Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 58 (1983)

Artikel: Applications de la p-induction en analyse harmonique.
Autor: Anker, Jean-Philippe
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44617

Comment. Math. Helvetici 58 (1983) 622–645 0010–2571/83/040622–24$01.50 + 0.20/0

Applications de la p-induction en analyse harmonique*

JEAN-PHILIPPE ANKER

A la mémoire de Serge Reichenthal

La p-induction est la version L^p de l'induction unitaire de G. W. Mackey [28; part I]. Certains aspects du cas unitaire classique laissaient supposer qu'elle puisse fournir un cadre naturel à des phénomènes liés à l'analyse L^p sur les groupes localement compacts et permettre d'en donner des démonstrations simples et conceptuelles.

Parmi ceux que nous abordons dans ce travail, mentionnons ici les principes de majoration de C. Herz (théorème 7 et exemple 11), ainsi que des techniques de transferts de convoluteurs, notamment l'induction, à partir d'un sous-groupe (§ 2) et le passage au quotient (exemples 10 et 13). L'outil principal que nous avons eu à développer est la continuité de la p-induction par rapport à une topologie de Fell généralisée (théorème 13). Signalons à ce propos qu'une difficulté à laquelle nous nous sommes heurtés à plusieurs reprises a consisté à trouver le bon substitut aux techniques hilbertiennes classiques.

Comme autre type d'application de la p-induction, nour verrons qu'un procédé itéré fournit un tube de représentations isométriques autour de chaque série principale unitaire d'un groupe de Lie semi-simple (§ 4). Signalons que, dans le cas sphérique, l'existence d'un tel tube avait été constatée par M. G. Cowling et exploitée avec succès dans sa démonstration du phénomène de Kunze–Stein [7].

1. Généralités sur la p-induction

Nous reprenons maintenant les aspects généraux de la p-induction, qui ont fait l'objet de [24], [17], [31], et fixons à cette occasion les notations.

Soient G un groupe localement compact, H un sous-groupe fermé et $1 \leqq p \leqq \infty$. La *p-induction* associe à toute représentation π de H – isométrique, fortement

---

* Extrait d'un travail de thèse à l'Université de Lausanne [3]

continue, sur un espace de Banach B – une représentation de G du même type, notée $\mathrm{Ind}_H^G(p, \pi)$. L'espace sur lequel opère $\mathrm{Ind}_H^G(p, \pi)$ est un complété de l'espace $C_c^p(G, H; \pi)$ des fonctions $f: G \to B$ vérifiant:

i) la condition d'*homogénéité*:

$$f(xh) = \delta(h)^{1/p} \pi(h)^{-1} f(x) \quad (x \in G, h \in H),$$

où $\delta(h) = \Delta_H(h)/\Delta_G(h)$ est le rapport des modules de H et de G,

ii) les conditions de *régularité*: f est continue, à support compact modulo H.

Avant de passer à la complétion de $C_c^p(G, H; \pi)$, mentionnons *l'application de Mackey* $f \mapsto [f]$ de $C_c(G; B)$ (fonctions continues, à support compact, de G dans B) dans $C_c^p(G, H; \pi)$ définie par le procédé d'*homogénéisation* $[f](x) = \int_H dh\, \delta(h)^{-1/p} \pi(h) f(xh)$.

Remarques. 1) C'est une application surjective, des sections étant données par les applications $f \mapsto \beta f$ associées aux *fonctions de Bruhat* β de la paire $H \subset G$. Rappelons qu'il s'agit là des fonctions continues $\geqq 0$ sur G vérifiant:

i) $\operatorname{supp} \beta \cap KH$ est compact, pour tout compact K de G,

ii) $\int_H dh\, \beta(xh) = 1$, pour tout $x \in G$,

(dont l'existence est prouvée, par exemple, dans [29; ch. 8, 1.7–1.8]).

2) Du point de vue topologique, l'application de Mackey est une *application quotient* dans la catégorie des espaces localement convexes, $C_c(G; B)$ et $C_c^p(G, H; \pi)$ étant munis des topologies *limite inductive stricte* évidentes.

Introduisons maintenant, pour $p < \infty$, le complété $L^p(G, H; \pi)$ de $C_c^p(G, H; \pi)$ pour la *norme* intrinsèque

$$\|f\|_p = \left[\int_{G/H} d_q(xH) \frac{|f(x)|^p}{q(x)}\right]^{1/p} = \left[\int_G dx\, \beta(x)\, |f(x)|^p\right]^{1/p},$$

où q est une fonction continue >0 sur G vérifiant la condition d'homogénéité $q(xh) = q(x)\, \delta(h)$ $(x \in G, h \in H)$ et $d_q\xi$ la mesure quasi-invariante sur G/H qui lui est associée par

$$\int_{G/H} d_q(xH) \int_H dh \frac{f(xh)}{q(xh)} = \int_G dx\, f(x) \qquad (f \in C_c(G))$$

(cf par exemple [28; ch. 8, 1.1–1.3] à ce sujet), β étant une fonction de Bruhat de la paire $H \subset G$.

Il serait pénible de donner un sens raisonnable à $L^\infty(G, H; \pi)$. Nous nous contenterons, pour $p=\infty$, de l'espace $C_0(G, H; \pi)$ des fonctions $f: G \to B$ vérifiant

i) $f(xh) = \pi(h)^{-1} f(x) \qquad (x \in G, h \in H)$,

ii) f est continue et s'annule à l'infini modulo H,

complete de $C_c^\infty(G, H, \pi)$ pour la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in G} |f(x)|$.

La *représentation* $\mathrm{Ind}_H^G(p, \pi)$ opère sur $L^p(G, H; \pi)$, resp. $C_0(G, H; \pi)$ par translations à gauche: $\{\mathrm{Ind}_H^G(p, \pi)(g)f\}(x) = f(g^{-1}x)$.

EXEMPLE 1. La représentation p-induite à partir de la représentation triviale de $\{e\}$ sur B est la *représentation régulière à gauche*

$$\{\rho_{G,B}^p(g)f\}(x) = f(g^{-1}x) \text{ de } G \text{ sur } L^p(G, B), \text{ resp. } C_0(G, B).$$

La *version* dite de *Mackey* de la p-induction se déduit de la précédente par la transformation $f \mapsto f/q^{1/p}$. Pour $p = \infty$, il n'y a donc aucune différence. Pour $p < \infty$, l'espace initial est ici $C_c^\infty(G, H; \pi)$, la norme

$$\|f\|_p = \left[\int_{G/H} d_q(xH)\, |f(x)|^p\right]^{1/p}$$

et la représentation

$$\{\mathrm{Ind}_H^G(p, \pi)(g)f\}(x) = m(g, xH)^{1/p} f(g^{-1}x),$$

où $m(g, xH) = \dfrac{q(g^{-1}x)}{q(x)}$ est le module de quasi-invariance de la mesure $d_q\zeta$.

EXEMPLE 2. La représentation p-induite à partir de la représentation triviale de H sur B est la représentation *quasi-régulière*

$$\{\pi^p(g)f\}(\zeta) = m(g, \zeta)^{1/p} f(g^{-1} . \zeta) \text{ de } G \text{ sur } L^p(G/H; B), \text{ resp. } C_0(G/H; B).$$

Remarque. Dans la version de Mackey, l'espace $L^p(G, H; \pi)$, resp. $C_0(G, H; \pi)$ s'identifie naturellement à l'espace des *sections* L^p, resp. C_0 du *fibré induit* $G \times_H B = G \times B/(x, \xi) \sim (xh, \pi(h)^{-1}\xi)$ sur G/H. La théorie de l'intégration pour les sections d'un tel fibré, qui se fait sur le modèle classique [5], fournit des réalisations concrètes des espaces $L^p(G, H; \pi)$.

On peut réaliser la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(p, \pi)$ sur $L^p(G/H; B)$, resp. $C_0(G/H; B)$ lorsqu'il existe une section – admettons continue – s de G/H dans G:

$\{\mathrm{Ind}_H^G(p,\pi)(g)f\}(\zeta)=c(g,\zeta)f(g^{-1}\,.\,\zeta)$, où $c(g,\zeta)=\delta(h)^{1/p}\pi(h)^{-1}$ (1-cocycle en g), h étant l'élément de H déterminé par $g^{-1}s(\zeta)=s(g^{-1}\,.\,\zeta)h$.

EXEMPLE 3. Supposons qu'il existe un sous-groupe fermé K de G pour lequel l'application $(k,h)\mapsto kh$ soit un homéomorphisme de $K\times H$ sur G. La représentation $\mathrm{Ind}_H^G(p,\pi)$ est alors réalisée sur $L^p(K;B)$, resp. $C_0(K;B)$ par $\{\mathrm{Ind}_H^G(p,\pi)(g)f\}(k)=c(g,k)f(g^{-1}\,.\,k)$, où $c(g,k)=\delta(h)^{1/p}\pi(h)^{-1}$, $g^{-1}\,.\,k$ et h étant les éléments de K et de H déterminés par $g^{-1}k=(g^{-1}\,.\,k)h$.

Ceci reste valable, pour $p<\infty$, lorsque KH est un ouvert de G dont le complémentaire est localement négligeable.

Terminons par une propriété classique de transitivité.

THEOREME 1 (induction par étages). *Soit K un sous-groupe fermé intercalé entre H et G. Les représentations* $\mathrm{Ind}_K^G(p,\mathrm{Ind}_H^K(p,\pi))$ *et* $\mathrm{Ind}_H^G(p,\pi)$ *sont alors équivalentes.*

Démonstration. En effectuant successivement les applications de Mackey correspondant aux représentations $\sigma=\mathrm{Ind}_H^K(p,\pi)$ et $\mathrm{Ind}_K^G(p,\sigma)$, on construit, à partir d'une fonction $F\in C_c(G\times K;B)$, la fonction

$$[\![F]\!](x,k)=\int_K dl\left[\frac{\Delta_K(l)}{\Delta_G(l)}\right]^{-1/p}\int_H dh\left[\frac{\Delta_H(h)}{\Delta_K(h)}\right]^{-1/p}\pi(h)F(xl,l^{-1}kh),$$

qui est continue sur $G\times K$ et fournit un élément de $C_c^p(G,K;\sigma)$. L'image E de $C_c(G\times K;B)$ par cette *double application de Mackey* est un sous-espace dense de $L^p(G,K;\sigma)$, resp. $C_0(G,K;\sigma)$. Il contient en effet les éléments de la forme $[\![f_1\otimes f_2\otimes\xi]\!]=[f_1\otimes[f_2\otimes\xi]]=(f_1\in C_c(G),f_2\in C_c(K),\xi\in B)$. Considérons maintenant les applications $C_c(G;B)\underset{A'}{\overset{A}{\rightleftarrows}}C_c(G\times K;B)$ définies par

$$Af(x,k)=\alpha(k^{-1})\left[\frac{\Delta_K(k)}{\Delta_G(k)}\right]^{-1/p}f(xk)$$

(où $\alpha\in C_c(K)$ vérifie $\alpha\geqq 0,\int_K dk\;\alpha(k)=1$ et a été fixée une fois pour toutes) et

$$A'F(x)=\int_K dk\left[\frac{\Delta_K(k)}{\Delta_G(k)}\right]^{-1/p}F(xk,k^{-1}).$$

Elles induisent, par les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} C_c(G,B) \arrow[r, "A"] \arrow[d, "{[\ ]}"'] & C_c(G\times K;B) \arrow[d, "\llbracket\ \rrbracket"] \\ C_c^p(G,H;\pi) \arrow[r, "{[A]}"] & E \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} C_c(G,B) \arrow[d, "{[\ ]}"'] & C_c(G\times K;B) \arrow[l, "A'"'] \arrow[d, "\llbracket\ \rrbracket"] \\ C_c^p(G,H;\pi) & E \arrow[l, "{[A']}"'] \end{tikzcd}$$

les applications $C_c^p(G,H;\pi) \underset{[A']}{\overset{[A]}{\rightleftarrows}} E$ données par

$$[A]f(x,k) = \left[\frac{\Delta_K(k)}{\Delta_G(k)}\right]^{-1/p} f(xk) \quad \text{et} \quad [A']F(x) = F(x,e).$$

Les applications $[A]$ et $[A']$ sont inverses l'une de l'autre et commutent aux translations à gauche. Elles sont enfin isométriques. En effet, si β et γ sont des fonctions de Bruhat des paires $H\subset G$ et $K\subset G$, on a, pour $p<\infty$,

$$\begin{aligned} \|[A]f\|_p^p &= \int_G dx\,\gamma(x)\int_K dk\,\beta(xk)\,|[A]f(x,k)|^p \\ &= \int_G dx\,\gamma(x)\int_K dk\left[\frac{\Delta_K(k)}{\Delta_G(k)}\right]^{-1/p}\beta(xk)\,|f(xk)|^p \\ &= \int_G dx\,\beta(x)\,|f(x)|^p = \|f\|_p^p \end{aligned}$$

étant donné que, chaque $x\in G$, la fonction $k\mapsto \beta(xk)$ est de Bruhat pour la paire $H\subset K$.

EXEMPLE 4. La représentation régulière (à gauche) $\rho_{G,B}^p$ est équivalente à la représentation p-induite à partir de la représentation régulière (à gauche) $\rho_{H,B}^p$. Explicitement, le diagramme commutatif qui est au centre de la démonstration précédente se résume ici à

$$\begin{tikzcd} & C_c(G\times H;B) \arrow[dl, "A'"'] \arrow[dd, "\llbracket\ \rrbracket"] \\ C_c(G;B) \arrow[dr, shift left, "{[A]}"] & \\ & E \arrow[ul, shift left, "{[A']}"] \end{tikzcd}$$

où

$$[\![F]\!](x, k) = \int_H dh \left[\frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\right]^{-1/p} F(xh, h^{-1}k),$$

où

$$[A]f(x, h) = \left[\frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\right]^{-1/p} f(xh),$$

où

$$A'F(x) = \int_H dh \left[\frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\right]^{-1/p} F(xh, h^{-1})$$

et où $[A']F(x) = F(x, e)$. Notons qu'on a le même diagramme pour la version de Mackey de la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(p, \rho_{H,B}^p)$, avec, dans ce cas,

$$[A]f(x) = \left\{\frac{f}{q^{1/p}}\right\}_{x,H} : h \mapsto \frac{f(xh)}{q(xh)^{1/p}}.$$

Remarquons que l'identification de l'espace $L^p(G; B)$, resp. $C_0(G; B)$ à l'espace des sections L^p, resp. C_0 du fibré induit par $\rho_{H,B}^p$ fait apparaître la restriction à H de la *représentation régulière à droite* $\{\lambda_{G,B}^p(g)f\}(x) = \Delta_G(g)^{1/p}f(xg)$ de G sur $L^p(G; B)$ comme *intégrale directe* L^p, resp. *somme directe continue* sur G/H de la représentation régulière à droite $\lambda_{H,B}^p$.

2. Entrelacements et convoluteurs induits*

Nous faisons apparaître la notion de convoluteur induit, considérée précédemment par plusieurs auteurs comme un cas particulier de la notion naturelle d'entrelacement induit et obtenons, grâce à ce point de vue, des démonstrations simples de ses propriétés.

Nous commençons par étudier la *p-induction des entrelacements* (classique dans le cas unitaire). Donnons-nous deux représentations π_1 et π_2 de H (isométriques, fortement continues, sur des espaces de Banach B_1 et B_2) et considérons les représentations correspondantes $\mathrm{Ind}_H^G(p, \pi_1)$ et $\mathrm{Ind}_H^G(p, \pi_2)$ de G, dans la version de Mackey. On obtient, à partir d'un *entrelacement* T de π_1 avec π_2 (rappelons qu'il s'agit là des opérateurs bornés T de B_1 dans B_2 pour lesquels

---

* Les résultats de ce paragraphe ont fait l'objet de l'annonce [2].

$T\circ\pi_1(h)=\pi_2(h)\circ T$ pout tout $h\in H$), un entrelacement $\mathrm{Ind}_H^G(p, T)$ de $\mathrm{Ind}_H^G(p, \pi_1)$ avec $\mathrm{Ind}_H^G(p, \pi_2)$ en posant $\mathrm{Ind}_H^G(p, T)f=T\circ f$, i.e. en faisant opérer T *fibre par fibre.* Notons que $\|\mathrm{Ind}_H^G(p, T)\|\leqq\|T\|$ et que $\mathrm{Ind}_H^G(p, T)$ commute à la multiplication ponctuelle par $L^\infty(G/H)$, resp. $C^b(G/H)$.

PROPOSITION 2. *La p-induction* $T\mapsto\mathrm{Ind}_H^G(p, T)$ *des entrelacements est une isométrie.*

Démonstration. Montrons $\|T\|\leqq\|\mathrm{Ind}_H^G(p, T)\|$ pour $p<\infty$ (le cas $p=\infty$ se traitant de même). L'inégalité $\|\psi\cdot\mathrm{Ind}_H^G(p, T)f\|_p\leqq\|\mathrm{Ind}_H^G(p, T)\|\,\|\psi\cdot f\|_p$, valable pour tout $f\in C_c^\infty(G, H; \pi)$, $\psi\in L^\infty(G/H)$, s'écrit

$$\int_{G/H} d_q(xH)\,|\psi(xH)|^p\,|Tf(x)|^p\leqq\|\mathrm{Ind}_H^G(p, T)\|^p\int_{G/H} d_q(xH)\,|\psi(xH)|^p\,|f(x)|^p.$$

On en tire facilement $\|T\|\leqq\|\mathrm{Ind}_H^G(p, T)\|$.

Relevons que la p-induction jouit de toutes les propriétés fonctorielles souhaitables. Nous allons encore donner deux caractérisations des entrelacements p-induits. Dans le cas unitaire et lorsque $\pi_1=\pi_2$, la première caractérisation est classique (cf. par exemple [4; ch. 16, § 3.B, theorem 3]); on la rencontre dans les questions liées au théorème d'imprimitivité de Mackey.

THEOREME 3. *Un entrelacement S de* $\mathrm{Ind}_H^G(p, \pi_1)$ *avec* $\mathrm{Ind}_H^G(p, \pi_2)$ *est induit à partir de H si et seulement s'il vérifie une des deux conditions équivalentes suivantes:*

1) *S commute à la multiplication ponctuelle par $L^\infty(G/H)$, resp. $C^b(G/H)$,*
2) $\mathrm{supp}\,(Sf)\subset\mathrm{supp}\,f$ *pour tout* $f\in L^p(G, H; \pi_1)$, *resp.* $C_0(G, H; \pi_1)$.

Précisons la notion de *support* d'une fonction $f\in L^p(G, H; \pi_i)$: il s'agit du plus petit fermé de G/H en dehors duquel $|f|=0$ (pp). On peut également le définir par dualité avec $C_c^\infty(G, H; \pi_i^*)$, π_i^* étant la contragrédiente de π_i ou toute autre représentation formant avec π_i une paire duale de H (cf § 3): $\zeta\notin\mathrm{supp}\,f$ si et seulement s'il existe un voisinage V de ζ dans G/H tel que $\langle f, \phi\rangle=0$ pout tout $\phi\in C_c^\infty(G, H; \pi_i^*)$ avec $\mathrm{supp}\,\phi\subset V$.

Démonstration. Il est clair que les deux conditions sont nécessaires et il est facile de déduire la seconde de la première. Le point délicat consiste à montrer que tout entrelacement S de $\mathrm{Ind}_H^G(p, \pi_1)$ avec $\mathrm{Ind}_H^G(p, \pi_2)$ vérifiant la seconde condition est induit par un entrelacement T de π_1 avec π_2. L'idée de la preuve est simple: on définit T en *isolant* l'action de S sur la fibre au-dessus de H.

Commençons par le cas $p=\infty$ et par établir l'inégalité

$$(*)\quad |Sf(e)| \leqq \|S\|\,|f(e)| \qquad (f\in C_0(G,H;\pi_1)).$$

Supposons, par l'absurde, qu'il existe $f\in C_0(G,H;\pi_1)$ avec $|Sf(e)|-\|S\|\,|f(e)|=\varepsilon>0$. Il existe par suite un voisinage V de H dans G/H sur lequel $\|S\|\,|f(x)|\leqq|Sf(e)|-\varepsilon/2$. Choisissons une fonction auxiliaire $\psi: G/H\to[0,1]$ continue, à support dans V et valant 1 sur un voisinage de H dans G/H. Comme, par hypothèse, $S(\psi\cdot f)(e)=Sf(e)$, on obtient $\|S\|\,\|\psi\cdot f\|_\infty\leqq|S(\psi\cdot f)(e)|-\varepsilon/2$, ce qui est absurde.

Maintenant, l'inégalité $(*)$ et le fait que les vecteurs $f(e)$, pour $f\in C_0(G,H;\pi_1)$, décrivent B_1 montrent que $f(e)\mapsto Sf(e)$ définit un opérateur borné T de B_1 dans B_2. On vérifie facilement que T est un entrelacement de π_1 avec π_2, qui induit S.

Dans le cas $p<\infty$, considérons le sous-espace E_0 de $C_0^\infty(G,H;\pi_1)$ engendré par les fonctions de la forme $f_0=\mathrm{Ind}_H^G(p,\pi_1)(u)f$, où $u\in C_c(G)$ et $f\in C_c^\infty(G,H;\pi_1)$. Il jouit des propriétés suivantes:

— $\{f_0(e)\mid f_0\in E_0\}$ est dense dans B_1,

— $S(E_0)$ est composé de fonctions continues (cf. lemme ci-dessous), ce qui permet de reprendre la démonstration du cas $p=\infty$.

LEMME 4. *Toute fonction de la forme $f_0=\mathrm{Ind}_H^G(p,\pi_i)(u)f$, où $u\in C_c(G)$ et $f\in L^p(G,H;\pi_i)$, est (égale pp modulo H à une fonction) continue.*

Démonstration. Commençons par exprimer l'opérateur intégral $\mathrm{Ind}_H^G(p,\pi_i)(u)$ à l'aide d'un noyau:

$$\{\mathrm{Ind}_H^G(p,\pi_i)(u)f\}(x)=\int_{G/H} d_q(yH)\,K_u(x,y)f(y)\ (f\in C_c^\infty(G,H;\pi_i)),$$

où

$$K_u(x,y)=q(x)^{-1/p}q(y)^{-1/p'}\Delta_G(y)^{-1}\int_H dh\,\delta(h)^{-1/p}u(xhy^{-1})\pi_i(h).$$

On en déduit une majoration d'ordre technique:
pour tout compact K de G/H il existe une constante $C\geqq 0$ telle que

$$|\{\mathrm{Ind}_H^G(p,\pi_i)(u)f\}(x)|\leqq C\,\|f\|_p \qquad (f\in C_c^\infty(G,H,\pi_i),\ xH\in K).$$

Considérons maintenant une suite $(f_n)\subset C_c^\infty(G,H;\pi_i)$ convergeant (en norme) vers f. D'après la majoration précédente, la suite des fonctions $\mathrm{Ind}_H^G(p,\pi_i)(u)f_n$

converge uniformément sur la préimage de tout compact de G/H vers une fonction homogène continue f_∞. Comme, d'autre part, une sous-suite converge (pp modulo H) vers f_0, on a $f_0 = f_\infty$ (pp modulo H).

Nous explicitons maintenant ce qui précède dans le cas particulier où $\pi_1 = \pi_2$ est la représentation régulière (à gauche) ρ_H^p de H sur $L^p(H)$, $1 < p < \infty$. Rappelons que nous avons identifié au § 1 les représentations $\mathrm{Ind}_H^G(p, \rho_H^p)$ et ρ_G^p. La p-induction des entrelacements correspond donc ici à un procédé *d'induction des convoluteurs à droite*. Explicitement,

$$\langle \mathrm{Ind}_H^G(p, T)f, \phi\rangle = \int_{G/H} d_q(xH) \left\langle T\left\{\frac{f}{q^{1/p}}\right\}_{x,H}, \left\{\frac{\phi}{q^{1/p'}}\right\}_{x,H}\right\rangle \qquad (f, \phi \in C_c(G)).$$

EXEMPLE 5. $\mathrm{Ind}_H^G(p, \lambda_H^p(\mu)) = \lambda_G^p(\mu)$ pour tout $\mu \in M^1(H)$ (mesure bornée sur H).

EXEMPLE 6. Plus généralement, si T est défini par convolution à droite par une distribution $\tau: T\xi(k) = \xi * \tau(k) = \int_H d\tau(h)\, \Delta_h(h)^{-1} \xi(kh^{-1})$, alors $\mathrm{Ind}_H^G(p, T)$ est défini par convolution à droite par la distribution $\delta^{-1/p'}\tau$ (à support dans H):

$$\{\mathrm{Ind}_H^G(p, T)f\}(x) = f * (\delta^{-1/p'}\tau)(x) = \int_H d\tau(h)\, \Delta_H(h)^{-1/p'} \Delta_G(h)^{-1/p} f(xh^{-1}).$$

EXEMPLE 7. Dans le contexte abélien, l'inclusion $CV^p(H) \to CV^p(G)$ des convoluteurs correspond au *relèvement* $m^p(\hat{G}/H^\perp) \to m^p(\hat{G})$ *des multiplicateurs.*

PROPOSITION 5. *L'induction des convoluteurs à droite est un homomorphisme d'algèbres isométrique.*

Notons qu'on passe facilement aux *convoluteurs à gauche*, au moyen des involutions $\iota(\xi)(h) = \Delta_H(h)^{-1/p} \xi(h^{-1})$ de $L^p(H)$ et $\iota(f)(x) = \Delta_G(x)^{-1/p} f(x^{-1})$ de $L^p(G)$.

Remarque. L'induction des convoluteurs coïncide avec les notions apparues dans [8; § 4] ($G = \mathbb{R}, H = \mathbb{Z}$), puis [30; section 3] et [25; théorème I.2] (cas abélien), [23] (cas des pseudo-mesures), et finalement [26], [27; appendice], [9] (cas général).

La traduction de la seconde caractérisation du théorème 3 nous amène à définir la notion de *support* d'un convoluteur S de $L^p(G): x \notin \operatorname{supp} S$ si et seulement s'il existe dans G des voisinages U de e et V de x tels que $\langle Su, v\rangle = 0$ pour tout $u, v \in C_c(G)$ avec $\operatorname{supp} u \subset U$, $\operatorname{supp} v \subset V$.

Remarques. 1) Cette notion coïncide avec
— le support de la mesure - ou plus généralement de la distribution - σ, lorque S est défini par convolution (à droite ou à gauche) par σ,
— la définition [23; p. 117],
— le support défini par dualité avec $A^p(G)$, lorsque S est une pseudo-mesure [23; p. 101],
— le spectre du multiplicateur m, lorsque, dans le contexte abélien, $S = \hat{m}$.
2) Le support d'un convoluteur est conservé par induction.

THEOREME 6. *Un convoluteur - à droite, resp. à gauche - S de $L^p(G)$ est induit à partir de H si seulement s'il vérifie une des deux conditions équivalentes suivantes:*
1) *S commute à la multiplication ponctuelle par $L^\infty(G/H)$, resp. $L^\infty(H\backslash G)$,*
2) *S a son support dans H.*

C'est un corollaire immédiat du théorème 3, le support de S étant, dans le cas d'un convoluteur à droite, le plus petit fermé F de G tel que $\operatorname{supp}(Sf) \subset (\operatorname{supp} f)F$ pout tout $f \in C_c(G)$ (le support de Sf étant pris au sens des mesures).

Remarque. Le seconde caractérisation, au moyen du support, a été prouvée dans [30; lemma 3.2] (cas abélien), [23; theorem B] (cas des pseudo-mesures, H moyennable ou normal dans G) et finalement [26], [27; appendice] (cas général). Notre démonstration du cas général, techniquement assez voisine de [30; loc. cit.], présente l'avantage d'être directe et relativement simple.

3. Coefficients de représentations p-induites et transferts de convoluteurs.

Dans ce paragraphe nous établissons des propriétés fonctionnelles des coefficients de certaines représentations p-induites, découlant principalement de la continuité de la p-induction, et en déduisons par dualité des transferts d'opérateurs, notamment de convoluteurs. Signalons à ce propos que, sauf mention explicite, on travaillera ici avec des convoluteurs *à gauche.*

Dans ce paragraphe nous considérons toutes les représentations par paires duales. Une *paire duale* d'un groupe localement compact G est composée de deux représentations π et π^* de G - isométriques, fortement continues, sur des espaces de Banach B et B^* - mises en dualité par un *couplage*, i.e. une forme bilinéaire $\langle\,,\rangle$ sur $B \times B^*$ vérifiant

i) $\langle \pi(g)\xi, \pi^*(g)\xi^*\rangle = \langle \xi, \xi^*\rangle \qquad (g \in G, \xi \in B, \xi^* \in B^*)$,

ii) $|\xi| = \sup_{|\eta^*|=1} |\langle \xi, \eta^*\rangle|, \quad |\xi^*| = \sup_{|\eta|=1} |\langle \eta, \xi^*\rangle| \qquad (\xi \in B, \xi^* \in B^*)$.

EXEMPLE 8. Soit π une représentation de G – isométrique, fortement continue, sur un espace de Banach B. Les vecteurs ξ^* du dual B^* pour lesquels la fonction $g \mapsto \pi^*(g)\xi^* = {}^t\pi(g)^{-1}\xi^*$ est continue composent un sous-espace fermé, faiblement dense B_0^*. La représentation π^* de G sur B_0^*, appelée *contragrédiente de* π, forme avec π une paire duale. Toute représentation de G en dualité avec π est contenue dans π^*, et coincide même avec π^* lorsque B est réflexif.

EXEMPLE 9. Les représentations $\mathrm{Ind}_H^G(p, \pi)$ et $\mathrm{Ind}_H^G(p', \pi^*)$, induites à partir d'une paire duale (π, π^*) de H suivant des indices p et p' conjugués $\left(\text{i.e. } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$, forment une paire duale de G pour le couplage

$$\langle f, \phi\rangle = \int_{G/H} d_q(xH) \frac{\langle f(x), \phi(x)\rangle}{q(x)} = \int_G dx\, \beta(x)\langle f(x), \phi(x)\rangle,$$

resp.

$$\langle f, \phi\rangle = \int_{G/H} d_q(xH)\langle f(x), \phi(x)\rangle$$

dans la version de Mackey.

Le premier principe de majoration de Herz permet de contrôler les coefficients des représentations p-induites de H à G à l'aide des coefficients de la représentation quasi-régulière π^p de G sur $L^p(G/H)$, resp. $C_0(G/H)$. Considérons une paire duale induite $(\mathrm{Ind}_H^G(p, \pi), \mathrm{Ind}_H^G(p', \pi^*))$ – dans la version de Mackey.

THEOREME 7 (premier principe de majoration de Herz en p-induction). *En posant* $|f|(xH) = |f(x)|$, $|\phi|(xH) = |\phi(x)|$ $(x \in G)$, *on a* $|\langle \mathrm{Ind}_H^G(p, \pi)(g)f, \phi\rangle| \leqq \langle \pi^p(g)\,|f|, |\phi|\rangle$ *pout tout* $g \in G$ *avec* $\|f\|_p = \|\,|f|\,\|_p$, $\|\phi\|_{p'} = \|\,|\phi|\,\|_{p'}$.

Remarque. Ce principe a été énoncé par C. Herz pour la représentation régulière de G sur $L^p(G)$ [20]. La version dans le cadre de l'induction unitaire est due à G. Arsac [13; § 3].

Il fournit par dualité un transfert d'opérateurs. Supposons $1 < p < \infty$ et soit μ une mesure positive sur G définissant un opérateur borné $\pi^p(\mu)$ sur $L^p(G/H)$ par $\langle \pi^p(\mu)f, \phi\rangle = \int_G d\mu(g)\langle \pi^p(g)f, \phi\rangle$.

COROLLAIRE 8. *Si la paire duale induite* $(\mathrm{Ind}_H^G(p, \pi)\, \mathrm{Ind}_H^G(p', \pi^*))$ *est* *réflexive, μ définit un opérateur borné* $\operatorname{Ind}_H^G(p,\pi)(\mu)$ *sur* $L^p(G,H;\pi)$ *par* $\langle \operatorname{Ind}_H^G(p,\pi)(\mu)f,\phi\rangle=\int_G d\mu(g)\langle \operatorname{Ind}_H^G(p,\pi)(g)f,\phi\rangle$ *avec* $\|\operatorname{Ind}_H^G(p,\pi)(\mu)\|\leqq\|\pi^p(\mu)\|$.

Remarque. Dans le cas particulier de la représentation régulière de G sur $L^p(G)$, ce résultat est contenu dans [27; prop. 1].

Définissons maintenant une *topologie* en terme de voisinages sur les paires duales d'un groupe localement compact G. Etant donné une paire duale (π,π^*) de G, $\xi_1,\ldots,\xi_m\in B_\pi$, $\xi_1^*,\ldots,\xi_n^*\in B_{\pi^*}$, $\mu_1,\ldots,\mu_1\in M^1(G)$ et $\varepsilon>0$, le voisinage correspondant $V_{(\pi,\pi^*)}((\xi_i);(\xi_j^*);(\mu_k);\varepsilon)$ de (π,π^*) est composé des paires duales (ω,ω^*) pour lesquelles il exists $\eta_1,\ldots,\eta_m\in B_\omega$, $\eta_1^*,\ldots,\eta_n^*\in B_{\omega^*}$ avec

1°) $|\langle\pi(\mu_k)\xi_i,\xi_j^*\rangle-\langle\omega(\mu_k)\eta_i,\eta_j^*\rangle|<\varepsilon$
$(i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n,\ k=1,\ldots,r)$,

2°) $\left\|\left|\sum_{(i,k)\in I}\pi(\mu_k)\xi_i\right|-\left|\sum_{(i,k)\in I}\omega(\mu_k)\eta_i\right|\right\|<\varepsilon,$
$\left\|\left|\sum_{(j,k)\in J}\pi^*(\mu_k)\xi_j^*\right|-\left|\sum_{(j,k)\in J}\omega^*(\mu_k)\eta_j^*\right|\right\|<\varepsilon$
$(I\subset\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,r\},\ J\subset\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,r\})$.

Cette topologie possède toutes les propriétés souhaitables. Elle coïncide en effet avec la *topologie régionale* [16; § 6] sur les représentations unitaires continues de G, et par conséquent avec la *topologie de Fell–Jacobson* [14] sur le dual unitaire G. Elle fournit également les analogues L^p des phénomènes d'adhérence caractérisant la *moyennabilité.*

PROPOSITION 9. *Soit* $1<p<\infty$. *G est moyennable si et seulement si la représentation triviale* $\mathbb{1}$ *de G sur* $\mathbb{C}$ *adhère à la représentation régulière de G sur* $L^p(G)$.

La *démonstration* repose sur l'expression de la moyennabilité par les conditions de Reiter.

Remarque. On peut caractériser de la même manière la moyennabilité d'un espace homogène G/H [12], ou plus généralement encore la moyennabilité d'une action de G sur une espace localement compact X [1; première partie].

PROPOSITION 10. *Soient* (π,π^*) *une paire duale de G opérant dans des espaces de Banach B,* B^* *et* $1<p<\infty$. *Si G est moyennable,* (π,π^*) *adhère alors à la paire duale* $(\rho^p_{G,B},\rho^{p'}_{G,B^*})$.

Démonstration. La moyennabilité de G se traduit par l'existence d'une *suite pout la propriété* P_1 *de Reiter*, i.e. d'une suite généralisée $(s_{K,\varepsilon})_{(K,\varepsilon)\in\mathscr{K}\times\mathscr{E}}$, où $\mathscr{K}$ est une famille fondamentale de compacts de G (fondamentale signifiant que tout compact de G est contenu dans un compact $K\in\mathscr{K}$), $\mathscr{E}$ un ensemble de nombres réels >0 admettant 0 comme borne inférieure $-\mathscr{K}\times\mathscr{E}$ étant muni de l'ordre "$(K, \varepsilon)\leqq(K', \varepsilon')\Leftrightarrow K\subset K'$ et $\varepsilon\geqq\varepsilon'$" $-$ et $s_{K,\varepsilon}\in C_c(G)$ avec $s_{K,\varepsilon}\geqq 0$, $\int_G dx\, s_{K,\varepsilon}(x)=1$, $\|\rho(g)s_{K,\varepsilon}-s_{K,\varepsilon}\|_1<\varepsilon$ pout tout $g\in K$. Notons que $(s_{K,\varepsilon}^{1/p})$ et $(s_{K,\varepsilon}^{1/p'})$ sont alors des suites pour les propriétés P_p et $P_{p'}$.

Considérons les fonctions (à valeurs vectorielles) de la forme

$$\Delta(s^{1/p}\otimes\xi)(x)=s(x)^{1/p}\pi(x)^{-1}\xi,\quad \Delta(s^{1/p'}\otimes\xi^*)(x)=s(x)^{1/p'}\pi^*(x)^{-1}\xi^*$$

où $s=s_{K,\varepsilon}$, $\xi\in B$, $\xi^*\in B^*$. L'identité

$$\langle\rho_{G,B}^p(g)\,\Delta(s^{1/p}\otimes\xi), \Delta(s^{1/p'}\otimes\xi^*)\rangle=\langle\rho(g)s^{1/p}, s^{1/p'}\rangle\langle\pi(g)\xi, \xi^*\rangle$$

fournit l'estimation sur les coefficients

$$|\langle\pi(\mu)\xi; \xi^*\rangle-\langle\rho_{G,B}^p(\mu)\,\Delta(s^{1/p}\otimes\xi), \Delta(s^{1/p'}\otimes\xi^*)\rangle|<\|\mu\|\,|\xi|\,|\xi^*|\,\varepsilon^{1/p}$$

pour toute mesure μ à support dans K. On a, d'autre part, les estimations suivantes sur les normes:

$$\left|\left|\sum_i \pi(\mu_i)\xi_i\right|-\left\|\sum_i \rho_{G,B}^p(\mu_i)\,\Delta(s^{1/p}\otimes\xi_i)\right\|_p\right|<\Big(\sum_i\|\mu_i\|\,|\xi_i|\Big)\varepsilon^{1/p},$$
$$\left|\left|\sum_i \pi^*(\mu_i)\xi_i^*\right|-\left\|\sum_i \rho_{G,B^*}^{p'}(\mu_i)\,\Delta(s^{1/p'}\otimes\xi_i^*)\right\|_{p'}\right|<\Big(\sum_i\|\mu_i\|\,|\xi_i^*|\Big)\varepsilon^{1/p'}$$

pour toute famille finie de mesures μ_i à support dans K. On en tire facilement que (π, π^*) adhère $(\rho_{G,B}^p, \rho_{G,B^*}^{p'})$.

Avant de passer à la continuité de la p-induction, déduisons de la proposition précédente des transferts de convoluteurs. Nous supposerons à cet effet que B est un *p-espace* [21], i.e. essentiellement un (sous-espace fermé d'un) espace L^q avec $p\leqq q\leqq 2$ ou $p\geqq q\geqq 2$. Rappelons qu'alors tout opérateur borné T sur $L^p(G)$ s'étend, par $T_B(f\otimes\xi)=Tf\otimes\xi$, en un opérateur borné T_B sur $L^p(G, B)$, de même norme.

COROLLAIRE 11. *Toujours dans le cas où G est moyennable, on a* $\|\pi(\mu)\|\leqslant\|\rho_B^p(\mu)\|$ *pour tout* $\mu\in M^1(G)$.

Remarque. Dans le cas particulier où B est un espace L^p, il s'agit de la *transférence de Coifman et Weiss* [6; § 2]. Relevons que la propriété d'extension est ici une conséquence banale du théorème de Fubini.

Avec l'hypothèse supplémentaire que la paire duale (π, π^*) est réflexive, nous prolongeons maitenant à $\mathscr{L}(L^p(G))$ (opérateurs bornés sur $L^p(G)$) la *contraction* $\rho_G^p(\mu) \mapsto \pi(\mu)$ du corollaire 11. Etant donnée une suite (s) pour la propriété P_1, considérons les formes trilinéaires $F_s(T, \xi, \xi^*) = \langle T_B \Delta(s^{1/p} \otimes \xi), \Delta(s^{1/p'} \otimes \xi^*)\rangle$ sur $\mathscr{L}(L^p(G)) \times B \times B^*$. Par compacité faible de la boule-unité, la suite (F_s) possède un point d'accumulation faible F_∞, qui correspond à une contraction $t_{(s)}$ de $\mathscr{L}(L^p(G))$ dans $\mathscr{L}(B)$ par $\langle t_{(s)}(T)\xi, \xi^*\rangle = F_\infty(T, \xi, \xi^*)$. Les cas intéressants sont ceux où $t_{(s)}(T)$ est *intrinsèque*, i.e. indépendant des choix de la suite (s) et du point d'accumulation F_∞; on le note alors $t(T)$.

PROPOSITION 12. *On suppose toujours G moyennable.*

i) $t_{(s)}$ *applique $\mathscr{L}(L^p(G))$ dans le bicommutant de $\pi(G)$.*

ii) $t_{(s)}$ *est intrinsèque sur les convoluteurs associés aux mesures bornées: $t(\rho_G^p(\mu)) = \pi(\mu)$ pour tout $\mu \in M^1(G)$. Elle l'est plus généralement sur la fermeture (normique) $cv^p(G)$ des convoluteurs à support compact: si T est un tel convoluteur et $\alpha \in A^p(G)$ vaut identiquement 1 au voisinage de son support, on a $\langle t(T)\xi, \xi^*\rangle = \langle T, \alpha\langle\pi(\cdot)\xi, \xi^*\rangle\rangle$ dans la dualité avec $A^p(G)^*$.*

Démonstration de ii). Dans la dualité entre $CV^p(G) = PM^p(G)$ et $A^p(G)$, $F_s(T, \xi, \xi^*)$ s'écrit $\langle T, \langle\rho(\cdot)s^{1/p}, s^{1/p'}\rangle\langle\pi(\cdot)\xi, \xi^*\rangle\rangle$. Comme $T = \alpha T$ et que les fonctions $u_s = \langle\rho(\cdot)s^{1/p}, s^{1/p'}\rangle$ forment une unité approchée (bornée) dans $A^p(G)$ (cf. par exemple [22, lemma 5, p. 121]) $F_s(T, \xi, \xi^*)$ converge vers $\langle T, \alpha\langle\pi(\cdot)\xi, \xi^*\rangle\rangle$. Par conséquent,

$$\langle t(T)\xi, \xi^*\rangle = \langle T, \alpha\langle\pi(\cdot)\xi, \xi^*\rangle\rangle.$$

EXEMPLE 10. π est la représentation quasi-régulière de G sur $L^p(G/H)$, H étant un sous-groupe fermé normal dans G. Rappelons que l'application de Mackey $[f](xH) = \int_H dh\, f(xh)$ $(f \in C_c(G))$ est dans ce cas prolongée par *l'application de Reiter* T_H de $M^1(G)$ sur $M^1(G/H)$, définie par

$$\int_{G/H} d(T_H\mu)(\zeta)\, \psi(\zeta) = \int_G d\mu(x)\, \psi(xH) \qquad (\psi \in C_c(G/H)).$$

* Pour tout renseignement sur les espaces $A^p(G)$, $PM^p(G)$, ... nous renvoyons aux travaux de C. Herz (par exemple [21], [23]), ainsi qu'à l'exposé [11] de P. Eymard.

La proposition précédente peut être légèrement précisée dans ce contexte:

i) $t_{(s)}$ applique $\mathscr{L}(L^p(G))$ dens $CV^p(G/H)$;

ii) t est un homomorphisme de $cv^p(G)$ dans $cv^p(G/H)$; explicitement,

— $t(\rho_G^p(\mu)) = \rho_{G/H}^p(T_H\mu)$ pour $\mu \in M^1(G)$,

— $t(T)T_Hf = T_H(Tf)$ pour T à support compact, $f \in C_c(G)$.

Signalons que la surjectivité de $t: cv^p(G) \to cv^p(G/H)$ vient d'être démontrée [10].

Dans le contexte abélien, on peut interpéter la contraction $m^p(\hat{G}) \to m^p(H^\perp)$ correspondant à $t_{(s)}$ comme un *procédé abstrait de restriction des multiplicateurs à* $H^\perp$. Elle est en effet donnée par la restriction à $H^\perp$ pour les multiplicateurs correspondant à $cv^p(G)$ (ce sont les multiplicateurs m pour lesquels la translation $\hat{x} \to \rho_{\hat{G}}(\hat{x})m$ est continue de $\hat{G}$ dans $m^p(\hat{G})$); c'est encore le cas pour les multiplicateurs uniformément continus lorsque la suite (s) est *suffisamment régulière*, au sens où les fonctions $u_s = \langle \rho(.)\ s^{1/p}, s^{1/p'} \rangle$ forment déjà une unité approchée (bornée) dans $A(G)$ – l'existence de telles suites étant assurée par la *propriété de Følner ponctuelle* [18; §3.6]. Nous ne savons pas si c'est vrai pour tous les multiplicateurs continus.

Venons-en à la *continuité de la p-induction* $(1 \leqq p \leqq \infty)$.

THEOREME 13. *Soit* (π, π^*) *une paire duale de H adhérant à une famille* Ω. *La paire duale induite* $(\mathrm{Ind}_H^G\,(p, \pi), \mathrm{Ind}_H^G\,(p', \pi^*))$ *adhère alors aux paires duales* $(\mathrm{Ind}_H^G\,(p, \omega), \mathrm{Ind}_H^G\,(p', \omega^*))$ *induites à partir de* Ω.

La *démonstration* se lit sur les expressions suivantes de coefficients et de normes:

1°) $$\langle \mathrm{Ind}_H^G\,(p, \pi)(\mu)[f \otimes \xi], [\phi \otimes \xi^*] \rangle = \int_H dh\, \delta(h)^{-1/p} \phi^\times * \mu * f(h) \langle \pi(h)\xi, \xi^* \rangle$$

pour tout $\mu \in M_c(G)$ (mesure sur G à support compact), f, $\phi \in C_c(G)$, $\xi \in B_\pi$, $\xi^* \in B_{\pi^*}$, où on a posé $\phi^\times(x) = \Delta_G(x)^{-1}\phi(x^{-1})$;

2°) $$\Big\| \sum_i \mathrm{Ind}_H^G\,(p, \pi)(\mu_i)[f_i \otimes \xi_i] \Big\|_p = \left[\int_G dx\, \beta(x) \Big| \sum_i \pi\{\delta^{-1/p}(\mu_i * f_i)_{x,H}\}\xi_i \Big|^p \right]^{1/p},$$

$$\text{resp.}\quad \sup_{x \in G} \Big| \sum_i \pi\{(\mu_i * f_i)_{x,H}\}\xi_i \Big| \quad \text{lorsque} \quad p = \infty$$

pour toute famille finie de $\mu_i \in M_c(G)$, $f_i \in C_c(G)$, $\xi_i \in B_\pi$, où on a posé $(\mu_i * f_i)_{x,H}(h) = \mu_i * f_i(xh)$.

Remarque. La continuité de l'induction unitaire est due à J. M. G. Fell ([15; theorem 4.1], [16; §6]).

Supposons dorénavant H moyennable. Le phénomène d'adhérence décrit à la proposition 10 se transmet alors par continuité aux paires duales induites à partir de H.

COROLLAIRE 14. *Soient (π, π^*) une paire duale de H opérant dans des espaces de Banach B, B^* et $1<p<\infty$. La paire duale induite $(\mathrm{Ind}_H^G(p, \pi), \mathrm{Ind}_H^G(p', \pi^*))$ adhère alors à la paire duale $(\rho^p_{G,B}, \rho^{p'}_{G,B^*})$.*

En particulier, étant donné une suite (s) pour la propriété P_1 sur H, chaque coefficient $\langle \mathrm{Ind}_H^G(p, \pi)(.)[f], [\phi]\rangle$ est limite uniforme sur tout compact de G des coefficients $\langle \rho^p_{G,B}(.)\Delta'(s^{1/p}\otimes f), \Delta'(s^{1/p'}\otimes\phi)\rangle$, avec convergence des normes:

$$\|[f]\|_p = \lim_s \|\Delta'(s^{1/p}\otimes f)\|_p, \qquad \|[\phi]\|_{p'} = \lim_s \|\Delta'(s^{1/p'}\otimes\phi)\|_{p'},$$

où on a posé

$$\Delta'(s^{1/p}\otimes f)(x) = \int_H dh\, \delta(h)^{-1/p} s(h^{-1})^{1/p}\pi(h) f(xh),$$

$$\Delta'(s^{1/p'}\otimes\phi)(x) = \int_H dh\, \delta(h)^{-1/p'} s(h^{-1})^{1/p'}\pi^*(h)\phi(xh).$$

EXEMPLE 11. On retrouve ainsi le *second principe de majoration de Herz*, tel que l'a énoncé N. Lohoué [27; lemme 2]:
chaque coefficient $\langle\pi^p(.)f, \phi\rangle$ de la représentation quasi-régulière de G sur $L^p(G/H)$ est limite uniforme sur tout compact de G d'une suite (dénombrable lorsque H est σ-compact) de coefficients $\langle\rho(\cdot)f_i, \phi_i\rangle$ de la représentation régulière de G sur $L^p(G)$, avec contrôle des normes: $\|f_i\|_p = \|f\|_p$, $\|\phi_i\|_{p'} = \|\phi\|_{p'}$.

EXEMPLE 12. Les deux séries principales p-induites de $G = SL(2, \mathbb{R})$ (cf §4) adhèrent à la représentation régulière de G sur $L^p(G)$.

Pour terminer, tirons du corollaire précédent des transferts de convoluteurs, tout comme nous l'avons fait à partir de la proposition 10. A cet effet, nous supposerons à nouveau que B est un p-espace et que la paire duale $(\mathrm{Ind}_H^G(p, \pi), \mathrm{Ind}_H^G(p', \pi^*))$ considérée est réflexive.

Etant donné une suite (s) pour la propriété P_1 sur H et une fonction de Bruhat β de la paire $H\subset G$, on obtient une contraction $t'_{(s)}$ de $\mathscr{L}(L^p(G))$ dans

$\mathcal{L}(L^p(G,H;\pi))$ comme point d'accumulation faible des formes trilinéaires $F'_{s,\beta}(T,f,\phi)=\langle T_B\Delta'(s^{1/p}\otimes\beta f),\Delta'(s^{1/p'}\otimes\beta\phi)\rangle$ sur $\mathcal{L}(L^p(G))\times L^p(G,H;\pi)\times L^{p'}(G,H;\pi^*)$.

Remarques. 1) L'opérateur $t'_{(s)}$ dépend en général de la suite (s) et du point d'accumulation choisi, mais pas de β. En effet, si β_1 et β_2 sont des fonctions de Bruhat de la paire $H\subset G$, la suite $(F'_{s,\beta_1}-F'_{s,\beta_2})$ converge faiblement vers 0.
2) Nous ne savons pas si $t'_{(s)}$ applique $CV^p(G)$ dans le bicommutant de la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(p,\pi)$. Il est par contre facile de montrer que l'image de tout convoluteur à droite est un entrelacement.

PROPOSITION 15. i) *$t'_{(s)}$ est intrinsèque sur $cv^p(G)$. Explicitement:*
— *$t'(\rho_G^p(\mu))=\mathrm{Ind}_H^G(p,\pi)(\mu)$ pour $\mu\in M^1(G)$,*
— *$t'(T)[f]=[T_Bf]$ pour T à support compact, $f\in C_c(G,B)$.*
ii) *$t'_{(s)}$ est également intrinsèque sur $CV^p(G)_+$ (convoluteurs positifs)*:*

$$t'(\rho_G^p(\mu))=\mathrm{Ind}_H^G\,(p,\pi)(\mu),\quad \textit{où}\quad \langle \mathrm{Ind}_H^G\,(p,\pi)(\mu)f,\phi\rangle=$$
$$=\int_G d\mu(g)\,\langle \mathrm{Ind}_H^G\,(p,\pi)(g)f,\phi\rangle.$$

Démonstration. i) La première identité résulte directement du corollaire 14, la seconde de la convergence de

$$\langle T_B\Delta'(s^{1/p}\otimes f_0),\Delta'(s^{1/p'}\otimes\phi)\rangle$$
$$=\int_G dx\int_H dh\,\delta(h)^{-1/p}\langle\pi(h)T_Bf_0(xh),\phi(x)\rangle\langle\rho(h)s^{1/p},s^{1/p'}\rangle$$

vers

$$\langle[T_Bf_0],[\phi]\rangle=\int_G dx\int_H dh\,\delta(h)^{-1/p}\langle\pi(h)T_Bf_0(xh),\phi(x)\rangle$$

pour tout $f_0=\rho_{G,B}^p(u)f$ $(u\in C_c(G),f\in C_c(G,B))$, $\phi\in C_c(G,B^*))$.

ii) Chaque mesure $\langle \mathrm{Ind}_H^G\,(p,\pi)(g)[f],[\phi]\rangle\,d\mu(g)$, étant limite faible des mesures $\langle\rho_{G,B}^p(g)\Delta'(s^{1/p}\otimes f),\ \Delta'(s^{1/p'}\otimes\phi)\rangle\,d\mu(g)$, est bornée (compacité faible des boules fermées dans $M^1(G)$). Par conséquent, les expressions

$$\langle\rho_{G,B}^p(\mu)\Delta'(s^{1/p}\otimes f),\Delta'(s^{1/p'}\otimes\phi)\rangle=\int_G d\mu(g)\,\langle\rho_{G,B}^p(g)\Delta'(s^{1/p}\otimes f),\Delta'(s^{1/p'}\otimes\phi)\rangle$$

* Rappelons que tout convoluteur *positif* T de $L^p(G)$ est défini par une mesure positive μ sur G, i.e. $T=\rho_G^p(\mu):f\mapsto\mu*f$.

convergent vers

$$\langle \mathrm{Ind}_H^G(p, \pi)(\mu)[f], [\phi]\rangle = \int_G d\mu(g)\langle \mathrm{Ind}_H^G(p, \pi)(g)[f], [\phi]\rangle.$$

EXEMPLE 13. Dans le cas particulier de la représentation quasi-régulière π^p de G sur $L^p(G/H)$, l'assertion i) est le théorème 9 de [22]. L'assertion ii), combinée avec le corollaire 8, fournit quant à elle la proposition 1 de [27]: *une mesure positive μ sur G définit un convoluteur $\rho_G^p(\mu)$ de $L^p(G)$ si et seulement si μ définit un opérateur borné $\pi^p(\mu)$ sur $L^p(G/H)$ par $\langle \pi^p(\mu)f, \phi\rangle = \int_G d\mu(g)\langle \pi^p(g)f, \phi\rangle$; dans ce cas $\|\rho_G^p(\mu)\| = \|\pi^p(\mu)\|$.*

Résumons maintenant les propriétés de $t'_{(s)}$, lorsque H est de plus normal dans G.

a) $t'_{(s)}$ est une contraction de $\mathcal{L}(L^p(G))$ dans $\mathcal{L}(L^p(G/H))$.

b) L'image de tout convoluteur à droite de $L^p(G)$ est un convoluteur à droite de $L^p(G/H)$.

c) t' est un homomorphisme de $cv^p(G)$ dans $cv^p(G/H)$. Explicitement:

— $t'(\rho_G^p(\mu)) = \rho_{G/H}^p(T_H\mu)$ pour $\mu \in M^1(G)$,

—$t'(T)T_Hf = T_H(Tf)$ pour T à support compact, $f \in C_c(G)$.

d) $t'_.$ applique $CV^p(G)_+$ sur $CV^p(G/H)_+$, en préservant les normes:

$$t'(\rho_G^p(\mu)) = \pi^p(\mu), \quad \text{où} \quad \langle \pi^p(\mu)f, \phi\rangle = \int_G d\mu(g)\,\langle \rho_{G/H}^p(gH)f, \phi\rangle,$$

avec $\|\rho_G^p(\mu)\| = \|\pi^p(\mu)\|$.

Signalons pour terminer le bon comportement de $t'_{(s)}$ dans le contexte abélien. La contraction $m^p(\hat{G}) \to m^p(H^\perp)$ correspondante est en effet donnée par la *restriction à $H^\perp$* pour tous les multiplicateurs continus, lorsque la suite (s) est *suffisamment régulière* (au sens vu précédemment). On retrouve ainsi un résultat connu ([30; cor. 4.6, part (b)] ou [25; théorème I.1]).

4. Séries principales p_*-induites

Nous terminons par un exemple de représentations p-induites. Nous considérons tout d'abord le cas particulier de $SL(2, \mathbb{R})$ et passerons ensuite au cas général d'un GLSS (groupe de Lie semi-simple, connexe, non compact, de centre fini).

Les *séries principales unitaires* de $G = SL(2, \mathbb{R})$ sont composées des représentations induites à partir des caractères $\chi_{\varepsilon,\lambda}\begin{pmatrix} a & * \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} = \mathrm{sgn}\,(a)^\varepsilon\,|a|^{i\lambda}$

($\varepsilon = 0, 1$; $\lambda \in \mathbb{R}$) du sous-groupe *triangulaire* P. Nous nous intéressons ici aux représentations p-induites $\pi^p_{\varepsilon,\lambda}$ à partir de $\chi_{\varepsilon,\lambda}$.

Les décompositions univoques $G = KAN$ et $P = MAN$, où

$$K = \left\{ k_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z} \right\}, \qquad M = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \middle| a > 0 \right\}, \qquad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\},$$

conduisent à la ***réalisation compacte*** de $\pi^p_{\varepsilon,\lambda}$ sur le sous-espace $L^p_\varepsilon(K)$, resp. $C_\varepsilon(K)$ des fonctions de parité ε dans $L^p(K)$, resp. $C(K)$:

$$\{\pi^p_{\varepsilon,\lambda}(g)f\}(k_\theta) = m(g, k_\theta)^{1/p + i\lambda/2} f(g^{-1} \cdot k_\theta),$$

où

$$g^{-1} \cdot k_\theta = \sqrt{m(g, k_\theta)} \begin{pmatrix} d\cos(\theta/2) + b\sin(\theta/2) & c\cos(\theta/2) + a\sin(\theta/2) \\ -c\cos(\theta/2) - a\sin(\theta/2) & d\cos(\theta/2) + b\sin(\theta/2) \end{pmatrix},$$

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

et

$$m(g, k_\theta) = \left[(d\cos(\theta/2) + b\sin(\theta/2))^2 + (c\cos(\theta/2) + a\sin(\theta/2))^2 \right]^{-1}$$

est le module de quasi-invariance de la mesure $d\theta$.

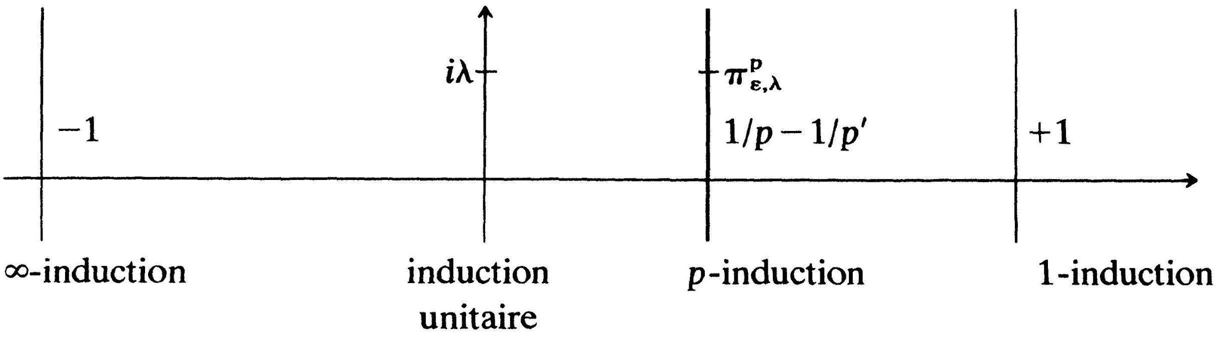
La décomposition univoque $G = VP \cup wP$, où $V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$ et $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, conduit quant à elle à la ***réalisation nilpotente*** de $\pi^p_{\varepsilon,\lambda}$ sur $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leqq p < \infty$:

$$\{\pi^p_{\varepsilon,\lambda}(g)f\}(x) = \operatorname{sgn}(bx + d)^\varepsilon \, |bx + d|^{-2/p - i\lambda} f\left(\frac{ax + c}{bx + d}\right), \qquad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Rappelons qu'on obtient le ***prolongement analytique*** $(\tilde{\pi}_{\varepsilon,z})_{z \in \mathbb{C}}$ de la série principale unitaire $(\pi^2_{\varepsilon,\lambda})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ en remplaçant le paramètre $i\lambda \in i\mathbb{R}$ par un paramètre $z \in \mathbb{C}$ dans la réalisation compacte. On produit de la sorte des représentations fortement continues sur $L^2_\varepsilon(K)$ [32; 8.3].

LEMME 16. *Les représentations $\pi^p_{\varepsilon,\lambda}$ et $\tilde{\pi}_{\varepsilon,z}$ coïncident – du moins sur $C_\varepsilon(K)$ – lorsque $z = 1/p - 1/p' + i\lambda$.*

La *série principale p-induite* $(\pi^p_{\varepsilon,\lambda})_{\lambda\in\mathbb{R}}$ s'identifie donc à la droite d'équation $\operatorname{Re} z = 1/p - 1/p'$ dans le prolongement analytique $(\tilde{\pi}_{\varepsilon,z})_{z\in\mathbb{C}}$ de la série principale unitaire correspondante.



Remarques. 1) Le fait que les représentations sphériques $\tilde{\pi}_{0,z}$, dans la réalisation nilpotente, sont isométriques sur $L^p(\mathbb{R})$ lorsque $\operatorname{Re} z = 1/p - 1/p'$ – facile à vérifier au demeurant: $\frac{d}{dx}\left(\frac{ax+c}{bx+d}\right) = (bx+d)^{-2}$ – est à la base de la démonstration de M. G. Cowling du phénomène de Kunze–Stein pour $SL(2,\mathbb{R})$ [7; section 3]. La p-induction en donne une interprétation naturelle.
2) Les différentes séries principales p-induites sphériques $(\pi^p_{0,\lambda})_{\lambda\in\mathbb{R}}$ décrivent toute la bande $-1 \leqq \operatorname{Re} z \leqq 1$ correspondant aux fonctions sphériques $\phi_z(g) = \langle \tilde{\pi}_{0,z}(g)1, 1\rangle_K$ *bornées.*

Le cas de $SL(2,\mathbb{R})$ est typique d'un GLSS de rang 1. Pour traiter le cas général d'un GLSS G de rang n, nous ferons appel à des résultats classiques sur las structure des sous-groupes *paraboliques* de G [33; 1.2]. Fixons une décomposition d'Iwasawa $G = KAN$ et notons, comme de coutume, M le centralisateur de A dans K et $P = MAN$ le sous-groupe parabolique minimal correspondant. Les *séries principales unitaires* de G sont composées des représentations induites à partir des représentations $\sigma \times e^{i\lambda}\,(m \exp Hn) = \sigma(m)e^{i\lambda(H)}$ de P, où $\sigma \in \hat{M}$ (dual unitaire de M), $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ (dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ de A). Nous allons décrire un procédé permettant d'intercaler $(n-1)$ sous-groupes fermés entre P et $G: P^0 = P \subset P^1 \subset \cdots \subset P^n = G$, et nous intéresser, pour un multi-indice $p_* = (p_1, \ldots, p_n)$ donné, à la représentation $\pi^{p_*}_{\sigma,\lambda}$ obtenues à partir de $\sigma \times e^{i\lambda}$ par p_1-induction de P à $P^1, \ldots, p_n$-induction de P^{n-1} à G.

Suivant la coutume, notons $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ les décompositions correspondantes des algèbres de Lie de G et de P, Σ l'ensemble des racines restreintes de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, Σ_+ le sous-ensemble des racines positives – si bien que $\mathfrak{n} = \oplus_{\alpha\in\Sigma_+}\mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{g}_\alpha$ étant l'espace-poids correspondant à α – et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines simples. Posons $\mathfrak{a}^j = \oplus_{k=1}^j \mathbb{R}\alpha_k$ ($\mathfrak{a}$ ayant été identifié à $\mathfrak{a}^*$ au moyen de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, $\Sigma^j = \Sigma_+ \cap \mathfrak{a}^j$, $\Sigma_j = \Sigma^j \setminus \Sigma^{j-1}$ (avec la convention $\Sigma^0 = \emptyset$), $\rho_j =$

$\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma_j}(\dim \mathfrak{g}_\alpha)\alpha$ et introduisons les sous-algèbres $\mathfrak{a}_j = \mathbb{R}\rho_j$,

$$\mathfrak{n}^j = \bigoplus_{\alpha\in\Sigma^j} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{n}_j = \bigoplus_{\alpha\in\Sigma_j} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{b}^j = \bigoplus_{\alpha\in-\Sigma^j} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{b}_j = \bigoplus_{\alpha\in-\Sigma_j} \mathfrak{g}_\alpha,$$

$$\mathfrak{m}^j = \mathfrak{b}^j \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}^j \oplus \mathfrak{n}^j, \qquad \mathfrak{p}^j = \mathfrak{b}^j \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{m}^j \oplus \Big(\bigoplus_{k>j} \mathfrak{a}_k\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{k>j} \mathfrak{n}_k\Big)$$

de $\mathfrak{g}$. Les sous-groupes analytiques A^j, A_j, N^j, N_j, V^j, V_j, M_0^j, P_0^j de G correspondants sont fermés. $M^j = MM_0^j$ et $P^j = MP_0^j$ sont encore des sous-groupes fermés d'algèbre de Lie $\mathfrak{m}^j$ et $\mathfrak{p}^j$. Le sous-groupe parabolique P^j admet la décomposition de Langlands $P^j = M^j(A_{j+1}\cdots A_n)(N_{j+1}\cdots N_n)$. Son module est trivial sur M^j et sur N; il est donné par $\Delta_j(\exp H) = \exp[-2\sum_{k>j}\rho_k(H)]$ sur A.

Remarque. En variant la numérotation des racines simples on obtient ainsi toutes les familles maximales de sous-groupes emboîtés entre P et G.

La génération suivante du théorème d'induction par étages permettra de réaliser simplement les représentations $\pi^{p_*}_{\sigma,\lambda}$. Soient $H_*: H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n$ une famille de groupes localement compacts emboîtés, π une représentation de H_0 (isométrique, fortement continue, sur un espace de Banach B) et $p_* = (p_1, \ldots, p_n)$ un multi-indice. Fixons sur chaque quotient H_j/H_{j-1} une mesure quasi-invariante $d_{q_j}\zeta_j$ associée à une fonction homogène continue $q_j: H_j \to (0,\infty)$ et posons $q^j(h_j) = q_j(h_j)^{1/p_j}\cdots q_n(h_j)^{1/p_n}$ ($h_j \in H_j$). Notons $C_c^{p_*}(H_*;\pi)$ l'espace des fonctions $f: H_n \to B$ vérifiant

i) $f(h_nh_0) = \left[\frac{\Delta_{H_0}(h_0)}{\Delta_{H_1}(h_0)}\right]^{1/p_1}\cdots\left[\frac{\Delta_{H_{n-1}}(h_0)}{\Delta_{H_n}(h_0)}\right]^{1/p_n}\pi(h_0)^{-1}f(h_n) \quad (h_n\in H_n,\ h_0\in H_0)$,

ii) f est continue, à support compact modulo H_0,

et $L^{p_*}(H_*;\pi)$ son complété pour la norme (intrinsèque)

$$\|f\|_{p_*} = \Big[\int_{H_n/H_{n-1}} d_{q_n}(h_nH_{n-1})\, q^n(h_n)^{-p_n}\cdots$$

$$\cdots\Big[\int_{H_1/H_0} d_{q_1}(h_1H_0)\, q^1(h_1)^{-p_1}\, |f(h_n\cdots h_1)|^{p_1}\Big]^{p_2/p_1}\cdots\Big]^{1/p_n}$$

(avec les modifications habituelles lorsque $p_j = \infty$).

LEMME 17. *La représentation* $\mathrm{Ind}_{H_{n-1}}^{H_n}(p_n, \ldots \mathrm{Ind}_{H_0}^{H_1}(p_1, \pi)\cdots)$ *est équivalente à la représentation* $\{\mathrm{Ind}_{H_*}(p_*, \pi)(g)f\}(h_n) = f(g^{-1}h_n)$ *de* H_n *sur* $L^{p_*}(H_*;\pi)$.

La *démonstration* est semblable à celle du théorème 1.

Les décompositions d'Iwasawa généralisées $P^j = K^jAN$, où $K^j = K \cap P^j$ (c'est le normalisateur de $A_{j+1} \cdots A_n$ dans K), conduisent à la *réalisation compacte* de $\pi^{\mathrm{p}*}_{\sigma,\lambda}$ sur $L^{\mathrm{p}*}(K_*; \sigma)$:

$$\{\pi^{\mathrm{p}*}_{\sigma,\lambda}(g)f\}(k) = \exp\left[-\left(\sum_j (2/p_j)\rho_j + i\lambda\right)(H(g^{-1}k))\right]f(g^{-1} \,.\, k),$$

où $g^{-1}k = (g^{-1} \,.\, k)\exp H(g^{-1}k)\, n$ dans la décomposition $G = KAN$.

Lorsque tous les indices p_j sont finis, on peut également donner une *réalisation nilpotente* de $\pi^{\mathrm{p}*}_{\sigma,\lambda}$, basée sur des décompositions de Bruhat généralisées.

Pour commencer, rappelons la décomposition de Bruhat $G = \bigsqcup_{w\in W} PwP$, où W est le groupe de Weyl de Σ, identifié à M'/M, M' étant le normalisateur de A dans K. La double classe $P\omega P$ de l'élément $\omega \in W$ échangeant Σ_+ avec $-\Sigma_+$ est un ouvert de G, dont le complémentaire est une sous-variété de dimension inférieure. Comme $\omega^{-1}N\omega = V(=V^n)$, il en est de même de VP; de plus, l'application $(v, p) \mapsto vp$ est un difféomorphisme de $V \times P$ sur VP.

Le groupe de Weyl W^j de Σ^j s'identifie quant à lui à $M' \cap P^j/M$ ($M' \cap P^j$ est le normalisateur de A dans K^j); il admet la décomposition univoque $W^j = W_jW^{j-1}$, où $W_j = \{w \in W^j \mid w \,.\, \Sigma^{j-1} \cap (-\Sigma_+) = \varnothing\}$. La décomposition de Bruhat généralisée $P^j = \bigsqcup_{w\in W^j} N_jwP^{j-1}$ fait apparaître à son tour V_jP^{j-1} comme un ouvert de P^j, dont le complémentaire est une sous-variété de dimension inférieure, la paramétrisation $(v_j, p^{j-1}) \mapsto v_jp^{j-1}$ étant un difféomorphisme.

Ces décompositions permettent de réaliser (pp) $\pi^{\mathrm{p}*}_{\sigma,\lambda}$ sur l'espace $L^{\mathrm{p}*}(V; \mathfrak{H}_\sigma)$, complété de $C_c(V; \mathfrak{H}_\sigma)$ pour la norme

$$\|f\|_{\mathrm{p}*} = \left[\int_{V_n} dv_n \cdots \left[\int_{V_1} dv_1 |f(v_n \cdots v_1)|^{p_1}\right]^{p_2/p_1} \cdots\right]^{1/p_n},$$

par

$$\{\pi^{\mathrm{p}*}_{\sigma,\lambda}(g)f\}(v) = \sigma(m(g^{-1}v))^{-1}\exp\left[-\left(\sum_j (2/p_j)\rho_j + i\lambda\right)(H(g^{-1}v))\right]f(g^{-1} \,.\, v),$$

où $g^{-1}v = (g^{-1} \,.\, v)m(g^{-1}v)\exp H(g^{-1}v)n$ dans la carte $VMAN$.

On obtient à nouveau le *prolongement analytique* $(\tilde{\pi}_{\sigma,z})_{z\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}}$ de la série principale unitaire $(\pi^2_{\sigma,\lambda})_{\lambda\in\mathfrak{a}^*}$ en complexifiant le paramètre $i\lambda \in i\mathfrak{a}^*$ dans la réalisation compacte.

LEMME 18. *Les représentations* $\tilde{\pi}_{\sigma,z}$ *et* $\pi^{\mathrm{p}*}_{\sigma,\lambda}$ *coïncident – du moins sur* $C(K, M; \sigma)$ *– lorsque* $z = \sum_j (2/p_j)\rho_j + i\lambda$.

La *série principale p_*-induite* $(\pi^{p_*}_{\sigma,\lambda})_{\lambda\in\mathfrak{a}^*}$ s'identifie donc au plan d'équation $\operatorname{Re} z = \sum_j (1/p_j - 1/p'_j)\rho_j$ dans le prolongement analytique $(\tilde{\pi}_{\sigma,z})_{z\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}}$ de la série principale unitaire correspondante.

Remarques. 1) Le fait que les représentations sphériques $\tilde{\pi}_{1,z}$, dans la réalisation nilpotente, sont isométriques sur $L^{p_*}(V)$ est à la base de la démonstration de M. G. Cowling du phénomène de Kunze–Stein dans le cas général [7; sections 5 et 6]. La p_*-induction en donne une interprétation naturelle.

2) Les coefficients sphériques $\langle\pi^{p_*}_{1,\lambda}(\cdot)1, 1\rangle_K$ fournis par les différentes séries principales p_*-induites sphériques décrivent toutes les fonctions sphériques *bornées* de (G, K) [19].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANKER, J.-PH., *Contenance faible au sens de Fell et moyennabilité.* Travail de diplôme, Université de Lausanne (1978).

[2] ANKER, J.-PH., *Induced intertwining operators and multipliers.* Abstracts Amer. Math. Soc. *2* (1981), 303.

[3] ANKER, J.-PH. *Aspects de la p-induction en analyse harmonique.* Thèse de doctorat, Payot Lausanne (1982).

[4] BARUT, A. O. and RACZKA, R., *Theory of group representations and applications.* PWN – Polish Scientific Publishers, Warszawa (1977).

[5] BOURBAKI, N., *Intégration, ch. IV.* 2e édition, Hermann (1965).

[6] COIFMAN, R. R. and WEISS, G., *Transference methods in analysis.* Regional conference series Amer. Math. Soc. *31* (1977).

[7] COWLING, M. G., *The Kunze–Stein phenomenon.* Ann. of Math. *107* (1978), 209–234.

[8] DE LEEUW, K., *On L_p multipliers.* Ann. of Math. *81* (1965), 364–372.

[9] DERIGHETTI, A., *Relations entre les convoluteurs d'un groupe localement compact et ceux d'un sous-groupe fermé.* Bull. Sc. Math., 2e série, *106* (1982), 69–84.

[10] DERIGHETTI, A., *A propos des convoluteurs d'un groupe quotient.* Bull. Sc. Math., 2e série, *107* (1983), 3–23.

[11] EYMARD, P., *Algèbres de A_p et convoluteurs de L^p.* Séminaire Bourbaki (Novembre 1969), Springer Lecture Notes in Math. *180* (1971), 57–71.

[12] EYMARD, P., *Moyennes Invariantes et Représentations Unitaires.* Springer Lecture Notes in Math. *300* (1972).

[13] EYMARD, P. et LOHOUE, N., *Sur la racine carrée du noyau de Poisson dans les espaces symétriques et une conjecture de E. M. Stein.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4e série, *8* (1975), 179–188.

[14] FELL, J. M. G., *The dual space of C^*-algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. *94* (1960), 365–403.

[15] FELL, J. M. G., *Weak containment and induced representations of groups.* Can. J. Math. *14* (1962), 257–268.

[16] FELL, J. M. G., *Induced representations and Banach *-algebraic bundles.* Springer Lecture Notes in Math. *582* (1977).

[17] FONTENOT, R. A. and SCHOCHETMAN, I. E., *Induced representations of groups on Banach spaces.* Rocky Mountain J. of Math. 7 (1977), 53–82.

[18] GREENLEAF, F. P., *Invariant means on topological groups and their applications.* Van Nostrand (1968).

[19] Helgason, S. and Johnson, K., *The bounded Spherical Functions on Symmetric Spaces.* Advances in Math. *3* (1969), 586–593.
[20] Herz, C. S., *Sur le phénomène de Kunze–Stein.* C.R. Acad. Sci. Paris, Série A, *271* (1970), 491–493.
[21] Herz, C. S., *The theory of p-spaces with an application to convolution operators.* Trans. Amer. Math. Soc. *154* (1971), 69–82.
[22] Herz, C. S., *Problems of extrapolation and spectral synthesis on groups.* Springer Lecture Notes in Math. *266* (1972), 155–166.
[23] Herz, C. S., *Harmonic synthesis for subgroups.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) *23* (1973), 91–123.
[24] Kraljevič, H., *Induced representations of groups on Banach spaces.* Glasnik Math. *4* (1969), 183–196.
[25] Lohoue, N., *Algèbres $A^p(G)$ et convoluteurs de $L^p(G)$.* Thèse d'Etat, Université de Paris-Sud (Orsay) (1971).
[26] Lohoue, N., *Sur les convoluteurs de $L^p(G)$.* C.R. Acad. Sci. Paris, Série A. *278* (1974), 1543–1545.
[27] Lohoue, N., *Estimations L^p des coefficients de certaines représentations et opérateurs de convolution.* Advances in Math. *38* (1980), 178–221.
[28] Mackey, G. W., *Induced representations of locally compact groups I.* Ann. of Math. *55* (1952), 101–139.
[29] Reiter, H., *Classical harmonic analysis and locally compact groups.* Oxford, University Press (1968).
[30] Saeki, S., *Translation invariant operators on groups.* Tôhoku Math. J. *22* (1970), 409–419.
[31] Schochetman, I. E., *Integral operators in the theory of induced Banach representations.* Memoirs Amer. Math. Soc. *207* (1978).
[32] Wallach, N. R., *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces.* Marcel Dekker (1973).
[33] Warner, G., *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups, vol. I.* Springer Grundlehren *188* (1972).

Institut de mathématiques de
l'Université de Lausanne
Collège propédeutique
CH-1015 LAUSANNE-Dorigny

Reçu le 12 janvier 1983