

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 60 (1985)

Artikel: Ein Fortsetzungssatz für quasikonforme Deformationen.
Autor: Meyer, Chr. A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-46325>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ein Fortsetzungssatz für quasikonforme Deformationen

CHR. A. MEYER⁽¹⁾

I. Einleitung

Eine stetige Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine quasikonforme Deformation, falls

$$\|f\|_Q = \sup_{\substack{a, b, x \in \mathbb{R}^n \\ |a|=|b| \neq 0}} \left| \frac{\langle a, f(x+a) - f(x) \rangle}{|a|^2} - \frac{\langle b, f(x+b) - f(x) \rangle}{|b|^2} \right|$$

endlich ist. Solche Funktionen sind von Bedeutung für die Theorie der quasikonformen Abbildungen, da sie einen quasikonformen Fluss erzeugen: Die Lösungen $h(x, t)$ der Differenzialgleichung

$$\frac{d}{dt} h = f(h)$$

mit Anfangsbedingung $h(x, 0) = x$ bilden eine Einparametergruppe von quasikonformen Abbildungen (siehe [2], [5]).

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass sich die quasikonformen Deformationen durch eine Approximationseigenschaft charakterisieren lassen (Satz 1). Für $n = 2$ lässt sich dieses Resultat in komplexer Notation folgendermassen formulieren: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine quasikonforme Deformation, falls für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\rho > 0$ eine komplex-affine Funktion $p(z) = az + b$ existiert, so dass

$$\sup_{|z-z_0| \leq \rho} |f(z) - p(z)| \leq \alpha \rho.$$

Die nur von f abhängige reelle Konstante α steht in direkter Relation zu $\|f\|_Q$. Für $n \geq 3$ treten die Elemente der Lie-Algebra der Gruppe der linearen Aehnlichkeitstransformationen an die Stelle der komplex-linearen Funktionen.

¹Der Autor wurde während seines Forschungsaufenthaltes in West-Berlin 1983/84 vom Schweizerischen Nationalfonds unterstützt.

Im zweiten Teil der Arbeit wird das Problem der Fortsetzbarkeit von Funktionen f untersucht, welche auf geeigneten Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert sind und eine Approximationseigenschaft haben: Lässt sich f auf M durch affine Funktionen der Form

$$p(x) = Tx + \lambda x + a \quad (T^T = -T, \lambda \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n)$$

approximieren, so kann f zu einer quasikonformen Deformation auf \mathbb{R}^n fortgesetzt werden (Satz 2).

Die zusätzliche Voraussetzung, die an M gestellt werden muss, drückt aus, dass M genügend Punkte in gleichmässiger Verteilung aufweist (Definition 4). Wie ein Beispiel belegt, kann auf diese Voraussetzung nicht verzichtet werden.

II. Eine Charakterisierung der quasikonformen Deformationen

DEFINITION 1. Für Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\|f\|_Z = \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}^n \\ y \neq 0}} \frac{|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)|}{|y|},$$

$$\|f\|_Q = \sup_{\substack{a, b, x \in \mathbb{R}^n \\ |a|=|b| \neq 0}} \left| \frac{\langle a, f(x+a) - f(x) \rangle}{|a|^2} - \frac{\langle b, f(x+b) - f(x) \rangle}{|b|^2} \right|.$$

($\langle x, y \rangle$ ist das euklidische Skalarprodukt von x und y .) f ist eine quasikonforme Deformation, falls f stetig ist und $\|f\|_Q < \infty$ gilt.

HILFSSATZ 1. Für stetige Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt

a) $\|f\|_Z \leq 4 \|f\|_Q$,

b)
$$\left| \frac{\langle a, f(x+a) - f(x) \rangle}{|a|^2} - \frac{\langle b, f(x+b) - f(x) \rangle}{|b|^2} \right|$$

$$\leq \|f\|_Q \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2 \ln 2} \left| \ln \frac{|b|}{|a|} \right| \right) \quad (a, b, x \in \mathbb{R}^n, a \neq 0 \neq b).$$

Für die Beweise siehe [5], p. 251 und p. 255–257.

HILFSSATZ 2. Für stetige Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\|f\|_Z < \infty$ und

beschränkte Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sup_{x \in \text{conv}(M)} |f(x)| \leq \sup_{x \in M} |f(x)| + \frac{1}{2}(n+1) \|f\|_Z \text{diam}(M).$$

(conv(M) ist die konvexe Hülle der Menge M .)

Beweis. Nach dem Satz von Carathéodory über konvexe Mengen nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $M = \{a_k : k = 1, \dots, n+1\}$ an (siehe [3], p. 15).

Wir setzen für $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\sigma_i = \sup \left\{ \left| f \left(2^{-i} \sum_{k=1}^{n+1} j_k a_k \right) \right| : j_1, \dots, j_{n+1} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \sum_{k=1}^{n+1} j_k = 2^i \right\}.$$

Es sei $i \in \mathbb{N}$, $j_1, \dots, j_{n+1} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und

$$\sum_{k=1}^{n+1} j_k = 2^i.$$

Wir bestimmen Zahlen $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}$, so dass

$$\varepsilon_k \in \{-1, 0, 1\},$$

$j_k + \varepsilon_k$ ist gerade ($k = 1, \dots, n+1$),

$$\sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k = 0.$$

In der Ungleichung

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}(|f(x+y)| + |f(x-y)|) + \frac{1}{2} \|f\|_Z |y| \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

wird

$$x = 2^{-i} \sum_{k=1}^{n+1} j_k a_k \quad \text{und} \quad y = 2^{-i} \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k a_k$$

eingesetzt. Es folgt

$$|f(x)| \leq \sigma_{i-1} + 2^{-i-1}(n+1) \|f\|_Z \text{diam}(M).$$

Insgesamt haben wir das Ungleichungssystem

$$\sigma_0 \leq \sup_{x \in M} |f(x)|,$$

$$\sigma_i \leq \sigma_{i-1} + 2^{-i-1}(n+1) \|f\|_Z \operatorname{diam}(M) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Es folgt

$$\sigma_i \leq \sup_{x \in M} |f(x)| + \frac{1}{2}(n+1) \|f\|_Z \operatorname{diam}(M) \quad (i \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Die Behauptung ist bewiesen, da f stetig ist.

Im folgenden Satz werden die quasikonformen Deformationen durch eine Approximationseigenschaft charakterisiert. Die approximierenden Funktionen $p \in A$ sind diejenigen quasikonformen Deformationen $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\|p\|_Q = 0$. Nach [1] (p. 241) sind dies spezielle affine Transformationen.

DEFINITION 2. A ist die Klasse aller affinen Transformationen $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, welche folgende Bedingung erfüllen: Es existieren $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ und eine schiefsymmetrische Matrix T , so dass

$$p(x) = Tx + \lambda x + a \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Bemerkung. Für $n = 2$ enthält A genau die komplexen Polynome höchstens ersten Grades.

DEFINITION 3. Für $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definieren wir die Klasse $A_{\alpha, M}$ der Funktionen $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch folgende Bedingung: Für alle $x_0 \in M$ und alle $\rho \in \mathbb{R}^+$ existiert ein $p \in A$, so dass

$$\sup \{|f(x) - p(x)| : x \in M, |x - x_0| \leq \rho\} \leq \alpha \rho.$$

Wir setzen für $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\|f\|_{A, M} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} : f \in A_{\alpha, M}\}.$$

Wir kürzen ab: $\|f\|_{A, \mathbb{R}^n} = \|f\|_A$. (\mathbb{R}^+ ist die Menge der positiven reellen Zahlen.)

In Hinblick auf Satz 2 bemerken wir folgendes.

Bemerkung. Aus $\|f\|_{A, M} < \infty$ folgt, dass f sich stetig auf die abgeschlossene

Hülle $cl(M)$ von M fortsetzen lässt und für die stetige Fortsetzung \tilde{f} gilt

$$\|\tilde{f}\|_{A, cl(M)} = \|f\|_{A, M}.$$

Für stetige Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind die Halbnormen $\|\cdot\|_Q$ und $\|\cdot\|_A$ äquivalent:

SATZ 1. *Es existieren nur von der Dimension n abhängige Konstanten $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^+$, so dass*

$$\gamma_1 \|f\|_A \leq \|f\|_Q \leq \gamma_2 \|f\|_A$$

für alle stetigen Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Beweis. 1) Nachweis von $\|f\|_Q \leq \gamma_2 \|f\|_A$: Für $a, b, x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $|a| = |b| \neq 0$ existiert ein $p \in A$, so dass

$$\sup_{|x-x_0| \leq |a|} |f(x) - p(x)| \leq |a| \|f\|_A.$$

Aus der Schwarz'schen Ungleichung folgt mit der Abkürzung $g = f - p$ wegen $\|p\|_Q = 0$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\langle a, f(x_0+a) - f(x_0) \rangle}{|a|^2} - \frac{\langle b, f(x_0+b) - f(x_0) \rangle}{|b|^2} \right| \\ &= \left| \frac{\langle a, g(x_0+a) - g(x_0) \rangle}{|a|^2} - \frac{\langle b, g(x_0+b) - g(x_0) \rangle}{|b|^2} \right| \\ &\leq 4 \|f\|_A. \end{aligned}$$

Es ist somit $\|f\|_Q \leq 4 \|f\|_A$.

2) Nachweis von $\gamma_1 \|f\|_A \leq \|f\|_Q$: $\{e_1, \dots, e_n\}$ sei die Standardbasis in \mathbb{R}^n . Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\rho \in \mathbb{R}^+$ definieren wir mit der Abkürzung $e = \sum_{i=1}^n e_i$ die Hilfsfunktionen $\tilde{f}, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ folgendermassen: $\tilde{f}(x) = f(2n\rho x + x_0 - \rho e) - f(x_0 - \rho e)$,

$$g(x) = \tilde{f}(x) - \langle e_1, \tilde{f}(e_1) \rangle \cdot x \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Es ist

$$\|g\|_Q = 2n\rho \|f\|_Q, \quad g(0) = 0, \quad \langle e_1, g(e_1) \rangle = 0.$$

Die affine Abbildung $y = 2n\rho x + x_0 - \rho e$ bildet die Kugel $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - (2n)^{-1}e| \leq (2n)^{-1}\}$ auf die Kugel $\{y \in \mathbb{R}^n : |y - x_0| \leq \rho\}$ ab und es ist $K \subseteq \text{conv}(\{0, e_1, \dots, e_n\})$. Wir approximieren daher g in $\text{conv}(\{0, e_1, \dots, e_n\})$ durch Funktionen aus A . Im folgenden bezeichnen wir mit β_1, \dots, β_4 nur von der Dimension n abhängige Konstanten aus \mathbb{R}^+ . Wir wenden Hilfssatz 1b) an und finden unter Berücksichtigung von $g(0) = 0$

$$\begin{aligned} |\langle e_i, g(e_i) \rangle| &= |\langle e_i, g(e_i) \rangle - \langle e_1, g(e_1) \rangle| \leq \|g\|_Q, \\ |\langle e_i, g(2e_i) \rangle| &= 2 \left| \frac{\langle 2e_i, g(2e_i) \rangle}{|2e_i|^2} - \frac{\langle e_1, g(e_1) \rangle}{|e_1|^2} \right| \leq \beta_1 \|g\|_Q \quad (i = 1, \dots, n), \\ \left| \frac{\langle e_j - e_i, g(e_j) - g(e_i) \rangle}{|e_j - e_i|^2} - \frac{\langle e_i, g(2e_i) - g(e_i) \rangle}{|e_i|^2} \right| &\leq \beta_2 \|g\|_Q \quad (i, j = 1, \dots, n; i \neq j). \end{aligned}$$

Es folgt

$$|\langle e_i, g(e_j) \rangle + \langle e_j, g(e_i) \rangle| \leq \beta_3 \|g\|_Q \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Wir definieren die lineare Funktion $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\langle e_i, T(e_j) \rangle = \frac{1}{2}(\langle e_i, g(e_j) \rangle - \langle e_j, g(e_i) \rangle) \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Es ist $T \in A$ und

$$\begin{aligned} |g(e_i) - T(e_i)| &\leq n^{1/2} \max_{j=1, \dots, n} \frac{1}{2} |\langle e_i, g(e_j) \rangle + \langle e_j, g(e_i) \rangle| \\ &\leq \frac{1}{2} n^{1/2} \beta_3 \|g\|_Q \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 1a) gilt

$$\|g - T\|_Z = \|g\|_Z \leq 4 \|g\|_Q.$$

Wir wenden Hilfssatz 2 an und finden

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K} |g(x) - T(x)| &\leq \sup \{|g(x) - T(x)| : x \in \text{conv}(\{0, e_1, \dots, e_n\})\} \\ &\leq \frac{1}{2} n^{1/2} \beta_3 \|g\|_Q + (2n + 2) \|g\|_Q 2^{1/2} = \beta_4 \|g\|_Q = \beta_4 2n \|f\|_Q \rho. \end{aligned}$$

Wir setzen die Definition von g ein und es folgt

$$\|f\|_A \leq \beta_4 2n \|f\|_Q.$$

Bemerkung. Der Beweis zeigt, dass in Satz 1

$$\gamma_1 = (n(4 \cdot 2^{1/2}(n+1) + \frac{1}{2} \cdot 43 \cdot n^{1/2}))^{-1} \quad \text{und} \\ \gamma_2 = 4$$

gewählt werden können.

III. Der Fortsetzungssatz

HILFSSATZ 3. *Es sei $\{x_i : i = 1, \dots, n-1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) linear unabhängig, $p \in A$ und $p(0) = 0$. Dann gilt*

$$|p(x)| \leq \frac{2(n-1) \max_{i=1, \dots, n-1} |p(x_i)| \left(\max_{i=1, \dots, n-1} |x_i| \right)^{n-2}}{(\det (\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j=1, \dots, n-1})^{1/2}} |x| \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Beweis. Wir setzen $\delta = \det (\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j=1, \dots, n-1}$,

$$\mu = \max_{i=1, \dots, n-1} |x_i|, \quad \nu = \max_{i=1, \dots, n-1} |p(x_i)|.$$

Aus $y = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$) folgt

$$|\alpha_i| \leq \delta^{-1/2} \mu^{n-2} |y| \quad (i = 1, \dots, n-1), \\ |p(y)| \leq (n-1) \delta^{-1/2} \nu \mu^{n-2} |y| \quad (\text{siehe [6], p. 10, p.23-24}).$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ geben wir die folgenden orthogonalen Zerlegungen an:

$$x = y_1 + z_1, \\ p(z_1) = y_2 + z_2.$$

y_1 und y_2 liegen in der linearen Hülle L von $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$, z_1 und z_2 im orthogonalen Komplement von L . Wegen $p \in A$ gilt

$$|y_2|^2 = \langle y_2, p(z_1) \rangle = -\langle z_1, p(y_2) \rangle \leq (n-1) \delta^{-1/2} \nu \mu^{n-2} |z_1| |y_2|, \\ |y_2| \leq (n-1) \delta^{-1/2} \nu \mu^{n-2} |z_1|.$$

Auf ähnliche Weise finden wir

$$|z_2| \leq (n-1)\delta^{-1/2}\nu\mu^{n-2}|z_1|.$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} |p(x)| &\leq |p(y_1)| + (|y_2|^2 + |z_2|^2)^{1/2} \\ &\leq 2(n-1)\delta^{-1/2}\nu\mu^{n-2}|x| \quad (x \in \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

DEFINITION 4. Wir setzen $n \geq 2$ voraus. Eine nicht-leere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Element von \mathfrak{M}_γ ($\gamma \in \mathbb{R}$, $0 < \gamma \leq 1$), wenn sie folgende Eigenschaft besitzt: Für alle $x_0 \in M$ und für alle $\rho \in \mathbb{R}$ mit $0 < \rho \leq \text{diam}(M)$ existieren $x_1, \dots, x_{n-1} \in M$, so dass $|x_i - x_0| \leq \rho$ ($i = 1, \dots, n-1$) und

$$(\det((x_i - x_0, x_j - x_0)_{i,j=1,\dots,n-1}))^{1/2} \geq (\gamma\rho)^{n-1}.$$

Beispiele. Die folgenden Mengen sind in $\bigcup_{0 < \gamma \leq 1} \mathfrak{M}_\gamma$:

- 1) Halbräume und Kugeln in \mathbb{R}^n .
- 2) Hyperebenen und Sphären in \mathbb{R}^n .
- 3) Für $n = 2$ jede nicht-leere und zusammenhängende Menge in \mathbb{R}^n .

SATZ 2. Wir setzen $n \geq 2$ voraus. Es sei $F \in \mathfrak{M}_\gamma$ und $\text{cl}(F) = F$. Die Funktionen $f: F \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\|f\|_{A,F} < \infty$ lassen sich zu stetigen Funktionen $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fortsetzen, derart dass die Ungleichung

$$\|g\|_Q \leq \beta_0 \gamma^{-n} \|f\|_{A,F}$$

mit einer nur von der Dimension n abhängigen Konstanten β_0 ($\beta_0 \in \mathbb{R}^+$) erfüllt ist.

Beweis. Für $F = \mathbb{R}^n$ genügt Satz 1 und für einelementiges F ist Satz 2 trivial. Wir setzen daher voraus, dass F mindestens zwei Elemente enthält und $F \neq \mathbb{R}^n$ ist. Im folgenden bezeichnen wir mit $\beta_1, \dots, \beta_{16} \in \mathbb{R}^+$ und $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ nur von der Dimension n abhängige Konstanten. Wir setzen $G = \mathbb{R}^n \setminus F$ und führen für G eine Familie von achsenparallelen und abgeschlossenen Würfeln $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und eine Teilung der Eins $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein, so dass folgendes gilt:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i = G, \tag{1}$$

$$\text{int}(Q_i) \cap \text{int}(Q_j) = \emptyset \quad (i \neq j), \tag{2}$$

$$\beta_1^{-1} \text{diam}(Q_i) \leq \text{dist}(F, Q_i) \leq \beta_2 \text{diam}(Q_i), \tag{3}$$

$$\beta_3^{-1} \text{diam}(Q_j) \leq \text{diam}(Q_i) \leq \beta_3 \text{diam}(Q_j) \quad (Q_i \cap Q_j \neq \emptyset), \quad (4)$$

$$\phi_i : G \rightarrow \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) = 1 \quad (x \in G), \quad (6)$$

$$\text{Für } Q_i \cap Q_j = \emptyset \text{ und } x \in Q_j \text{ ist } \phi_i(x) = 0, \quad (7)$$

$$|\phi_i(x) - \phi_i(y)| \leq \beta_4 (\text{diam}(Q_i))^{-1} |x - y| \quad (x, y \in G). \quad (8)$$

$(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist eine Whitneyzerlegung von G (siehe [7], p. 166–170). Für $a_i \in F$ sei $\text{dist}(a_i, Q_i) = \text{dist}(F, Q_i)$ ($i \in \mathbb{N}$). Wir setzen

$$\rho_i = \text{dist}(F, Q_i),$$

$$K_i = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a_i| \leq \rho_i\} \quad (i \in \mathbb{N}),$$

$$\|f\| = \|f\|_{A,F}.$$

Wir führen eine Folge $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein, so dass $p_i \in A$,

$$\sup \{|f(x) - p_i(x)| : x \in F \cap K_i\} \leq \|f\| \text{diam}(F \cap K_i) \quad (9)$$

und definieren die Fortsetzung g durch

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in F \\ \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) p_i(x) & x \in G. \end{cases}$$

Wir schätzen $\|g\|_A$ ab. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\rho \in \mathbb{R}^+$ setzen wir

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq \rho\},$$

$$\delta = \text{dist}(F, K).$$

Für $a \in F$ sei $\delta = \text{dist}(a, K)$. Wir definieren:

$$U_i = \{j \in \mathbb{N} : Q_i \cap Q_j \neq \emptyset\} \quad (i \in \mathbb{N}),$$

$$\tilde{Q}_i = \bigcup_{j \in U_i} Q_j \quad (i \in \mathbb{N}),$$

$$U = \bigcup_{Q_i \cap K \neq \emptyset} U_i.$$

Nach (3) und (4) ist

$$\text{diam}(Q_i) \leq \beta_1 \beta_3 (\delta + 2\rho) \quad (i \in U). \quad (10)$$

Es folgt nach (3)

$$\rho_i \leq \beta_1 \beta_2 \beta_3 (\delta + 2\rho), \quad (11)$$

$$|a - a_i| \leq \beta_5 (\delta + \rho) \quad (i \in U). \quad (12)$$

Wir setzen

$$\tilde{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq (2\beta_1 \beta_2 \beta_3 + \beta_5)(\delta + \rho)\}.$$

Nach (11) und (12) gilt

$$K \cup \left(\bigcup_{i \in U} K_i \right) \subseteq \tilde{K}. \quad (13)$$

Wir führen ein $p \in A$ ein, so dass

$$\sup \{|f(x) - p(x)| : x \in F \cap \tilde{K}\} \leq \|f\| \text{diam}(F \cap \tilde{K}). \quad (14)$$

Es sei $i \in U$.

Ist $\rho_i > \text{diam}(F)$, so folgt nach (13)

$$\text{diam}(F \cap K_i) = \text{diam}(F \cap \tilde{K}).$$

Ist $\rho_i \leq \text{diam}(F)$, so existieren wegen $F \in \mathfrak{M}_\gamma$ $y_1, \dots, y_{n-1} \in F \cap K_i$, derart dass

$$\begin{aligned} (\text{diam}(F \cap K_i))^{n-1} &\geq \prod_{k=1}^{n-1} |y_k - a_i| \\ &\geq (\det(\langle\langle y_k - a_i, y_l - a_i \rangle\rangle_{k,l=1,\dots,n-1}))^{1/2} \\ &\geq (\gamma \rho_i)^{n-1}, \end{aligned}$$

$\text{diam}(F \cap K_i) \geq \gamma \rho_i$ (siehe [6], p. 23–24).

In beiden Fällen folgt unter Verwendung von (11)

$$\text{diam}(F \cap \tilde{K}) \leq \beta_6 (\gamma \rho_i)^{-1} (\delta + \rho) \text{diam}(F \cap K_i) \quad (i \in U). \quad (15)$$

Es sei $i \in U$. Wir führen $x_1, \dots, x_{n-1} \in F \cap K_i$ ein, so dass

$$(\det(\langle\langle x_k - a_i, x_l - a_i \rangle\rangle_{k,l=1,\dots,n-1}))^{1/2} \geq (\frac{1}{2} \gamma \text{diam}(F \cap K_i))^{n-1}. \quad (16)$$

Die Existenz folgt aus $F \in \mathfrak{M}_\gamma$. Aus (9), (11), (14) und (15) schliessen wir

$$\begin{aligned} |p_i(a_i) - p(a_i)|, |p_i(x_k) - p(x_k)| &\leq \|f\| (\text{diam}(F \cap K_i) + \text{diam}(F \cap \tilde{K})) \\ &\leq \beta_7 \|f\| (\gamma \rho_i)^{-1} (\delta + \rho) \text{diam}(F \cap K_i) \quad (k = 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Wir wenden Hilfssatz 3 an und benutzen (16). Es folgt

$$\begin{aligned} |p_i(x + a_i) - p(x + a_i) - p_i(a_i) + p(a_i)| \\ \leq (n-1)2^{n+1}\beta_7 \|f\| \gamma^{-n} \rho_i^{-1} (\delta + \rho) |x| \quad (i \in U, x \in \mathbb{R}^n), \\ |p_i(x) - p(x)| \leq \beta_8 \|f\| \gamma^{-n} (\delta + \rho) (1 + \rho_i^{-1} |x - a_i|) \quad (i \in U, x \in \mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (17)$$

Nach (3) und (4) ist

$$|x - a_i| \leq (1 + \beta_1 + \beta_1 \beta_3) \rho_i \quad (i \in \mathbb{N}, x \in \tilde{Q}_i).$$

Durch Einsetzen in (17) finden wir

$$|p_i(x) - p(x)| \leq \beta_9 \gamma^{-n} \|f\| (\delta + \rho) \quad (i \in U, x \in \tilde{Q}_i). \quad (18)$$

Es werden zwei Fälle unterschieden.

1. FALL $\delta \leq \rho$. Wir schätzen $\sup \{|g(x) - p(x)| : x \in K\}$ ab. Für $x \in F \cap K$ ist nach (13) und (14)

$$|g(x) - p(x)| = |f(x) - p(x)| \leq \beta_{10} \|f\| \rho.$$

Wegen (4) hat U_i ($i \in \mathbb{N}$) höchstens m_1 Elemente. Wir wenden (6), (7) und (18) an und finden für $x \in K \cap Q_i$ ($i \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} |g(x) - p(x)| &\leq \sum_{j \in U_i} \phi_j(x) |p_j(x) - p(x)| \\ &\leq \sum_{j \in U_i} |p_j(x) - p(x)| \leq m_1 \beta_9 \gamma^{-n} \|f\| (\delta + \rho) \\ &\leq 2m_1 \beta_9 \gamma^{-n} \|f\| \rho. \end{aligned}$$

Es ist $\sup \{|g(x) - p(x)| : x \in K\} \leq \beta_{11} \gamma^{-n} \|f\| \rho$.

2. FALL $\delta > \rho$. Wir schätzen $\sup \{|g(x) - \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x_0) p_i(x)| : x \in K\}$ ab. Durch

Anwendung von (6), (7) und (8) finden wir

$$\begin{aligned} \left| g(x) - \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x_0) p_i(x) \right| &= \left| \sum_{i \in U} (\phi_i(x) - \phi_i(x_0))(p_i(x) - p(x)) \right| \\ &\leq \beta_{4\rho} \sum_{i \in U} (\text{diam}(Q_i))^{-1} |p_i(x) - p(x)| \quad (x \in K). \end{aligned} \quad (19)$$

Nach (3) und (4) ist

$$\text{diam}(Q_i) \geq \beta_{12}\delta > \beta_{12}\rho \quad (i \in U). \quad (20)$$

Nach (12) ist

$$|x - a_i| \leq |x - a| + |a - a_i| \leq \beta_{13}\delta \quad (i \in U, x \in K).$$

Aus (17) und (20) folgt somit

$$(\text{diam}(Q_i))^{-1} |p_i(x) - p(x)| \leq \beta_{14}\gamma^{-n} \|f\| \quad (i \in U, x \in K).$$

Aus (20) folgt, dass U höchstens m_2 Elemente aufweist. Wir setzen in (19) ein und finden

$$\sup \left\{ \left| g(x) - \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x_0) p_i(x) \right| : x \in K \right\} \leq \beta_{4\rho} m_2 \beta_{14} \gamma^{-n} \|f\| = \beta_{15} \gamma^{-n} \|f\| \rho.$$

Die Behandlung des zweiten Falles ist abgeschlossen. Wir haben $\|g\|_A \leq \beta_{16} \gamma^{-n} \|f\| < \infty$ nachgewiesen. Wegen $\|g\|_A < \infty$ kann leicht gezeigt werden, dass g stetig ist und nach Satz 1 gilt dann

$$\|g\|_Q \leq \beta_0 \gamma^{-n} \|f\|_{A,F}.$$

Dabei hängt $\beta_0 \in \mathbb{R}^+$ nur von der Dimension n ab.

Beispiel. Die Voraussetzung $F \in \mathfrak{M}_\gamma$ in Satz 2 ist wesentlich. Wir setzen

$$F = \{(0, 0)\} \cup \{(2^{-n}, 0) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(2^{-n} + 3^{-n}, 0) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

und definieren $f: F \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{aligned} f((0, 0)) &= f((2^{-n} + 3^{-n}, 0)) = (0, 0) \\ f((2^{-n}, 0)) &= (2^{-n}, 0) \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Es gilt $\|f\|_{A,F} < \infty$ und eine Betrachtung des Stetigkeitsmoduls zeigt, dass sich f nicht zu einer quasikonformen Deformation auf \mathbb{R}^2 fortsetzen lässt (siehe [4], p. 8 und [8], p. 44).

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] ACZÉL, J., *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart (1961).
- [2] AHLFORS, L. V., *Quasiconformal deformations and mappings in \mathbb{R}^n* . Jour. d'Analyse Math. 30 (1976), 74–97.
- [3] GRÜNBAUM, B., *Convex Polytopes*. Interscience publishers London (1967).
- [4] JONSSON, A. and WALLIN, H., *The trace to closed sets of functions with second difference of order $0(h)$* . University of Umeå, Department of Mathematics (1977).
- [5] REIMANN, H. M., *Ordinary differential equations and quasiconformal mappings*. Inventiones math. 33 (1976), 247–270.
- [6] SCHÖNHAGE, A., *Approximationstheorie*. Walter de Gruyter & Co, Berlin, New York (1971).
- [7] STEIN, E. M., *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1970).
- [8] ZYGMUND, A., *Trigonometric series. Vol. I*, Cambridge University Press, Cambridge (1979).

Burgerstr. 22
3063 Jttigen
(Schweiz)

Erhalten, 19. Juni 1984