soient τ et ν deux formes de degré respectif p et $p-1$ sur $B^n \setminus \{0\}$ telles que

$$i_{\partial/\partial\rho} \tau = 0 = i_{\partial/\partial\rho} \nu, \quad i \text{ produit intérieur.}$$

DEFINITION. On dira que τ est la partie tangente et ν la partie normale de $\tau + d\rho \wedge \nu$. Si $\nu = 0$, on dira que $\tau + d\rho \wedge \nu$ est tangente.

Cette définition a bien un sens car si $\tau + d\rho \wedge \nu$ est nulle, alors τ et ν le sont aussi.

Soit ω une $(p-1)$ -forme (resp. $\tau + d\rho \wedge \nu$ une p -forme comme ci-dessus) cofermé sur $B^n \setminus \{0\}$ et vecteur propre du laplacien pour la valeur propre $(\lambda - p)(n-1-\lambda-p)$ (resp. $(\lambda - p)(n+1-\lambda-p)$). Supposons que ω , τ et ν se transforment sous l'action de O_n comme des formes de W_k^p . En vue de (8) §4.1, cela implique que ω est tangente car $i_{\partial/\partial\rho} \omega$ est de degré $p-2$ et le type W_k^p n'apparaît pas dans V^{p-2} .

On peut alors considérer ω , τ et ν comme des courbes paramétrées par ρ dans W_k^p . On identifie ici – et souvent dans la suite – les espaces $(W^{p-1})_k$ et W_k^p au moyen de la différentielle d .

Introduisons les abréviations suivantes: D est l'opérateur différentiel

$$\rho^{2p+1-n} (1-\rho^2)^{2p-n} \frac{\partial}{\partial\rho} \rho^{n+1-2p} (1-\rho^2)^{n-2p},$$

$s = (k + p)(k + n - p)$ est une valeur propre du laplacien de S^{n-1} , $b_p^\lambda = (\lambda - p)(n - 1 - \lambda - p)$ est une valeur propre du laplacien de B^n , $g_p^\lambda(\rho) = s - b_p^\lambda(4\rho^2/(1 - \rho^2)^2)$. On a alors:

LEMME 4. *Les courbes ω , ν et τ vérifient les équations différentielles:*

$$\left(D \frac{\partial}{\partial \rho} - g_{p-1}^{\lambda-1} \right) \omega = 0 \quad (\omega)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \rho} D - g_p^\lambda \right) \nu = 0 \quad (\nu)$$

$$s\tau = D\nu \quad (\tau\nu)$$

$$g_p^\lambda \nu = s \frac{\partial \tau}{\partial \rho}. \quad (\nu\tau)$$

Preuve. L'application $x \rightarrow (\rho(x), \theta(x)) = (|x|, |x|^{-1}x)$ est un difféomorphisme de $B^n \setminus \{0\}$ sur $]0, 1[\times S^{n-1}$. La différentielle d sur $B^n \setminus \{0\}$ s'écrit donc sous la forme:

$$d = d_\rho + d_\theta \quad (10)$$

où d_ρ (resp. d_θ) provient de la différentielle sur $]0, 1[$ (resp. sur S^{n-1}). On peut aussi écrire symboliquement

$$d_\rho = d\rho \wedge \frac{\partial}{\partial \rho} \quad (11)$$

où $\partial/\partial\rho$ est la dérivée de Lie dans la direction du champ $\partial/\partial\rho$ sur $B^n \setminus \{0\}$. De la même façon, on peut considérer l'opérateur $*_\theta$ sur les formes tangentes aux sphères de $B^n \setminus \{0\}$ centrées à l'origine – opérateur défini par la propriété

$$*_\theta \theta^* \alpha = \theta^* *_\theta \alpha. \quad (12)$$

On vérifie la relation

$$*(\tau + d\rho \wedge \nu) = 2^{n-2-p} \rho^{n-1-2p} (1 - \rho^2)^{n-2p} (\rho^2 *_\theta \nu + (-1)^p d\rho \wedge *_\theta \tau). \quad (13)$$

et on prouve le lemme par des calculs directs utilisant (10), (11), (12) et (13).

La substitution $\rho = \sqrt{z}$ dans les équations (ω) et (ν) du lemme 4 conduit

respectivement aux deux équations suivantes:

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} = \left(\frac{n-2p}{z-1} + \frac{2p-n-2}{2z} \right) \frac{d\omega}{dz} + \left(\frac{s}{4z^2} - \frac{b_{p-1}^{\lambda-1}}{(z-1)^2} + \frac{b_{p-1}^{\lambda-1}}{z(z-1)} \right) \omega \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\nu}{dz^2} = & \left(\frac{2p-n-4}{z} + \frac{n-2p}{z-1} \right) \frac{d\nu}{dz} \\ & + \left(\frac{s+2p-n-1}{z^2} - \frac{6p-3n-2b_p^\lambda}{z(z-1)} + \frac{2p-n-b_p^\lambda}{(z-1)^2} \right) \nu. \end{aligned} \quad (15)$$

Ces équations présentent des singularités régulières en 0, 1 et ∞ (voir [1, Chap. 8, §4]. Les racines des équations indicielles de (14) (resp. (15)) en ces points sont les suivantes:

$$\frac{p+k}{2} \text{ et } \frac{p-n-k}{2} \left(\text{resp. } \frac{p+k-1}{2} \text{ et } \frac{p-n-k-1}{2} \right) \text{ en } 0, \quad (16)$$

$$\lambda - p \text{ et } 1 + n - \lambda - p \text{ (resp. } 1 + \lambda - p \text{ et } n - p - \lambda) \text{ en } 1,$$

$$\frac{p-n-k}{2} \text{ et } \frac{p+k}{2} \left(\text{resp. } \frac{p+k+1}{2} \text{ et } \frac{1+p-n-k}{2} \right) \text{ en } \infty.$$

A chacune des deux racines en 0 correspond une solution non proportionnelle à l'autre. La solution correspondant à $(p-n-k)/2$ (resp. $(p-n-k-1)/2$) n'est pas bornée en 0 (voir (26, 10.32]). Elle doit donc être rejetée. L'autre solution, exprimée à l'aide des fonctions hypergéométriques, donne les expressions de $(d\alpha)^\lambda$ et β^λ dans l'assertion a).

4.3. *Preuve de l'assertion b)*

Dans le cas $p = 0$, cette assertion n'est autre que le corollaire 4.4 dans [17]. En utilisant d'une part l'assertion a) du théorème 4' (qui est indépendante de l'énoncé à démontrer) et, d'autre part, le théorème 1 ainsi que les relations (10), (11), (12) et (13), on peut, sans difficulté majeure, généraliser la preuve développée dans [17] au cas p quelconque. Les détails sont laissés au lecteur.

5. Preuves

5.1. *Preuve des théorèmes 2 et 2'*

Soit ω une p -forme propre du laplacien hyperbolique pour la valeur propre $(\lambda - p)(n - 1 - \lambda - p)$ cofermée sur B^n . Pour toute (classe d'équivalence de)

représentation irréductible unitaire π de O_n , on pose:

$$\omega_\pi = \dim(\pi) \int_{O_n} \bar{\chi}_\pi(g)(g \cdot \omega) dg$$

où χ_π est le caractère de π , $g \cdot \omega$ désigne l'action naturelle de $g \in O_n$ sur ω et dg est la mesure de Haar sur O_n . Il est clair que ω_π est cofermée et vecteur propre du laplacien pour la valeur propre $(\lambda - p)(n - 1 - \lambda - p)$. On a:

$$\omega = \sum \omega_\pi, \quad (19)$$

la convergence ayant lieu sur chaque sphère $|x| = \rho$ en moyenne quadratique. (En fait on a convergence uniforme sur tout compact de B^n .)

L'assertion a) du théorème 2' découle immédiatement du lemme fondamental. Prouvons l'assertion c). D'après le lemme fondamental, on peut écrire (19) sous la forme:

$$\omega = \sum \Phi_p^\lambda(d\alpha_k + \beta_k), \quad k = 0, 1, \dots, \infty$$

$$\alpha_k \in (W^{p-1\perp})_k, \quad \beta_k \in (W^{p\perp})_k.$$

LEMME 5. Pour tout $0 < \rho < 1$, on a:

$$\sum (\|\alpha_k\|_2^2 + \|\beta_k\|_2^2) \rho^{2k} < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, \infty.$$

Le lemme entraîne le théorème, car d'après [16, §1] il implique que la série $\sum (d\alpha_k + \beta_k)$ converge vers une p -hyperforme γ et donc $\Phi_p^\lambda \gamma = \omega$.

Preuve du lemme 5. Pour tout $0 < \rho < 1$, on désigne par ρS^{n-1} la sphère $|x| = \rho$ et on considère les inégalités:

$$\begin{aligned} \int_{\rho S^{n-1}} \omega \wedge \overline{*_\theta} \omega &< \infty \\ \int_{\rho S^{n-1}} i_{\partial/\partial \rho} \omega \wedge \overline{*_\theta} i_{\partial/\partial \rho} \omega &< \infty \end{aligned} \quad (20)$$

où $i_{\partial/\partial \rho}$ est le produit intérieur et $*_\theta$ est l'opérateur $*_\theta$ (voir (12), §4.2) suivi de la

conjugaison complexe. En utilisant le lemme fondamental et en tenant compte du fait que $|c_k^p(\lambda)|$ (voir (9), §4.1) est plus grand qu'une puissance de k^{-1} pour k assez grand, on obtient:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |F_{\lambda k}(\rho^2)|^2 \|\alpha_k\|_2^2 \rho^{2k} &< \infty \\ \sum_{k=0}^{\infty} |F_{\lambda k}(\rho^2)|^2 \|\beta_k\|_2^2 \rho^{2k} &< \infty \\ 0 < \rho < 1. \end{aligned} \tag{21}$$

D'après [17, lemme 5.3 (2)], on a, pour k assez grand

$$|F_{\lambda k}(\rho^2)| > \frac{1}{2}(1 - \rho^2)^{(n/2) - 1 - Re\lambda}$$

Cela prouve le lemme.

Assertion b. La relation $(2p + 1 - n)\Phi_p^{n-1-p} * = *d\Phi_{n-1-p}$ découle du lemme fondamental et de (10), (11), (12) et (13), §4.2. On pose

$$\psi_p = \begin{cases} \Phi_p d, & p = 0, \dots, n-2 \\ d\Phi_{n-1}, & p = n-1. \end{cases}$$

Il faut montrer que le noyau de Ψ_p est l'espace des p -hyperformes fermées si $p \neq n-1$, exactes si $p \neq 0$, tandis que l'image de Ψ_p est l'espace des p -formes fermées et cofermées sur H^n .

La seule différence avec la preuve ci-dessus de l'assertion c) du théorème 2' est que les formes β_k sont toutes nulles.

5.2. *Preuve des théorèmes 3 et 3'*

Soit ω une p -hyperforme sur S^{n-1} . Développons-la en série de Fourier:

$$\omega = \sum (\alpha_k + \beta_k), \alpha_k \in (W^{p-1 \perp})_k, \beta_k \in (W^{p \perp})_k, k = 0, 1, \dots, \infty.$$

Rappelons que ω est un courant si et seulement si les suites $\|\alpha_k\|_2^2$ et $\|\beta_k\|_2^2$ sont à croissance polynômiale en k . Si c'est le cas, $\Phi_p^\lambda \omega$ est à croissance lente. On prouve cela aisément en majorant les $|F_{\lambda k}(\rho^2)|$ et $|F'_{\lambda k}(\rho^2)|$ uniformément par

rapport à k et en rappelant qu'il existe un polynôme f tel que:

$$\|\alpha_k\|_\infty + \|\beta_k\|_\infty \leq f(k)(\|\alpha_k\|_2 + \|\beta_k\|_2) \quad (22)$$

[26, 5.6].

Supposons maintenant que $\Phi_p^\lambda \omega$ croît lentement. On peut aussi supposer

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 0 \quad \text{si} \quad \Phi_p^\lambda d\alpha_k = 0 \\ \beta_k &= 0 \quad \text{si} \quad \Phi_p^\lambda \beta_k = 0. \end{aligned}$$

Montrons que ω est un courant.

En remplaçant ω par $\Phi_p^\lambda \omega$ dans les membres de droite de (20), en utilisant l'hypothèse sur la croissance de $\Phi_p^\lambda \omega$ ainsi que la relation (22), et en procédant comme on l'a fait pour déduire (21) de (20), on obtient:

$$\begin{aligned} k^{-l} |F_{\lambda k}(\rho^2)|^2 \|\alpha_k\|_2^2 \rho^{2k} &< (1 - \rho^2)^{-l} \\ 0 < \rho_0 < \rho < 1, \quad k > k_0, \end{aligned}$$

où l est un entier assez grand.

Le lemme que voici fournit la conclusion désirée.

LEMME 6. *Pour tout nombre complexe λ , il existe une suite $\rho_k \in]0, 1[$, $k = 1, 2, \dots$ et un entier positif q tels que:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^q (1 - \rho_k^2) = +\infty$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k^{2k} |F_{\lambda k}(\rho_k^2)|^2 (1 - \rho_k^2)^{-q} = +\infty.$$

Lewis a prouvé ce lemme pour $\lambda \notin (n - 1/2) + \mathbb{Z}$ [13, lemme 5.6]. Il suffit donc de le démontrer ici pour λ réel.

LEMME 7. *On a*

$$F_{\lambda-1,k}(z) = (1 - z)^{n-2\lambda} \left(\frac{2z}{k+n-\lambda} F'_{n-1-\lambda,k}(z) + F_{n-1-\lambda,k}(z) \right).$$

(Voir (9), §4.1 pour la définition de $F_{\lambda-1,k}$.)

Montrons le lemme 6 pour λ réel en admettant le lemme 7. Posons: $\rho_k^2 = 1 - 1/k$. On a alors $\rho_k^{2k} \geq 1/4$. Si $\lambda \geq n/2$ on a $F_{\lambda-1,k}(\rho^2) \geq 1$ car il s'agit d'une série dont le premier terme vaut 1 et les autres sont non négatifs. On peut donc prendre n'importe quel q , par exemple $q = 1$. Si $\lambda \leq n/2$ et $k \geq -\lambda$ on a, pour la même raison $F_{n-1-\lambda,k}(\rho^2) \geq 1$. Si de plus $k > \lambda - n$, on a aussi $(2\rho^2/\lambda + n - \lambda)F'_{n-1-\lambda,k}(\rho^2) \geq 0$. Le lemme 5 implique alors: $F_{\lambda-1,k}(\rho^2) \geq (1 - \rho^2)^{n-2\lambda}$. On peut choisir $q > 2n - 4\lambda$. Cela prouve le lemme 6.

Preuve du lemme 7. Les fonctions suivantes sont des solutions bornées en 0 des équations (ω) et (τ) du lemme 4 (§ 4.2)

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_{p-1}^{\lambda-1} = \rho^{p+k}(1 - \rho^2)^{\lambda-p}F_{\lambda-1,k}(\rho^2) \\ \tau &= \tau_p^\lambda = \rho^{p-1+k}(1 - \rho^2)^{\lambda-p}f_{\lambda k}^p(\rho) \\ \nu &= \nu_p^\lambda = \rho^{p-1+k}(1 - \rho^2)^{1+\lambda-p}F_{\lambda k}(\rho^2).\end{aligned}$$

Ces équations étant invariantes par la substitution $\lambda \rightarrow n - 1 - \lambda$, leurs solutions le sont aussi. On en déduit les relations:

$$\begin{aligned}(1 - z)^\lambda F_{\lambda k}(z) &= (1 - z)^{n-1-\lambda} F_{n-1-\lambda,k}(z) \\ (1 - \rho^2)^\lambda f_{\lambda k}^p(\rho) &= (1 - \rho^2)^{n-1-\lambda} f_{n-1-\lambda,k}^p(\rho).\end{aligned}$$

Supposons maintenant $\lambda = p$. On a alors, en vertu du lemme 4 (§4.2)

$$s\tau = D\nu = D \frac{\partial \tau}{\partial \rho}, \quad \text{et donc: } \left(D \frac{\partial}{\partial \rho} - s \right) \tau = 0.$$

On voit que les fonctions τ_p^p et ω_{p-1}^{p-1} définies ci-dessus vérifient la même équation et sont toutes deux bornées en 0. D'après (16) §4.2, elles sont donc multiples l'une de l'autre par un facteur facile à calculer. D'où

$$\omega_{p-1}^{p-1} = (p + k)\tau_p^p = (p + k)\tau_p^{n-1-p}.$$

Cela prouve la remarque 1 qui suit le lemme fondamental. On en déduit d'autre part après quelques calculs élémentaires

$$F_{p-1,k}(z) = (1 - z)^{n-2p} \left(\frac{2z}{k + n - p} F'_{n-1-p,k}(z) + F_{n-1-p,k}(z) \right).$$

Il s'agit d'une égalité entre deux séries entières en z dont les coefficients sont des

fonctions rationnelles de n , p et k – égalité qui est vraie pour tous les entiers n , p et k satisfaisant les conditions $n \geq 2$, $1 \leq p \leq n - 1$, $k \geq 0$. Il en résulte que cette égalité est vraie pour toutes les valeurs de n , p et k .

5.3. Preuve des théorèmes 4 et 4'

Identifions l'espace hyperbolique H^n à la boule unité B^n de \mathbb{R}^n . Soient p un entier compris entre 0 et $n - 1$, et λ un nombre complexe dont la partie réelle est inférieure à $(n - 1)/2$.

On va d'abord voir que pour prouver la théorème 4' (qui généralise le théorème 4), il suffit de montrer que les formes $2^{\lambda-p}(1-\rho^2)^{p-\lambda}\Phi_p^\lambda\alpha$ ont des valeurs au bord (dans les divers sens de l'énoncé) et de comparer, en adoptant la convention du §4.1, ces valeurs au bord avec les p -formes α .

Désignons respectivement par i_1 , i_2 et i_3 les isomorphismes obtenus à partir de (3), §2.2.1) en posant successivement:

- $U = B^n$ munie de la métrique hyperbolique et vue comme ouvert de ∂H^{n+1} ,
- $U = \mathbb{R}^n$ muni de sa métrique standard et vu comme ouvert de ∂H^{n+1} ,
- $U = S^{n-1}$ munie de sa métrique usuelle et vue comme (ouvert de) $\partial H^n = \partial B^n$.

Rappelons que le plongement j est défini par (6), §2.2.2. Définissons les plongements j_1 et j_2 en imposant que le diagramme ci-dessous commute. (On pose $s = \lambda - p$.) On vérifie alors les relations:

$$j_1(x, \zeta) = (x, 2^s(1 - \rho^2)^{-s}\zeta)$$

$$j_2(u, \zeta) = (u, \zeta).$$

$$\begin{array}{ccccc} B^n \times_s \mathbb{C} & \xrightarrow{j_1} & \mathbb{R}^n \times_s \mathbb{C} & \xleftarrow{j_2} & S^{n-1} \times_s \mathbb{C} \\ i_1 \downarrow & & i_2 \downarrow & & i_3 \downarrow \\ D_{n+1}^s | B^n & \longrightarrow & D_{n+1}^s | \mathbb{R}^n & \xleftarrow{j} & D_n^s \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B^n & \longleftarrow & \mathbb{R}^n & \longleftarrow & S^{n-1} \end{array}$$

En faisant les identifications induites par i_1 , i_2 , i_3 , j , j_1 et j_2 , on peut considérer que Φ_p^λ transforme des p -hyperformes sur S^{n-1} à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times_s \mathbb{C}$ en des p -formes sur B^n à valeurs dans le même fibré:

$$\Phi_p^\lambda: C^{-\omega}(\Lambda^p T^* S^{n-1}, \mathbb{R}^n \times_s \mathbb{C}) \rightarrow C^0(\Lambda^p T^* B^n, \mathbb{R}^n \times_s \mathbb{C}).$$

L'expression explicite des transformées $\Phi_p^\lambda\omega$ est alors obtenue, comme annoncé, en multipliant celle du lemme fondamental par $2^s(1 - \rho^2)^{-s}$.

Le noyau φ_p^λ est donc une $(p, n-1-p)$ -forme double invariante sur $B^n \times S^{n-1}$ à valeurs dans le fibré $(\mathbb{R}^n \times_s \mathbb{C}) \otimes (\mathbb{R}^n \times_s \mathbb{C})$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Remarque. L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times_s \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R}^n \times_{\text{Res}} \mathbb{C} \\ (x, \zeta) &\mapsto (x, |\zeta|) \end{aligned}$$

est équivariante.

Appelons *norme euclidienne* de $(x, \zeta) \in \mathbb{R}^n \times_s \mathbb{C}$ et désignons par $|(x, \zeta)|$ le nombre $|\zeta|$.

LEMME 8. *La norme euclidienne du noyau φ_p^λ est:*

$$|\varphi_p^\lambda| = a(1 - |x|^2)^{n-1-2\operatorname{Re}\lambda} |u - x|^{2(\operatorname{Re}\lambda + 1 - n)}, \quad (x, u) \in B^n \times S^{n-1}$$

où a est une constante.

Preuve. La remarque ci-dessus implique le fait suivant. Le noyau φ_p^λ étant invariant, sa norme se transforme par les isométries hyperboliques de B^n comme un vecteur du fibré $D_{n+1}^{\operatorname{Re}\lambda} \boxtimes D_{n+1}^{n-1-\operatorname{Re}\lambda}$ sur $B^n \times S^{n-1}$. Supposons $|\varphi_p^\lambda(0, u)| = a$, où u est un point de S^{n-1} . Soit x un point de $B^n \setminus \{0\}$. Choisissons un 2-plan hyperbolique de B^n contenant $0, x$ et u , et identifions-le au disque de Poincaré.

Soit g l'automorphisme biholomorphe du disque de Poincaré tel que $g0 = x$ et $gu = u$. On a alors:

$$|\varphi_p^\lambda(x, u)| = a |g'(0)|^{-\operatorname{Re}\lambda} |g'(u)|^{\operatorname{Re}\lambda - n + 1}.$$

Un calcul facile permet alors de conclure.

On prouve maintenant les assertions a) et b) des théorèmes 4 et 4'.

a) Soit α une p -forme mesurable essentiellement bornée sur S^{n-1} à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times_s \mathbb{C}$. Supposons que α est continue au point u de S^{n-1} et que $\operatorname{Re}\lambda < n - 1/2$, où $\lambda - p = s$. Montrons que $\Phi_p^\lambda \alpha$ s'étend continûment à $B^n \cup \{u\}$ et que sa valeur limite en u est $c \cdot \alpha(u)$, où c est une constante indépendante de α .

CAS 1. $\alpha(u) = 0$. L'exposant $n - 1 - 2\operatorname{Re}\lambda$ qui apparaît dans le lemme 6 étant positif, la norme euclidienne de $\varphi_p^\lambda(x, .)$ converge vers 0 lorsque x tend vers u uniformément sur tout compact de $S^{n-1} \setminus \{u\}$. En outre il est bien connu que la moyenne de $|\varphi_p^\lambda|$ sur S^{n-1} est la fonction $F_{\operatorname{Re}\lambda, -1}(|x|^2)$ qui est bornée sur B^n (ce

résultat est aussi contenu dans le lemme fondamental, §4.1). Un argument facile en ε, δ montre que $\Phi_p^\lambda \alpha$ tend vers 0 si x tend vers u .

CAS 2. $\alpha(u) \neq 0$. On choisit une forme β dans un sous-espace O_n -irréductible de V^p telle que $B(u) = \alpha(u)$. (Par exemple, si $u = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha(u) = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$, on prend pour β la forme de W_0^p obtenue en restreignant $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$ de \mathbb{R}^n à S^{n-1} .) D'après le lemme fondamental (assertion a)), il existe une constante c telle que la valeur limite de $\Phi_p^\lambda \beta$ en u soit $c \cdot \beta(u)$. En considérant la forme $\alpha - \beta$, on est alors ramené au cas 1.

b) Les seules différences avec la preuve du théorème 3.4 dans [15] sont les suivantes. Désignons par λ' le λ de [15] (et par λ notre λ). On a alors

$$\lambda' = i\left(\lambda - \frac{n-1}{2}\right).$$

Le noyau $P_{\lambda'}$ de [15] est remplacé par notre φ_p^λ . La norme euclidienne de φ_p^λ est, à un facteur constant non nul près, celle de $F_{\lambda, -1}(\rho^2)P_{\lambda'}$.

La valeur au bord d'une transformée par $P_{\lambda'}$ est exactement la fonction de départ, tandis que la valeur au bord d'une transformée par φ_p^λ est obtenue en multipliant la p -forme de départ par le facteur $C_p(\lambda)$, qui peut être nul. Mais aucune modification de la preuve de [15, Theorem 3.4] n'est nécessaire par cette différence.

Cela achève la preuve des théorèmes 4 et 4'.

6. Applications

6.1. Représentations

Désignons par \mathfrak{g} l'algèbre de Lie des isométries hyperboliques infinitésimales de la boule B^n , et par O_n (resp. SO_n) le groupe orthogonal (resp. spécial orthogonal) de \mathbb{R}^n . Les (\mathfrak{g}, O_n) -modules V^p et W^p ont été définis par (7), §4.1.

THÉORÈME 5. a) Si n est impair et $p < n - 1/2$, il existe un polynôme f unitaire à coefficients entiers et une constante rationnelle c tels que:

$$(\Phi_{n-1-p})^{-1} * d\Phi_p = c * f(*d*d). \quad (23)$$

b) Le module W^p est unitaire pour le produit scalaire invariant

$$(\alpha, \beta) \rightarrow (-1)^p \int_{S^{n-1}} \alpha \wedge \beta'$$

où β' est la conjuguée complexe d'une primitive de $(\Phi_{n-p})^{-1} * \Phi_p \beta$.

c) Si $p = (n - 1)/2$, on a $V^p = W^p \oplus *W^p$ avec W^p (et donc $*W^p$) (\mathfrak{g}, SO_n) -irréductibles. Dans les autres cas, les seuls sous-espaces (\mathfrak{g}, SO_n) -invariants non triviaux de V^p sont:

$$W^p \text{ si } p \neq \frac{n}{2}, \frac{n-2}{2},$$

W^p et les deux sous-espaces propres W^+ et W^- correspondant aux valeurs propres

± 1 de l'opérateur $i^p(\Phi_p)^{-1}*\Phi_p$ sur W^p ($i = (-1)^{1/2}$), si $p = \frac{n}{2}$,

W^p , $d^{-1}W^+$ et $d^{-1}W^-$ si $p = (n - 2)/2$ ($d^{-1}W^\pm$ est l'image inverse de W^\pm par la différentielle d).

d) $(\Phi_{n-p})^{-1}*\Phi_p$ est un (\mathfrak{g}, SO_n) -isomorphisme de W^p sur W^{n-p} . Si $q \neq p$, $n - p$, alors W^p et W^q ne sont pas SO_n -isomorphes.

Les racines de f sont

$$\left(\frac{n}{2} - p - 1\right)^2 - (m + \frac{1}{2})^2, \quad m = 0, 1, \dots, \frac{n-3}{2} - p.$$

La constante c est donnée par

$$c = (n - 1 - 2p) \frac{(p + 1)!}{(n - 1 - p)!}.$$

Il est remarquable que l'expression

$$*f(*d*d)$$

définisse un opérateur différentiel invariant.

Les propriétés de V^p et de ses (\mathfrak{g}, SO_n) -sous-modules énoncées ci-dessus sont des cas particuliers de résultats dûs à Thieleker [21, 22, 23]. La transformation de Poisson apporte cependant (dans ce cas particulier) des interprétations suggestives et permet de simplifier considérablement les preuves et surtout les énoncés de ces propriétés. Signalons toutefois une information supplémentaire intéressante contenue dans les papiers de Thieleker: parmi les sous-modules irréductibles qui apparaissent ici (et qui sont tous unitaires) seuls W^+ et W^- sont dans la série discrète.

Preuve du théorème 5. Rappelons la notation

$$(z)_k = z(z+1), \dots, (z+k-1),$$

et supposons Φ_p^λ inversible. D'après le lemme fondamental, on a

$$\begin{aligned} (\Phi_p^\lambda)^{-1} \Phi_p^{n-1-\lambda} \alpha &= a_k(\lambda) \alpha, & \alpha \in W_k^p \\ (\Phi_p^\lambda)^{-1} \Phi_p^{n-1-\lambda} \beta &= b_k^p(\lambda) \beta, & \beta \in (W^{p \perp})_k \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} a_k(\lambda) &= \frac{c_k^p(n-1-\lambda)}{c_k^p(\lambda)} = \frac{(\lambda+1)_k}{(n-\lambda)_k} \\ b_k^p(\lambda) &= \frac{\lambda-p}{n-1-\lambda-p} a_k(\lambda). \end{aligned}$$

Remarquons que $(\Phi_p^\lambda)^{-1} \Phi_p^{n-1-\lambda}$ est l'opérateur d'entrelacement de Kunze et Stein [25, 8.10, 8.11].

Soit β dans $(W^{p \perp})_k$. La forme $*\beta$ est dans W_k^{n-1-p} . En utilisant la relation figurant dans le théorème 2'(b) (§2.2.2), on obtient

$$(\Phi_{n-1-p})^{-1} * d\Phi_p \beta = (n-1-2p) \frac{p!}{(n-1-p)!} \frac{(k+n-1-p)!}{(k+p)!} * \beta. \quad (24)$$

Remarquons que si $n=2$ et $p=0$, l'opérateur ci-dessus n'est autre que la transformation de Hilbert.

On achève la preuve de a) par un calcul direct.

b) Soit β dans $(W^{p \perp})_k$. D'après (24), on a

$$\begin{aligned} (n-1-2p)(\Phi_{n-1-p})^{-1} * \Phi_{p+1} d\beta &= (n-1-p)(\Phi_{n-1-p})^{-1} * d\Phi_p \beta \\ &= (n-1-2p)c * \beta, \end{aligned}$$

où c est une constante positive. Soit $(d\beta)'$ une primitive de la conjuguée complexe de $(\Phi_{n-1-p})^{-1} * \Phi_{p+1} d\beta$. On a

$$(-1)^{p+1} \int d\beta \wedge (d\beta)' = c \int \beta \wedge * \beta \geq 0.$$

Cela montre que la forme hermitienne définie sous b) est définie positive, ce qui était la seule chose à vérifier.

c) Esquissons la preuve de c).

LEMME 9. *Le (\mathfrak{g}, SO_n) -module engendré par $(W^{p\perp})_0$ est V^p si $p \neq (n-1)/2$, et $*W^p$ si $p = (n-1)/2$. Le (\mathfrak{g}, SO_n) -module engendré par W_0^p est W^p .*

AFFIRMATION. Le noyau de Φ_{n-1-p} (intersecté avec V^p) est l'orthogonal du (\mathfrak{g}, SO_n) -module engendré par $(W^{p\perp})_0$ pour l'accouplement

$$V^p \times V^{n-1-p} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \int \alpha \wedge \beta.$$

Pour prouver cette affirmation, on commence par remarquer que les deux modules en question sont bien orthogonaux. Soit α une forme de V^{n-1-p} orthogonale au (\mathfrak{g}, SO_n) -module engendré par $(W^{p\perp})_0$. Montrons que $\Phi_{n-1-p}\alpha$ est nulle. Il suffit de voir que si η_1, \dots, η_m sont des isométries hyperboliques infinitésimales, alors $(\eta_1, \dots, \eta_m \Phi_{n-1-p}\alpha)(0) = 0$, car $\Phi_p\alpha$ est analytique. Soit ξ un vecteur de $\Lambda^{n-1-p}\mathbb{C}^n$ vu comme un $(n-1-p)$ -vecteur tangent à B^n en 0. D'après le lemme 1 (§3.1), on a

$$\langle \Phi_{n-1-p}\eta_1 \cdots \eta_m \alpha, \xi \rangle = \int \eta_1 \cdots \eta_m \alpha \wedge i_\xi \varphi_{n-1-p}.$$

Or le membre de droite est égal à

$$(-1)^m \int \alpha \wedge \eta_m \cdots \eta_1 i_\xi \varphi_{n-1-p}.$$

L'application $\xi \rightarrow i_\xi \varphi_{n-1-p}$ étant un isomorphisme de $\Lambda^{n-1-p}\mathbb{C}^n$ sur $(W^{p\perp})_0$ (voir [11, §4, §6]), l'affirmation est prouvée. On en déduit aisément la première phrase du lemme 9. La second phrase découle de la première et du fait que $d*W^{n-p} = W^p$ et $d(W^{p-1\perp})_0 = W_0^p$.

On prouve sans peine l'assertion c) du théorème 5 dans le cas $p \neq n/2$, $(n-1)/2$ en utilisant le lemme 9, le fait que les W^p sont unitaires, l'observation (8) (§4.1) et le fait que $(W^{q\perp})_k$ et W_k^{q+1} sont SO_n -irréductibles pour $q \neq (n-2)/2$ ([11, §4, §6]). Si $p = (n-2)/2$ ou $n/2$, la preuve est analogue.

d) L'assertion d) du théorème 5 résulte d'une inspection des O_n et SO_n -types intervenant dans W^p . Le théorème 5 est donc prouvé.

THÉORÈME 6. *Le module de Harish-Chandra X des $(n-1)/2$ -formes SO_n -finies harmoniques cofermées sur $H^n = B^n$ ne contient qu'un seul sous-module non trivial: celui des formes SO_n -finies fermées et cofermées. De plus, si Y est un module de la série principale du groupe des isométries de H^n préservant l'orientation, alors X ne se plonge pas dans Y .*

Preuve. Prouvons la première assertion. Posons $p = (n-1)/2$. On a la suite exacte:

$$0 \longrightarrow W^p \xrightarrow{\Phi_p} X \xrightarrow{(\Phi_{p+1})^{-1}d} W^{p+1} \longrightarrow 0. \quad (25)$$

Supposons par l'absurde qu'il existe un sous-espace (g, SO_n) -invariant non trivial S de X , avec $S \neq \Phi_p W^p$. Comme W^p et W^{p+1} sont irréductibles, on a: $X = \Phi_p W^p \oplus S$ avec $S \cong W^{p+1}$. Etant somme directe de deux modules unitaires, X admet un produit scalaire (g, SO_n) -invariant et donc un produit scalaire (g, O_n) -invariant. Ainsi, on peut supposer que S est (g, SO_n) -invariant. Vu que les composantes O_n -isotypiques de X sont irréductibles, on déduit du lemme fondamental (assertion a), §4.1) que les formes α de S sont caractérisées (parmi celles de X) par la condition:

$$i_{\partial/\partial\rho}\alpha = 0 \quad (i \text{ est le produit intérieur}).$$

Cela est impossible. En effet, soit g une isométrie hyperbolique. Si S était invariant, on aurait, pour tout α dans S :

$$i_{\partial/\partial\rho} g^{-1} \alpha = 0,$$

où $g^{-1} \alpha$ désigne l'action de g^{-1} sur α . D'où, avec le même type de notation:

$$i_{g(\partial/\partial\rho)}\alpha = 0.$$

C'est-à-dire $i_\xi\alpha = 0$ pour tout vecteur tangent ξ , et donc $\alpha = 0$.

Démontrons la deuxième assertion. Le module X contient le SO_n -type $\Lambda^p \mathbb{C}^n$, qui est SO_{n-1} -isomorphe à

$$\Lambda^p \mathbb{C}^{n-1,+} \oplus \Lambda^p \mathbb{C}^{n-1,-} \oplus \Lambda^{p-1} \mathbb{C}^{n-1}. \quad (26)$$

D'après la réciprocité de Frobenius, Y , en tant que SO_n -module, est induit par l'un des trois SO_{n-1} -modules ci-dessus. La somme des deux premiers modules induit V^p , qui est (g, SO_n) -isomorphe à $W^p \oplus W^p$. Il en résulte que chacun des

deux premiers termes de (26) induit W^p . Le troisième sommand induit V^{p-1} . D'après la suite exacte (25), le SO_n -type $\Lambda^p \mathbb{C}^n = W_0^p$ apparaît deux fois dans X , alors qu'il n'apparaît qu'une seule fois dans $Y = W^p$ ou V^{p-1} (voir [11, §4, §6]). Le théorème 6 est prouvé.

6.2. *Courants invariants*

Supposons maintenant que Γ est un sous-groupe discret co-compact du groupe des isométries de H^n . Désignons par b_p le p -ème nombre de Betti du quotient $\Gamma \backslash H^n$.

COROLLAIRE DU THÉORÈME 3. *Si $p \neq n - 1/2$ (resp. $p = (n - 1)/2$), les courants Γ -invariants sur ∂H^n forment un espace vectoriel de dimension b_p (resp. $2b_p$).*

Preuve. Au vu des théorèmes 2 et 3, il suffit de démontrer que b_p est la dimension de l'espace des p -formes harmoniques Γ -invariantes sur H^n . Si Γ agit librement sur H^n , la cohomologie de Čech et la cohomologie de de Rham de $\Gamma \backslash H^n$ sont isomorphes par le théorème de de Rham, et la cohomologie de de Rham est représentée, d'après le théorème de Hodge, par les formes harmoniques. On peut adapter la preuve de ces deux théorèmes au cas où l'action de Γ n'est pas libre. (Pour plus de détails, voir [2, §7, théorème H].) Cela achève la preuve du corollaire.

PROPOSITION. *Soit Γ un sous-groupe quasi-fuchsien de $PSL(2, \mathbb{C})$. Supposons que le quotient du domaine de discontinuité de Γ par Γ est formé de deux surfaces de Riemann compactes de genre g . Il existe alors au moins $4g$ courants linéairement indépendants de degré 1 sur S^{n-1} qui sont portés par le quasi-cercle limite et d'ordre au plus 1.*

Preuve. On peut définir une transformation de Poisson légèrement différente de la précédente de la façon suivante. Soit α un courant de degré 1 sur la sphère de Riemann S porté par le fermé Λ . Ce courant s'écrit de façon unique sous la forme $\alpha = F\alpha + C\alpha$ avec $F\alpha$ fermé et $C\alpha$ cofermé. Sur $S \backslash \Lambda$, on a: $F\alpha = -C\alpha$. Par régularité, $F\alpha$ est donc donné sur $S \backslash \Lambda$ par une 1-forme $\psi\alpha$ fermée et cofermée. Il est clair que ψ est équivariante par rapport aux transformations conformes préservant Λ . Supposons maintenant que Λ est le quasi-cercle limite du groupe Γ de l'énoncé, et soit β une 1-forme fermée et cofermée sur $S \backslash \Lambda$. Ces formes β constituent un espace de dimension $4g$. Il suffit donc de prouver qu'il existe un courant α satisfaisant les conditions de l'énoncé tel que $\psi\alpha = \beta$.

Observons d'abord qu'on peut réaliser Γ comme une déformation d'un groupe fuchsien par un homéomorphisme quasi-conforme f qui envoie conformément le

disque unité D du plan complexe sur l'une des deux composantes – notons-la Ω – de $S \setminus \Lambda$. On prouve cela en constatant que Γ est déterminé, à conjugaison près, par les surfaces de Riemann marquées qu'il représente (voir par exemple [3, p. 133]) et en procédant comme [5, p. 22].

Soit h une primitive de β . On peut supposer que β et donc h sont nulles en dehors de Ω . Comme on a $dh = \beta$, on a $df^*h = f^*\beta$ sur D . Vu que $f^*\beta$ est invariante par un groupe d'isométries hyperboliques admettant un domaine fondamental compact, sa norme hyperbolique est bornée. On a donc, si c est le segment géodésique de 0 au point z de D :

$$(f^*h)(z) = (f^*h)(0) + \int_c f^*\beta,$$

et l'intégrale est majorée, d'après l'inégalité fondamentale, par la distance (hyperbolique) de 0 à z multipliée par la norme (hyperbolique) de $f^*\beta$, qui est bornée. Cela implique que la norme euclidienne de f^*h ne croît pas plus vite que $-\log(1 - |z|)$. Il en résulte que h est intégrable sur \mathbb{C} . En effet, si f' désigne la dérivée de f sur D , alors $|f'|^2$, qui est en principe L^1 sur D , est en fait $L^{1+\varepsilon}$ pour un certain ε positif [13, p. 138]! Par suite $f^*h \cdot |f'|^2$ est bien L^1 .

Ainsi, h définit une distribution \tilde{h} sur S , $\tilde{\beta} = d\tilde{h}$ est un courant Γ -invariant qui étend β . On peut définir $(*\beta)^\sim$ de façon analogue. En posant $\alpha = \tilde{\beta} + (*\beta)^\sim$, on obtient le courant cherché.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. V. AHLFORS, *Complex Analysis*, 2ème édition, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokio, 1966.
- [2] W. L. BAILY, JR., *The Decomposition Theorem for V-manifolds*, Amer. J. of Math. 78 (1956), 862–888.
- [3] L. BERS, *Finite Dimensional Teichmüller Spaces and Generalizations*, The Mathematical Heritage of Henri Poincaré, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume 39 (1983), Part 1, 115–156.
- [4] H. BOERNER, *Representations of Groups*, 2ème édition, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1970.
- [5] C. J. EARLE, *Quasiconformal Mappings and Uniformization*, Lecture Notes in Math., Vol. 400, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1974, 15–23.
- [6] P. Y. GAILLARD, *Transformation de Poisson de formes différentielles et courants invariants*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 298, Série I, No 17, 1984.
- [7] P. Y. GAILLARD, *Transformation de Poisson de formes différentielles*, à paraître dans les Proceedings de l'Ecole d'Eté d'Analyse Harmonique de Tunis, 1984.
- [8] A. HAEFLIGER, *Some Remarks on Foliations with Minimal Leaves*, J. Differential Geometry 15 (1980), 269–284.
- [9] A. HAEFLIGER and LI BANGHE, *Currents on a Circle Invariant by a Fuchsian Group*, Lecture Notes in Math., Vol. 1007, Springer Verlag, Berlin and New York, 1983, 369–378.

- [10] S. HELGASON, *Eigenspaces of the Laplacian, Integral Representations and Irreducibility*, J. Funct. Anal. 17 (1974), 328–353.
- [11] A. IKEDA and Y. TANIGUCHI, *Spectra and Eigenforms of the Laplacian on S^n and $P^n(C)$* , Osaka J. Math. 15 (1978), 515–546.
- [12] M. KASHIWARA, A. KOWATA, K. MINEMURA, K. OKAMOTO, T. OSHIMA and M. TANAKA, *Eigenfunctions of Invariant Differential Operators on a Symmetric Space*, Ann. of Math. (2) 107 (1978), 1–39.
- [13] O. LEHTO, *Quasiconformal Homeomorphisms and Beltrami Equations*, in *Discrete Groups and Automorphic Functions*, édité par W. J. Harvey, Academic Press, London New York San Francisco, 1977, 121–142.
- [14] J. B. LEWIS, *Eigenfunctions on Symmetric Spaces with Distribution Valued Boundary Forms*, J. Funct. Anal. 29 (1978), 287–307.
- [15] H. L. MICHELSON, *Fatou Theorems for Eigenfunctions of the Invariant Differential Operators on Symmetric Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1973), 257–274.
- [16] K. MINEMURA, *Harmonic Functions on Real Hyperbolic Spaces*, Hiroshima Math. J. (1973), 121–151.
- [17] K. MINEMURA, *Eigenfunctions of the Laplacian on a Real Hyperbolic Space*, J. Math. Soc. Japan 27 (1975), 82–105.
- [18] T. OSHIMA and J. SEKIGUSHI, *Eigenspaces of Invariant Differential Operators on an Affine Symmetric Space*, Invent. Math. 57 (1980), 1–81.
- [19] G. DE RHAM, *Variétés Différentiables*, 3ème édition, Hermann, Paris, 1960.
- [20] W. SCHMID, *Boundary Value Problems for Group Invariant Differential Equations*, in *Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui*, Astérisque, No hors série (1985), 311–321.
- [21] E. THIELEKER, *On the Quasi-Simple Irreducible Representations of the Generalized Lorentz Groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 199 (1974), 327–367.
- [22] E. THIELEKER, *The Unitary Representations of the Generalized Lorentz Groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 179 (1973), 465–505.
- [23] E. THIELEKER, *On the Integrable and Square-Integrable Representations of Spin (1, 2m)*, Trans. Amer. Math. Soc. 230 (1977), 1–40.
- [24] W. THURSTON, *The Geometry and Topology of Three Manifolds*, Lecture Notes, Princeton University.
- [25] N. WALLACH, *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.
- [25] E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, *A Course of Modern Analysis*, Fourth Edition, University Press, Cambridge, 1952.

Section de mathématiques

Case postale 240

CH-1211 Genève 24

Présente adresse

Department of Mathematics

Harvard University

Cambridge, MA 02138, USA

Reçu le 28 février 1986