

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 60 (1985)

**Artikel:** Nombre de ponts et générateurs méridiens des entrelacs de Montesinos.  
**Autor:** Boileau, Michel / Zieschang, Heiner  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46312>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Nombre de ponts et générateurs méridiens des entrelacs de Montesinos

MICHEL BOILEAU et HEINER ZIESCHANG

Un entrelacs est une famille finie de courbes fermées différentiables, plongée dans la sphère  $S^3$ . Un noeud est un entrelacs à une composante.

Une présentation à  $n$  ponts d'un entrelacs  $L$  dans  $S^3$  est donnée par une décomposition de  $S^3$  comme réunion de deux boules  $B_1 \cup B_2$  telles que  $L \cap B_1$  et  $L \cap B_2$  soient formés par  $n$  arcs simples, non noués et non enlacés, proprement plongés dans chaque boule. C'est-à-dire qu'il existe dans chaque boule  $B_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $n$  disques disjoints tels que le bord de l'un d'entre eux consiste en la réunion d'un arc de  $L \cap B_i$  et de l'intersection du disque avec  $\partial B_i$  (voir Figure 1a)). Tout entrelacs admet une présentation en ponts, que l'on appelle usuellement un "plat" ("Geflecht", voir G. Bankwitz – H. Schumann [BaS], H. Schubert [Sch], J. Birman [Bi], voir aussi Figure 1b)).

Le nombre de ponts (ou "bridge number")  $b(L)$  d'un entrelacs  $L$  est le plus petit entier positif  $n$  pour lequel  $L$  admet une présentation à  $n$  ponts. Si l'entrelacs  $L$  a une présentation à  $n$  ponts, le groupe  $\pi_1(S^3 - L)$  peut être engendré par  $n$  générateurs méridiens: c'est-à-dire des éléments qui sont représentés dans  $\pi_1(S^3 - L)$  par le bord d'un disque reconstruisant l'entrelacs  $L$  transversalement en un point (par exemple, les générateurs d'une présentation de Wirtinger de  $\pi_1(S^3 - L)$  sont des générateurs méridiens). On a donc  $b(L) \geq w(L)$ , où  $w(L)$  est le nombre minimal de générateurs méridiens nécessaires pour engendrer  $\pi_1(S^3 - L)$ .

S. Cappell and J. Shaneson [Ki, pb 1.11], ainsi que K. Murasugi, ont demandé si l'égalité  $b(L) = w(L)$  est vraie pour tout entrelacs  $L$  dans  $S^3$ . Nous donnons ici une réponse affirmative pour certains entrelacs  $L$  (cf. [BoZ<sub>1</sub>]).

Au §1, nous montrons que  $b(L) = w(L) = r$  pour les entrelacs de Montesinos à  $r \geq 3$  branches. Ces entrelacs sont définis et construits dans [Mo<sub>1</sub>] (voir aussi [Mo<sub>2</sub>], [Zi], [BuZ, ch. 12], [Bo], [BoS]); ils contiennent en particulier la classe des entrelacs de bretzel (voir [Re p. 9]. L'égalité  $b(L) = w(L)$  est évidente pour les entrelacs à 2 ponts ( $r \leq 2$ ).

An §2 nous étendons ces calculs aux cas des entrelacs de Montesinos généralisés (voir [Mo<sub>1</sub>], [Mo<sub>2</sub>]).

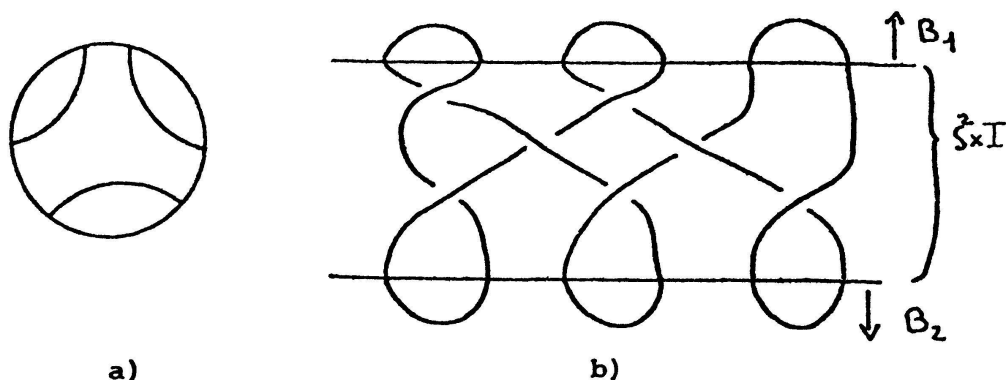


Figure 1

Ces résultats donnent en particulier le premier calcul explicite du nombre de ponts des entrelacs de Montesinos.

Un résultat analogue dans le cas des entrelacs toriques a été obtenu par M. Rost et le second auteur (voir [RoZ], Corollary 1.5).

Les auteurs tiennent à remercier vivement le Referee pour leur avoir suggérer l'utilisation du Lemme 1.6 qui permet de simplifier grandement la preuve du Théorème 1.1. C'est d'ailleurs la preuve très simple de ce lemme, donnée par le Referee, que nous reproduisons ici.

## 1. Nombre de ponts d'un entrelacs de Montesinos

Un entrelacs de Montesinos à  $r \geq 3$  branches admet une projection plane typique comme sur la Figure 2a) (voir [Mo<sub>1</sub>], [Mo<sub>2</sub>], [Zi], [BuZ, ch. 12]).

Sur la Figure 2a), l'entier  $e$  est le nombre de demi-tours positifs affichés, ainsi que les entiers  $a'_i$  et  $a''_i$  sur la Figure 2b). Chaque boîte  $\begin{array}{|c|} \hline \alpha_i, \beta_i \\ \hline \end{array}$  représente un tangle rationnel illustré sur la figure 2b) par un cardan (voir [BaS], [Mo<sub>2</sub>]); les entiers  $\alpha_i, \beta_i$  sont définis par la fraction continue

$$\alpha_i/\beta_i = \frac{1}{a_1 + (-a_2) + \cdots + (\pm a_n)}$$

et la condition que  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont premiers entre eux et  $\alpha_i > 0$ . Chaque tangle rationnel est classifié, à isotopie près respectant le bord de la boîte, par la fraction  $\beta_i/\alpha_i \in \mathbb{Q}$  (voir [Si], [Mo<sub>2</sub>]). On suppose dans la suite que les fractions  $\beta_i/\alpha_i$  ne sont jamais un entier  $n \in \mathbb{Z}$ , c'est-à-dire que les boîtes  $\begin{array}{|c|} \hline \alpha_i, \beta_i \\ \hline \end{array}$  ne sont jamais  $\begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array}$  auquel cas on pourrait simplifier la présentation du noeud cette dernière condition équivaut à supposer  $\alpha_i > 1$ ,  $1 \leq i \leq r$ .

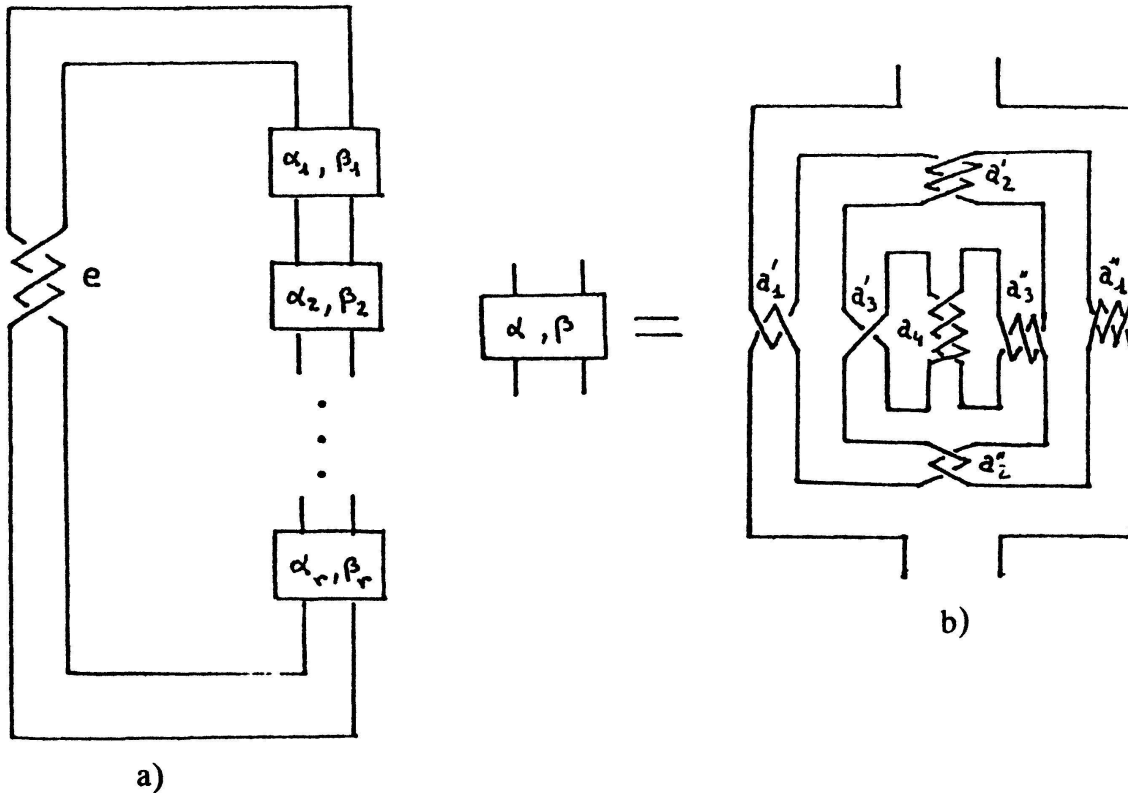


Figure 2a). Entrelacs de Montesinos  $m(0 \mid e; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$ .

Figure 2b). Tangle  $(\alpha, \beta)$   $\beta/\alpha = \frac{1}{a_1 + (-a_2) + \dots + (\pm a_n)}$  où  $a_i = a'_i + a''_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

1.1. THÉORÈME. Soit  $L = m(0 \mid e; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$  un entrelacs de Montesinos à  $r \geq 3$  branches, alors  $w(L) = b(L) = r$ .

Puisque  $w(L) \leq b(L)$ , la démonstration du Théorème 1.1 découle des deux affirmations suivantes:

1.2. AFFIRMATION.  $b(L) \leq r$

1.3. AFFIRMATION.  $w(L) \geq r$

1.4. Démonstration de l'Affirmation 1.2. D'après Bankwitz-Schumann [BaS], voir aussi [Mo<sub>2</sub>], [Zi], [BuZ<sub>2</sub>, ch. 12], tout cardan  $\boxed{\alpha, \beta}$  peut se mettre sous la forme  $\int T(\alpha, \beta)$ , où  $T(\alpha, \beta)$  est une tresse à trois brins comme sur la Figure 3.

En effet, il est toujours possible de décomposer  $\beta/\alpha$  en fraction continue avec un nombre impair de coefficients  $a_i$  (cf. [Si]). Puis, par des rotations de  $180^\circ$  de



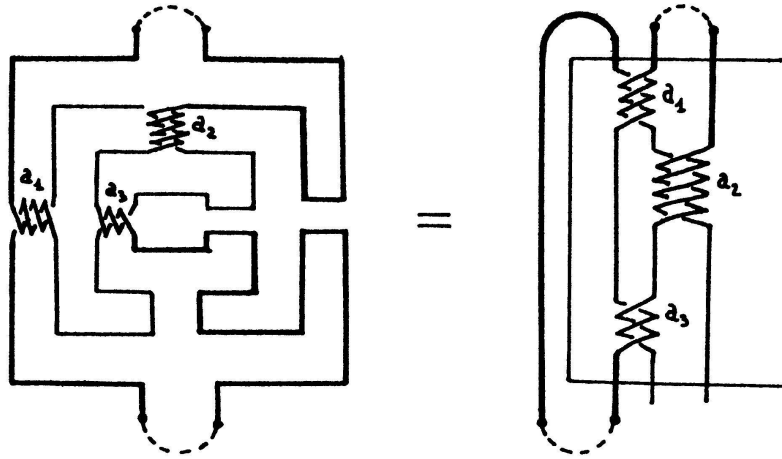


Figure 3

certaines parties du cardan autour d'axes horizontaux ou verticaux, on peut se ramener à un cardan comme sur la Figure 3 où tous les  $1/2$  tours  $a_i$  sont d'un même côté (voir Figure 4).

On en déduit alors aisément une présentation à  $r$  ponts de l'entrelacs de Montesinos  $m(0 | e; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$  (voir Figure 5). Ceci achève la démonstration de l'Affirmation 1.2.  $\square$

**1.5. Démonstration de l'Affirmation 1.3.** Soit  $V$  le revêtement double de  $S^3$ , ramifié le long de l'entrelacs de Montesinos  $L = m(0 | e; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$ . J. M. Montesinos ([Mo<sub>1</sub>], [Mo<sub>2</sub>], voir aussi [Zi], [BuZ, ch. 12]) a montré que le revêtement double ramifié  $V$  est une variété de Seifert de base  $S^2$ , ayant  $r$  fibres exceptionnelles de type  $(\alpha_i, \lambda_i)$  avec  $\lambda_i \beta_i \equiv 1 \pmod{\alpha_i}$  (voir [Se], [OVZ]).

De plus l'involution de revêtement  $\tau$  envoie fibre sur fibre et induit sur la base  $S^2$  une réflexion  $\rho$  par rapport à un grand cercle contenant l'image des  $r$  fibres exceptionnelles de  $V$  (voir Figure 6).

L'Affirmation 1.3 se déduit dans la plupart des cas du Lemme suivant qui nous a été signalé par le Referee et dont nous reproduisons ici la preuve.

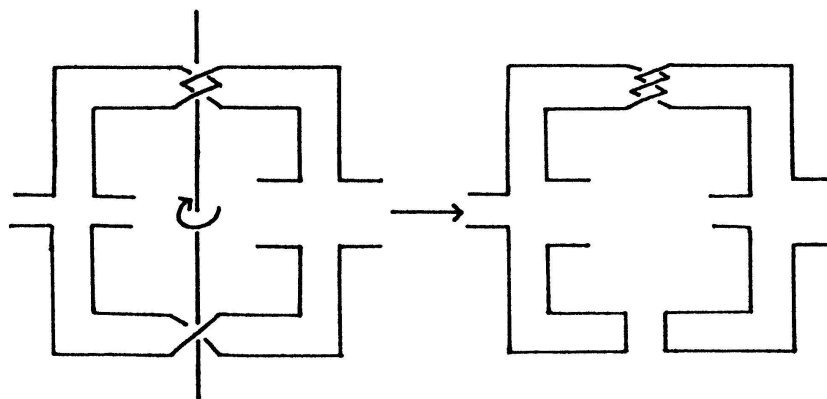


Figure 4

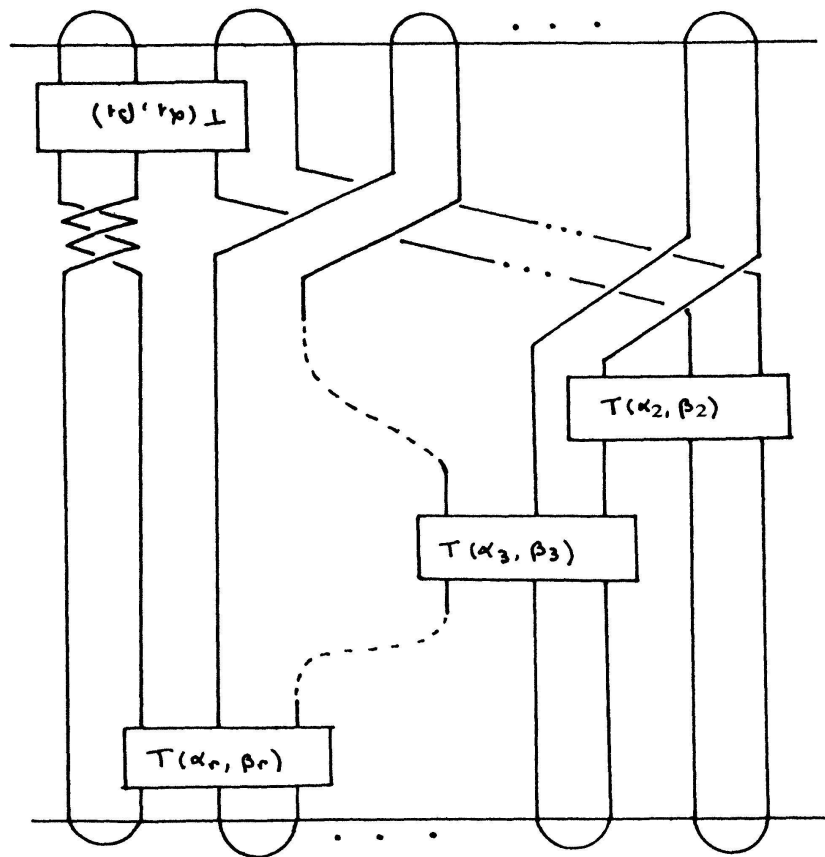


Figure 5

1.6. LEMME. Soit  $L$  un entrelacs dans  $S^3$  et  $V$  le revêtement double de  $S^3$  ramifié le long de  $L$ . Alors  $w(L) \geq 1 + \text{rang } \pi_1(V)$ , où  $\text{rang } \pi_1(V)$  désigne le nombre minimal d'éléments nécessaires pour engendrer  $\pi_1(V)$ .

*Démonstration.* Soit  $A = m_1 \vee m_2 \vee \cdots \vee m_w$  un bouquet de  $w$  cercles méridiens dans  $S^3 - L$ , tel que l'homomorphisme  $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(S^3 - L)$  induit par l'inclusion est surjectif. Si  $p: V \rightarrow S^3$  est le revêtement double de  $S^3$  ramifié le long de  $L$ , l'homomorphisme induit:  $\pi_1(p^{-1}(A)) \rightarrow \pi_1(V)$  est encore surjectif. Soient  $\bar{m}_i = p^{-1}(m_i)$ ,  $1 \leq i \leq w$ , comme  $\pi_1(p^{-1}(A)) / \langle \bar{m}_1, \dots, \bar{m}_w \rangle$  est libre de rang  $w-1$  et que  $\bar{m}_i$ ,  $1 \leq i \leq w$ , est homotope à zéro dans  $V$ , on obtient  $\text{rang } \pi_1(V) \leq w-1$ .  $\square$

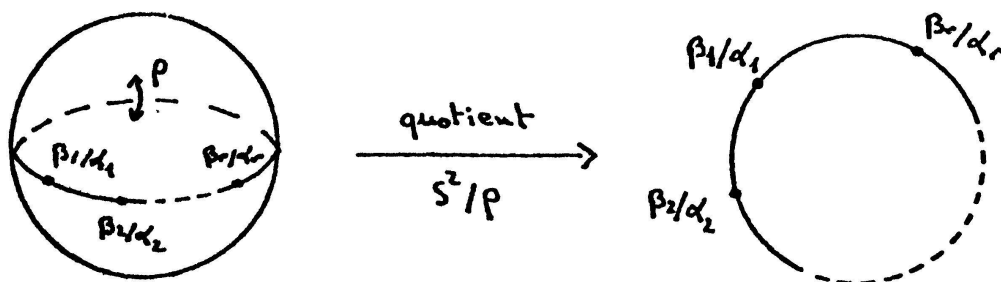


Figure 6

Soit  $\langle f \rangle$  le sous-groupe cyclique de  $\pi_1(V)$  engendré par la fibre ordinaire de la fibration de Seifert de  $V$ . Comme  $r \geq 3$ , le groupe quotient  $\Gamma = \pi_1(V)/\langle f \rangle$  s'identifie au sous-groupe des isométries du plan  $\mathbb{P}$  ( $\mathbb{P}$  est le plan sphérique  $S^2$ , euclidien  $\mathbb{E}^2$  ou hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ ) engendré par les rotations d'angles  $2\pi/\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , autour des sommets d'un polygone du plan  $\mathbb{P}$  ayant  $r$  côtés et d'angles  $\pi/\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq r$  (voir [OVZ]). On a l'inégalité  $\text{rang } \pi_1(V) \geq \text{rang } \Gamma$  (utilisée dans [BoZ<sub>2</sub>] pour calculer explicitement  $\text{rang } \pi_1(V)$ ).

D'après [PRZ, Satz 3]:

$$\text{rang } \Gamma = \begin{cases} r-2 & \text{si } r \text{ est pair, } r \geq 4, \text{ un des } \alpha_i \text{ est impair et tous les autres} \\ & \alpha_i \text{ sont égaux à } 2; \text{ donc } w(L) \geq r-2. \\ r-1 & \text{dans tous les autres cas; donc } w(L) \geq r-1. \end{cases}$$

Il reste donc à démontrer l'Affirmation 1.3 dans le cas suivant (après une renumérotation convenable):  $r$  pair,  $r \geq 4$ ,  $\alpha_i = 2$  ( $1 \leq i \leq r-1$ ),  $\alpha_r = 2\lambda + 1$  avec  $\lambda \geq 1$ .

Dans ce cas, l'entrelacs de Montesinos  $L = m(0 \mid e; (2, 1), (2, 1), \dots, (2, 1), (2\lambda + 1, \beta))$  admet  $r-1$  composantes, dont  $r-2$  sont triviales et la dernière est un noeud à 2 ponts non trivial. L'Affirmation 1.3 dans ce cas là découle alors du lemme suivant:

**1.7. LEMME.** Soit  $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$  un entrelacs quelconque qui est la réunion de  $n$  entrelacs  $L_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Alors, on a les inégalités:

$$b(L) \geq \sum_{i=1}^n b(L_i) \quad \text{et} \quad w(L) \geq \sum_{i=1}^n w(L_i).$$

*Démonstration.* Dans le cas du nombre de ponts  $b(L)$ , le lemme découle du fait qu'une présentation en ponts de  $L$  détermine une présentation en ponts des entrelacs  $L_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

Dans le cas du nombre de générateurs méridiens, on a  $w(L) = \sum_{i=1}^n w_i(L)$ , où  $w_i(L)$  désigne le nombre de générateurs, parmi les  $w(L)$  générateurs méridiens de  $\pi_1(S^3 - L)$ , qui sont représentés par le bord d'un disque rencontrant l'entrelacs  $L_i$  transversalement en un point. Soit alors  $N_i$  le sous-groupe de  $\pi_1(S^3 - L)$  normalement engendré par les éléments méridiens qui sont représentés par le bord d'un disque rencontrant  $L \setminus L_i$  en un point. Le groupe quotient  $\pi_1(S^3 - L)/N_i$  est isomorphe au groupe  $\pi_1(S^3 - L_i)$  et il peut être engendré par  $w_i(L)$  générateurs méridiens. D'où,  $w_i(L) \geq w(L_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) et l'inégalité cherchée en découle.  $\square$

**1.8. Remarque.** Les inégalités du lemme 2.2 sont bien connues. Dans les deux

cas, l'inégalité peut être stricte. Par exemple l'entrelacs de Montesinos  $m(0 \mid 1; (p, 1), (q, 1), (r, 1))$ ,  $p, q, r$  impairs  $> 1$ , vérifie  $w(L) = b(L) = 3$  d'après le Théorème 1.1, et il est la réunion de deux composantes non nouées. (Dans ce cas simple, il s'agit en fait d'un entrelacs de bretzel, le fait que  $w(L) = b(L) = 3$  peut être démontré sans utiliser [PRZ], il suffit de remarquer qu'un groupe triangulaire n'est jamais un groupe diédral).

## 2. Nombre de ponts des entrelacs de Montesinos généralisés

Un entrelacs de Montesinos généralisé  $m(-g \mid e; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$  (voir  $[Mo_1]$ ,  $[Mo_2]$ ) est la réunion d'un entrelacs de Montesinos classique  $m(0 \mid e; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$  et de  $g$  composantes non nouées et non enlacées, entourant la bande centrale de l'entrelacs de Montesinos comme sur la Figure 7.

Pour  $g \geq 1$ , J. M. Montesinos ( $[Mo_1]$ ,  $[Mo_2]$ ) a montré que le revêtement double ramifié  $V$  d'un tel entrelacs est une variété de Seifert ayant  $r$  fibres exceptionnelles de type  $(\alpha_i, \lambda_i)$ ,  $\alpha_i \beta_i \equiv 1 \pmod{\alpha_i}$ , et de base une surface non orientable de genre  $g$ . (Ceci justifie le signe  $-$  devant  $g$  dans la notation).

**2.1. THÉORÈME.** Soit  $L = m(-g \mid e; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$ ,  $g \geq 1$ , un entrelacs de Montesinos généralisé. Alors,

- i) Pour  $r \geq 2$ , on a  $w(L) = b(L) = g + r$ .
- ii) Pour  $r = 1$ , on a  $w(L) = b(L) = g + 1$  si  $\alpha_1 e - \beta_1 = \pm 1$ , sinon on a  $w(L) = b(L) = g + 2$ .

Pour  $r = 0$ , on a  $w(L) = b(L) = g + 1$  si  $e \equiv \pm 1$ , sinon on a  $w(L) = b(L) = g + 2$ .

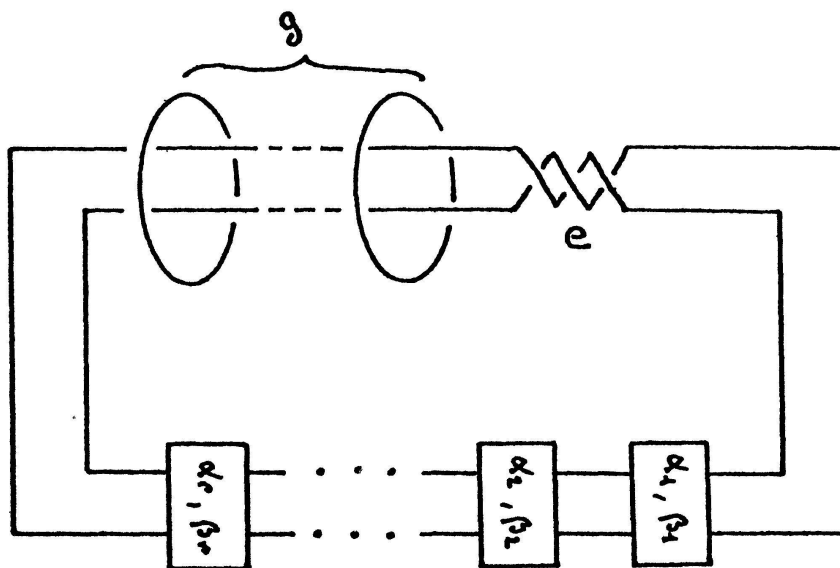


Figure 7. Entrelacs de Montesinos généralisé  $m(-g \mid e; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$ .

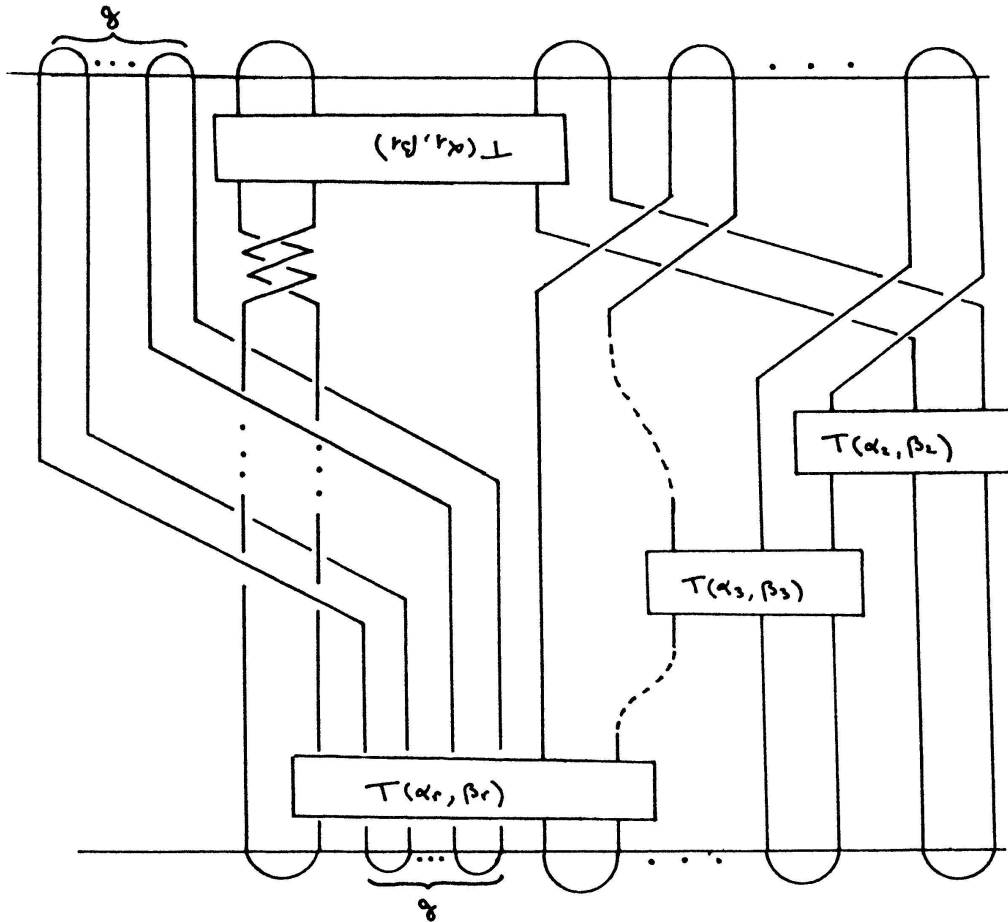
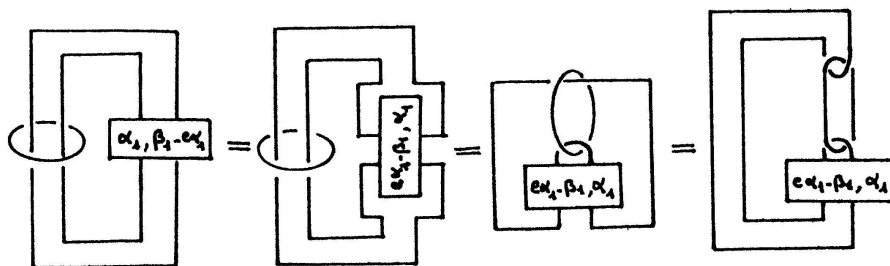
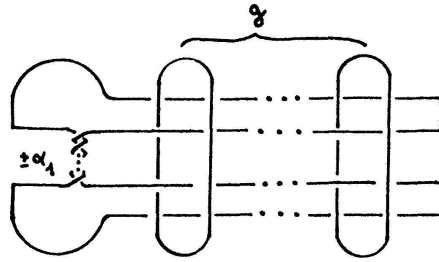


Figure 8

2.2. *Démonstration du Théorème 2.1.* Dans le cas i),  $r \geq 2$ , la démonstration découle, comme pour le Théorème 1.1, du Lemme 1.6, de la formule du rang pour le groupe quotient  $\pi_1(V)/\langle f \rangle$  (voir [PRZ], Satz 3, Korollar) et de la Figure 8 qui exhibe une présentation à  $g + r$  ponts de l'entrelacs de Montesinos généralisé.

Dans le cas ii), si  $r = 1$ , l'entrelacs  $L = m(-g | e; (\alpha_1, \beta_1))$  est une réunion  $L = L_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_g$ , où  $L_1 = m(-1 | e; (\alpha_1, \beta_1))$  et  $T_i$ ,  $2 \leq i \leq g$ , est un noeud trivial. D'après la Figure 9 (voir aussi [Mo<sub>1</sub>], [Mo<sub>2</sub>, Prop. 2])  $L_1 = m(-1 | e; (\alpha_1, \beta_1)) = m(-1 | 0; (\alpha_1, \beta_1 - e\alpha_1)) = m(0 | 0; (2, 1), (2, -1), (e\alpha_1 - \beta_1, \alpha_1))$ . D'après


 Figure 9.  $m(-1 | 0; (\alpha_1, \beta_1 - e\alpha_1)) \xrightarrow{\cong} m(0 | 0, (2, 1), (2, -1), (e\alpha_1 - \beta_1, \alpha_1))$

Figure 10.  $m(-g \mid 0; (\alpha_1, \pm 1))$ 

le Théorème 1.1, si  $e\alpha_1 - \beta_1 \neq \pm 1$ , on a  $w(L_1) = b(L_1) = 3$ , sinon  $L_1$  est un entrelacs à 2 ponts et on a  $w(L_1) = b(L_1) = 2$ .

La démonstration dans ce cas découle alors du Lemme 1.7 qui montre que  $w(L) \geq w(L_1) + g - 1$ , et des Figures 8 et 10 qui exhibent une présentation avec le nombre voulu de ponts dans chaque cas. (Voir en particulier la Figure 10 pour une présentation de  $L$  à  $g + 1$  ponts lorsque  $e\alpha_1 - \beta_1 = \pm 1$ .)

Si  $r = 0$ , ce cas se déduit du précédent en posant  $\alpha_1 = 1$  et  $\beta_1 = 0$ .  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [BaS] BANKWITZ, C. et SCHUMANN, H. G., *Über Viergeflechte*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 10 (1934), 263–284.
- [Bi] BIRMAN, J. S., *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Ann. Math. Studies 82, Princeton Press 1974.
- [Bo] BOILEAU, M., *Inversibilité des noeuds de Montesinos*, Thèse 3ème Cycle (1979), Publication d'Orsay 1981.
- [BoS] BOILEAU, M. et SIEBENMANN, L., *A planar classification of Pretzel knots and Montesinos knots*, Prépublication Orsay 1980.
- [BoZ<sub>1</sub>] BOILEAU, M. et ZIESCHANG, H., *Genre de Heegaard d'une variété de dimension 3 et générateurs de son groupe fondamental*, C.R. Acad. Sci. Paris. 296-I (1983), 925–928.
- [BoZ<sub>2</sub>] BOILEAU, M. et ZIESCHANG, H., *Heegaard genus of orientable Seifert fibre spaces*, Invent. math. 76 (1984), 455–468.
- [BuZ] BURDE, G. et ZIESCHANG, H., *Knots*, de Gruyter, Berlin – New York, 1984.
- [Ki] KIRBY, R., *Problems in low dimensional topology*, Proc. Symposia in Pure Math., vol. 32 (1978), 272–312.
- [Mo<sub>1</sub>] MONTESINOS, J. M., *Variedades de Seifert que son recubridores ciclicos ramificados de dos hojas*, Bol. Soc. Mat. Mexicana 18 (1973), 1–32.
- [Mo<sub>2</sub>] MONTESINOS, J. M., *Revêtements doubles ramifiés de noeuds, variétés de Seifert et diagramme de Heegaard*, Prépublication Orsay 1979.
- [OVZ] ORLIK, P., VOGT, E. und ZIESCHANG, H., *Zur Topologie gefaseter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten*, Topology 6 (1967), 49–64.
- [PRZ] PECZYNSKI, N., ROSENBERGER, G. und ZIESCHANG, H., *Über Erzeugender ebener diskontinuierlicher Gruppen*, Invent. Math. 29 (1975), 161–180.
- [Re] REIDEMEISTER, K., *Knotentheorie*, dans *Ergebnisse der Mathematik*, Vol 1 (1932), reprint Chelsea (1948) et Springer-Verlag (1974).
- [RoZ] ROST, M. et ZIESCHANG, H., *Meridional Generators and Plat Presentations of Torus Links*, Prépublication Bochum 1984.

- [Sch] SCHUBERT, H., *Über eine numerische Knoteninvariante*, Math. Z. 61 (1954), 245–288.
- [Se] SEIFERT, H., *Topologie dreidimensionaler gefaseter Räume*, Acta Math. 60 (1933), 147–238.
- [Si] SIEBENMANN, L., *Exercices sur les noeuds rationnels*, Polycopié Orsay (1975).
- [Zi] ZIESCHANG, H., *Classification of Montesinos knots*, in Topology Proceedings Leningrad 1982 (ed. L. D. Faddeev, A. A. Mal'cev). Lecture Notes Math. 1060, 378–389. Springer-Verlag (1984).

Universite de Geneve  
Section de Mathématiques  
Case Postale 240  
2–4, rue du Lièvre  
CH-1211 Geneve 24

Ruhr Universität Bochum  
Institut für Mathematik  
Postfach 102148  
D-4630 Bochum 1  
B.R.D.

Reçu le 24 janvier 1984/23 août 1984