

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	61 (1986)
<b>Artikel:</b>	Sur la mulitplicité de la première valeur propre non nulle du Laplacien.
<b>Autor:</b>	Colin de Verdière, Yves de
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-46930">https://doi.org/10.5169/seals-46930</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du Laplacien

YVES COLIN DE VERDIÈRE

L'objet de cet article est de prouver le:

**THEOREME.** *Si  $X$  est une variété compacte de dimension  $\geq 3$  et  $N$  un entier arbitraire, il existe sur  $X$  des métriques riemanniennes dont la première valeur propre non nulle du laplacien est de multiplicité  $N$ .*

*Remarque.* Il résulte de la construction qu'on peut choisir la métrique sans isométries non triviales.

Pour situer ce résultat, rappelons que, dans le cas des surfaces, la multiplicité de la première valeur propre non nulle du laplacien (et en fait de tout opérateur différentiel elliptique autoadjoint du second ordre réel opérant sur les fonctions) est majorée en fonction du genre de la surface ([CG] et [BN]). D'autre part, dans le cas de  $S^3$ , la multiplicité pour la métrique usuelle est 4, mais on connaît des exemples ([UA], [B-B]) où elle vaut 7. L'idée de départ vient d'Arnold ([AD]): dans une famille de formes quadratiques dépendant d'un certain nombre de paramètres, l'apparition de valeurs propres multiples pour certaines valeurs du paramètre est un phénomène stable.

Le résumé de la démonstration est le suivant: on munit le graphe complet à  $N$  sommets,  $\Gamma_N$ , d'une métrique riemannienne (singulière aux sommets) en définissant la longueur de chaque arête. On désigne par  $\gamma_0$  la métrique pour laquelle toutes ces arêtes ont une longueur égale à 1. On peut associer à chacune de ces métriques sur  $\Gamma_N$  un laplacien naturel et on montre que la première valeur propre non nulle du laplacien de  $\gamma_0$  est de multiplicité  $N - 1$ .

Par perturbation de  $\gamma_0$  l'espace propre associé va éclater et pour compenser cette dispersion, on a besoin d'un résultat de stabilité qui dit que tous les éclatements possibles sont réalisables par des métriques voisines de  $\gamma_0$  et cela de façon unique (voir un énoncé précis dans II.2).

On construit pour chacune de ces métriques voisines de  $\gamma_0$  un plongement isométrique de  $\Gamma_N$  dans  $X$  muni d'une métrique riemannienne  $g$  (la condition  $\dim(X) \geq 3$  est ici essentielle). On modifie alors  $g$  à l'extérieur d'un tube de

rayon  $\varepsilon$  autour de l'image de  $\Gamma_N$  en multipliant  $g$  par un petit coefficient  $\varepsilon'$ . Lorsque  $\varepsilon$  et  $\varepsilon' \rightarrow 0$  convenablement, on montre que le spectre de la métrique considérée converge vers celui de  $\Gamma_N$  (il y a aussi un problème de lissage de la métrique); la condition  $d \geq 3$  intervient aussi ici à cause de l'invariance conforme de  $\int |df|^2$  en dimension 2 (voir §III et IV).

Il ne reste plus qu'à recourir à un argument de topologie: si on a une famille  $\varphi_\alpha$  d'applications continues d'une boule fermée  $B_0$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  telle que, lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\varphi_\alpha$  converge uniformément vers un difféomorphisme de  $B_0$  sur un compact de  $\mathbb{R}^n$  dont l'intérieur contient l'origine, alors, pour  $\alpha$  assez petit, l'origine est dans l'image  $\varphi_\alpha(B_0)$ .

## I. Approximation d'espaces propres et fermions

Commençons par prouver le

**LEMME I.1.** *Soient  $M > 0$  et  $N$  un entier, il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $M$  et  $N$  telle que, si  $Q_1$  et  $Q_2$  sont deux formes quadratiques sur un espace euclidien  $E$  de dimension  $N$  vérifiant:*

$$\forall x \in E, \quad 0 \leq Q_1(x) \leq Q_2(x) \leq M |x|_E^2,$$

alors on a:

$$\sup_{|x|_E=1} |Q_1(x) - Q_2(x)| \leq C \cdot \max_{1 \leq i \leq N} |\lambda_i(Q_1) - \lambda_i(Q_2)|^{1/N}$$

où  $\{\lambda_i(Q_j)\}_{1 \leq i \leq N}$  est la suite des valeurs propres de  $Q_j$  rangées par ordre croissant.

*Preuve.* Posons  $f(x) = Q_2(x) - Q_1(x)$  et soit  $S$  la sphère unité de  $E$  équipée de la mesure canonique. On pose:  $I = \int_S f(x) d\sigma$  et donc  $I = C_N \sum_{i=1}^N (\lambda_i(Q_2) - \lambda_i(Q_1))$ . D'autre part,  $|\operatorname{grad} f| \leq 4M |x|$  et donc:

$$\forall x, x_0 \in S, \quad f(x) \geq f(x_0) - 4M |x - x_0|,$$

d'où l'on tire:  $I \geq \int_A f(x_0)/2$  où  $A = \{x \in S \mid |x_0 - x| \leq f(x_0)/8M\}$ , et donc  $I \geq C(f(x_0))^N$ ; d'où suit le lemme.

*Remarque 1.* Il nous arrivera d'appliquer le lemme pour comparer 2 formes quadratiques  $Q_1$  et  $Q_2$  telles que  $Q_2 \geq Q_1 - \varepsilon |x|^2$ , ce que l'on fera en appliquant I.1 à  $Q_2 + \varepsilon |x|^2$  et  $Q_1$ .

*Remarque 2.* Ce lemme formalise le fait que deux ellipsoïdes de tailles voisines et emboités sont nécessairement proches l'un de l'autre.

Introduisons maintenant quelques notations: soient  $E_0$  et  $E_1$  deux sous-espaces vectoriels de dimension  $N$  d'un espace de Hilbert, munis de structures euclidiennes  $\langle x | y \rangle_0 = \langle A_0 x | y \rangle$  et  $\langle x | y \rangle_1 = \langle A_1 x | y \rangle$  avec  $A_i$  symétrique  $> 0$  sur  $E_i$ . On définit une isométrie  $U_{E_0, E_1}$  de  $(E_0, \langle \cdot \rangle_0)$  sur  $(E_1, \langle \cdot \rangle_1)$  de la façon suivante:

$$U_{E_0, E_1} = A_1^{-1/2} \mathcal{U}_{E_0, E_1} A_0^{1/2},$$

où  $\mathcal{U}_{E_0, E_1}$  est une isométrie de  $(E_0, \langle \cdot \rangle)$  sur  $(E_1, \langle \cdot \rangle)$  construite de la façon suivante: on suppose que  $E_0$  et  $E_1$  sont assez proches au sens que  $E_1$  est le graphe d'une application linéaire  $B \in \mathcal{L}(E_0, E_0^\perp)$  et on cherche  $\mathcal{U}_{E_0, E_1}$  sous la forme:

$$\mathcal{U}_{E_0, E_1}(x) = (I + B)(Cx) \quad \text{avec} \quad C \in \mathcal{L}(E_0);$$

il est facile de vérifier qu'on peut prendre (et on le fait),  $C = [(I + B)^* \circ (I + B)]^{-1/2}$ , ce qui a un sens si  $\|B\| < 1$  par exemple.

On a ainsi défini de façon canonique une isométrie de  $(E_0, \langle \cdot \rangle_0)$  sur  $(E_1, \langle \cdot \rangle_1)$  pourvu que  $E_1$  soit assez proche de  $E_0$ : cela nous sera utile lorsque les espaces  $E_0$  et  $E_1$  dépendront de paramètres:  $U_{E_0, E_1}$  dépendra continûment de ces paramètres.

**DEFINITION I.2.** Soient maintenant données sur  $(E_i, \langle \cdot \rangle_i)$  des formes quadratiques positives  $q_i$ , on dira que  $(E_0, \langle \cdot \rangle_0, q_0)$  et  $(E_1, \langle \cdot \rangle_1, q_1)$  ont un écart  $\leq \varepsilon$  si  $\|q_1 \circ U_{E_0, E_1} - q_0\| \leq \varepsilon$ , où  $\|\cdot\|$  est la norme de la forme quadratique, i.e. le maximum de celle-ci sur la sphère unité de l'espace euclidien.

*Remarque.* Cet "écart" n'est pas une distance: il n'est même pas symétrique entre  $E_0$  et  $E_1$ .

Enonçons maintenant le:

**CRITERE I.3.** Dans la situation précédente, il existe,  $M$  tel que  $\|q_1\| \leq M$  et  $N$  étant donnés, pour tout  $\varepsilon > 0$ , des nombres  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq 6$ ) tels que, si:  $\|A_0 - 1\| \leq \alpha_1$ ,  $\|A_1 - 1\| \leq \alpha_2$ ,  $\|B\| \leq \alpha_3$ ,  $\text{Max}_j |\lambda_j(q_1) - \lambda_j(q_0)| \leq \alpha_4$  et  $q_1(x + Bx) \geq q_0(x) - \alpha_5 |x|^2$ , alors  $(E_0, \langle \cdot \rangle_0, q_0)$  et  $(E_1, \langle \cdot \rangle_1, q_1)$  ont un écart  $\leq \varepsilon$ .

Ce critère résulte du lemme et du fait qu'on peut choisir  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  pour que  $\|q_1 \circ U_{E_0, E_1} - q_1 \circ (I + B)\| \leq \varepsilon'$  ( $\varepsilon'$  donné à l'avance).

Dans la pratique ultérieure,  $E_0$  et  $E_1$  seront les sous-espaces engendrés par les

$N$  premières fonctions propres de deux formes quadratiques (on les désignera par  $N$ -espaces propres des formes quadratiques):  $q_0$  et  $q_1$  seront les restrictions de ces formes aux espaces  $E_0$  et  $E_1$ , chaque espace étant muni de la structure euclidienne induite lors du problème spectral considéré. On dira alors que les *deux formes quadratiques  $Q_0$  et  $Q_1$  ont un  $N$ -écart spectral  $\leq \varepsilon$*  si la situation I.2 est vérifiée pour  $E_0$  et  $E_1$ .

### Fermions

Dans plusieurs problèmes que nous allons considérer, il est malaisé de contrôler les espaces engendrés par les  $N$  premières fonctions propres à cause de la petitesse des écarts des valeurs propres: pour traiter ce problème, nous utiliserons un concept emprunté à la mécanique quantique qui nous donne en fait une version plus précise du principe du minimax.

On introduit la notion de *fermions*: on considère  $N$  particules quantiques gouvernées par le même hamiltonien et obéissant à la de Fermi: la fonction d'onde est antisymétrique par rapport aux variables de position  $x_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ). Plus formellement,  $N$  étant donné, on peut associer à  $(\mathcal{H}, D(Q), Q)$  ( $Q$  forme quadratique  $\geq 0$  fermée de domaine  $D(Q)$ ) les espaces de Hilbert  $\Lambda^N \mathcal{H} \subset \otimes^N \mathcal{H}$ , la forme quadratique  $Q^{\otimes^N}$  et sa restriction  $Q^{\Lambda^N}$ . Par exemple,  $Q^{\otimes^N}$  est défini sur les éléments décomposés par:

$$\begin{aligned} Q^{\otimes^N}(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N) &= Q(\varphi_1) |\varphi_2|^2 \cdots |\varphi_N|^2 \\ &\quad + Q(\varphi_2) |\varphi_1|^2 |\varphi_3|^2 \cdots |\varphi_N|^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Les fonctions propres et valeurs propres de  $Q^{\Lambda^N}$  sont les  $\varphi_i \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_N}$  ( $i_1 < i_2 < \cdots < i_N$ ) où  $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une b.o. de fonctions propres et  $\lambda = \lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_N}$  la valeur propre associée.

On dit que  $Q$  vérifie l'*hypothèse (\*)* si ( $M, N$  et  $\delta > 0$  étant donnés une fois pour toutes) on a les inégalités sur les valeurs propres de  $Q$ :

$$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_N < \lambda_N + \delta \leq \lambda_{N+1} \leq M. \tag{*}$$

On a alors les trois propositions élémentaires suivantes:

**PROPOSITION I.4.** *Si (\*) vraie, alors la première valeur propre de  $Q^{\Lambda^N}$ ,  $\lambda_1^{\Lambda^N} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_N$  vérifie  $\lambda_1^{\Lambda^N} < \lambda_1^{\Lambda^N} + \delta \leq \lambda_2^{\Lambda^N} \leq NM$ .*

**PROPOSITION I.5.** *Il existe une constante universelle  $C_N > 0$  telle que, si  $D(Q) = \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_\infty$  où la décomposition est  $Q$ -orthogonale et que,  $\forall x \in \mathcal{K}_\infty$ ,  $Q(x) \geq$*

$C^2 \|x\|^2$ , alors, si  $x \in \bigoplus (\mathcal{K}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{K}_{i_N})$  où  $i_l \in \{0, \infty\}$  et il existe  $l$  tel que  $i_l = \infty$ , on a:

$$Q^{\Lambda^N}(x) \geq C_N C^2 \|x\|_{\Lambda^N}^2.$$

(la constante  $C_N$  provient de la non orthogonalité de  $\mathcal{K}_0$  et  $\mathcal{K}_\infty$  dans  $\mathcal{K}$  et de la nécessité d'une majoration:

$$\left\| \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \right\|^2 \leq \tilde{C}_{\#A} \left( \sum_{\alpha \in A} \|x_\alpha\|^2 \right).$$

**PROPOSITION I.6.** Soient  $E_0$  et  $E_1$  deux sous-espaces de dimensions  $N$  de  $\mathcal{H}$ , la proximité de  $E_0$  et  $E_1$  (au sens  $E_1 = \text{graphe de } B$ ,  $B \in \mathcal{L}(E_0, E_0^\perp)$  et  $\|\|B\|\|$  petit) équivaut à la proximité dans  $\Lambda^N \mathcal{H}$  des droites  $e_1^0 \wedge \cdots \wedge e_N^0$  et  $e_1^1 \wedge \cdots \wedge e_N^1$  où  $(e_i^j)$  sont des bases de  $E_j$ .

L'implication non triviale de I.6 résulte de l'inégalité:

$$\|(e_1^0 + Be_1^0) \wedge \cdots \wedge (e_N^0 + Be_N^0) - e_1^0 \wedge \cdots \wedge e_N^0\|_{\Lambda^N}^2 \geq \|Be_1^0\|^2 + \cdots + \|Be_N^0\|^2.$$

Muni des résultats précédents, nous sommes prêts à énoncer deux résultats d'approximation:

**THEOREME I.7.** Soit  $Q$  une forme quadratique  $\geq 0$  sur  $\mathcal{H}$  de domaine  $D(Q) = \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_\infty$  ( $Q$ -orthogonaux) et supposons que (\*) est vraie pour  $Q_0 = Q|_{\mathcal{K}_0}$  et que,  $\forall x \in \mathcal{K}_\infty$ ,  $Q(x) \geq C^2 \|x\|^2$ , alors pour  $C$  assez grand (ne dépendant que de  $\delta$ ,  $M$ ,  $N$ ),  $Q_0$  et  $Q$  ont un  $N$  écart spectral  $\leq \varepsilon$ .

**THEOREME I.8.** On donne outre  $Q \geq 0$  une suite  $Q_n$  de formes quadratiques de même domaine que  $Q$  sur  $\mathcal{H}$  équipé d'une métrique  $|\cdot|_n$ . On suppose que:

- (i) il existe  $C_1, C_2 > 0$  telle que,  $\forall x \in \mathcal{H}$ ,  $\forall x$ , on ait:  $C_1 |x| \leq |x|_n \leq C_2 |x|$ ;
- (ii)  $\forall x \in D(Q)$ ,  $\lim_{n \infty} |x|_n = |x|$  et  $\lim_{n \infty} Q_n(x) = Q(x)$ ;
- (iii)  $\forall x \in D(Q)$ ,  $Q(x) \leq Q_n(x)$ .

Alors, si (\*) est vraie pour  $Q$ , il existe  $n_0$  tel que si  $n \geq n_0$ ,  $Q$  et  $Q_n$  ont un  $N$ -écart spectral  $\leq \varepsilon$ .

Le schéma de la preuve de I.7 and I.8 est le même, en 3 étapes:

- 1) le cas  $N = 1$ ,
- 2) l'extension grâce aux fermions au cas  $N$  quelconque pour obtenir la proximité des espaces propres,
- 3) l'utilisation de I.1 pour conclure.

*Preuve de I.7.* 1) Notons  $\mu_1 < \mu_1 + \delta \leq \mu_2 \leq M$  les 2 premières valeurs propres de  $Q_0$ ,  $\psi_1$  la première fonction propre normalisée et les analogues  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\varphi_1$  pour  $Q$ . Le minimax donne bien sûr  $\mu_1 \geq \lambda_1$  et  $\mu_2 \geq \lambda_2$ . Estimons la différence  $\mu_1 - \lambda_1$ : on a  $\varphi_1 = \varphi_1^0 + \varphi_1^\infty \in \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_\infty$  et donc:

$$\lambda_1 = Q(\varphi_1) = Q(\varphi_1^0) + Q(\varphi_1^\infty) \geq C^2 |\varphi_1^\infty|^2.$$

Donc  $|\varphi_1^\infty| \leq \sqrt{M/C}$ , puis:

$$Q(\varphi_1^0) \leq \lambda_1 \quad \text{et} \quad |\varphi_1^0| \geq 1 - \frac{\sqrt{M}}{C}, \quad \text{d'où: } \lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_1 \left(1 - \frac{\sqrt{M}}{C}\right)^{-2}.$$

Il reste à prouver la proximité des espaces propres engendrés par  $\varphi_1$  et  $\psi_1$ : on a  $\varphi_1^0 = \alpha \psi_1 + \psi_1'$  avec  $\langle \psi_1 | \psi_1' \rangle = 0$  et donc  $Q(\psi_1') \geq (\mu_1 + \delta) |\psi_1'|^2$ , d'où:  $\mu_1 \geq Q(\varphi_1^0) \geq \alpha^2 \mu_1 + (\mu_1 + \delta) |\psi_1'|^2$  et  $|\psi_1'|^2 \leq 2\mu_1 \sqrt{M/C\delta}$ ; utilisant la majoration obtenue pour  $\varphi_1^\infty$ , on a:

$$|\varphi_1 - \alpha \psi_1| \leq \sqrt{M/C} + (2\mu_1 \sqrt{M/C\delta})^{1/2}.$$

2) Le cas  $N$  quelconque: par les fermions et les propositions I.4 et I.5, on obtient  $|(\lambda_1 + \dots + \lambda_N) - (\mu_1 + \dots + \mu_N)| = O(1/\sqrt{C})$ , ( $O$  ne dépendant que de  $N$ ,  $M$ ,  $\delta$ ) et comme  $\mu_i \geq \lambda_i$  pour tout  $i$ , on a la même majoration pour  $|\lambda_i - \mu_i|$ . La convergence des espaces propres vient de 1) grâce à I.6.

3) Le contrôle de l'écart est facile: si on note  $E_0$  et  $E$  les sommes d'espaces propres en question, on a:

$$Q(U_{E_0, E}(x)) = Q((I + B)(Cx)) \geq Q(Cx)$$

et comme  $C$  est proche de  $Id$  et  $Q \leq M$  sur  $E_0$ , on peut conclure à partir de I.1.

*Preuve de I.8.* 1) Soit  $\varphi_1$  une fonction propre de  $Q$  associée à  $\lambda_1$ , on a

$$\lim_{n \infty} \frac{Q_n(\varphi_1)}{|\varphi_1|_n^2} = \frac{Q(\varphi_1)}{|\varphi_1|^2} = \lambda_1, \quad \text{donc} \quad \overline{\lim}_{n \infty} \lambda_1^n \leq \lambda_1.$$

Réiproquement, soit  $\varphi_1^n \in D(Q)$  telle que  $|\varphi_1^n| = 1$  et  $Q_n(\varphi_1^n) = \lambda_1^n$  une première fonction propre de  $Q_n$ . Supposons que  $Q_n(\varphi_1^n) \leq (\lambda_1 - \alpha)$  ( $\alpha > 0$  fixé) pour une infinité de  $n$ . ( $\varphi_1^n$ ) est une suite bornée de  $D(Q)$ , on peut donc extraire une suite

faiblement convergente et convergente dans  $\mathcal{H}$  notée encore  $(\varphi_1^n)$ :

$$Q(\varphi) \leq \overline{\lim}_{n \infty} Q(\varphi_1^n) \leq \overline{\lim}_{n \infty} Q_n(\varphi_1^n) \leq \lambda_1 - \alpha$$

et

$$\|\varphi\| - \|\varphi_1^n\|_n \leq \|\varphi_1^n\|_n - \|\varphi\|_n + \|\varphi\|_n - \|\varphi\|,$$

en utilisant la majoration  $|\cdot|_n \leq C_2 \|\cdot\|$ , on a  $\|\varphi\| = 1$ ; d'où contradiction. La convergence de l'espace propre engendré par  $\varphi_1^n$  vers celui engendré par  $\varphi_1$ : supposons que  $\varphi_1^n$  admette une sous-suite convergeant faiblement pour  $Q$  et dans  $\mathcal{H}$  vers  $\psi$ , on a:

$$Q(\psi) \leq \overline{\lim}_{n \infty} Q(\varphi_1^n) \leq \overline{\lim}_{n \infty} Q_n(\varphi_1^n) = \lambda_1.$$

L'hypothèse (\*) assure donc  $\psi = \pm \varphi_1$ .

2) Par le minimax  $\overline{\lim} \lambda_1^n \leq \lambda_1$  et donc l'utilisation des fermions permet de conclure la convergence des valeurs propres et de la somme des espaces propres.

3) Le lemme I.1, l'hypothèse  $Q_n \geq Q$  et la convergence de  $|\cdot|_n$  vers  $\|\cdot\|$  sur  $E_0$  permettent de conclure.

## II. Le spectre du graphe complet à $N$ sommets

Soit  $\Gamma_N$  le graphe complet à  $N$  sommets ( $N \geq 4$ ): chaque couple de sommets distincts est joint par une arête unique. On considère  $\Gamma_N$  comme une variété riemannienne singulière de dimension 1; si  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des  $N(N-1)/2$  arêtes, une métrique riemannienne sur  $\Gamma_N$  est entièrement déterminée (à isométrie près) par la longueur  $l(a)$  de toute arête  $a$  de  $\mathcal{A}$ . L'espace des métriques riemanniennes sur  $\Gamma_N$  est canoniquement isomorphe à  $(\mathbb{R}^+)^{\mathcal{A}}$ .

On peut associer, de façon naturelle, à toute métrique  $\gamma$  sur  $\Gamma_N$  un laplacien  $\Delta$  obtenu par l'extension de Friedrichs d'une forme quadratique  $q$  sur  $L^2(\Gamma_N, v_\gamma)$  définie ainsi: le domaine  $D(q) = H^1(\Gamma_N)$  est l'ensemble des fonctions  $f$  dont la restriction à chaque arête  $a$  est dans  $H^1$  et qui sont continues sur  $\Gamma_N$ ; la forme  $q$  est alors donnée par  $q(f) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \int_0^{l(a)} |f'_a(t)|^2 dt$  où  $f_a$  est la restriction de  $f$  à  $a$  et  $t$  paramètre  $a$  par la longueur. Il n'est alors pas difficile de déterminer le domaine du laplacien: c'est l'ensemble des  $f$  dont la restriction à chaque arête est dans  $H^2$ , qui sont continues sur  $\Gamma_N$  et dont la somme des dérivées en chaque sommet le

long des différentes arêtes qui en sont issues est nulle. On a le:

**THEOREME II.1.** *Si  $\gamma_0$  est la métrique riemannienne sur  $\Gamma_N$  telle que les arêtes ont toutes une longueur égale à 1, la première valeur propre non nulle de  $(\Gamma_N, \gamma_0)$  est  $\lambda(N) = k^2$  avec  $k = \text{Arc cos}(-1/(N-1))$  ( $k \in ]\pi/2, \pi[$ ); cette valeur propre est de multiplicité  $N-1$ . De plus, l'espace propre  $E_0$  associé est engendré par les  $N$  fonctions  $\varphi_s$  ( $s$  sommet de  $\Gamma_N$ ) définies par:  $\varphi_s(t) = \cos kt$  pour toute arête issue de  $s$  paramétrée par  $t \in [0, 1]$ ,  $s$  correspondant à  $t=0$  et  $\varphi_s(t) = C \cos kt$  pour toute arête non issue de  $s$  paramétrée par  $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  avec  $C \cos k/2 = -1/(N-1)$ . Si  $\mathfrak{S}_N$  est le groupe des permutations des  $N$  sommets, l'application  $\varphi \mapsto (\varphi(s))_{s \in \mathcal{S}}$  ( $s$  désigne l'ensemble des sommets de  $\Gamma_N$ ), est un  $\mathfrak{S}_N$ -isomorphisme de  $E_0$  sur le sous-espace vectoriel  $F_0 = \{\sum_{s \in \mathcal{S}} x_s = 0\}$  de  $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$  muni de l'action naturelle de  $\mathfrak{S}_N$ .*

*Preuve.* (i) On montre que  $\lambda(N)$  est une valeur propre de  $\Delta$  ayant les propriétés voulues. Pour une fonction  $\varphi_s$  du type indiqué, l'appartenance au domaine de  $\Delta$  s'écrit

$$\{\cos k = C \cos k/2; k(\sin k + C(N-2) \sin k/2) = 0\},$$

équations vérifiées si  $k = \text{Arc cos}(-1/(N-1))$ .

(ii) Il faut montrer que  $\lambda(N)$  est la plus petite valeur propre non nulle de  $\Delta$ . Pour cela on va prouver par le minimax que si  $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N \leq \lambda_{N+1} \leq \dots$  est le spectre de  $(X_N, g_0)$ , on a:  $\lambda_{N+1} \geq \pi^2$  et donc  $\lambda_2 = \dots = \lambda_N = \lambda(N)$ . Pour cela, on découpe  $X_N$  en  $N$  morceaux  $\mathcal{E}_s$  ( $s \in \mathcal{S}$ ), étoiles de sommet  $s$ : on coupe chaque arête en son milieu. Si  $\mu(N)$  est la première valeur propre non nulle du laplacien de Neumann sur  $\mathcal{E}_s$ , on a  $\lambda_{N+1} \geq \mu(N)$ : cela résulte de l'injection  $D(q) \hookrightarrow \bigoplus_{s \in \mathcal{S}} H^1(\mathcal{E}_s)$  et du minimax. On va prouver  $\mu(N) = \pi^2$ . Paramétrons chaque arête  $a$  de  $\mathcal{E}_s$  par  $t \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $s$  correspondant à  $t = \frac{1}{2}$ . Une fonction propre  $\varphi$  du problème de Neumann sur  $\mathcal{E}_s$  sera de la forme  $\varphi|_a(t) = C_a \cos kt$  avec les conditions:

$$\begin{cases} \forall a, a', (C_a - C_{a'}) \cos k/2 = 0 \quad \text{et} \\ k \left( \sum C_a \right) \sin k/2 = 0, \end{cases}$$

on vérifie immédiatement que la plus petite solution non nulle est  $k = \pi$  et donc  $\mu(N) = \pi^2$ .

On doit aussi énoncer un résultat pour les métriques voisines de  $\gamma_0$ . Soit  $\alpha_N > 0$  tel que  $0 < \lambda(N) - \alpha_N < \lambda(N) + \alpha_N < \pi^2$ , alors pour  $\gamma$  voisin de  $\gamma_0$ , le laplacien de  $(\Gamma_N, g)$  admet dans l'intervalle  $[\lambda(N) - \alpha_N, \lambda(N) + \alpha_N]$  des valeurs

propres dont la somme des multiplicités vaut  $N - 1$  et pas d'autres valeurs propres dans l'intervalle  $]0, \pi^2]$ . On désigne par  $E_\gamma$  le sous-espace de  $L^2(\Gamma_N, v_{\gamma_0})$  engendrée par les espaces propres associés à ces valeurs propres proches de  $\lambda(N)$ . On introduit aussi la transformation unitaire naturelle  $U_\gamma = U_{E_0, E_\gamma}$  ( $E_\gamma$  muni de la structure euclidienne induite par  $L^2(\Gamma_N, v_\gamma)$ ) définie au §1 et la forme quadratique  $Q_\gamma = q_\gamma \circ U_\gamma$ , où  $q_\gamma$  est la restriction à  $E_\gamma$  de la forme quadratique sur  $H^1(\Gamma_N)$  associée à la métrique  $\gamma$ . On a alors le:

**THEOREME II.2.** *L'application  $\gamma \mapsto Q_\gamma$  est un difféomorphisme d'une boule fermée  $B_0$  de  $(\mathbb{R}^+)^{\mathcal{A}}$  centrée en  $\gamma_0$  sur un voisinage de  $Q_{\gamma_0} = \lambda(N) \langle \cdot | \cdot \rangle_{\gamma_0}$  dans  $Q(E_0) = \{\text{formes quadratiques sur } E_0\}$ .*

*Preuve.* Il résulte de la théorie générale des perturbations ([KO]) que  $\gamma \mapsto Q_\gamma$  est différentiable et même analytique près de  $\gamma_0$ : le théorème II.2 résulte donc du théorème des fonctions implicites par linéarisation, comme suit:

**LEMME II.3.** *Soit  $\gamma_t = \gamma_0 + th$ , alors posant  $Q_t = Q_{\gamma_t}$  et  $q_t = q_{\gamma_t}$ ,*

$$\dot{Q} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Q_t, \quad \dot{q} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} q_t.$$

(Ici on suppose que les formes quadratiques  $q$  sont toutes sur le même espace de Hilbert  $L^2(\Gamma_N, v_{\gamma_0})$ , ce qu'on obtient par un argument du type demi-densité (voir plus bas la linéarisation explicite)).

*Preuve de II.3.*  $Q_t(\varphi | \psi) = q_t(U_{\gamma_t}\varphi | U_{\gamma_t}\psi)$  et en dérivant en  $t = 0$ :

$$\dot{Q}(\varphi | \psi) = \dot{q}(\varphi | \psi) + q_0(\varphi | \dot{U}\psi) + q_0(\dot{U}\varphi | \psi),$$

les deux derniers termes sont nuls, car par construction  $\dot{U}\varphi$  est dans  $E_0^\perp$ .

### *Calcul de la linearisation*

On suppose que  $\gamma_t$  est définie sur  $a \in \mathcal{A}$  par l'élément de longueur  $ds_a = (1 + t\varphi_a(x)) dx$ ,  $x \in [0, 1]$  et  $\varphi_a \in C_0^\infty([0, 1])$  (i.e.  $h$  est à support disjoint des sommets, ce qui est toujours possible).

On a alors  $q_t(f) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \int_0^1 |f_a(x)|^2 (1 + t\varphi_a(x)) dx$ .

Pour se ramener à l'espace de Hilbert fixe  $L^2(\Gamma_N, v_{\gamma_0})$ , on pose

$$\tilde{f}_a(x) = (1 + t\varphi_a(x))^{1/2} f_a(x)$$

et donc

$$q_t(\tilde{f}) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \int_0^1 [(\tilde{f}_a(x)(1+t\varphi_a(x))^{-1/2}]^2 (1+t\varphi_a(x))^{-1} dx,$$

il vient ainsi, par un développement limité en  $t=0$  et le fait qu'en  $t=0$ ,  $\tilde{f}_a = f_a$ :

$$\dot{q}(f) = - \sum_{a \in \mathcal{A}} \int_0^1 (f'_a(x)^2 + k^2 f_a(x)^2) \varphi_a(x) dx,$$

donc, si  $f_a(x) = A_a \cos kx + B_a \sin kx$  et si on pose

$$\begin{aligned} \dot{l}_a &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} l(a) = \int_0^1 \varphi_a(x) dx, \\ \dot{q}(f) &= -k^2 \sum_{a \in \mathcal{A}} \dot{l}_a (A_a^2 + B_a^2). \end{aligned} \tag{1}$$

Il suffit alors de montrer que les  $N(N-1)/2$  matrices  $\dot{q}_a(\varphi_s, \varphi_{s'})$  ( $s \in \mathcal{S}, s' \in \mathcal{S}'$ ) associées aux déformations  $\varepsilon_a$  telles que  $\dot{l}_b = \delta_{a,b}$  sont linéairement indépendantes. À cause de la symétrie  $\dot{q}_a(\varphi_s, \varphi_{s'})$  est pour  $s \neq s'$  une fonction de l'arête  $b = [s, s']$  que nous noterons  $w_a^b$ . Il suffit de prouver que les vecteurs  $W_a$  ( $a \in \mathcal{A}$ ) de  $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$  sont indépendants, et donc il suffit de voir qu'ils engendrent  $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ . Visiblement  $w_a^b$  n'a que trois valeurs possibles suivant les positions relatives des arêtes  $a$  et  $b$ .

- (i) Si  $a = b$ ,  $w_a^a = k^2/(N-1)$ ,
- (ii) si  $a$  et  $b$  ont un seul sommet commun,  $w_a^b = k^2/(N-1)$ ,
- (iii) si  $a$  et  $b$  n'ont pas de sommet commun,

$$w_a^b = -2k^2/(N-1)(N-2).$$

Les résultats précédents se montrent sans difficultés à partir de (1) (où plutôt de la version bilinéaire de (1)) et de l'expressions des  $\varphi_s$  donnés en II.1.

Soit  $W_0 = \sum_{a \in \mathcal{A}} W_a$ ; on vérifie que  $W_0$  est un vecteur non nul proportionnel au vecteur  $V_0 = (1, 1, \dots, 1)$ . L'espace vectoriel engendré par les  $(W_a)_{a \in \mathcal{A}}$  est donc le même que celui engendré par le vecteur  $V_0$  et les vecteurs  $V_a$ ,  $a \in G$  définis par:

$$v_a^b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ et } b \text{ ont au moins un sommet commun,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cherchons à écrire les vecteurs  $e_a$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , de la base standard de  $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$  comme combinaison linéaire des  $V_0$  et  $V_a$ ,  $a \in \mathcal{A}$ . Pour des raisons de symétrie, on

cherche la solution sous la forme:

$$e_a = xV_a + y\Sigma'V_b + z\Sigma''V_c + tV_0,$$

où  $\Sigma'$  porte sur les arêtes qui ont un sommet commun avec  $a$  et  $\Sigma''$  sur celles qui n'en ont aucun. On a ainsi, par un dénombrement et en évaluant  $e_a^c$  successivement lorsque  $c = a$ ,  $c$  et  $a$  ont un, puis deux sommets communs:

$$\begin{cases} 1 = x + 2(N - 2)y + t \\ 0 = x + (N - 1)y + (N - 3)z + t \\ 0 = 4y + (2N - 7)z + t, \end{cases}$$

il suffit de vérifier que le déterminant obtenu en éliminant la colonne des  $z$  vaut  $3 - N$  est donc  $\neq 0$  pour  $N \geq 4$ .

*Remarque.* Le cas du graphe à 3 sommets est bien entendu spécial, car on trouve le spectre d'un cercle de longueur variable, pour lequel toutes les valeurs propres non nulles restent de multiplicité 2.

### III. Convergence du spectre d'une variété vers celui d'un domaine

Nous avons en vue le:

**THEOREME III.1.** *Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne compacte de dimension  $\geq 3$  et  $\Omega_+$  un domaine à bord  $C^1$  par morceaux de  $X$ . On fait l'hypothèse (\*) sur les valeurs propres du problème de Neumann sur  $\Omega_+$ , alors pour tout  $\alpha > 0$ , il existe une métrique  $C^\infty$ ,  $h$  sur  $X$ , induisant  $g$  sur  $\Omega_+$  telle que le  $N$  écart spectral du problème de Neumann sur  $\Omega_+$  et du laplacien sur  $(X, h)$  soit  $\leq \alpha$  (les espaces propres étant tous plongés dans  $L^2(X, v_g)$ ).*

Le théorème reste peut être vrai pour la dimension 2, mais la preuve qui suit ne marche pas. On fabrique la métrique  $h$  en deux temps: on construit d'abord la métrique singulière  $g_\varepsilon$  en remplaçant sur  $\Omega_- = X \setminus \Omega_+$ ,  $g$  par  $\varepsilon g$ ; puis on régularise  $g_\varepsilon$  par les  $g_{\varepsilon,n} = F_n^\varepsilon \cdot g$ , où  $F_n^\varepsilon$  est une suite de fonctions  $C^\infty$  convergeant vers  $\chi_{\Omega_+} + \varepsilon \chi_{\Omega_-}$ . Alors  $h$  est une des métriques  $g_{\varepsilon,n}$  avec  $\varepsilon$  assez petit et  $n$  assez grand. Toutes les constructions peuvent se faire avec une métrique  $g$  dépendant d'un paramètre.

### A. Métrique singulières

Soit  $g_\varepsilon$  la métrique singulière décrite précédemment: plus précisément, on considère sur  $\mathcal{H} = L^2(X, g_\varepsilon)$  la forme quadratique de domaine  $H^1(X)$  définie par

$$q_\varepsilon(\varphi) = \int_{\Omega_+} |d\varphi|^2 + \varepsilon^{(d/2)-1} \int_{\Omega_-} |d\varphi|^2,$$

les intégrales étant prises au sens de l'élément de volume associé à  $g$ . Pour se ramener à un espace de Hilbert fixe, on utilise l'isomorphisme  $L^2(X, g_\varepsilon) \rightarrow L^2(X, g)$ , donné par  $\varphi \mapsto (\varphi|_{\Omega_+}, \varepsilon^{d/4}\varphi|_{\Omega_-})$ . La forme quadratique  $q_\varepsilon$  transportée sur  $L^2(X, g)$  admet alors pour domaine  $D(q_\varepsilon)$ , ensemble des couples  $(\varphi_+, \varphi_-) \in H^1(\Omega_+) \oplus H^1(\Omega_-)$  tels que:

$$\varphi_-|_{b\Omega_+} = \varepsilon^{d/4}\varphi_+|_{b\Omega_+}$$

et on a:

$$q_\varepsilon(\varphi_+ \oplus \varphi_-) = \int_{\Omega_+} |d\varphi_+|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_-} |d\varphi_-|^2.$$

Dans un premier temps, on utilise une décomposition du domaine de  $D(q_\varepsilon)$  en  $\mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_\infty$  à laquelle on applique le théorème I.7:

$$\mathcal{K}_0 = \{(\varphi_+, \varphi_-) \in D(q_\varepsilon) \mid \varphi_- \text{ harmonique sur } \Omega_-\}$$

$$\mathcal{K}_\infty = \{(0, \varphi_-) \mid \varphi_- \in H_0^1(\Omega_-)\}$$

On peut alors appliquer I.8 avec  $C^2 = 1/\varepsilon\lambda_1^D(\Omega_-)$  où  $\lambda_1^D$  est la première valeur propre du problème de Dirichlet sur  $\Omega_-$ .

On est ainsi ramené à étudier des convergences sur  $\mathcal{K}_0$ . On a un isomorphisme de  $H^1(\Omega_+)$  sur  $\mathcal{K}_0$  donné par  $\varphi \mapsto (\varphi, \varepsilon^{d/4}P_- \varphi|_{Y})$  ( $Y = b\Omega_+$ ) et  $P_-$  est l'opérateur de Poisson qui, à  $\varphi \in H^{1/2}(Y)$ , associe le prolongement harmonique  $P_- \varphi \in H^1(\Omega_-)$ : on a alors

$$|\varphi|_\varepsilon^2 = \int_{\Omega_+} |\varphi|^2 + \varepsilon^{d/2} \int_{\Omega_-} |P_- \varphi|^2$$

et

$$q_\varepsilon(\varphi) = \int_{\Omega_+} |d\varphi|^2 + \varepsilon^{(d/2)-1} \int_{\Omega_-} |d(P_- \varphi)|^2.$$

On peut ainsi visiblement adapter une variante du théorème I.8 (l'espace de Hilbert  $\tilde{\mathcal{H}}_0$  et le domaine  $D(q_\varepsilon^0)$  n'étant pas ici fixes). Cette variante est laissée au lecteur.

### B. Regularisation

Soit  $\varepsilon > 0$ , donné,  $F_n$  une suite de fonctions  $C^\infty$  telles que  $F_n \upharpoonright \Omega_+ = 1$ ,  $1 \geq F_n \upharpoonright \Omega_- \geq \varepsilon$  et  $\forall x \in \Omega_-, \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \varepsilon$ .

On se trouve alors immédiatement dans les conditions d'applications du théorème I.8.

### C. Fin de la preuve

Nous devons maintenant décrire la transformation unitaire  $U$  du  $N$ -espace propre du problème de Neumann de  $\Omega_+$  sur celui de  $F_n^\varepsilon \cdot g = h$ . On a utilisé deux formes quadratiques intermédiaires: la restriction de  $q_\varepsilon$  à  $\mathcal{H}_0$ ; on note ici  $Q_1$  sa restriction au  $N$ -espace propre; puis  $q_\varepsilon$  elle-même dont on note  $Q_2$  la restriction au  $N$ -espace propre; on note  $Q_3$  la forme associée de même à  $h$ . On note  $U_{0,1}, U_{1,2}, \dots$  les transformations unitaires naturelles introduites au §1. On choisit d'abord  $\varepsilon$  pour que  $\|Q_1 \circ U_{0,1} - Q_0\| \leq \alpha/3$ , puis quitte à diminuer encore  $\varepsilon$ , on assure  $\|Q_2 \circ U_{1,2} - Q_1\| \leq \alpha/3$ , on choisit alors  $n$  pour que  $\|Q_3 \circ U_{2,3} - Q_2\| \leq \alpha/3$ , on a alors  $\|Q_3 \circ U_{2,3} \circ U_{1,2} \circ U_{0,1} - Q_0\| \leq \alpha$ . A priori  $U_{2,3} \circ \dots \circ U_{0,1}$  n'est pas la transformation unitaire décrite en I, mais cela n'a pas d'inconvénient pour ce qui suivra. Il est essentiel que  $U$  dépende continûment des paramètres dont  $g$  peut dépendre.

## IV. Voisinages tubulaires des Graphes

Dans ce §, la condition dimension  $(X) \geq 3$  ne joue aucun rôle.

### A. Métrique adaptée

Soit  $(\Gamma, \gamma)$  un graphe fini muni d'une métrique riemannienne  $\gamma$ , donnée par la longueur de chaque arête. On suppose que  $\Gamma$  admet un plongement (*injectif*) dans une variété compacte  $X$  de dimension  $\geq 2$ . Ceci est vrai quel que soit le graphe  $\Gamma$  si dimension  $(X) \geq 3$ . On note encore  $\Gamma'$  l'image de  $\Gamma$  par ce plongement.

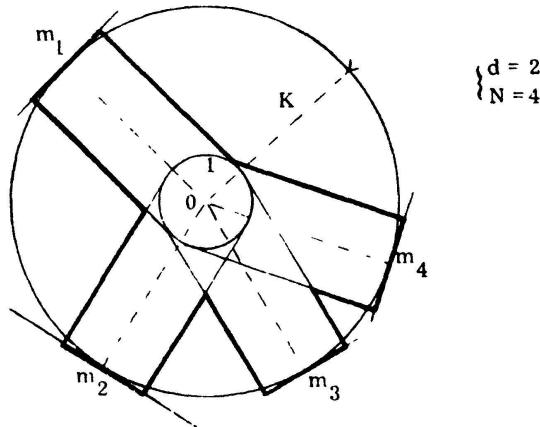
On désigne par *métrique adaptée à  $(\Gamma, \gamma)$*  une métrique riemannienne  $g$  sur  $X$ , *euclidienne au voisinage de  $\Gamma$ , telle que les arêtes de  $\Gamma$  soient des géodésiques de  $g$  et induisant  $\gamma$  sur  $\Gamma$* . Cette dernière condition est la plus importante. Les autres apportent seulement des simplifications techniques.

Un moment de réflexion permet de se convaincre de l'existence de métriques adaptées et même dépendant de façon continue de  $\gamma$  ( $\Gamma$  fixé).

Désignons par  $\Omega_\epsilon$  le voisinage tubulaire de rayon  $\epsilon$  de  $\Gamma$  dans  $X$  muni de la métrique adaptée  $g$ . Alors  $\Omega_\epsilon$  s'obtient pour  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$  en recollant des morceaux cylindriques  $C_{a,\epsilon}$  ( $a \in \mathcal{A}$ ) et des morceaux  $W_{s,\epsilon}$  ( $s \in \mathcal{S}$ ) ( $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{S}$ ) désigne comme au §2 les arêtes (resp. sommets de  $\Gamma$ )).

Les  $C_{a,\epsilon}$  sont des cylindres pleins  $[0, l_a - 2K\epsilon] \times B^{d-1}(\epsilon)$  ( $K$  choisi plus bas dépendant de  $\Gamma$ , mais pas de  $\gamma$ ), ils seront recolés aux  $W_{s,\epsilon}$  ( $s$  sommets de  $a$ ) le long des bouts  $\{0\} \times B^{d-1}(\epsilon)$  et  $\{l_a - 2K\epsilon\} \times B^{d-1}(\epsilon)$  ( $B^{d-1}(\epsilon)$  désigne la boule euclidienne de dimension  $d-1$  et de rayon  $\epsilon$ ). On paramètre les  $C_{a,\epsilon}$  par  $(x_1, x')$  avec  $x_1 \in [0, l_a - 2K\epsilon]$  et  $x' \in B^{d-1}(\epsilon)$ .

Les morceaux  $W_{s,\epsilon}$  sont des dilatés de rapport  $\epsilon$  de morceaux isométriques à  $W_N$ , où  $N_s$  est le nombre d'arêtes issues de  $s$ . On choisit  $K$  tel qu'on puisse placer sur la sphère de rayon  $K$  au moins  $N_{\max}$  points  $m_i$  ( $N_{\max} = \max_{s \in \mathcal{S}} N_s$  et  $k \geq 1$ ) éloignés d'une distance euclidienne  $> 2$ .  $W_N$  est le voisinage tubulaire euclidien de rayon 1 de l'étoile d'origine 0 et de branches  $[0, m_i]$  ( $1 \leq i \leq N_s$ ) dans  $\mathbb{R}^d$ , tronqué par des hyperplans orthogonaux en chaque  $m_i$  à  $[0, m_i]$



On remarque que  $W_N \subset \mathbb{R}^d$  n'est pas unique, mais ici on n'utilisera pas les angles entre les branches de  $W_N$ .

### B. Proximité spectrale

Ce § verra la justification de la définition donnée au §II du laplacien sur  $(\Gamma, \gamma)$ : on va montrer que les valeurs propres de ce laplacien sont les limites de celles du problème de Neumann dans  $\Omega_\epsilon$  ( $X$  étant muni toujours d'une métrique adaptée). On suppose que le spectre de  $(\Gamma, \gamma)$  vérifie (\*) et on désigne par  $E$  le  $N$ -espace propre ( $E \subset L^2(\Gamma)$ ), on a le:

**THEOREME IV.1.** Soit  $F$  le  $N$ -espace propre de  $(\Omega_\epsilon, g)$  avec les conditions de Neumann (équipé de la structure euclidienne et de la forme quadratique associée au problème de Neumann sur  $\Omega_\epsilon$ ); on désigne par  $q_E$  et  $q_F$  les formes quadratiques naturelles sur  $E$  et  $F$ . Il existe une injection (dépendant continûment des éventuels

paramètres du problème)  $J_\epsilon$  de  $E$  dans  $H^1(\Omega_\epsilon)$  telle que la limite de l'écart entre  $J_\epsilon(E, q_E)$  et  $(F, q_F)$  soit nulle lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

En particulier,  $\forall i$ ,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_i(\Omega_\epsilon) = \lambda_i(\Gamma)$ , mais le théorème donne aussi un résultat sur les espaces propres au moyen de  $J_\epsilon$ .

*Preuve.* Elle va suivre essentiellement de la construction de  $J_\epsilon$  et du théorème I.7.

**CONSTRUCTION DE  $J_\epsilon$ .** On va en fait définir  $J_\epsilon(f)$  pour  $f \in H^1(\Gamma)$ :

· Sur les cylindres  $C_{a,\epsilon}$ , soit  $\tilde{l}_a = l_a - 2k\epsilon$ , alors

$$J_\epsilon f(x_1, x') = (1/\gamma_d \cdot \epsilon^{(d-1)/2}) \cdot f_a\left(\frac{\tilde{l}_a}{l_a} \cdot x_1\right)$$

où  $f_a$  est la restriction de  $f$  à  $a$  paramétrée par  $[0, l_a]$  et  $\gamma_d^2 = \text{vol}(B^{d-1}(0, 1))$ .

· Sur les  $W_{s,\epsilon}$ , on pose  $J_\epsilon f(x) = f(s)/(y_d \cdot \epsilon^{(d-1)/2})$ . On voit que:

$$\begin{cases} \|J_\epsilon f\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 = \|f\|^2 (1 + O(\epsilon)) + O(\epsilon) \left( \sum_{s \in \mathcal{S}} |f(s)|^2 \right) \\ \int_{\Omega_\epsilon} |dJ_\epsilon f|^2 = (1 + O(\epsilon)) \int_{\Gamma} |df|^2 \text{ (ici les } O \text{ sont indépendants de } f). \end{cases} \quad (*)$$

Désignons par  $\mathcal{K}_0$  l'image  $J_\epsilon(H^1(\Gamma))$ , et par  $\mathcal{K}_x$  l'ensemble des  $f$  de  $H^1(\Omega_\epsilon)$  telles que:

· Sur  $C_{a,\epsilon}$ , on ait pour tout  $x_1 \in [0, \tilde{l}_a]$ ,

$$\int_{B^{d-1}(\epsilon)} f(x_1, x') dx' = 0.$$

· Sur  $W_{s,\epsilon}$ ,  $\int_{W_{s,\epsilon}} f = 0$ .

On vérifie que les hypothèses du théorème I.7 sont satisfaites:

Soit en effet, pour chaque  $s \in \mathcal{S}$ ,  $B_{i,\epsilon}$  ( $1 \leq i \leq N-1$ ) les morceaux du bord de  $W_{s,\epsilon}$  qui sont isométriques à  $B^{d-1}(\epsilon)$  et  $\mathcal{E}$  sous-espace de  $H^1(W_{s,\epsilon})$  formé des fonctions telles que,  $\forall i$ ,  $1 \leq i \leq N-1$ ,  $\int_{B_{i,\epsilon}} f = 0$ , alors si  $\lambda_1(\epsilon)$  est la plus petite valeur propre de la forme quadratique  $\int_{W_{s,\epsilon}} |df|^2$  avec  $\mathcal{E}$  comme domaine, il est clair que l'on a  $\lambda_1(\epsilon) = \lambda_1(1)/\epsilon^2$  et que  $\lambda_1(1) > 0$ . Soit  $\mu_1$  la plus petite valeur propre  $> 0$  du laplacien sur  $B^{d-1}(1)$  avec les conditions de Neumann; on a alors,

pour  $f \in \mathcal{K}_\infty$ :

$$\int_{\Omega_\epsilon} |df|^2 \geq (1/\epsilon^2)(\inf(\lambda_1(1), \mu_1)) \int_{\Omega_\epsilon} |f|^2.$$

On est ainsi dans les hypothèses de I.7, ce qui permet d'achever la preuve.

## V. Fin de la preuve

On se donne  $\alpha > 0$ . On plonge  $\Gamma_N$  dans  $X$  et on construit pour les  $\gamma \in B_0$  des métriques adaptées  $g$  dépendant régulièrement de  $\gamma$  sur  $X$ . On choisit d'abord  $\epsilon > 0$  pour que l'écart entre  $J_\epsilon(E_\gamma, q_\gamma)$  et le  $N$ -espace propre de  $\Omega_\epsilon$  soit  $\leq \alpha/2$ . On note  $U_1$  l'isométrie naturelle entre ces deux espaces euclidiens. On choisit ensuite  $\epsilon'$  et  $n$  pour que le  $N$ -écart spectral entre le problème de Neumann sur  $\Omega_\epsilon$  et le laplacien de  $h = F_n^{\epsilon'} \cdot g$  soit  $\leq \alpha/2$ . On note  $U_2$  l'isométrie naturelle entre ces sous-espaces de  $L^2(X, v_g)$ . Soit  $q_h$  la forme quadratique associée à  $h$  sur le  $N$ -espace propre du laplacien  $\Delta_h$  et  $F_\alpha(\gamma) = q_h \circ U_2 \circ U_1 \circ U_\gamma \in Q(E_0)$ . Par construction  $F_\alpha$  est continu de  $B_0$  dans  $Q(E_0)$  et on a,  $\forall \gamma \in B_0$ ,  $\|F_\alpha(\gamma) - Q_\gamma\| \leq \alpha$ . Comme le spectre de  $F_\alpha(\gamma)$  est constitué des  $N$  premières valeurs propres du laplacien  $\Delta_h$ , la conclusion résulte du lemme de topologie énoncé dans l'introduction.

*Remarque finale.* Que se passe-t-il dans le cas de la dimension 2? La méthode utilisée ne marche pas dans le §III à cause de l'exposant  $\epsilon^{(d/2)-1}$ . On peut cependant être tenté de faire la

**CONJECTURE.** Si  $X$  est une surface compacte de genre  $g$  et  $m_1(g)$  la multiplicité maximale de la première valeur propre non nulle du laplacien d'une métrique riemannienne sur  $X$ . Alors  $m_1(g) = C(g) - 1$  où  $C(g) = \max_N \{\Gamma_N \text{ est plongeable dans } X\}$ . En fait ([RL]),

$$C(g) = E[\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{48g + 1}].$$

Cette conjecture est vérifiée pour  $g = 0$ :  $m_1(0) = 3$ , d'après [CG] et pour  $g = 1$ :  $m_1(1) = 6$ , d'après [BN]. Une minoration  $m_1(g) \geq C(g) - 1$  pourrait résulter d'une méthode voisine de celle utilisée ici. Je ne vois pas bien comment obtenir la majoration (pour la minoration dans le cas à courbure constante voir aussi [B-C]).

## BIBLIOGRAPHIE

- [AD] ARNOLD, V. I., *Modes and quasi-modes*, J. of Functional Analysis 6, 94–101 (1972).
- [BN] BESSON, G., *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes*, Ann. Inst. Fourier 30, 109–128 (1980).
- [B-C] BURGER, M. et COLBOIS, B., *A propos de la multifilicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann*. Comptes Rendus de l'Ac. des Sc. de Paris 300, 247–250 (1985).
- [B-B] BERARD-BERGERY, L. et BOURGUIGNON, J. P., *Laplacians and Riemannian submersions with totally geodesics fibres*, Illinois J. of Math. 26, 181–200 (1982).
- [CG] CHENG, S. Y., *Eigenfunctions and nodal sets*, Comm. Math. Helv. 51, 43–55 (1979).
- [KO] KATO, T., *Perturbation theory for linear operators* (Springer 1976).
- [RL] RINGEL, G., *Map color theorem* (Springer 1974).
- [UA] URAKAWA, H., *On the least eigenvalue of the laplacian for compact group manifold*, J. Math. Soc. of Japan 31, 209–226 (1979).

*Université de Grenoble*

*Institut Fourier*

*B.P. 74*

*F38402 Sait-Martin-d'Hères*

*France*

Reçu le 14 Octobre 1985