

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 61 (1986)

**Artikel:** Wann sind die Grunskyschen Koeffizientenbedingungen hinreichend für Q-quasikonforme Fortsetzbarkeit?  
**Autor:** Kühnau, Reiner  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46933>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Wann sind die Grunskyschen Koeffizientenbedingungen hinreichend für $Q$ -quasikonforme Fortsetzbarkeit?

Herrn Prof. Dr. Helmut Grunsky zum 80. Geburtstage gewidmet

REINER KÜHNAU<sup>(1)</sup>

## §1. Einleitung

Es sei  $w = w(z) \neq z$  eine durch

$$w(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (1)$$

hydrodynamisch normierte schlichte konforme Abbildung der Klasse  $\Sigma$ , die  $|z| > 1$  auf's Äußere  $\mathfrak{G}$  einer geschlossenen Jordankurve  $\mathfrak{C}$  transformiert. Wir setzen  $\mathfrak{C}$  als analytisch voraus (was allerdings für einzelne Schlußweisen nicht notwendig ist).  $\mathfrak{C}$  sei so orientiert, daß  $\mathfrak{G}$  zur Linken liegt. Der (kleinste nichttriviale nichtnegative) Fredholmsche Eigenwert von  $\mathfrak{C}$  sei  $\lambda \geq 1$  und  $\kappa = 1/\lambda$ . Wie üblich werden aus der Entwicklung

$$\log \frac{w(z) - w(z')}{z - z'} = - \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl} z^{-k} z'^{-l} \quad (2)$$

die "Grunsky-Koeffizienten"  $a_{kl}$  entnommen und hieraus  $C_{kl} = a_{kl} \sqrt{(kl)}$  gebildet. Bekanntlich [8], [14] gilt dann für jedes System komplexer Zahlen  $x_k$  mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \quad (3)$$

stets

$$\left| \sum_{k,l=1}^{\infty} C_{kl} x_k x_l \right| \leq \kappa \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2. \quad (4)$$

---

<sup>1</sup> Nach einem Vortrage im Mathematischen Kolloquium der Universität Zürich am 12.7.1984. Der Verf. dankt dem Forschungsinstitut für Mathematik der ETH Zürich für die freundliche Unterstützung.

Hierbei ist auf der rechten Seite  $\kappa$  nicht für alle derartigen Systeme  $x_k$  durch einen kleineren Faktor ersetzbar. Ist die Abbildung  $w(z)$  zusätzlich noch ins Innere von  $|z|=1$  hinein  $Q$ -quasikonform fortsetzbar, gehört also zur Klasse  $\Sigma(Q)$ , gilt nach [1]

$$\kappa \leq q \quad \text{mit} \quad q = (Q - 1)/(Q + 1), \quad (5)$$

so daß eine notwendige Bedingung für die  $Q$ -quasikonforme Fortsetzbarkeit lautet:

$$\left| \sum_{k,l=1}^{\infty} C_{kl} x_k x_l \right| \leq q \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \quad (6)$$

für alle (3) erfüllenden Systeme  $x_k$  (vgl. [6], [13], S.287 ff., [4], S.111). Jedoch ist (6) nach [8] nicht immer hinreichend für  $Q$ -quasikonforme Fortsetzbarkeit. Wir wollen die "inneren Gründe" hierfür aufhellen und für (also hier analytisch vorausgesetztes)  $\mathfrak{C}$  eine notwendige und hinreichende Charakterisierung derjenigen Fälle angeben, für die (6) hinreichend für  $Q$ -quasikonforme Fortsetzbarkeit ist. Diese Charakterisierung wird formulierbar in einer Bedingung an die nach H. Grötzsch "möglichst konforme" (nach O. Teichmüller auch "extremal quasikonforme") Fortsetzung unserer Abbildung nach  $|z| < 1$ . Diese möglichst konforme Fortsetzung, für die also die Maximaldilatation minimal ausfällt, existiert und ist (für also analytisches  $\mathfrak{C}$ ) eindeutig bestimmt nach [16], wobei sich die komplexe Dilatation durch ein quadratisches Differential beschreiben läßt mit endlicher Norm (d.h.: die Abbildung ist "teichmüllersch"). Diese also von  $\mathfrak{C}$  abhängende minimale Maximaldilatation sei  $q^*$ . Nach (5) gilt

$$\kappa \leq q^*, \quad (7)$$

und es folgt also aus (6) genau dann für die betreffende Abbildung  $w(z)$  stets (d.h. für alle in (6) möglichen Werte  $q$ ) die  $Q$ -quasikonforme Fortsetzbarkeit, wenn in (7) das Gleichheitszeichen steht.

Wir werden beweisen (vgl. Sätze 2 und 3), daß in (7) das Gleichheitszeichen genau dann vorliegt, wenn die möglichst konforme Fortsetzung von  $w(z)$  ein beschreibendes quadratisches Differential hat, welches nur Nullstellen gerader Ordnung innerhalb  $|z| < 1$  besitzt.

Da dieses Kriterium ziemlich implizit ist, geben wir noch eine mehr explizite Charakterisierung einiger Fälle mit Gleichheit in (7) an, wobei allerdings nur ein hinreichendes Kriterium herauspringt.

## §2. Die komplexen Eigenfunktionen von $\mathfrak{G}$

Nach Satz 5 in [7] (vgl. auch [5]) lassen sich die nichtnegativen nichttrivialen Eigenwerte  $\lambda_n$  (nicht nur der uns unten eigentlich allein interessierende kleinste solche  $\lambda$ ) so charakterisieren. Es gibt zu jedem solchen  $\lambda_n > 1$  und nur für diese Werte eine in  $\mathfrak{G}$  reguläre Funktion  $W_n(w) \not\equiv 0$  mit  $W_n(\infty) = 0$ , die eine stetige (notwendig orientierungsumkehrende, nicht notwendig schlichte) quasikonforme Fortsetzung  $W_n(w)$  ins Innere von  $\mathfrak{G}$  gestattet, für die  $W_n(w) - \lambda_n \bar{W}_n(w)$  regulär ist. Es ist dann jeweils  $\Re W_n(w)$  auf  $\mathfrak{G}$  Eigenfunktion im gewöhnlichen Sinne zum Neumannschen Kerne. Die Funktion  $W_m(w)$  wird komplexe Eigenfunktion von  $\mathfrak{G}$  genannt.

Der Zusammenhang der  $W_n(w)$  mit den in [3], S.71 ff. betrachteten Eigenfunktionen  $\varphi_n$  ergibt sich dort über (121) und (128): Diese  $\varphi_n$  stimmen bis auf einen konstanten Faktor mit den Funktionen  $W'_n(w)$  überein.

Die zum kleinsten Eigenwert  $\lambda > 1$  gehörige komplexe Eigenfunktion sei fürderhin  $W(w)$ .

Wir betrachten im folgenden wesentlich mit die Integraloperation

$$f^*(w) = \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{\mathfrak{G}} \frac{\overline{f(w)}}{w - w} dw, \quad (8)$$

die aus jedem in  $\mathfrak{G}$  regulären  $f(w)$  mit  $f(\infty) = 0$  eine daselbst reguläre Funktion  $f^*(w)$  mit  $f^*(\infty) = 0$  erzeugt. Für die Eigenfunktion  $W$  folgt aus der Regularität von  $W - \lambda \bar{W}$  innerhalb  $\mathfrak{G}$  sofort  $W^*(w) \equiv W(w)$ .

Nun entwickeln wir

$$W(w(z)) = i \sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}_k z^{-k} / \sqrt{k}. \quad (9)$$

Wegen der Regularität noch auf  $|z| = 1$  ist  $\sum |x_k|^2 < \infty$ .

Durch einfache Rechnung (vgl. hierzu auch [11]) ergibt sich mit den Faberschen Polynomen  $\Phi_k(w)$  zu  $\mathfrak{G}$  (vgl. [13], S.57)

$$\begin{aligned} W^*(w) &= -i \sum_{k=1}^{\infty} x_k (z^{-k})^* / \sqrt{k} = -\lambda i \sum_{k=1}^{\infty} x_k [z^k - \Phi_k(w)] / \sqrt{k} \\ &= \lambda i \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sqrt{k} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} z^{-k}. \end{aligned} \quad (10)$$



Ausnutzung von  $W^* \equiv W$  liefert durch Koeffizientenvergleich

$$\kappa \bar{x}_l = \sum_{k=1}^{\infty} C_{kl} x_k. \quad (11)$$

Hieraus folgt

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} C_{kl} x_k x_l = \kappa \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2. \quad (12)$$

Also stellt das System der  $x_k$  ein "Maximalsystem" zu (4) dar, d.h. realisiert dort das Gleichheitszeichen – vgl. hierzu auch [10].

Umgekehrt folgt aus (12) wie in [10] das System (11), so daß  $W(w)$  durch einfachen Rückschluß als eine komplexe Eigenfunktion zum Eigenwert  $\lambda$  erkannt werden kann. Damit haben wir den

**SATZ 1.** *Ist  $W(z)$  eine komplexe Eigenfunktion zum (kleinsten) Eigenwert  $\lambda$ , dann gilt*

$$W(w) = \begin{cases} i \sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}_k z^{-k} / \sqrt{k} & \text{für } w \text{ außerhalb } \mathfrak{G} (|z| \geq 1), \\ \frac{\lambda i}{1 - \lambda^2} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} x_k \Phi_k(w) / \sqrt{k} - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k \Phi_k(w)} / \sqrt{k} \right] & \\ \text{für } w \text{ innerhalb } \mathfrak{G}, \end{cases} \quad (13)$$

wobei  $x_k$  ein (11) bzw. (12) erfüllendes "Maximalsystem" ist. Stellen die  $x_k$  umgekehrt ein solches "Maximalsystem" dar, liefert (13) eine komplexe Eigenfunktion zu  $\lambda$ .

Die zweite Zeile in (13) ergibt sich noch, da für die erste Zeile auf  $\mathfrak{G}$  gilt

$$\begin{aligned} W(w) - \lambda \overline{W(w)} &= W^* - \lambda \bar{W} = \lambda i \sum_{k=1}^{\infty} x_k [\Phi_k(w) - z^k] / \sqrt{k} + \lambda i \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{z}^{-k} / \sqrt{k} \\ &= \lambda i \sum_{k=1}^{\infty} x_k \Phi_k(w) / \sqrt{k}. \end{aligned}$$

Es muß noch bemerkt werden, daß sich Satz 1 auch aus den fundamentalen, etwas anders aufgezogenen Überlegungen von M. Schiffer in [14] gewinnen läßt.

Man kann den Zusammenhang zwischen den komplexen Eigenfunktionen und der Ungleichung (4) noch unmittelbarer zum Ausdruck bringen, wenn man diese Ungleichung in eine äquivalente Form umgießt. Nach [6], S.96 gilt bei Benutzung eines Gedankens von P. R. Garabedian und M. Schiffer für jede auf  $\Gamma \equiv \{|z| = 1\}$  vorgegebene stetige Funktion  $\mu(z)$  als kontinuierlicher Grenzfall eines Verzerungssatzes vom Golusinschen Typ

$$\left| \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \mu(z) \mu(\xi) \log \frac{w(z) - w(\xi)}{z - \xi} dz d\xi \right| \leq -\kappa \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \overline{\mu(z)} \mu(\xi) \log \left( 1 - \frac{1}{\bar{z}\xi} \right) \overline{dz} d\xi \quad (14)$$

(jeweils zweimalige Kurvenintegration längs  $\Gamma$  auszuführen). Man erhält hieraus nach dem Residuensatz wieder (4) durch Einsetzen von

$$\mu(z) = i \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \bar{x}_k z^{k-1}, \quad (14')$$

falls diese Reihe einen Konvergenzradius  $>1$  hat.

Aus Satz 1 fließt somit

**SATZ 1'.** *Ist  $W(w)$  eine komplexe Eigenfunktion von  $\mathfrak{U}$  zum (kleinsten) Eigenwert  $\lambda$ , dann steht für  $\mu(z) = \frac{d}{dt} W(w(1/z))$  in (14) das Gleichheitszeichen. Steht umgekehrt dort für ein  $\mu$  des betrachteten Typs (14') das Gleichheitszeichen, dann ist  $e^{i\alpha} \cdot \int_0^{1/z(w)} \mu(\xi) d\xi$  eine komplexe Eigenfunktion zu  $\lambda$  (geeignetes reelles  $\alpha$ ).*

### §3. Zusammenhang des Problems der möglichst konformen Fortsetzung einer Abbildung aus $\Sigma$ mit dem Problem der möglichst konformen Abbildung bei gegebener Randabbildung nach Teichmüller und Strebel

Wir gehen zuerst aus von einer Abbildung  $w = w(z)$  der Klasse  $\Sigma(Q)$ . Das Innere von  $\mathfrak{U}$  werde konform auf's Innere des Einheitskreises einer  $\mathfrak{w}$ -Ebene schlicht konform abgebildet. Setzt man noch  $\mathfrak{w}(w)$  im Äußeren von  $\mathfrak{U}$  konform an z.B. mit  $\mathfrak{w}(w(z)) \equiv z$ , so entsteht (vgl. Abb.1) durch die Zusammensetzung  $\mathfrak{w} \rightarrow w \rightarrow z \rightarrow 1/\bar{z} \rightarrow w \rightarrow \mathfrak{w}$ , d.h. also durch die Funktion  $\mathfrak{w}(w(1/\bar{\mathfrak{w}}))$  eine  $Q$ -quasikonforme Abbildung von  $|\mathfrak{w}| \geq 1$  nach  $|\mathfrak{w}| \leq 1$ . Insbesondere wird so aus der analytischen Jordankurve  $\mathfrak{U}$  eine reell-analytische Abbildung mit nicht verschwindender Ableitung von  $|\mathfrak{w}| = 1$  auf  $|\mathfrak{w}| = 1$  erzeugt. Dazu wird außerdem durch

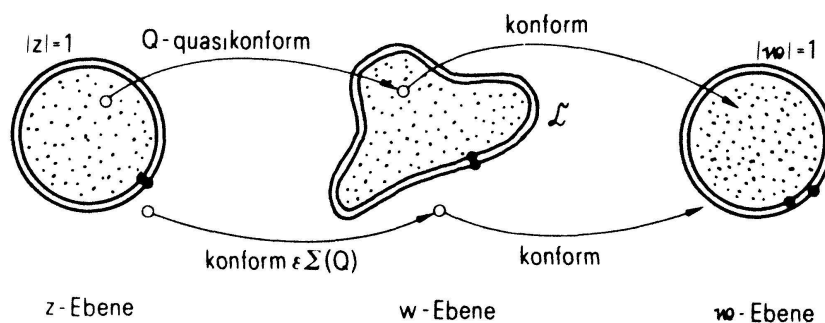


Abb. 1

$w(1/\overline{z(w)})$  eine  $Q$ -quasikonforme Spiegelung an  $\mathfrak{C}$  erzeugt. Da man alle Überlegungen auch umkehren kann und man von einer gegebenen reell-analytischen Abbildung mit nicht verschwindender Ableitung von  $|\mathfrak{w}| = 1$  auf  $|\mathfrak{w}| = 1$  durch konforme Verheftung rückwärts zu einer analytischen Jordankurve  $\mathfrak{C}$  gelangt, entsprechen sich die drei Abbildungen im folgenden Schema gegenseitig.<sup>(2)</sup>

*Schema:*

1.  $Q$ -quasikonforme Fortsetzung einer gegebenen für  $|z| \geq 1$  regulären und schlichten Abbildung aus  $\Sigma$ .
2.  $Q$ -quasikonforme Spiegelung an der gegebenen (analytischen) Jordankurve  $\mathfrak{C}$ .
3.  $Q$ -quasikonforme orientierungsumkehrende Abbildung des Äußeren des Einheitskreises auf's Innere bei vorgegebener (eindeutiger und orientierungserhaltender) reell-analytischer Randabbildung mit nicht verschwindender Ableitung.

Die Aufgabe der Bestimmung der möglichst konformen Fortsetzung bzw. Spiegelung bzw. Abbildung läßt sich also auch in dreifach äquivalenter Weise betrachten bzw. lösen. Insbesondere sind die bei den drei Zeilen des Schemas kleinstmöglichen  $Q$ -Werte identisch. Den mit dem minimalen  $Q$ -Wert gebildeten Ausdruck

$$q^* = (Q - 1)/(Q + 1)$$

kann man – was durch Zeile 2 des Schemas außerordentlich naheliegt – als

<sup>2</sup> Diese einfache Zuordnung läßt sich auch – was hier nicht weiter gebraucht wird – ohne die Voraussetzung der Analytizität von  $\mathfrak{C}$  herstellen: Bei gegebener Abbildung aus  $\Sigma(Q)$  bzw. zugehöriger Jordankurve (Quasikreis)  $\mathfrak{C}$  entsteht auf  $|\mathfrak{w}| = 1$  dann eine quasisymmetrische Abbildung, und aus einer solchen erhält man durch konforme Verheftung ein  $\mathfrak{C}$  (vgl. [12], S.96).

“Spiegelungskoeffizient” bezeichnen. Dieses “Kurvenfunktional” hat mit dem reziproken Fredholmschen Eigenwert manche Eigenschaft gemeinsam. Der Spiegelungskoeffizient ist z.B. auch invariant bei linearer Transformation und ist stets  $\geq 0$  bzw.  $< 1$  mit Gleichheit genau für einen Kreis  $\zeta$ . Gemäß (7) gilt stets

$$\text{reziproker Fredholmscher Eigenwert} \leq \text{Spiegelungskoeffizient} \quad (15)$$

Die zentrale Frage dieser Mitteilung ist die nach dem Gleichheitszeichen in (15).

Im Falle von Zeile 3 des Schemas wurden zur Frage nach den möglichst konformen Abbildungen entsprechend einer alten Problemstellung von O. Teichmüller grundlegende Ergebnisse seit der Arbeit [15] von K. Strebel erzielt. In dem hier nur betrachteten Falle analytischer Kurven  $\zeta$  ergibt sich aus [16] als ganz einfacher Spezialfall: Es gibt zu der gegebenen (analytischen) Randabbildung mit nicht verschwindender Ableitung genau eine möglichst konforme Abbildung  $w(w^*)$  von  $|w^*| > 1$  auf  $|w| < 1$ ; diese und nur diese läßt sich durch eine quadratisches Differential beschreiben. Das heißt: Es gibt eine für  $|w| < 1$  reguläre Funktion  $\mathfrak{Q}(w)$ , so daß infinitesimale Kreise durch  $w(w^*)$  in infinitesimale Ellipsen in  $|w| < 1$  mit konstantem Achsenverhältnis  $Q \geq 1$  übergehen, wobei die großen Achsen auf der Kurvenschar  $\Im \Phi(w) = \text{const}$  mit

$$\Phi(w) = \int \sqrt{\mathfrak{Q}(w)} dw \quad (16)$$

liegen (die Nullstellen von  $\mathfrak{Q}(w)$  dabei ausgenommen). Zudem gilt

$$\iint_{|w| < 1} |\Phi'(w)|^2 d\sigma < \infty \quad (d\sigma = \text{Flächenelement}). \quad (17)$$

Für diese Funktion  $\Phi(w)$  gilt noch zusätzlich der

**HILFSSATZ.** Falls  $\Phi(w)$  für  $|w| < 1$  regulär und auch eindeutig ist, dann sogar für  $|w| < R$  mit einem  $R > 1$ .

*Beweis.* Aus (17) ergibt sich bei  $\Phi(w) = \sum a_n w^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n |a_n|^2 < \infty \quad (18)$$

und also nach der Schwarzschen Ungleichung für  $|\mathfrak{w}| < 1$

$$\begin{aligned} |\Phi(\mathfrak{w})| &\leq |a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} |a_n| \cdot |\mathfrak{w}|^2 / \sqrt{n} \\ &\leq |a_0| + \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \cdot \log(1/(1 - |\mathfrak{w}|^2)) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Wir definieren nun in einem gewissen Ring  $1 < |\mathfrak{W}| < R$  die Funktion

$$\Psi(\mathfrak{W}) = \Phi(\mathfrak{w}(\mathfrak{W})) - \frac{1}{q} \overline{\Phi(\mathfrak{w}(\mathfrak{W}))} + \frac{1}{q} \overline{\Phi(1/\mathfrak{W})} \quad (20)$$

mit  $q = (Q - 1)/(Q + 1)$  (konstanter Betrag der komplexen Dilatation von  $\mathfrak{w}^*(\mathfrak{w})$ ). Dabei sei  $\mathfrak{w}(\mathfrak{W})$  eine solche die Einheitskreislinie punktweise festlassende orientierungsumkehrende schlichte quasikonforme Abbildung von  $1 < |\mathfrak{W}| < R$  ins Innere von  $|\mathfrak{w}| < 1$ , wobei der Betrag der komplexen Dilatation ebenfalls  $\equiv q$  ist und infinitesimale Kreise durch  $\Phi(\mathfrak{w}(\mathfrak{W}))$  in horizontal gelegene infinitesimale Ellipsen übergehen. (Die Existenz solcher Abbildungen ergibt sich wegen der vorausgesetzten Analytizität der Randabbildung aus  $\mathfrak{w}(\mathfrak{w}^*)$  durch zusätzliche schlichte konforme Abbildung eines äußeren Uferstreifens.) Es ist  $\Psi(\mathfrak{W})$  analytisch, da dies in (20) die Summe der ersten beiden Terme ist.

Wir weisen nun nach, daß die für  $1/R' < |\xi| < R'$  mit  $1 < R' < R$  als Cauchy-Integral reguläre Funktion von  $\xi$

$$\int_{|\mathfrak{W}|=R'} \frac{\Psi(\mathfrak{W})}{\mathfrak{W} - \xi} d\mathfrak{W} - \int_{|\mathfrak{w}|=1/R'} \frac{\Phi(\mathfrak{w})}{\mathfrak{w} - \xi} d\mathfrak{w} \quad (21)$$

(positive Orientierung der Integrationswege) innerhalb des Einheitskreises mit  $2\pi i \cdot \Phi(\xi)$ , außerhalb mit  $2\pi i \cdot \Psi(\xi)$  übereinstimmt. Dann wäre  $\Psi$  analytische Fortsetzung von  $\Phi$  und der Beweis des Hilfssatzes erbracht. Dies ergibt sich in der Tat nach der Cauchyschen Integralformel wegen  $(1 < R'' < R')$

$$\lim_{R'' \rightarrow 1} \left\{ \int_{|\mathfrak{W}|=R''} \frac{\Psi(\mathfrak{W})}{\mathfrak{W} - \xi} d\mathfrak{W} - \int_{|\mathfrak{w}|=1/R''} \frac{\Phi(\mathfrak{w})}{\mathfrak{w} - \xi} d\mathfrak{w} \right\} = 0. \quad (22)$$

Dies hinwiederum folgt aus dem gleichmäßigen Nach-Null-Streben der Differenz der Integranden, nachdem man  $\mathfrak{w} = (1/R'')e^{i\varphi}$ ,  $\mathfrak{W} = 1/\mathfrak{w} = R''e^{i\varphi}$  gesetzt

hat und diese Differenz als Funktion von  $\varphi$  betrachtet:

$$\Psi(\mathfrak{W}) \frac{i\mathfrak{W}}{\mathfrak{W} - \zeta} - \Phi(\mathfrak{w}) \frac{i\mathfrak{w}}{\mathfrak{w} - \zeta} = (\Psi - \Phi) \frac{i\mathfrak{W}}{\mathfrak{W} - \zeta} + i\Phi \cdot \frac{\zeta \cdot (\mathfrak{w} - \mathfrak{W})}{(\mathfrak{W} - \zeta)(\mathfrak{w} - \zeta)}.$$

Hier ist dieses Nach-Null-Streben beim zweiten Summanden sofort erkennbar wegen (19) und  $|\mathfrak{w} - \mathfrak{W}| = R'' - R''^{-1}$ . Beim ersten Summanden ergibt es sich aus (vgl. (20))

$$\begin{aligned} |\Psi(\mathfrak{W}) - \Phi(\mathfrak{w})| &\leq \left(1 + \frac{1}{q}\right) \cdot |\Phi(\mathfrak{w}(\mathfrak{W})) - \Phi(\mathfrak{w})| \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{q}\right) \left| \sum_{v=1}^n a_v (\mathfrak{w}(\mathfrak{W})^v - \mathfrak{w}^v) \right| \\ &\quad + \left(1 + \frac{1}{q}\right) \left| \sum_{v=n+1}^{\infty} \sqrt{v} a_v (\mathfrak{w}(\mathfrak{W})^v - \mathfrak{w}^v) / \sqrt{v} \right|. \end{aligned}$$

Hier tut dies nämlich bei festem  $n$  der erste Summand, während sich zuvor das Quadrat des zweiten Betrages durch die Schwarzsche Ungleichung abschätzen läßt durch

$$\begin{aligned} \sum_{v=n+1}^{\infty} v |a_v|^2 \cdot \sum_{v=n+1}^{\infty} |\mathfrak{w}(\mathfrak{W})^v - \mathfrak{w}^v|^2 / v &\leq \sum_{v=n+1}^{\infty} v |a_v|^2 \cdot |\mathfrak{w}(\mathfrak{W}) - \mathfrak{w}|^2 \\ &\times \sum_{v=n+1}^{\infty} v \cdot R^{*2v} \leq \sum_{v=n+1}^{\infty} v |a_v|^2 \cdot |\mathfrak{w}(\mathfrak{W}) - \mathfrak{w}|^2 \cdot R^{*2} (1 - R^{*2})^{-2}. \quad (23) \end{aligned}$$

Hiebei bezeichnet  $R^* < 1$  eine gemeinsame Schranke für  $|\mathfrak{w}|$  und  $|\mathfrak{w}(\mathfrak{W})|$ . Da sich  $\mathfrak{w}(1/\mathfrak{W})$  zu einer quasikonformen Abbildung der vollen Einheitskreisscheibe auf sich fortsetzen läßt (vgl. [12], S.100), die den Rand fest läßt, erhält man durch lineare Transformation der Einheitskreisscheibe in sich aus einem diesbezüglichen klassischen Teichmüllerschen Verschiebungssatze [17], S.704 ff. (hier nur qualitativ benötigt) leicht mit Konstanten  $c_1, c_2$  ( $0 < c_2 < 1$ ) diese Ungleichungen:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{w}(\mathfrak{W}) - \mathfrak{w}| &\leq c_1 \cdot (1 - |\mathfrak{w}|), \\ |\mathfrak{w}(\mathfrak{W})| &\leq |\mathfrak{w}| + c_2 \cdot (1 - |\mathfrak{w}|), \end{aligned}$$

so daß insbesondere  $R^* = |\mathfrak{w}| + c_2 \cdot (1 - |\mathfrak{w}|)$  gewählt werden kann und in (23) hinter  $\sum v |a_v|^2$  ein für  $|\mathfrak{w}| \rightarrow 1$  beschränkter Faktor steht.

Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

*Zusatzbemerkung.* Nach dem Hilfssatze besitzt  $\Phi(w)$  insbesondere auch für  $|w| \leq 1$  höchstens endlich viele Nullstellen, und abgesehen von diesen ist also die Umkehrabbildung  $w^*(w)$  von  $|w| \leq 1$  auf  $|w^*| \geq 1$  noch im Real- und im Imaginärteil reell-analytisch.

#### §4. Charakterisierung der Kurven $\mathfrak{C}$ bzw. Abbildungen $w(z)$ mit Gleichheit in (7)

Bei gegebener Abbildung  $w(z) \in \Sigma$  (bei  $w(z) \neq z$ ) mit analytischem  $\mathfrak{C}$  als Bild von  $|z| = 1$  existiert nach §3 eine eindeutig bestimmte möglichst konforme Fortsetzung nach  $|z| < 1$ , und diese wird durch ein quadratisches Differential  $\mathfrak{Q}(w) dw^2$  beschrieben. Dabei ist der Zusammenhang mit dem in §3 genannten quadratischen Differential zu Zeile 3 des Schemas natürlich gegeben durch  $\mathfrak{Q}(w) dw^2 = \mathfrak{Q}(w) d\mathfrak{w}^2$ .

Unser erstes Hauptresultat ist nun der

**SATZ 2.** *Wenn  $\mathfrak{Q}(w)$  im Bilde von  $|z| < 1$  keine oder nur Nullstellen gerader Ordnung hat, so daß*

$$\int \sqrt{\mathfrak{Q}(w)} dw \tag{24}$$

*eine dort eindeutige Funktion ist, dann steht in (7) das Gleichheitszeichen, d.h. dann folgt bei der Abbildung  $w(z)$  aus der Gültigkeit der Grunskyschen Koeffizientenbedingungen (6) für alle Systeme  $x_k$  die Existenz einer Q-quasikonformen Fortsetzung.*

*Beweis.* Wir definieren für  $|z| < 1$  noch die zunächst nur für  $|z| \geq 1$  vorliegende Abbildung  $w(z)$  durch die genannte möglichst konforme Fortsetzung. Deren Dilatation  $\geq 1$  sei  $Q^*$ . Im Äußeren von  $\mathfrak{C}$  entsteht dann durch (24), hier eingesetzt  $w(1/\overline{z(w)})$  (vgl. Abb. 1), eine nach dem Hilfssatze von §3 noch auf  $\mathfrak{C}$  stetige Fortsetzung der für's Innere von  $\mathfrak{C}$  erklärten und regulären Funktion (24). Diese Fortsetzung ist orientierungsumkehrend und transformiert infinitesimale Kreise in infinitesimale Ellipsen des Achsenverhältnisses  $Q^*$  und mit zur reellen Achse parallelen großen Achsen, so daß (24) mit dieser Fortsetzung im Sinne von §2 nach Affinität der Bildebene eine komplexe Eigenfunktion von  $\mathfrak{C}$  darstellt. Mithin stellt  $1/q^* = (Q^* + 1)/(Q^* - 1)$  einen Eigenwert von  $\mathfrak{C}$  dar, so daß  $\lambda \leq 1/q^*$  bzw.  $\kappa \geq q^*$  gilt. Wegen (7) gilt also  $\kappa = q^*$ , so daß in (7) das

Gleichheitszeichen steht. Der Rest der Behauptung ergibt sich aus den Erörterungen der Einleitung.

Der Satz 2 läßt sich wie folgt umkehren.

**SATZ 3.** Für die Abbildung  $w(z) \neq z$  bzw. die zugehörige analytische Kurve  $\mathfrak{C}$  stehe in (7) das Gleichheitszeichen, d.h. zu jedem  $q$  mit  $0 < q < 1$ , für das die Grunskyschen Koeffizientenbedingungen (6) für alle Systeme  $x_k$  gelten, existiere eine  $Q$ -quasikonforme Fortsetzung mit  $Q = (1+q)/(1-q)$ . Dann besitzt das quadratische Differential zur möglichst konformen Fortsetzung von  $w(z)$  im Innern von  $\mathfrak{C}$  nur Nullstellen gerader Ordnung (oder gar keine).

*Beweis.* Es ist  $\kappa = 1/\lambda$  also der Betrag der komplexen Dilatation der möglichst konformen Fortsetzung. Sei  $x_k$  ein "Maximalsystem" (vgl. §2) mit Gleichheit in (4), so daß also z.B.

$$\Re \sum_{k,l=1}^{\infty} C_{kl} x_k x_l = \kappa \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2.$$

Wir durchleuchten nun zu diesem festgehaltenen System  $x_k$  den Beweis in [13], S.289 ff. im Hinblick auf die Diskussion des Gleichheitszeichens. Falls dort in (21) Gleichheit besteht, dann auch in der Ungleichung in der Mitte von S.290. Es gilt also in der dortigen Bezeichnung für  $z \in D$

$$g_z s_w = \overline{\kappa g_z s_w}, \quad h_z = \overline{\kappa h_z}.$$

Letztere Differentialgleichung beinhaltet, daß tatsächlich die Abbildung beschrieben wird durch das quadratische Differential  $\mathfrak{Q}(w) dw^2 = (h'(w) dw)^2$ , welches wegen der Eindeutigkeit von  $h(w)$  nur Nullstellen gerader Ordnung besitzt.

Freilich muß bei der ganzen Überlegung nach [13] zunächst noch überlegt werden, daß diese auch für unendliche Systeme  $\lambda_k$  mit  $\sum |\lambda_k|^2/k < \infty$  gültig bleibt, falls – wie bei uns gegeben – die Bildkurve  $\mathfrak{C}$  analytisch ist. (In [3], S.289 ff. werden beim Grunskyschen Funktional nur endlich viele  $\lambda_k$  betrachtet.) In der Tat ergibt sich für solch einen Fall für die auftretenden Koeffizienten usw. ein problemloses Abklingen aus den Überlegungen in [10]. Darnach gilt mit einer Konstanten  $c > 0$  und bei einer Konstanten  $\rho$  mit  $0 < \rho < 1$  stets  $|x_k| \leq c \cdot \rho^k$ , also in den Bezeichnungen von [13]  $|\lambda_k| \leq c \sqrt{k} \rho^k$ . Ferner ist  $|C_{kl}| \leq \rho^{k+l}$ , also in den Bezeichnungen von [13]  $|b_{kl}| \leq \rho^{k+l}/\sqrt{kl}$ . Demnach folgt für die Faberschen Polynome  $\Phi_k(w)$  nach (11) auf S.58 in [13] für  $1 \leq |z| < R < 1/\rho$  die Ungleichung

$$|\Phi_k(w)| \leq |z|^k + k \sum_{l=1}^{\infty} \rho^{k+1} |z|^{-l}/\sqrt{kl} \leq R^k + \sqrt{k} \rho^k \sum_{l=1}^{\infty} \rho^l/\sqrt{l}.$$



Dies gilt nach dem Maximumprinzip dann auch für  $|z| < R$ . Daraus ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz der  $h(w)$  in [13] unter (16) definierenden Reihe für  $|z| < R$ . Es gilt (17) in [13] dadurch für  $1 \leq |z| < R$ , (18) gilt auch für unendlich viele solche  $\lambda_k$  usw.

Damit ist der Beweis von Satz 3 vollbracht.

## §5. Erläuterungen und Beispiele

a.) Durch Satz 3 sind wir in die Lage gesetzt, in üppiger Fülle Beispiele von Abbildungen  $w(z) \in \Sigma$  zu erzeugen, bei denen zwar (6) für alle Systeme  $x_k$  erfüllt ist, die aber nicht  $Q$ -quasikonform fortsetzbar sind. Nehmen wir z.B. die Abbildung

$$w(z) = z \cdot (1 + q^* z^{-n})^{2/n} \quad (25)$$

mit  $0 < q^* < 1$ ! Ganz analog wie im Spezialfalle  $n = 3$  [8] ist hier die möglichst konforme Fortsetzung anschreibbar, wobei der Spiegelungskoeffizient des zugehörigen  $n$ -fach symmetrischen  $\mathfrak{C}$  gleich  $q^*$  ist. Das zugehörige quadratische Differential hat nur eine Nullstelle in  $w = 0$ , und diese ist von der Ordnung  $n - 2$ . Also: Genau für gerade  $n$  gilt in (7) das Gleichheitszeichen. Der Fredholmsche Eigenwert der Kurve  $\mathfrak{C}$  ist also für gerade  $n$  gleich  $1/q^*$ , während er für ungerade  $n$  größer ist. (Der genaue Wert ist für ungerade  $n$  unbekannt, kann allerdings nach [10] numerisch mit beliebiger Genauigkeit und Fehlerabschätzung berechnet werden; in [10] Genauerer für  $n = 3$ .) Welch ein merkwürdiger Unterschied zwischen geraden und ungeraden  $n$  liegt hier vor!

b.) Man kann so weitere Beispiele konstruieren, bei denen das quadratische Differential Nullstellen ungerader Ordnung besitzt. Man gehe aus von einem solchen quadratischen Differential in der Einheitskreisscheibe und führe eine Beltramiabbildung auf's Äußere des Einheitskreises (in der  $w$ -Ebene) so durch, daß infinitesimale Ellipsen konstanten Achsenverhältnisses, wobei die großen Achsen auf den Trajektorien des quadratischen Differentials liegen, in infinitesimale Kreise übergehen. Die gemäß dem Schema des §3 über konforme Verheftung entstehende zugehörige Abbildung  $\in \Sigma$  leistet dann das Verlangte. So kann man z.B. Beispiele konstruieren, die zeigen, daß die Bedingung (6) auch nicht etwa für ungerade Abbildungen immer hinreichend für  $Q$ -quasikonforme Fortsetzbarkeit ist.

c.) Die Frage nach dem Gleichheitszeichen in (7) für nichtanalytische Kurven

$\mathfrak{C}$  bleibt hier völlig ungeklärt. Immerhin sind Beispiele von nichtglatten Kurven  $\mathfrak{C}$  mit Gleichheit in (7) bekannt: Nach [10] tut dies z.B. eine Quadratlinie  $\mathfrak{C}$ .

d.) Im Anschluß an [9] definieren wir  $\Sigma(\kappa)$  (Modifizierung der Bezeichnung  $\Sigma(Q)$ ) als die Teilklasse der Abbildungen aus  $\Sigma$ , bei denen eine  $Q$ -quasikonforme Fortsetzung nach  $|z| < 1$  möglich ist mit  $\kappa = (Q - 1)/(Q + 1)$ ,  $\Sigma\langle\kappa\rangle$  als die Teilklasse der Abbildungen aus  $\Sigma$ , bei denen  $|z| = 1$  in eine Jordankurve übergeht, deren Fredholmscher Eigenwert  $\geq 1/\kappa$  ist. Dabei ist  $\Sigma(\kappa) \subset \Sigma\langle\kappa\rangle$  und  $\Sigma(\kappa) \neq \Sigma\langle\kappa\rangle$ .

Nun sei für diese Abbildungen ein reelles Funktional  $\mathfrak{F}(w)$  erklärt. Dann gilt

$$\sup_{w \in \Sigma(\kappa)} \mathfrak{F}(w) \leq \sup_{w \in \Sigma\langle\kappa\rangle} \mathfrak{F}(w). \quad (26)$$

Wir fragen: Wann steht hier das Gleichheitszeichen, d.h., wann besitzt das Extremalproblem  $\mathfrak{F}(w) \rightarrow \max$  in den beiden Teilklassen die gleiche Lösung?

Unsere obigen Überlegungen ermöglichen eine Teilantwort in Form der folgenden *notwendigen Bedingung*: Wenn (bei  $0 < \kappa < 1$ )

- (i) in (26) das Gleichheitszeichen steht,
- (ii) die Extremalfunktionen zu  $\mathfrak{F}(w) \rightarrow \max$  in  $\Sigma(\kappa)$  durch ein quadratisches Differential (in Grötzsch-Teichmüllerscher Manier, wie z.B. bei Koeffizientenproblemen) beschrieben werden, wobei der Betrag der komplexen Dilatation  $\kappa$  ist,
- (iii) bei den entsprechenden Extremalfunktionen in  $\Sigma\langle\kappa\rangle$  das Bild von  $|z| = 1$  jeweils den Fredholmschen Eigenwert  $1/\kappa$  hat,

dann kann das quadratische Differential im Bilde von  $|z| < 1$  höchstens Nullstellen gerader Ordnung besitzen.

Denn: Die Extremalfunktionen in  $\Sigma(\kappa)$  sind dann auch Extremalfunktionen in  $\Sigma\langle\kappa\rangle$ , d.h. für die Extremalfunktionen von  $\Sigma(\kappa)$  steht in (7) das Gleichheitszeichen, so daß nach Satz 3 nur Nullstellen gerader Ordnung im Bilde von  $|z| < 1$  auftreten können.

So ergibt sich das schon in [9] bemerkte Phänomen, daß die Ungleichung  $|a_2| \leq (2/3)\kappa$  in  $\Sigma(\kappa)$  für den in (1) auftretenden Koeffizienten  $a_2$  nicht auch in der Klasse  $\Sigma\langle\kappa\rangle$  gelten kann (also auch nicht mit den Grunskyschen Koeffizientenbedingungen der Klasse  $\Sigma(\kappa)$  allein bewiesen werden kann). Denn in  $\Sigma(\kappa)$  werden die Extremalfunktionen durch (25) und die hieraus durch Drehung entstehenden Funktionen mit  $n = 3$  gegeben, und hier besitzt das quadratische Differential im Bilde von  $|z| < 1$  in  $w = 0$  eine einfache Nullstelle. Man kann so sofort weitere Extremalprobleme z.B. bezüglich Koeffizienten angeben, bei denen das gleiche Phänomen auftritt.

## §6. Ein hinreichendes Kriterium

Man muß zugeben: Die durch die Sätze 2 und 3 gegebene notwendige und hinreichende Bedingung an die Abbildung  $w(z) \in \Sigma$  für Gleichheit in (7) ist ziemlich implizit, da man das Verhalten des zugehörigen quadratischen Differentials nicht unmittelbar an der Abbildung  $w(z)$  bzw. an  $\mathfrak{U}$  erkennen kann. Wir wollen uns deshalb weiters anheischig machen, noch eine – zugegeben nun wieder ziemlich grobe – hinreichende Bedingung herzuleiten, die leichter nachprüfbar ist.

Nach [9] (Satz 7) gilt sicher dann Gleichheit in (7), wenn die komplexe Eigenfunktion (9) für  $|z| > 1$  schlicht ist. Das führt uns zu

**SATZ 4.** *Es gilt sicher dann Gleichheit in (7), wenn die betreffende Abbildung  $w(z) \in \Sigma$  nach  $|z| > \rho$  ( $\rho < 1$ ) analytisch und schlicht fortsetzbar ist, wobei mit*

$$\Psi(\rho) = \left[ \left( \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \sqrt{n+2} \right)^2 + (1 - \rho^2)^{-1} \right] \rho^6 / (1 - \rho^2) \quad (27)$$

*gilt*

$$\Psi(\rho) \leq \kappa^2 \quad (28)$$

*Beweis.* Nach einem ganz primitiven Kriterium (vgl. z.B. [13], S.44) ist (9) sicher dann für  $|z| > 1$  schlicht, wenn

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n} |x_n| \leq |x_1|. \quad (29)$$

Zur Vereinfachung der Schreibung sei ferner o.E.d.A.  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = 1$ . Nach [10] (dort (12)) gilt für  $w(z)$  bei Voraussetzung der im Satze genannten “ $\rho$ -Bedingung”

$$\sqrt{n} |x_n| \leq \kappa^{-1} \sqrt{n} \rho^{n+1} (1 - \rho^2)^{-1/2}, \quad (30)$$

also

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n} |x_n| \leq \kappa^{-1} (1 - \rho^2)^{-1/2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n} \rho^{n+1}, \quad (31)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^2 \leq \kappa^{-2} \sum_{n=2}^{\infty} \rho^{2n+2} / (1 - \rho^2). \quad (32)$$

Damit ist (29) sicher wegen (31), (32) erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} \kappa^{-1}(1-\rho^2)^{-1/2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n} \rho^{n+1} \\ \leq \left[ 1 - \kappa^{-2} \sum_{n=2}^{\infty} \rho^{2n+2}/(1-\rho^2) \right]^{1/2} \leq \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^2 \right]^{1/2} = |x_1|. \end{aligned}$$

Diese Bedingung – etwas umgeschauelt – liefert (28).

*Erläuterungen und Folgerungen.* a.) Wegen der auf M. Schiffer zurückgehenden Ungleichung  $\kappa \leq \rho^2$  (vgl. [9]) kann (28) nur erfüllbar sein, wenn für die (monoton steigende) Funktion  $\Psi(\rho)/\rho^4$  gilt  $\Psi(\rho)/\rho^4 \leq 1$ , was zu  $\rho \leq 0,352$  führt. Für größere  $\rho$  ist Satz 4 also wertlos.

b.) Es gilt  $\Psi(\rho)/\rho^6 \geq 3$ , weil  $\Psi(\rho)/\rho^6$  auch monoton steigend ist und den Grenzwert 3 für  $\rho \rightarrow 0$  besitzt.

Für das Beispiel der Funktion (25) mit  $n=3$  ist  $\kappa^2 > (8/9)\rho^6$ ; also ist jedenfalls – wie es sein muß – die Bedingung (28) nicht erfüllt.

c.) Man kann durch weitere geringe Vergrößerung die Bedingung (28) noch in eine leichter nachprüfbare Form bringen, die nicht mehr die (i. allg. schwer bestimmbare) Größe  $\kappa$  enthält. Wegen  $\sum n |a_n|^2 \leq \kappa^2$  [8] ist nämlich statt (28) auch

$$\Psi(\rho) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \quad (33)$$

hinreichend für Gleichheit in (7), oder auch einfach  $\Psi(\rho) \leq |a_1|^2$ . Diese Bedingung ist z.B. erfüllt für kreisnahe Ellipsen  $\mathfrak{E}$ .

d.) In [9] (dort nach Satz 4) war u.a. die Frage aufgeworfen worden, ob aus  $w(z) \in \Sigma$  bei  $0 < \rho < 1$  stets folgt  $\rho w(z/\rho) \in \Sigma(\rho^2)$ . In dieser Richtung ergibt sich jetzt aus dem bei (33) Stehenden wegen  $\rho w(z/\rho) = z + a_1 \rho^2/z + \dots$  und weil der  $\kappa$ -Wert dieser Abbildung nach [9] (dort Satz 4)  $\leq \rho^2$  ist: Es gilt sicher dann  $\rho w(z/\rho) \in \Sigma(\rho^2)$ , wenn  $\Psi(\rho) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \rho^{2n+2}$  gilt, was bei jeder Abbildung mit  $a_1 \neq 0$  zumindest für hinreichend kleine  $\rho$  erfüllt ist.

e.) Es sei nun  $w(z) = z + a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots \neq z$  eine für  $|z| > 1$  schlichte konforme Abbildung, bei der  $w=0$  kein Bildpunkt ist. Dann ist bei hinreichend kleinen positiven  $\rho$  bei  $a_0 \neq 0$  (z.B. für  $\Psi(\sqrt{\rho}) \leq |a_0|^2 \rho^2/4$ ) die Abbildung  $\rho \cdot w(z/\rho) = z + \rho a_0 + \rho^2 a_1/z + \dots$  für  $|z| > 1$  ebenfalls schlicht und ins Komplement quasikonform fortsetzbar mit  $w(0)=0$ , wobei der Betrag der komplexen Dilatation  $\leq \rho$  ist. Denn auf  $\sqrt{w(z^2)} = z + (a_0/2)z^{-1} + \dots \neq z$  ist das oben unter d. Angegebene anwendbar, und die dort bei  $\sqrt{\rho} \cdot \sqrt{w((z/\sqrt{\rho})^2)}$

entstehende quasikonforme Fortsetzung (mit dem Betrag der komplexen Dilatation  $\leq \rho$ ) muß wegen der eindeutigen Bestimmtheit zentrisch symmetrisch zum Nullpunkt sein, diesen also festhalten.

Durch Stürzung erhalten wir hieraus folgende Teilantwort auf eine in [2] unter 6.79 auf S.560 gestellte Frage: Wenn  $W(Z) = Z + B_2 Z^2 + \dots$  eine Abbildung der Klasse  $S$  ist, dann für hinreichend kleine positive  $\rho$  bei  $B_2 \neq 0$  (z.B. für  $\Psi(\sqrt{\rho}) \leq |B_2|^2 \rho^2/4$ ) auch  $W(\rho Z)/\rho$ , wobei nach  $|Z| > 1$  mit  $W(\infty) = \infty$  eine quasikonforme Fortsetzung mit Betrag der komplexen Dilatation  $\leq \rho$  existiert.

### §7. Verhalten der Größen $\kappa$ und $q^*$ bei Quadratwurzeloperation

In der  $w$ -Ebene liege eine geschlossene analytische Jordankurve  $\zeta_w$  vor, die  $w = 0$  im Innern enthält und zentrisch symmetrisch zu  $w = 0$  ist. Durch  $\mathfrak{w} = w^2$  entsteht dann eine Jordankurve  $\zeta_{\mathfrak{w}}$ . Für die zugehörigen Spiegelungskoeffizienten  $q_w^*$  bzw.  $q_{\mathfrak{w}}^*$  (vgl. §3) gilt dann

$$q_{\mathfrak{w}}^* \leq q_w^* \quad (34)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn in der  $w$ -Ebene die möglichst konforme Spiegelung an  $\zeta_w$  beschreibende quadratische Differential in  $w = 0$  eine Nullstelle besitzt (notwendig von gerader Ordnung).

Denn: Die möglichst konforme Spiegelung an  $\zeta_w$  ist eindeutig bestimmt, also zentrisch symmetrisch (so daß insbesondere in  $w = 0$  eine Nullstelle gerader Ordnung bzw. gar keine vorliegt), so daß vermöge  $\mathfrak{w} = w^2$  die entsprechende möglichst konforme Spiegelung an  $\zeta_{\mathfrak{w}}$  entsteht, wenn nicht in  $w = 0$  keine Nullstelle vorliegt. Im letzten Falle erhält man nämlich für die so entstehende Spiegelung an  $\zeta_{\mathfrak{w}}$  einen Pol erster Ordnung, so daß diese Spiegelung nicht möglichst konform sein kann nach den einschlägigen Strebelschen Sätzen.

Als Gegenstück zu (34) gilt für die  $\kappa$ -Werte von  $\zeta_{\mathfrak{w}}$  und  $\zeta_w$  auch

$$\kappa_{\mathfrak{w}} \leq \kappa_w. \quad (35)$$

Dies ergibt sich z.B. über die Definition des Fredholmschen Eigenwertes über den Quotienten aus den Dirichletschen Integralen für außerhalb bzw. innerhalb der betreffenden Kurve harmonische Funktionen, die auf der Kurve übereinstimmen. Denn ein solches System harmonischer Funktionen bei  $\zeta_{\mathfrak{w}}$  gibt vermöge  $w = \sqrt{\mathfrak{w}}$  Anlaß zu einem System bei  $\zeta_w$ , woraus sich wegen der Invarianz der Dirichletschen Integrale bei konformer Abbildung (35) ergibt.

Die Diskussion des Gleichheitszeichens bei (35) ist freilich nicht so einfach wie bei (34). Immerhin können wir mit Hilfe von Satz 2 hierzu folgendes sagen:

(i) Es ist  $\kappa_{\text{iv}} < \kappa_w$ , wenn das quadratische Differential in  $w=0$  keine Nullstelle besitzt und ansonsten innerhalb  $\mathfrak{U}_w$  höchstens Nullstellen gerader Ordnung. Denn dann ist  $\kappa_{\text{iv}} \leq q_{\text{iv}}^*$ , sowie  $q_w^* = \kappa_w$  nach Satz 2. Aber nach dem nach (34) Gesagten gilt  $q_{\text{iv}}^* < q_w^*$ .

(ii) Es ist  $\kappa_{\text{iv}} = \kappa_w$ , wenn das quadratische Differential in  $w=0$  eine Nullstelle einer Ordnung der Form  $4k+2$  ( $k \geq 0$  ganze Zahl) hat und ansonsten innerhalb  $\mathfrak{U}_w$  höchstens Nullstellen gerader Ordnung. (Diese Voraussetzung liegt z.B. vor, wenn das quadratische Differential innerhalb  $\mathfrak{U}_{\text{iv}}$  keine Nullstelle hat.) Denn dann gilt  $q_{\text{iv}}^* = q_w^*$  nach dem hinter (34) Bemerkten, sowie  $\kappa_w = q_w^*$  und  $\kappa_{\text{iv}} = q_{\text{iv}}^*$  nach Satz 2 (letzteres, da auch innerhalb  $\mathfrak{U}_{\text{iv}}$  nur Nullstellen gerader Ordnung auftreten können, in  $\text{iv}=0$  speziell von der Ordnung  $2k$ ).

(iii) Als Kontrast zu (ii) erwähnen wir noch das Beispiel der Kurve  $\mathfrak{U}_w$ , die sich vermöge (25) mit  $n=6$  ergibt. Hier haben wir in  $w=0$  eine Nullstelle 4. Ordnung beim quadratischen Differential, und tatsächlich gilt hier für das zugehörige dreifach symmetrische  $\mathfrak{U}_{\text{iv}}$  nach [8] (vgl. oben die Bemerkungen unter §5.a)  $\kappa_{\text{iv}} < \kappa_w$ .

(iv) Noch ein Beispiel einer nicht analytischen Jordankurve  $\mathfrak{U}_w$  mit Gleichheit in (35):  $\mathfrak{U}_w = \text{Quadratlinie}$ . Hier gilt nach [10]  $\kappa_w = \kappa_{\text{iv}} = 1/2$ .

## LITERATUR

- [1] AHLFORS, L. V., *Remarks on the Neumann–Poincaré integral equation*. Pacif. J. Math. 2, 271–280 (1952).
- [2] *Aspects of Contemporary Complex Analysis*. London 1980.
- [3] BERGMAN, S., *The kernel function and conformal mapping*. 2. Aufl., Providence 1970.
- [4] KRUSCHKAL, S. L. und R. KÜHNAU, *Quasikonforme Abbildungen – neue Methoden und Anwendungen*. Leipzig 1983. – In Russisch: Novosibirsk 1984.
- [5] KRZYŻ, J. G., *Conjugate holomorphic eigenfunctions and extremal quasiconformal reflection*. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A.I. Math. 10, 305–311 (1985).
- [6] KÜHNAU, R., *Verzerrungssätze und Koeffizientenbedingungen vom GRUNSKYschen Typ für quasikonforme Abbildungen*. Math. Nachr. 48, 77–105 (1971).
- [7] —, *Eine Integralgleichung in der Theorie der quasikonformen Abbildungen*. Math. Nachr. 76, 139–152 (1977).
- [8] —, *Zu den Grunskyschen Koeffizientenbedingungen*. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I. Math. 6, 125–130 (1981).
- [9] —, *Quasikonforme Fortsetzbarkeit, Fredholmsche Eigenwerte und Grunskysche Koeffizientenbedingungen*. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I. Math. 7, 383–391 (1982).
- [10] —, *Zur Berechnung der Fredholmschen Eigenwerte ebener Kurven*. ZAMM 66, 193–200 (1986).
- [11] —, *Entwicklung gewisser dielektrischer Grundlösungen in Orthonormalreihen*. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I. Math. 10, 313–329 (1985).
- [12] LEHTO, O. und K. I. VIRTANEN, *Quasikonforme Abbildungen*. Berlin–Heidelberg–New York 1965.

- [13] POMMERENKE, CHR., *Univalent functions, with a chapter on quadratic differentials* by GERD JENSEN. Göttingen 1975.
- [14] SCHIFFER, M. M., *Fredholm eigenvalues and Grunsky matrices*. Ann. Polon. Math. 39, 149–164 (1981).
- [15] STREBEL, K., *Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises*. Comm. Math. Helv. 36, 306–323 (1962).
- [16] —, *On the existence of extremal Teichmueller mappings*. J. d'Analyse Math. 30, 464–480 (1976).
- [17] TEICHMÜLLER, O., *Gesammelte Abhandlungen*. Berlin–Heidelberg–New York 1982 (auch in: Deutsche Math. 7, 336–343 (1944)).

*Sektion Mathematik der Martin Luther Universität  
Halle-Wittenberg  
DDR-402 Halle an der Saale  
Deutsche Demokratische Republik*

Erhalten 2. Mai 1985