

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	59 (1984)
<b>Artikel:</b>	Ueber den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf ausgewählten Beispielen kompakter Riemannscher Flächen.
<b>Autor:</b>	Jenni, Felix
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-45391">https://doi.org/10.5169/seals-45391</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ueber den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf ausgewählten Beispielen kompakter Riemannscher Flächen

FELIX JENNI

## 1. Einleitung

1.1. Zu  $\mu > 0$  betrachten wir das hyperbolische Spitzek G <sub>$\mu$</sub>  mit dem spitzen Winkel  $\pi/4$  und einer Seite der Länge  $\mu/8$  (Abb. 1).



Abb. 1

Aus 16 Exemplaren dieses Spitzeks erhalten wir durch geschickte Verheftung eine kompakte randlose Riemannsche Fläche F <sup>$\mu$</sup>  vom Geschlecht 2 (Abb. 2).

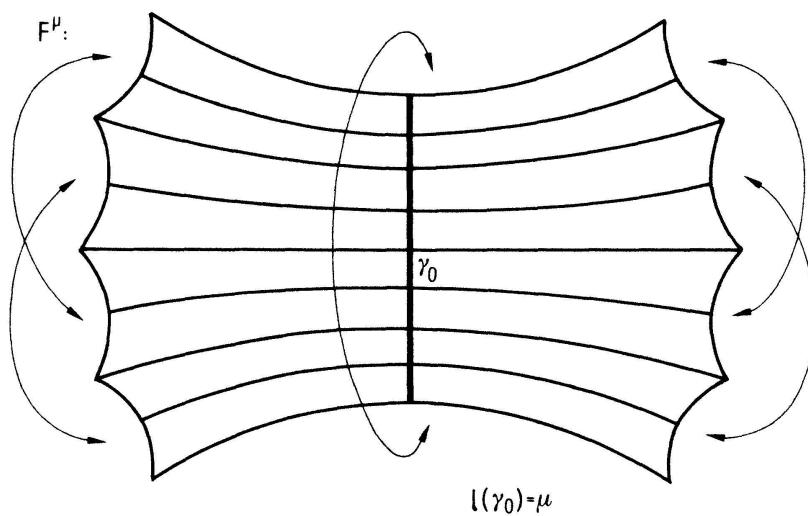


Abb. 2

$\gamma_0$  ist für  $\mu < \mu^* = 1,83\dots$  die kürzeste geschlossene Geodätische der Fläche F <sup>$\mu$</sup> .

Ueber das Spektrum des Laplace-Operators  $\Delta$  auf den Flächen  $F^\mu$  zeigen wir

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\mu}{\lambda_1(F^\mu)} &= \pi^2 \\ \lambda_1(F^\mu) < \frac{1}{4} &\quad \text{für } \mu < 1 \\ \lambda_2(F^\mu) > \frac{1}{4} &\quad \text{für } \mu > 0 \\ \dim E_{\lambda_1(F^\mu)} &= 1 \quad \text{für } \mu < 1. \end{aligned} \tag{A}$$

Obige Behauptung (A) wird im zeiten Abschnitt ausführlich bewiesen. Nachstehend werden noch analoge Resultate aus der Dissertation [6] vorgestellt, aber aus Platzgründen hier nicht bewiesen (Beweise vgl. [6]).

1.2. Zu  $g \geq 2$  betrachten wir diejenige kompakte Riemannsche Fläche  $F_g$ , die wir erhalten, wenn wir die gegenüberliegenden Seiten des regelmässigen hyperbolischen  $4g$ -Ecks mit Winkeln  $\pi/4g$  verheften. Für das Spektrum des Laplace-Operators  $\Delta$  auf den Flächen  $F_g$  erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{g \rightarrow \infty} g \cdot \lambda_1(F_g) &= 2 \\ \lambda_1(F_g) < \frac{1}{4} &\quad \text{für } g \geq 20 \\ \lambda_1(F_2) > \frac{1}{4} \\ \dim E_{\lambda_1(F_g)} &= 2 \quad \text{für } g \geq 20. \end{aligned} \tag{B}$$

*Genauere Untersuchung der Fläche  $F_2$  bringt die Verschärfungen*

$$3,83 < \lambda_1(F_2) < 3,85$$

$$\dim E_{\lambda_1(F_2)} = 3.$$

*und eine gute Abschätzung für  $\Lambda_1 = \sup_{F,g(F) \geq 2} \lambda_1(F)$ :*

$$3,83 < \Lambda_1 < 4,81. \tag{C}$$

Dieses allgemeine Resultat ist eine Ergänzung und Verbesserung des Resultates von Huber [5]:  $\Lambda_2 < 5,2$ . Der Beweis von (C) stützt sich wesentlich auf die nachfolgende Abschätzung der Länge  $l_0$  der kürzesten geschlossenen

Geodätischen hyperelliptischer Flächen:

$$L_0(g) = \sup_{\substack{F \text{ hyperell.} \\ g(F)=g}} l_0(F) \leq 4 \cdot \operatorname{Ar Cos} \frac{1}{2 \sin \frac{\pi(g+1)}{12g}} < 5,107. \quad (\text{D})$$

Gleichheit gilt für  $g = 2$  und  $g = 5$ .

## 2. Beweis von (A)

Wir benötigen dazu die Isometriegruppe  $I$  der Flächenschar  $F^\mu$  (2.1). Die Möglichkeit zu entscheiden, welche irreduzible Darstellung von  $I$  im ersten Eigenraum  $E_1$  auftritt (2.2), reduziert die Betrachtungen über den ersten Eigenwert  $\lambda_1(F^\mu)$  auf die Abschätzung des ersten Eigenwertes eines gemischten Randwertproblems von  $G_\mu$  (2.3).

**2.1. Die Isometriegruppe und deren irreduzible Darstellungen.** Die Translation  $R$  längs  $\gamma_0$  um  $\mu/4$  und die Spiegelungen  $S$  und  $T$  an  $\gamma_1$  bzw.  $\gamma_0$  (vgl. Abb. 3) sind offensichtlich Isometrien der Flächen  $F^\mu$ . Die Isometrie  $J = R^2$  lässt die Punkte  $P_1, \dots, P_6$  fest.  $P_1, \dots, P_6$  sind somit die Weierstrasspunkte von  $F^\mu$  (vgl. [7]). Die Isometrien  $R$ ,  $S$  und  $T$  sind sogar Erzeugende der ganzen Isometriegruppe  $I$ , weil sie schon die grösstmögliche Untergruppe der Permutationen der Weierstrasspunkte und  $J = R^2$  erzeugen. Wir erhalten: Die Diedergruppe  $D_8$  wird erzeugt von  $R$  und  $S$  mit den Relationen  $R^4 = S^2 = RSRS = \text{id}$ . Die ganze Isometriegruppe  $I$  lässt sich schreiben in der Form  $I = D_8 \times \{\text{id}, T\} \cdot T$  erfüllt die Relationen  $T^2 = \text{id}$ ,  $RT = TR$  und  $ST = TS$ .

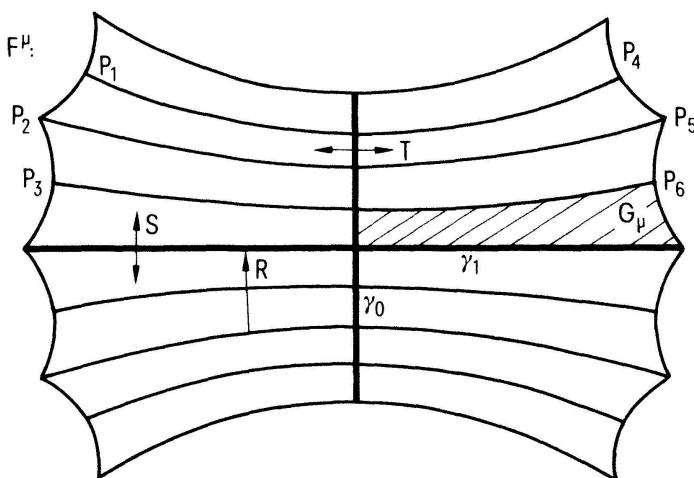


Abb. 3

Die Gruppe  $I$  besitzt 2 zweidimensionale und 8 eindimensionale Darstellungen:

$$\rho^\pm(R) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \rho^\pm(S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^\pm(T) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\alpha\beta\gamma}(R) = \alpha, \quad \rho_{\alpha\beta\gamma}(S) = \beta, \quad \rho_{\alpha\beta\gamma}(T) = \gamma \quad \alpha, \beta, \gamma \in \{-1, 1\}$$

Wir schreiben anstelle von  $\pm 1$  jeweils nur die Vorzeichenkombinationen:  $\rho_{+++}$ ,  $\rho_{++-}$ , ... etc.

**2.2. Darstellungen der Isometriegruppe im ersten Eigenraum.** Alle Isometrien  $\Phi$  aus der Isometriegruppe  $I$  der Flächen  $F^\mu$  vertauschen mit dem Laplace-Operator  $\Delta$ . Zu jeder Isometrie  $\Phi \in I$  erhalten wir daher eine lineare, bijektive Abbildung  $\Phi^*$

$$\Phi^*: u \rightarrow u \circ \Phi, \quad u \in E_k^{(1)}$$

des  $k$ -ten Eigenraumes  $E_k$  auf sich. Zu einer beliebigen aber festen Basis  $\{e_j\}_{j=1,\dots,d_k}$  von  $E_k$  existiert somit eine reguläre  $d_k \times d_k$ -Matrix  $A_\Phi$  mit

$$\Phi^* \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{d_k} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{d_k} \end{pmatrix} \circ \Phi = A_\Phi \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{d_k} \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung  $\rho: \Phi \rightarrow A_\Phi$ ,  $\Phi \in I$  ist eine Darstellung von  $I$  im Eigenraum  $E_k$  bezüglich der Basis  $\{e_j\}$ . Der Ausreduzierung dieser Darstellung entspricht eine Basistransformation in  $E_k$ . Sei nun  $\{e_i\}$  eine spezielle Basis von  $E_k$  in dem Sinne, dass die Darstellung  $\rho: \Phi \rightarrow A_\Phi$  vermöge dieser Basis in lauter irreduzible Komponenten zerfällt:

$$A_\Phi = \bigoplus_i B_\Phi^{\rho_i}, \quad \text{wobei} \quad \rho_i: \Phi \rightarrow B_\Phi^{\rho_i}$$

eine irreduzible Darstellung von  $I$  im entsprechenden Teilraum von  $E_k$  ist. Die Eigenräume  $E_k$  werden so in eine direkte Summe von Eigenräumen zu irreduziblen Darstellungen aufgespalten:  $E_k = \bigoplus_i E_k^{\rho_i}$  (eine irreduzible Darstellung kann mehrfach auftreten!) Huber hat in [4] gezeigt, dass auf diese Weise alle

<sup>1</sup> Die Eigenfunktionen sind i.a. komplexwertig. Für die Auswertung von Randwertproblemen betrachten wir jeweils Real- oder Imaginärteil oder eine reellwertige Linearkombination komplexer Funktionen.

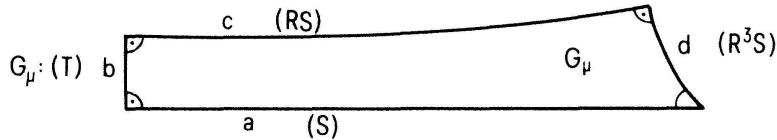


Abb. 4. (Ausschnitt aus Abb. 3)

irreduziblen Darstellungen von  $I$  in der Gesamtheit aller Eigenräume beliebig oft auftreten.

Im folgenden wird zuerst diejenige Darstellung bestimmt, die im ersten Eigenraum der Flächen  $F^\mu$  auftritt und anschliessend deren kleinsten Eigenwert abgeschätzt.

Betrachten wir zuerst die zweidimensionalen Darstellungen  $\rho^+$  und  $\rho^-$ . Seien  $e_1$  und  $e_2$  Eigenfunktionen aus  $E_k^{\rho^+}$ , die bezüglich der Darstellung  $\rho^+$  eine kanonische Darstellung bilden. Man rechnet leicht nach, dass die Funktion  $u = e_1 + ie_2$  die Bedingungen

$$(RS)^*u = u, \quad (R^2S)^*u = -u, \quad T^*u = u$$

erfüllen. Damit sind  $\operatorname{Re} u$  und  $\operatorname{Im} u$  Lösungen des Randwertproblems II (Abb. 5).

In jedem Eigenraum zur Darstellung  $\rho^-$  findet man eine Eigenfunktion  $u$  mit  $T^*u = -u$ , d.h. zusätzlich  $u|_{s\text{-Achse}} = 0$  (Abb. 5) als verschärfende Randbedingung und demzufolge grösseren Eigenwerten. Damit tritt die Darstellung  $\rho^-$  sicher nicht auf im ersten Eigenraum.

Nun zu den eindimensionalen Darstellungen  $\rho_{\pm\pm\pm}$ . Die Isometrien  $S$ ,  $T$ ,  $RS$ ,  $R^3S$  sind Spiegelungen an  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  (vgl. Abb. 3 und 4). Eine reelle Eigenfunktion  $f$  aus einem Teilraum  $E^\rho$  zu einer eindimensionalen Darstellung  $\rho$  erfüllt die Randbedingungen  $\delta u/\delta n = 0$  oder  $u = 0$  an den Rändern von  $G_\mu$ , jenachdem ob die Darstellung der zugehörigen Isometrie +1 oder -1 ist: zB:  $\rho(S) = -1 \rightarrow f \in E^\rho : S^*f(z) = -f(z)$ ,  $f|_a = 0$ . So erfüllen die Eigenfunktionen zu den eindimensionalen Darstellungen spezielle Randwertprobleme von  $G_\mu$ .

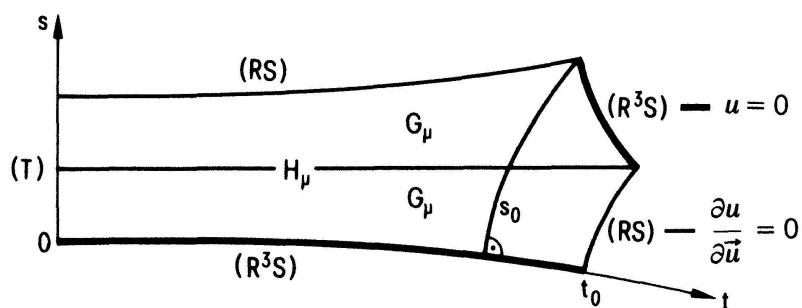


Abb. 5. Randwertproblem II

Die Eigenwerte aller von eindimensionalen Darstellungen herrührenden Randwertprobleme ausser dem zu  $\rho_{++}$  sind  $>\frac{1}{4}$  für beliebiges  $\mu$ , weil sie zu Eigenfunktionen gehören, für die mindestens ein Nullstellenbereich  $N$  auf der Fläche  $F^\mu$  nur ein- oder zweifachzusammenhängend ist. Der Eigenwert ist dann auch Eigenwert des abgeschlossenen Nullstellenbereichs  $\bar{N}$ , aufgefasst als feste Membran, und deren Eigenwerte sind bekanntlich grösser als  $\frac{1}{4}$  (Spezialfall von Lemma 1 in [2] für zeifachzusammenhängende Gebiete, Beweis völlig analog für zweifachzusammenhängende Gebiete: man nehme Parallelstreifen in der Ueberlagerung anstelle einer Kreisscheibe, Zylinderkoordinaten anstelle von Polarkoordinaten).

Wenn wir gezeigt haben, dass auch die Eigenwerte zum Randwertproblem II alle  $>\frac{1}{4}$  sind, haben wir die Behauptungen von (A) auf solche des Randwertproblems I (Abb. 6) zurückgeführt.

Um zu zeigen, dass auch die Eigenwerte des Randwertproblems II  $>\frac{1}{4}$  sind, schätzen wir den Rayleigh-Quotienten einer Eigenfunktion  $f$  aus dem ersten Eigenraum auf  $H_\mu$  ab (vgl. Abb. 5):

$$\begin{aligned} \lambda_1^{\text{II}} &= \frac{\int_{H_\mu} |\operatorname{grad} f|^2 dF}{\int_{H_\mu} |f|^2 dF} = \frac{\int_0^{t_0} \int_0^{s(t)} |\operatorname{grad} f|^2 \cos s \cdot ds \cdot dt}{\int_0^{t_0} \int_0^{s(t)} |f|^2 \cos s \cdot ds \cdot dt} \\ &\geq \frac{\int_0^{t_0} \int_0^{s(t)} \left(\frac{\delta f}{\delta s}\right)^2 \cos s \cdot ds \cdot dt}{\int_0^{t_0} \int_0^{s(t)} |f|^2 \cos s \cdot ds \cdot dt} \geq \inf_{t \in (0, t_0)} \frac{\int_0^{s(t)} |f_s|^2 \cos s \cdot ds}{\int_0^{s(t)} |f|^2 \cos s \cdot ds} \\ &\geq \inf_{t \in (0, t_0)} \min_{\substack{F \in C^2(0, s(t)) \\ F(0)=0}} \frac{\int_0^{s(t)} |F_s|^2 \cos s \cdot ds}{\int_0^{s(t)} |F|^2 \cos s \cdot ds} \geq \min_{\substack{F \in C^2(0, s_0) \\ F(0)=0}} \frac{\int_0^{s_0} |F_s|^2 \cos s \cdot ds}{\int_0^{s_0} |F|^2 \cos s \cdot ds} > \frac{1}{4} \end{aligned}$$

gemäss nachgendem Lemma für  $\sin s_0 \leq 8/\pi$ , d.h. sicher für  $\mu < 1$  ( $\sin s_0 = \cos \mu/8 \cdot \sqrt{2} \cos \mu/4 < 8/\pi$  für  $\mu < 1$ ).

**2.3. Randwertproblem I.** Zur irreduziblen Darstellung  $\rho^+$  gehört folgendes Randwertproblem (Abb. 6):

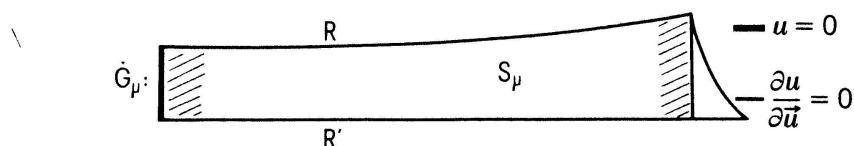


Abb. 6. Randwertproblem I.  $\sin R' = \operatorname{Ctg} \mu/8$ ;  $\sin R = (\sqrt{2} \sin \mu/8)^{-1}$ . ( $S_\mu$ : grösster in  $G_\mu$  enthaltener Parallelhalbstreifen)

Zur Abschätzung des ersten Eigenwertes benötigen wir das folgende

**LEMMA.** Für  $R > 0$  sei  $\lambda^R$  der erste Eigenwert des Problems

$$(\cos s \cdot v')' + \lambda \cos s \cdot v = 0 \quad \text{mit} \quad v(0) = 0, \quad v'(R) = 0, \quad (v'(0) > 0)$$

*Behauptung.*

$$\lambda^R \geq \frac{2}{\pi \cdot \sin R}$$

*Beweis.* Sei  $v$  die erste Eigenfunktion zu obigem Problem und  $v = w \cdot \operatorname{arctg}(\sin s)$ .  $w$  erfüllt dann die Gleichung

$$\cos s \cdot w'' + \left( \sin s + \frac{2}{\operatorname{arctg}(\sin s)} \right) \cdot w' + \lambda \cos s \cdot w = 0$$

und  $w'(0) = 0$  ( $w(0) > 0$ ).  $v$  ist als erste Eigenfunktion zu obigem Problem monoton wachsend in  $(0, R)$ , insbesondere  $v \neq 0$  in  $(0, R)$ .  $w$  ist monoton fallend bis zur ersten Nullstelle ( $w' = 0 \rightarrow w'' < 0$ ), also wegen  $v \neq 0$  in  $(0, R)$  insbesondere in  $(0, R)$ . Aus der Differentialgleichung und den Randbedingungen für  $v$  folgt unmittelbar

$$v'(0) = \lambda^R \int_0^R \cos s \cdot v(s) \, ds$$

und

$$\begin{aligned} w(0) &= \lambda^R \int_0^R \cos s \cdot \operatorname{arctg}(\sin s) \cdot w(s) \, ds \\ &\leq \lambda^R \int_0^R \cos s \cdot \operatorname{arctg}(\sin s) \cdot w(0) \, ds \\ &\leq w(0) \cdot \lambda^R \frac{\pi}{2} \sin R \end{aligned}$$

Aufgelöst nach  $\lambda^R$  erhalten wir die Behauptung. qed.

Jetzt beweisen wir folgenden

SATZ.

- (i)  $\lambda_1(F^\mu) \geq \frac{\mu}{\pi^2} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}\mu}{1 + \frac{2\mu}{5}}$  für  $\mu \leq \frac{1}{2}$
- (ii)  $\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\mu}{\lambda_1(F^\mu)} = \pi^2$ . (erste Behauptung von (A))

*Beweis.* Sei  $u$  die erste Eigenfunktion zum Randwertproblem I und die Konstante  $c$  so gewählt, dass  $u = c + u_1$  und  $\int_{G_\mu} u_1 dF = 0$  ist. Dann gilt:

$$\int_{G_\mu} |\operatorname{grad} u|^2 dF = \int_{G_\mu} |\operatorname{grad} u_1|^2 dF \geq \frac{1}{4} \int_{G_\mu} |u_1|^2 dF,$$

weil der erste Eigenwert des Neumannschen Randwertproblems auf  $G_\mu$  grösser als  $\frac{1}{4}$  ist.<sup>(2)</sup> Andrerseits ist nach vorstehendem Lemma ( $S_\mu$ : vgl. Abb. 6):

$$\begin{aligned} \int_{G_\mu} |\operatorname{grad} u|^2 dF &\geq \int_{S_\mu} |\operatorname{grad} u|^2 dF \geq \lambda^R \int_{S_\mu} |u|^2 dF \\ &\geq \lambda^R \left( \int_{S_\mu} |c|^2 dF - 2 \cdot \int_{S_\mu} |c| |u_1| dF \right) \\ &\geq \lambda^R \cdot \left( \int_{S_\mu} |c|^2 dF - 2 |c| \cdot \sqrt{\int_{S_\mu} 1 dF \cdot \int_{G_\mu} |u_1|^2 dF} \right) \end{aligned}$$

und damit

$$\lambda_1(F^\mu) \geq \operatorname{Max} \left\{ \frac{\lambda^R \left( \int_{S_\mu} |c|^2 dF - 2 |c| \cdot \sqrt{\int_{S_\mu} 1 dF \cdot \int_{G_\mu} |u_1|^2 dF} \right)}{\int_{G_\mu} |c|^2 dF + \int_{G_\mu} |u_1|^2 dF}, \frac{\frac{1}{4} \cdot \int_{G_\mu} |u_1|^2 dF}{\int_{G_\mu} |c|^2 dF + \int_{G_\mu} |u_1|^2 dF} \right\}$$

<sup>2</sup>Hebt man die zugehörige Eigenfunktion auf  $F^\mu$  als Ueberlagerung von  $G_\mu$ , so stellt man fest, dass wiederum mindestens ein ein- oder zweifachzusammenhängender Nullstellenbereich auftritt und (wie schon in 2.2) der Eigenwert deshalb grösser als  $\frac{1}{4}$  ist.

Ueber  $c_1 = \int_{G_\mu} |u_1|^2 dF$  wissen wir nichts. Die Tatsache, dass der erste Term monoton fallend und der zweite monoton wachsend in  $c_1$  ist (vgl. Abb. 7), erlaubt folgende entscheidende Vereinfachung:

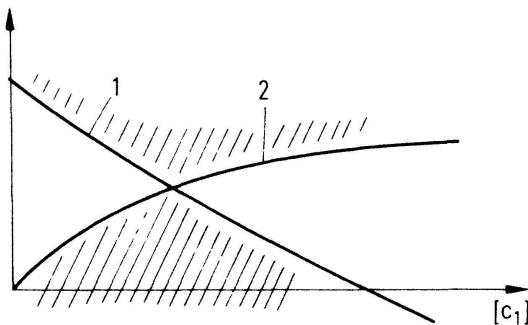


Abb. 7

Für alle  $c_1 > 0$  gilt:

$$\lambda_1(F^\mu) \geq \min \left\{ \frac{\lambda^R \left( \int_{S_\mu} |c|^2 dF - 2|c| \sqrt{\int_{S_\mu} 1 dF \cdot c_1} \right)}{\int_{G_\mu} |c|^2 dF + c_1}, \frac{\frac{1}{4}c_1}{\int_{G_\mu} |c|^2 dF + c_1} \right\}$$

Für  $c_1 = 8\sqrt{2}/\pi \sin \mu/8 \cdot |c|^2 \cdot \int_{S_\mu} 1 dF$  erhalten wir:

$$\lambda_1(F^\mu) \geq \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sin \frac{\mu}{8} \left( \int_{S_\mu} |c|^2 dF - 2|c| \sqrt{\int_{S_\mu} 1 dF \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \sin \frac{\mu}{8} |c|^2 \int_{S_\mu} 1 dF} \right)}{\int_{G_\mu} |c|^2 dF + \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \sin \frac{\mu}{8} |c|^2 \int_{S_\mu} 1 dF}$$

$$\int_{S_\mu} 1 dF = \frac{\mu}{2\sqrt{2}\pi \sin \frac{\mu}{8}} \int_{G_\mu} 1 dF \quad \text{eingesetzt ergibt:}$$

$$\lambda_1(F^\mu) \geq \frac{\mu}{\pi^2} \cdot \frac{1 - 4\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sin \frac{\mu}{8}}}{1 + \frac{4\mu}{\pi^2}}$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung (i).

Die Vergleichsfunktion  $v = \operatorname{arctg} \sin t$  (Koordinaten  $s$  und  $t$  vgl. Abb. 5,  $t$ : Abstand von der  $s$ -Achse) im Rayleigh-Quotienten von  $G_\mu$  eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned}
\lambda_1(F^\mu) &\leqq \frac{\int_{H_\mu} |\operatorname{grad} v|^2 dF}{\int_{H_\mu} |v|^2 dF} \\
&\leqq \frac{\frac{\mu}{8} \int_0^{R'} \frac{1}{\cos t} dt}{\frac{\mu}{8} \int_0^R \cos t (\operatorname{arctg} \sin t)^2 dt + \int_{G_\mu - S_\mu} (\operatorname{arctg} \sin R)^2 dF} \\
&\leqq \frac{\frac{\mu}{8} \operatorname{arctg} \sin R'}{\frac{\mu}{8} (\sin R (\operatorname{arctg} \sin R)^2 - 2(\operatorname{arctg} \sin R) \ln \cos R) + (\operatorname{arctg} \sin R)^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{8} \sin R \right)} \\
&\leqq \frac{\frac{\mu}{8} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \operatorname{Tg} \frac{\mu}{8} \right)}{\frac{\pi}{4} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left( \sqrt{2} \sin \frac{\mu}{8} \right) \right)^2 - \frac{\mu}{8} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left( \sqrt{2} \sin \frac{\mu}{8} \right) \right) \ln \left( 1 + \frac{1}{2 \sin^2 \mu/8} \right)} \\
&\leqq \frac{\mu}{\pi^2} \left( 1 + \mu \ln \frac{3}{\mu} \right) \quad \text{für } \mu \leqq 1. \quad \text{qed (ii)}
\end{aligned}$$

Obiger Ausdruck ist für  $\mu \leqq 1$  immer  $< \frac{1}{4}$  (zweite Behauptung von (A)). Der erste Eigenwert einer Membran ist immer einfach (keine Nodallinien im Innern). Auf die Fläche  $F^\mu$  übertragen ergibt dies die vierte Behauptung von (A). Aus der Abschätzung in 2.2 und der vierten Behauptung folgt schliesslich die dritte Behauptung. Damit ist (A) vollständig bewiesen.

### 3. Zu den Aussagen (B), (C) und (D).

Die Behauptungen (B), (C) und (D) werden im Rahmen dieser Arbeit nicht ausführlich bewiesen, weil dies schon in [6] getan worden ist. Im folgenden werden darum nur die wichtigsten Ideen kurz skizziert.

Die Aussagen (B) über die in 1.2 beschriebenen Flächen  $F_g$  erhält man analog denen in (A). Die Beweise sind etwas länger und komplizierter, weil die Isometriegruppen dieser Flächen komplizierter sind. Die verschärften Aussagen über die Fläche  $F_2$  erfordern feine Methoden zur numerischen Abschätzung eines speziellen Randwertproblems.

Die Behauptung (D) beruht im wesentlichen auf den Tatsachen, dass erstens jede Geodätische auf einer hyperelliptischen Fläche, die durch zwei Weierstrasspunkte geht, geschlossen ist und darum die Kreise mit Radius  $l_0/4$  um die Weierstrasspunkte eine nicht überlappende Kreisbelegung der Fläche bilden, und zweitens den Sätzen von Fejes-Toth [3] über Kreisbelegungen in der hyperbolischen Ebene.

Bloch hat in [1] den ersten Eigenwert des Laplace-Operators  $\Delta$  in Abhängigkeit von Geschlecht und Länge der kürzesten geschlossenen Geodätischen abgeschätzt. (D) eingesetzt in seine Abschätzungen und die Untersuchungen über  $F_2$  ergeben (C).

#### LITERATUR

- [1] BLOCH, A., *Eigenwerte des Laplace-Operators und Isometriegruppen auf kompakten Riemannschen Flächen*, Dissertation Basel (1981).
- [2] BUSER, P., *Riemannsche Flächen mit Eigenwerten in  $(0, \frac{1}{4})$* , Comm. Math. Helv. 52 (1977).
- [3] FEJES-TOTH, L., *Kreisauffüllungen der hyperbolischen Ebene*, Acta Math. Sci. Hungar. 4 (1953).
- [4] HUBER, H., *Ueber die Darstellung der Automorphismengruppe einer Riemannschen Fläche in den Eigenräumen des Laplace-Operators*, Comm. Math. Helv. 52 (1977).
- [5] HUBER, H., *On the Spectrum of the Laplace-Operator on Compact Riemannian Surfaces*, Proceedings of Symposia in Pure Math. 36 (1980).
- [6] JENNI, F., *Ueber das Spektrum des Laplace-Operators auf einer Schar konmpakter Riemannscher Flächen*, Dissertation Basel (1981).
- [7] LEWITTES, J., *Automorphisms of Compact Riemannian Surfaces*, Amer. J. of Math. 85 (1963).

*Mathematisches Institut  
Universitat Basel  
Rheinsprung 21  
CH-4051 Basel*

Received July 14, 1982