Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 58 (1983)

Artikel: Plongements d'espaces homogènes.

Autor: Luna, D. / Vust, Th.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44596

Comment. Math. Helvetici 58 (1983) 186–245 0010-2571/83/002186-60$01.50 + 0.20/0

Plongements d'espaces homogènes

D. LUNA et TH. VUST

Introduction

Soient G un groupe algébrique affine connexe, H un sous-groupe algébrique de G non nécessairement connexe (le corps de base sera algébriquement clos, de caractéristique nulle et même – lorsque cela nous arrange – non dénombrable). Un plongement de l'espace homogène G/H est une variété algébrique intègre dans laquelle G opère algébriquement et qui contient G/H comme orbite ouverte.

Ce travail propose un cadre pour l'étude des plongements. Aux §§1 et 2, nous précisons la définition des plongements en adoptant un point de veu "rationnel". Au §3, nous introduisons la notion de plongement élémentaire: il s'agit des plongements lisses composés de deux orbites, l'orbite ouverte G/H et une orbite fermée de codimension 1. Le charme et la maniabilité de cette notion viennent de ce qu'on peut la déguiser sous des apparences assez différentes: un plongement élémentaire est aussi une certaine valuation du corps des fonctions rationnelles sur G/H (voir le §3), puis également une classe d'équivalence de "germes de courbes formels divergents" dans G/H (voir le §4). Nous abordons l'étude des plongements élémentaires pour eux-mêmes au §5, où nous indiquons aussi leur lien avec l'immeuble sphérique. Mais les plongements élémentaires sont surtout intéressants pour le rôle qu'ils promettent de jouer dans l'étude des plongements généraux: par exemple, les critères valuatifs de séparation et de propreté s'expriment très naturellement, pour les plongements, en termes de plongements élémentaires (voir le §6).

Aux paragraphes suivants nous abordons une étude plus poussée des plongements, en supposant le groupe G réductif et la variété du plongement normale. Appelons "complication" de G/H la codimension minimale des orbites d'un sous-groupe de Borel de G dans G/H. L'analyse des plongements que nous faisons aux §§7 et 8 est surtout significative lorsque la "complication" de G/H est ≤ 1: dans ce cas nos résultats conduisent à une classification de tous les plongements normaux – même non nécessairement quasi-projectifs. Au dernier paragraphe, comme illustration de ce qui précède, nous examinons en détail le cas $G = SL(2)$ et $H = \{e\}$.

Nous devons notre point de départ bien évidemment à la théorie des plongements toriques ([5], [6]), mais aussi à l'article [10] de V. L. Popov, dans lequel est donnée la classification des espaces presque-homogènes *affines* normaux sous $SL(2)$. Nous remercions tous ceux qui, par l'intérêt qu'ils y ont pris et par leurs suggestions, ont contribué à la réalisation de ce travail – en particulier C. DeConcini, H. Kraft, M. Lejeune-Jalabert, C. Procesi, G. Rousseau et tout particulièrement F. Pauer ([20], [21]) qui nous a beaucoup aidés.

Nous dédions ces pages à notre ami Jacques Vey.

1. Préliminaires

Dans toute la suite, nous désignerons par G un groupe algébrique affine connexe, et par H un sous-groupe algébrique de G non nécessairement connexe, le corps de base k étant algébriquement clos et de caractéristique nulle.

Un plongement de l'espace homogène G/H est la donnée

1) d'une variété algébrique intègre X dans laquelle G opère algébriquement;
2) d'un plongement ouvert de l'espace homogène G/H dans X, plongement qui commute à l'opération de G.

Insistons sur le fait que, par définition, X contient un point privilégié (l'image du point H/H de G/H), dont l'orbite est ouverte et dont le groupe d'isotropie est H; c'est par ce détail que la notion de plongement diffère de celle d'espace presque-homogène (employée par exemple dans [10] et [12]). Dorénavant, on considère le plongement $G/H \hookrightarrow X$ comme une inclusion, et donc G/H comme un sous-ensemble de X.

Lorsque Z est une variété algébrique intègre, notons $k(Z)$ le corps des fonctions rationnelles, et $k[Z]$ l'algèbre des fonctions régulières. Pour tout plongement X, l'inclusion $G/H \hookrightarrow X$ identifie $k(X)$ et $k(G/H)$, et les algèbres locales $\mathcal{O}_{X,x}$, $x \in X$ se trouvent donc contenues dans $k(G/H)$. Comme on voit, lorsqu'on s'intéresse aux plongements, on est tout naturellement conduit à adopter un point de vue "rationnel" en géométrie algébrique (point de vue actuellement quelque peu délaissé, qui donne un rôle prépondérant au corps des fonctions rationnelles).

Pour la commodité du lecteur et pour fixer nos notations, nous commencerons par résumer brièvement ce point de vue (voir aussi [4]).

1.1 Soit K un corps, extension de type fini de k.

On appelle localités de K les sous-k-algèbres locales de K qui ont K comme corps des fractions. On dit qu'une localité est géométrique, si elle peut être obtenue comme localisé d'une sous-k-algèbre de type fini de K. On notera $\mathfrak{L}(K)$ l'ensemble des localités géométriques de K. On appelle sous-algèbres affines de K les sous-k-algèbres de type fini de K qui ont K comme corps des fractions. Les sous-ensembles de $\mathfrak{L}(K)$ qu'on obtient en localisant une sous-algèbre affine en ses différents idéaux premiers, forment la base d'une topologie de $\mathfrak{L}(K)$, la topologie de Zariski.

Désignons par $\mathfrak{X}(K)$ l'ensemble des localités géométriques de K dont le corps résiduel est isomorphe à k. On considère $\mathfrak{X}(K)$ muni de la topologie induite par celle de $\mathfrak{L}(K)$. Si A est une sous-algèbre affine de K, on désigne par X_A le sous-ensemble de $\mathfrak{X}(K)$ qu'on obtient en localisant A en ses divers idéaux maximaux; les X_A forment une base de la topologie de $\mathfrak{X}(K)$. Les "points" de $\mathfrak{X}(K)$ sont en fait des "germes de variétés algébriques intègres ayant K comme corps de fonctions rationnelles." On notera les éléments de $\mathfrak{X}(K)$ par $x, x', \ldots$ lorsqu'on les considérera comme points de l'ensemble $\mathfrak{X}(K)$, et par pur artifice, on écrira $\mathcal{O}_x$ lorsqu'on pense plutôt à la sous-algèbre locale qui est "associée" à x (et on notera $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_x$). On identifie de manière naturelle $\mathfrak{X}(K)\times\mathfrak{X}(K)$ à un sous-ensemble de $\mathfrak{X}(L)$, où L désigne le corps des fractions de $K\otimes_k K$.

Dans la présente perspective, une variété algébrique intègre ayant K comme corps de fonctions rationnelles n'est alors rien d'autre qu'un sous-ensemble X de $\mathfrak{X}(K)$ qui est ouvert, noethérien, et séparé (séparé signifie ici: la diagonale de $X\times X\subset\mathfrak{X}(L)$ est fermée dans $X\times X$). Si $x\in X\subset\mathfrak{X}(K)$, on écrira aussi $\mathcal{O}_{X,x}$ pour $\mathcal{O}_x$ (faisant ainsi le lien avec les notations habituelles).

Soit K' un sous-corps de K contenant k, et soient $X\subset\mathfrak{X}(K)$, $X'\subset\mathfrak{X}(K')$ deux ouverts. Un morphisme (dominant) $\varphi: X\to X'$ est une application telle que $\mathcal{O}_{X',\varphi(x)}\subset\mathcal{O}_{X,x}$, quel que soit $x\in X$.

1.2. L'opération naturelle de G dans G/H se reflète en une opération de G dans $k(G/H)$, G opérant par automorphismes de corps; on en déduit une opération (ensembliste) de G dans $\mathfrak{X}(k(G/H))$, et une opération de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de G dans $k(G/H)$, $\mathfrak{G}$ opérant par dérivations. Désignons par $\mathfrak{X}(G/H)$ l'ensemble des $x\in\mathfrak{X}(k(G/H))$ tels que $\mathcal{O}_x$ soit stable par $\mathfrak{G}$.

PROPOSITION. *$\mathfrak{X}(G/H)$ est ouvert dans $\mathfrak{X}(k(G/H))$.*

Preuve. Soit $x\in\mathfrak{X}(G/H)$. Choisissons une sous-algèbre affine A de $k(G/H)$ telle que $x\in X_A$, puis un système de générateurs $f_1,\ldots,f_n$ de A, et enfin une base $X_1,\ldots,X_m$ de $\mathfrak{G}$. Puisque par hypothèse $X_if_j\in\mathcal{O}_x$, on peut trouver $g_{ij}\in A$ et $g\in A-m_x$ tels que $X_if_j=g_{ij}/g$. On vérifie sans peine que $A[g^{-1}]$ est stable par $\mathfrak{G}$, donc que $X_{A[g^{-1}]}\subset\mathfrak{X}(G/H)$ et que $x\in X_{A[g^{-1}]}$. La proposition en résulte.

1.3. On notera e l'élément neutre de G. L'opération de G dans G/H se reflète en une injection $\mu : k(G/H) \to \mathcal{O}_{G\times G/H, e\times G/H} \subset k(G\times G/H)$. Au numéro suivant, nous aurons besoin de connaître μ en termes de l'opération de $\mathfrak{B}$ dans $k(G/H)$.

Désignons par $S(\mathfrak{B}^*) = \bigoplus_{n\geq 0} S_n(\mathfrak{B}^*)$ l'algèbre symétrique sur le dual de $\mathfrak{B}$, et par $S_+(\mathfrak{B}^*) = \bigoplus_{n>0} S_n(\mathfrak{B}^*)$ son idéal maximal gradué. Pour toute k-algèbre A posons $A[\mathfrak{B}] = S(\mathfrak{B}^*)\otimes A$; c'est l'algèbre des fonctions polynômes sur $\mathfrak{B}$ à valeurs dans A. Désignons par $A[[\mathfrak{B}]]$ le complété de $A[\mathfrak{B}]$ pour l'idéal $S_+(\mathfrak{B}^*)\otimes A$; $A[[\mathfrak{B}]]$ s'identifie au produit des $S_n(\mathfrak{B}^*)\otimes A$, $n\in\mathbb{N}$.

Supposons maintenant que $\mathfrak{B}$ opère dans A par dérivations. Soit $f\in A$; pour tout $n\in\mathbb{N}$, f donne par $X\in\mathfrak{B}\mapsto(1/n!)X^n f\in A$ un élément de $S_n(\mathfrak{B}^*)\otimes A$; des propriétés bien connues de l'exponentielle résulte aussitôt que ceci définit un homomorphisme d'algèbres $\hat{\mu} : A \to A[[\mathfrak{B}]]$. Il est clair que $\hat{\mu}$ est fonctoriel en A.

Si $\mathcal{O}$ est un anneau local, nous désignerons par $\hat{\mathcal{O}}$ son complété pour l'idéal maximal. L'homomorphisme $\hat{\mu} : \mathcal{O}_{G,e} \to \mathcal{O}_{G,e}[[\mathfrak{B}]]$ et l'augmentation $\mathcal{O}_{G,e} \to k$ induisent une injection $\mathcal{O}_{G,e} \to k[[\mathfrak{B}]]$ qui permet d'identifier $\hat{\mathcal{O}}_{G,e}$ avec $k[[\mathfrak{B}]]$ (penser aux développements de Taylor). De l'inclusion $\mathcal{O}_{G,e} \hookrightarrow k[[\mathfrak{B}]]$ résulte par tensorisation une injection $\mathcal{O}_{G,e}\otimes k(G/H) \hookrightarrow k[[\mathfrak{B}]]\otimes k(G/H) \hookrightarrow k(G/H)[[\mathfrak{B}]]$, qui permet d'identifier $\hat{\mathcal{O}}_{G\times G/H, e\times G/H}$ avec $k(G/H)[[\mathfrak{B}]]$. Désignons par i l'inclusion de $\mathcal{O}_{G\times G/H, e\times G/H}$ dans $k(G/H)[[\mathfrak{B}]]$ qu'on en déduit.

LEMME. *On a* $i\circ\mu = \hat{\mu}$.

Preuve. Il suffit clairement de démontrer le lemme dans le cas où $H = \{e\}$, et il suffit de vérifier alors que $i\circ\mu = \hat{\mu}$ sur $k[G]$, l'algèbre des fonctions régulières sur G.

Par fonctorialité de $\hat{\mu}$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} k[G] \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\hat{\mu}"'] & k[G]\otimes k[G] \arrow[d, "\hat{\mu}"] \\ k[G][[\mathfrak{B}]] \arrow[r, "\mu[[\mathfrak{B}]]"] & (k[G]\otimes k[G])[[\mathfrak{B}]] \end{tikzcd}$$

où le $\hat{\mu}$ à droite est relatif à l'opération de $\mathfrak{B}$ dans $k[G]\otimes k[G]$ par "translations à gauche dans le premier facteur". Le diagramme suivant est clairement aussi commutatif

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] k[G]\otimes k[G] \arrow[rr, "\hat{\mu}\otimes k[G]"] \arrow[dr, "\hat{\mu}"'] & & k[G][[\mathfrak{B}]]\otimes k[G] \arrow[dl, "\text{évident}"] \\ & (k[G]\otimes k[G])[[\mathfrak{B}]] & \end{tikzcd}$$

d'où il résulte que i sur $k[G]\otimes k[G]\subset \mathcal{O}_{G\times G, e\times G}$ est donné par

$$k[G]\otimes k[G] \xrightarrow{\hat{\mu}} (k[G]\otimes k[G])[[\mathfrak{B}]] \xrightarrow{(e\otimes k[G])[[\mathfrak{B}]]} k[G][[\mathfrak{B}]],$$

où on considère e comme homomorphisme d'algèbres $k[G]\to k$. Comme $(e\otimes k[G])\circ \mu$ est l'identité de $k[G]$, il s'ensuit bien que $i\circ\mu$ et $\hat{\mu}$ coïncident sur $k[G]$.

1.4. L'opération ensembliste naturelle de G dans $\mathfrak{X}(k(G/H))$ laisse clairement stable $\mathfrak{X}(G/H)$.

PROPOSITION. *Soit X un ouvert de $\mathfrak{X}(k(G/H))$, stable par G. Pour que l'application $G\times X\to X$ donnée par l'opération de G dans X soit un morphisme, il faut et il suffit que X soit contenu dans $\mathfrak{X}(G/H)$.*

Preuve. L'application $G\times X\to X$ sera clairement un morphisme si et seulement si, pour tout $x\in X$, $\mu: k(G/H)\to k(G\times G/H)$ envoie $\mathcal{O}_{X,x}$ dans $\mathcal{O}_{G\times X, e\times x}$. Désignons par $\tilde{\mathcal{O}}$ le complété de $\mathcal{O}_{G\times X, e\times x}$ pour l'idéal des fonctions nulles sur $e\times X$. Les inclusions

$$\mathcal{O}_{G\times X, e\times x}\hookrightarrow \mathcal{O}_{G\times G/H, e\times G/H}\overset{i}{\hookrightarrow} k(G/H)[[\mathfrak{B}]]\simeq \hat{\mathcal{O}}_{G\times G/H, e\times G/H}$$

permettent d'identifier $\tilde{\mathcal{O}}$ avec $\mathcal{O}_{X,x}[[\mathcal{O}]]$. Puisque $\tilde{\mathcal{O}}\cap k(G\times G/H)=\mathcal{O}_{G\times X, e\times x}$ (voir par exemple [3], chap. III p. 73), et d'après 1.3, μ envoie $\mathcal{O}_{X,x}$ dans $\mathcal{O}_{G\times X, e\times x}$ si et seulement si $\hat{\mu}$ envoie $\mathcal{O}_{X,x}$ dans $\mathcal{O}_{X,x}[[\mathfrak{B}]]$. D'après la définition de $\hat{\mu}$, cette dernière condition est remplie si et seulement si $\mathfrak{B}$ laisse stable $\mathcal{O}_{X,x}$.

1.5. D'après ce qui précède, on peut reformuler la définition des plongements de la manière suivante.

DEFINITION. Un plongement de G/H est la donnée d'un sous-ensemble X de $\mathfrak{X}(G/H)$, qui est ouvert dans $\mathfrak{X}(G/H)$, noethérien, séparé, et stable par G.

Tourner ainsi la définition des plongements, permet d'énoncer les critères simples de noethérienté et de séparation que voici.

PROPOSITION. *Soit X un ouvert de $\mathfrak{X}(G/H)$. S'il existe un ouvert noethérien (resp. séparé) X' de $\mathfrak{X}(G/H)$ tel que $X \subset G \cdot X'$, alors X est noethérien (resp. séparé).*

Preuve. Il suffit de démontrer la proposition lorsque X est stable par G. Désignons par $\mu : G \times \mathfrak{X}(G/H) \to \mathfrak{X}(G/H)$ l'opération de G dans $\mathfrak{X}(G/H)$.

Supposons d'abord X' noethérien. Posons $X'' = (G \times X') \cap \mu^{-1}(X')$; X'' est un ouvert de $G \times X'$ contenant $e \times X'$. Faisons opérer G dans $G \times X'$ par translations à gauche dans le premier facteur. Puisque $G \times X'$ est noethérien, il existe $s_1, \ldots, s_m \in G$ tels que $G \times X' = \bigcup_{i=1}^m s_i X''$. Par suite,

$$X \subset G \cdot X' = \mu(G \times X') = \mu\left(\bigcup_{i=1}^m s_i X''\right) = \bigcup_{i=1}^m s_i \mu(X'') = \bigcup_{i=1}^m s_i X',$$

d'où il résulte bien que X est noethérien.

Montrons enfin que X non séparé entraîne X' non séparé. Si X est non séparé, on a $\bar{\Delta}_X \neq \Delta_X$ où Δ_X désigne la diagonale de $X \times X$. Le groupe G opère diagonalement dans $X \times X$ en laissant stable $\bar{\Delta}_X - \Delta_X$. Soit T une orbite de G dans $\bar{\Delta}_X - \Delta_X$. Puisqu'on suppose $X \subset G \cdot X'$, les deux ouverts $T \cap (X' \times X)$ et $T \cap (X \times X')$ de T ne sont pas vides. Par conséquent, puisque T est irréducible, on a $\emptyset \neq T \cap (X' \times X') \subset \bar{\Delta}_X \cap (X' \times X') = \bar{\Delta}_{X'}$. Il s'ensuit que $\bar{\Delta}_{X'} \neq \Delta_{X'}$, ce qui signifie bien que X' est non séparé.

1.6. La reformulation de la définition des plongements et le critère de noethérienté et de séparation de 1.5, permettent de "construire" des plongements: il suffit de choisir une sous-algèbre affine A de $k(G/H)$, stable par $\mathfrak{B}$, et de poser $X = G \cdot X_A$.

Illustrons ceci à l'aide d'un exemple simple. Posons $G = k^*$ et $H = \{e\}$; alors $k(G/H)$ s'identifie à $k(t)$. L'algèbre de Lie de k^* qui est de dimension 1, opère par $D = t(d/dt)$ dans $k(t)$. Posons $f = t/(1+t)^2$ et $g = t/(1+t)^3$. On vérifie sans peine qu'on a $Df = 2g - f$, $Dg = g - 3f^2$ et $f/g = 1 + t$. Il s'ensuit que la sous-algèbre A de $k(t)$ engendrée par f et g est une sous-algèbre affine stable par l'algèbre de Lie. On obtient donc un plongement de k^* par $X = k^* \cdot X_A$. Il est facile de voir que l'identité de k^* se prolonge en un morphisme $\varphi : \mathbb{P}_1 \to X$ tel que $\varphi(0) = \varphi(\infty)$, En regardant de plus près, on voit que X est obtenu à partir de $\mathbb{P}_1$ en identifiant 0 et ∞ en un point double ordinaire.

Cet exemple possède la particularité suivante: X est une courbe projective, mais X n'est pas un plongement projectif, à savoir X ne peut pas être plongé dans un espace projectif dans lequel k^* opère, par un morphisme qui est compatible avec les opérations de k^*. En effet, supposons qu'il existe un tel morphisme. La droite qui correspond alors au point fixe de k^* dans X, admet un hyperplan complémentaire stable par k^*. L'ensemble des points de X qui correspondent à des droites non contenues dans l'hyperplan, forme alors un ouvert affine de X, stable par k^* et contenant le point fixe de X. Mais un tel ouvert est forcément X tout entier, donc n'est pas affine, d'où une contradiction. •

2. Germes de plongements

Soit X un plongement de G/H, et soit Y un fermé de X, irréductible et stable par G. Le comportement de l'opération de G dans X au voisinage de Y est déterminé en grande partie par l'algèbre locale $O_{X,Y}$, qui se trouve contenue dans $k(G/H)=k(X)$. Dans ce §, nous caractérisons ces sous-algèbres locales de $k(G/H)$, et nous précisons leur signification géométrique. Les démonstrations de ce § sont formelles et sans imprévu.

2.1. Rappelons (voir 1.1), qu'une localité de $k(G/H)$ est une sous-k-algèbre locale de $k(G/H)$ dont le corps des fractions est $k(G/H)$. Une localité est appelée géométrique, si elle est le localisé d'une sous-k-algèbre de type fini de $k(G/H)$. Notons $\mathfrak{L}(k(G/H))$ l'ensemble des localités géométriques de $k(G/H)$; $\mathfrak{L}(k(G/H))$ est muni de la topologie de Zariski. On notera les éléments de $\mathfrak{L}(k(G/H))$ par $l, l', \ldots$ lorsqu'on les considérera comme points d'un ensemble, et par pur artifice, on écrira $\mathcal{O}_l$ lorsqu'on pense plutôt à la sous-algèbre locale de $k(G/H)$ qui est "associée" à l (et on notera m_l l'idéal maximal de $\mathcal{O}_l$, et $k_l=\mathcal{O}_l/m_l$ le corps résiduel).

On désigne par $\mathfrak{L}(G/H)$ l'ensemble des $l\in\mathfrak{L}(k(G/H))$ tels que $\mathcal{O}_l$ est stable par G et par $\mathfrak{B}$.

Remarquons qu'il existe des sous-algèbres de $k(G/H)$, stables par G mais non stables par $\mathfrak{B}$. Par exemple, considérons $G=k$ et $H=\{0\}$. Dans ce cas, $k(G/H)$ s'identifie à $k(t)$, et un générateur de $\mathfrak{B}=k$ opère par d/dt dans $k(t)$. La sous-algèbre de $k(t)$ engendrée par $1/t+1/(t+1)$ et ses translatés, n'est pas stable par dérivation. Toutefois, nous ne savons pas s'il existe des localités géométriques stables par G et non stables par $\mathfrak{B}$ (voir aussi 3.2).

Soit $l \in \mathfrak{L}(G/H)$. Soit X un plongement de G/H, et soit Y un fermé de X, irréductible et stable par G. On dit que le couple X, Y est une réalisation géométrique de $\mathfrak{L}$, si $\mathcal{O}_l = \mathcal{O}_{X,Y}$.

PROPOSITION. *Pour tout $l \in \mathfrak{L}(G/H)$, il existe des réalisations géométriques.*

Preuve. Puisque $\mathcal{O}_l$ est géométrique, on peut trouver une sous-algèbre affine A de $k(G/H)$, contenue dans $\mathcal{O}_l$ et telle que $\mathcal{O}_l$ soit égal au localisé de A en $A \cap \mathfrak{m}_l$. Puisque $\mathcal{O}_l$ est stable par $\mathfrak{B}$, en raisonnant comme dans 1.2, quitte à agrandir A, on peut supposer de plus A stable par $\mathfrak{B}$. Posons $X = G \cdot X_A$; c'est un plongement de G/H d'après 1.5. Désignons par Y_A le fermé de X_A qui correspond à l'idéal $A \cap \mathfrak{m}_l$ de A. Puisque $\mathcal{O}_l$ est stable par G, on voit que $(s \cdot Y_A) \cap X_A \subset Y_A$, quel que soit $s \in G$. Un nombre fini de translatés de X_A suffisent pour recouvrir X. On en déduit que $Y = G \cdot Y_A$ est un fermé de X, irréductible et stable par G, et qu'on a $Y \cap X_A = Y_A$. Enfin, $\mathcal{O}_{X,Y} = \mathcal{O}_{X_A, Y_A} = \mathcal{O}_l$, donc X, Y est une réalisation géométrique de l.

2.2. On désigne par $\mathfrak{L}_1(G/H)$ l'ensemble des $l \in \mathfrak{L}(G/H)$ tels que ${}^G k_l = k$.

PROPOSITION. *Il y a une bijection naturelle entre l'ensemble $\mathfrak{L}_1(G/H)$ et l'ensemble des orbites de G dans $\mathfrak{X}(G/H)$.*

Preuve. Soit T une orbite de G dans $\mathfrak{X}(G/H)$. Choisissons un plongement X de G/H (c'est-à-dire un ouvert de $\mathfrak{X}(G/H)$, noethérien, séparé et stable par G) qui contient T. Il est clair que $\mathcal{O}_{X,T}$ ne dépend que de T et non du plongement choisi; par conséquent, posons $\mathcal{O}_T = \mathcal{O}_{X,T}$ (et notons $\mathfrak{m}_T$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_T$, et $k_T = \mathcal{O}_T/\mathfrak{m}_T$ le corps résiduel). Il est clair que $\mathcal{O}_T$ est géométrique, et qu'il est stable par G et par $\mathfrak{B}$. Puisque $k_T \simeq k(T)$, on a aussi ${}^G k_T = k$. Par suite, à toute orbite T de G dans $\mathfrak{X}(G/H)$, on peut associer un $l \in \mathfrak{L}_1(G/H)$ bien déterminé, vérifiant $\mathcal{O}_l = \mathcal{O}_T$.

Soit $l \in \mathfrak{L}_1(G/H)$. Choisissons une réalisation géométrique X, Y de l. Puisque $k(Y) \simeq k_l$ et qu'on suppose ${}^G k_l = k$, G a une orbite ouverte T dans Y (voir par exemple [11]). Par construction, on a $\mathcal{O}_{X,T} = \mathcal{O}_{X,Y} = \mathcal{O}_l$. Montrons que l'orbite T ne dépend que de l et non de la réalisation géométrique choisie. Supposons que X', Y', soit une autre réalisation géométrique de l et désignons par T' l'orbite ouverte que G possède alors dans Y'. Choisissons des sous-algèbres affines A et A' de $k(G/H)$ telles que $X_A \subset X$, $T \cap X_A \neq \varnothing$ et $X_{A'} \subset X'$, $T' \cap X_{A'} \neq \varnothing$. Il n'est pas difficile de voir qu'il existe $f \in A - \mathfrak{m}_l$ et $f' \in A' - \mathfrak{m}_l$ tels que $A_f = A'_{f'}$. Il s'ensuit que $T \cap T' \neq \varnothing$, ce qui implique $T = T'$. La proposition est démontrée.

Soit $l \in \mathfrak{L}_1(G/H)$. On désignera par T_l l'orbite de G dans $\mathfrak{X}(G/H)$ qui lui correspond d'après la proposition précédente. Il est clair qu'une réalisation géométrique de l n'est rien d'autre qu'un ouvert de $\mathfrak{X}(G/H)$, noethérien, séparé, stable par G et contenant T_l.

2.3. Soit $l \in \mathfrak{L}(G/H)$. Tout localisé de $\mathcal{O}_l$ en un idéal premier stable par G est encore une localité géométrique de $k(G/H)$, stable par G et par $\mathfrak{B}$. Désignons par $\mathfrak{L}_f(G/H)$ l'ensemble des $l \in \mathfrak{L}(G/H)$ tels que tout localisé $\mathcal{O}$ de $\mathcal{O}_l$ en un idéal premier stable par G vérifie ${}^G(\mathcal{O}/\mathfrak{m}) = k$. Il est clair que $\mathfrak{L}_f(G/H) \subset \mathfrak{L}_1(G/H)$.

PROPOSITION. *Soit $l \in \mathfrak{L}(G/H)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*
(1) *On a $l \in \mathfrak{L}_f(G/H)$.*
(2) *Il existe une réalisation géométrique X, Y de l dont le nombre d'orbites est fini.*

Preuve. Soit X, Y une réalisation géométrique de l. Désignons par $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés irréductibles de X stables par G et contenant Y. Les idéaux premiers stables par G de $\mathcal{O}_l$ sont en bijection avec les éléments de $\mathcal{F}$. Si $Z \in \mathcal{F}$, le localisé de $\mathcal{O}_l$ par rapport à l'idéal qui correspond à Z, s'identifie *à* $\mathcal{O}_{X,Z}$. La condition (1) signifie alors: pour tout $Z \in \mathcal{F}$, on a ${}^Gk(Z) = k$, autrement dit G a une orbite ouverte dans Z. Il s'ensuit aussitôt que (2)$\Rightarrow$(1).

Réciproquement, supposons (1) vrai. Désignons par X_n l'ouvert de X constitué des orbites de G dans X dont la dimension est $\geq n$, et par X'_n la réunion des orbites dans X_n qui contiennent T_l dans leur adhérence (T_l est bien défini, car $\mathfrak{L}_f(G/H) \subset \mathfrak{L}_1(G/H)$). Montrons, par récurrence descendante, que X'_n est ouvert et que le nombre des orbites de G dans X'_n est fini. On a $X'_{\dim G/H} = G/H$. Supposons l'assertion démontrée pour $n+1$. Les composantes irréductibles du fermé $X_n - X'_{n+1}$ sont de deux espèces: ou bien elles ne contiennent pas T_l dans leur adhérence dans X, ou bien grâce à (1), il s'agit d'orbites de dimension n de X'_n. On voit qu'on obtient X'_n à partir de X'_{n+1} en ôtant de X_n ces composantes de la première espèce, et que ce faisant on n'ajoute qu'un nombre fini d'orbites à X'_{n+1}. La récurrence aboutit donc à $X'_{\dim T_l}$, qui est bien une réalisation géométrique de l dont le nombre d'orbites est fini. La preuve de la proposition est terminée.

Si $l \in \mathfrak{L}_f(G/H)$, on voit que l'intersection de toutes les réalisations géométriques de l est encore une réalisation géométrique de l. On l'appellera la réalisation géométrique minimale, et on la notera X_l. Il est clair que X_l est la réunion des orbites de $\mathfrak{X}(G/H)$ qui contiennent T_l dans leur adhérence.

2.4. – Soit H' un sous-groupe algébrique de G contenant H. Soit X' un plongement de G/H', T' une orbite de G dans X'.

PROPOSITION. *Soit $l \in \mathfrak{L}_1(G/H)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*
(1) *$\mathcal{O}_l$ domine $\mathcal{O}_{X',T'}$.*
(2) *Il existe une réalisation géométrique X de l possédant la propriété suivante: le morphisme naturel $G/H \to G/H'$ se prolonge en un morphisme $\varphi : X \to X'$ tel que $\varphi(T_l) = T'$.*

Preuve. Il est clair que (2)⇒(1).

Supposons (1) vrai. Choisissons une sous-algèbre affine A' de $k(G/H')$ vérifiant: $X_{A'} \subset X'$ et $X_{A'} \cap T'$ est un fermé non vide de $X_{A'}$; en particulier, il s'ensuit que $A' \subset \mathcal{O}_{X',T'}$ et que le fermé $X_{A'} \cap T$ de $X_{A'}$ est associé à l'idéal $A' \cap \mathfrak{m}_{X',T'} = A' \cap \mathfrak{m}_l$ de A'. Choisissons ensuite une sous-algèbre affine A de $k(G/H)$ vérifiant: A est stable par $\mathfrak{B}$, on a $A' \subset A \subset \mathcal{O}_l$, et $\mathcal{O}_l$ est le localisé de A en l'idéal $A \cap \mathfrak{m}_l$. Posons $X = G \cdot X_A$. Il est clair que le morphisme $\varphi_A : X_A \to X_{A'}$ donné par l'inclusion $A' \subset A$, se prolonge en un morphisme $\varphi : X \to X'$, qui induit le morphisme naturel $G/H \to G/H'$ et qui envoie T_l sur T.

COROLLAIRE. *On suppose $l \in \mathfrak{L}_f(G/H)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*
(1) *$\mathcal{O}_l$ domine $\mathcal{O}_{X',T'}$.*
(2) *Le morphisme naturel $G/H \to G/H'$ se prolonge en un morphisme $\varphi : X_l \to X'$ tel que $\varphi(T_l) = T'$.*

2.5. Soit H' un sous-groupe algébrique de G contenu dans H, et soit $l' \in \mathfrak{L}_1(G/H')$.

LEMME. *Soit A une sous-algèbre de $k(G/H)$ qui possède les propriétés suivantes: A est contenue dans $\mathcal{O}_{l'}$, A est de type fini, A est stable par $\mathfrak{B}$ et le corps des fractions de A est $k(G/H)$. On obtient un élément $l \in \mathfrak{L}_1(G/H)$ en prenant pour $\mathcal{O}_l$ le localisé de A en l'idéal premier $A \cap \mathfrak{m}_{l'}$.*

Preuve. Désignons par $\mathcal{O}$ le localisé de A en l'idéal premier $A \cap \mathfrak{m}_{l'}$. Il est clair que $\mathcal{O}$ est géométrique et qu'il est stable par $\mathfrak{B}$. Un peu moins clair est que $\mathcal{O}$ est aussi stable par G. Pour le prouver, considérons l'ouvert X_A de $\mathfrak{X}(G/H)$ associé à A, et choisissons un $x \in X_A$ tel que $f(x) = 0$ quel que soit $f \in A \cap \mathfrak{m}_{l'}$. Désignons par U l'ouvert des $s \in G$ tels que $s^{-1}x \in X_A$. Si $s \in U$, pour tout $f \in A$, puisque $f \in \mathcal{O}_{X_A, s^{-1}x}$, on a $s \cdot f \in \mathcal{O}_{X_A,x}$; par suite $sf = g/h$, avec $g, h \in A$ et $h(x) \neq 0$, d'où $sf \in \mathcal{O}$. Donc $sA \subset \mathcal{O}$, quel que soit $s \in U$, d'où l'on déduit sans peine que $\mathcal{O}$ est stable par G.

On obtient donc un élément $l \in \mathfrak{L}(G/H)$ par $\mathcal{O}_l = \mathcal{O}$. Puisque $\mathcal{O}_{l'}$ domine $\mathcal{O}_l$ et que $l' \in \mathfrak{L}_1(G/H)$, il est clair que $l \in \mathfrak{L}_1(G/H)$.

3. Plongements élémentaires et valuations invariantes

Les plongements élémentaires de G/H que l'on introduira dans ce §, sont en relation étroite avec certaines valuations sur $k(G/H)$. C'est pourquoi on commence par rappeler quelques généralités sur les valuations (pour plus de détails, voir [14] et [3], chap. VI).

3.1. Soit K un corps, extension de k. On pose $K^* = K - \{0\}$. Une valuation discrète de K sera pour nous une application $v: K^* \to \mathbb{Q}$ (qu'on prolonge sur K par $v(0) = +\infty$) vérifiant

1) $v(K^*) \simeq \mathbb{Z}$;
2) $v(fg) = v(f) + v(g)$ et $v(f+g) \geq \inf(v(f), v(g))$, quels que soient $f, g \in K$;
3) $v(f) = 0$ si $f \in k^*$.

On dit que la valuation est normalisée si $v(K^*) = \mathbb{Z}$. A toute valuation discrète v, on associe par $\mathcal{O}_v = \{f \in K, v(f) \geq 0\}$ une sous-k-algèbre locale de K, d'idéal maximal $\mathfrak{m}_v = \{f \in K, v(f) \geq 0\}$. On pose $k_v = \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$, qu'on appelle le corps résiduel de v. Si v est une valuation discrète de K, alors

1) le corps des fractions de $\mathcal{O}_v$ est K;
2) $\mathcal{O}_v$ est noethérienne, intégralement close et de dimension de Krull égale à 1.

Une sous-k-algèbre locale de K vérifiant 1) et 2) s'appelle une sous-algèbre de valuation discrète de K. L'application $v \to \mathcal{O}_v$ établit une bijection entre l'ensemble des valuations discrètes normalisées et l'ensemble des sous-algèbres de valuation discrète.

Supposons maintenant que K soit de type fini sur k, de degré de transcendance n. Soit v une valuation discrète de K. Nous dirons que v est géométrique, si $\mathcal{O}_v$ est géométrique (c'est-à-dire, si on peut obtenir $\mathcal{O}_v$ comme localisé d'une sous-k-algèbre de type fini de K). Si v est géométrique, son corps résiduel k_v est de type fini sur k et de degré de transcendance $n-1$ sur k. Inversement, s'il existe dans k_v $n-1$ éléments algébriquement indépendants sur k, on peut montrer que v est géométrique. Mais attention, pour tout nombre i compris entre 0 et $n-1$, on peut trouver des exemples de valuations discrètes dont le corps résiduel est de degré de transcendance i sur k; il peut même arriver que le corps résiduel ne soit pas de type fini sur k (voir [14]).

Le résultat suivant nous sera très utile. Soient K' une extension de type fini de K, v une valuation discrète de K, v' une valuation discrète de K', extension de v; alors le degré de transcendance de K' sur K est supérieur ou égal au degré de transcendance de $k_{v'}$ sur k_v (voir [3], chap. VI, §10 n° 3).

COROLLAIRE. *Si v' est géométrique, v l'est aussi.*

Preuve. Notons $d(\ ,\ )$ le degré de transcendance. On a $d(K', K) = d(K', k) - d(K, k)$ et $d(k_{v'}, k_v) = d(k_{v'}, k) - d(k_v, k)$. De $d(K', K) \geq d(k_{v'}, k_v)$ résulte alors que

$$d(k_v, k) \geq d(K, k) - d(K', k) + d(k_{v'}, k) = d(K, k) - 1.$$

D'après ce que nous avons rappelé, il s'ensuit bien que v est géométrique.

3.2. Soit v une valuation discrète de $k(G)$. Nous dirons que v est invariante par translations à gauche, si $v(s \cdot f) = v(f)$, quels que soient $s \in G$ et $f \in k(G)$.

LEMME (voir aussi [15]). *Pour toute valuation discrète v de $k(G)$ il existe une (unique) valuation discrète $\hat{v}$ de $k(G)$ qui possède la propriété suivante: pour tout $f \in k(G)$ il existe un ouvert non vide U de G tel que $\hat{v}(f) = v(s \cdot f)$ quel que soit $s \in U$. La valuation $\hat{v}$ est invariante par translations à gauche. De plus, si v est géométrique, $\hat{v}$ l'est également.*

Preuve. Posons $A = k(G) \otimes \mathcal{O}_v \subset k(G \times G)$ et $\mathfrak{p} = k(G) \otimes \mathfrak{m}_v$. Désignons par $\mathcal{O}$ le localisé de A en l'idéal premier $\mathfrak{p}$. Il est clair que $\mathcal{O}$ est une sous-algèbre de valuation discrète de $k(G \times G)$ à laquelle correspond donc une valuation discrète w de $k(G \times G)$. Désignons par $\mu : k(G) \hookrightarrow k(G \times G)$ l'homomorphisme injectif de corps qui correspond à la multiplication $G \times G \to G$. Posons $\hat{v} = w \circ \mu$.

Soit $g \in k[G]$. Les $s \cdot g$ $(s \in G)$ restent dans un espace vectoriel de dimension finie de $k[G]$. Désignons par U_g l'ouvert de G où la fonction $v(s \cdot g)$ atteint son minimum. Si $\mu(g) = \sum g_i \otimes g_i'$ et si $s \in G$, on a $s \cdot g = \sum g_i(s^{-1}) g_i'$. De là et de la définition de w on déduit que $\hat{v}(g) = \inf_{s \in G} v(s \cdot g) = v(s \cdot g)$ quel que soit $s \in U_g$. Si $f \in k(G)$, on écrit $f = gh^{-1}$, avec $g, h \in k[G]$; alors, pour tout $s \in U = U_g \cap U_h$, on a $\hat{v}(f) = \hat{v}(g) - \hat{v}(h) = v(s \cdot g) - v(s \cdot h) = v(s \cdot f)$.

Il est clair que $\hat{v}$ est invariante par translations à gauche. Enfin, si v est géométrique, w l'est manifestement aussi. De $\hat{v} = w \circ \mu$ et de la fin de 3.1 résulte alors que $\hat{v}$ est également géométrique.

COROLLAIRE 1. *Soit v une valuation discrète de $k(G/H)$, invariante par G. Il existe des valuations $\tilde{v}$ de $k(G)$, invariantes par translations à gauche, dont la* *restriction à $k(G/H)$ est égale à v. Si v est géométrique, on peut choisir $\tilde{v}$ géométrique.*

Preuve. Il existe des valuations discrètes w de $k(G)$, non invariantes par translations à gauche, dont la restriction à $k(G/H)$ est égale à v, et si v est géométrique, on peut choisir w géométrique (voir par exemple [3], chap. VI). Alors $\tilde{v} = \hat{w}$ répond aux exigences du corollaire 1.

COROLLAIRE 2. *Soit v une valuation discrète de $k(G/H)$, invariante par G. Soient $f, g \in k(G)$ et $s \in G$ tels que fg et $(s \cdot f)g$ appartiennent à $k(G/H)$. Alors*

$$v(fg) = v((s \cdot f)g).$$

Preuve. Soit $\tilde{v}$ une valuation de $k(G)$, invariante par translations à gauche, "au-dessus" de v comme dans le corollaire 1. Alors $v((s \cdot f)g) = \tilde{v}(s \cdot f) + \hat{v}(g) = \tilde{v}(f) + \tilde{v}(g) = v(fg)$.

COROLLAIRE 3. *Pour toute valuation discrète G-invariante v de $k(G/H)$, $\mathcal{O}_v$ est stable par $\mathfrak{B}$.*

Preuve. Grâce au corollaire 1, il suffit de considérer le cas où $H = \{e\}$. Puisque l'opération de G dans $k[G]$ est rationnelle, la $\mathbb{Z}$-filtration que v induit dans $k[G]$, étant stable par G, est aussi stable par $\mathfrak{B}$. Par conséquent, si $f \in k[G]$ et si $X \in \mathfrak{B}$, on a $v(Xf) \geq v(f)$, autrement dit $v(Xf/f) \geq 0$. Soit maintenant $f \in k(G)$. Ecrivons $f = g/h$, où $g, h \in k[G]$. On a $Xf/f = Xg/g - Xh/h$. Par suite, si $v(f) \geq 0$, il suit que

$$v(Xf) \geq v(Xf/f) \geq \min(v(Xg/g), v(Xh/h)) \geq 0,$$

ce qui signifie bien que $\mathcal{O}_v$ est stable par $\mathfrak{B}$.

3.3. On appellera plongement élémentaire de G/H tout plongement X vérifiant:

1) X est lisse;
2) X est composé de deux orbites, l'orbite ouverte G/H et une orbite fermée de codimension 1 dans X.

Lorsque G/H est affine, tout plongement normal composé de deux orbites est élémentaire: en effet, le complémentaire de tout ouvert affine dans une variété algébrique étant toujours pur de codimension 1, on voit que l'orbite fermée est de codimension 1; il s'ensuit que X est lisse, puisque l'ensemble singulier de X, qui est de codimension ≥ 2 à cause de la normalité et qui est aussi stable par G, est vide.

On notera $\mathcal{V}(G/H)$ l'ensemble des valuations discrètes normalisées de $k(G/H)$, géométriques et invariantes par G. On désignera par $\mathcal{V}_1(G/H)$ l'ensemble des $v \in \mathcal{V}(G/H)$ tels que ${}^G k_v = k$. On notera par $\mathcal{V}_2(G/H)$ le complémentaire de $\mathcal{V}_1(G/H)$ dans $\mathcal{V}(G/H)$.

PROPOSITION. *Il y a une bijection naturelle entre l'ensemble $\mathcal{V}_1(G/H)$ et l'ensemble des plongements élémentaires de G/H.*

Preuve. Le corollaire 3 de 3.2 permet d'identifier $\mathcal{V}_1(G/H)$ à un sous-ensemble de $\mathfrak{L}_1(G/H)$. Puisque les seuls idéaux premiers de $\mathcal{O}_v$ sont m_v et 0, on a même $\mathcal{V}_1(G/H) \hookrightarrow \mathfrak{L}_f(G/H)$. Soit $v \in \mathcal{V}_1(G/H)$. Le plongement minimal X_v associé à v (voir 2.3) est manifestement composé de deux orbites, G/H et T_v. Puisque T_v est de codimension 1 dans X_v et que $\mathcal{O}_v$ est intégralement clos, X_v est normal donc lisse. Par conséquent, X_v est un plongement élémentaire. Il est clair qu'on obtient tout plongement élémentaire de cette façon, d'où la proposition.

3.4. Soit H' un sous-groupe algébrique de G contenant H. Soit X un plongement élémentaire de G/H, d'orbite fermée T.

PROPOSITION. *De deux choses l'une: ou bien le morphisme naturel $G/H \to G/H'$ se prolonge en un morphisme $X \to G/H'$; ou bien il existe un unique plongement élémentaire X' de G/H', d'orbite fermée T', tel que le morphisme naturel $G/H \to G/H'$ se prolonge en un morphisme $\varphi: X \to X'$ vérifiant $\varphi(T) = T'$.*

Preuve. Cela résulte aussitôt de 2.4, 3.1 et 3.3.

3.5. PROPOSITION. *Pour tout $l \in \mathfrak{L}(G/H)$, il existe $v \in \mathcal{V}(G/H)$ tel que $\mathcal{O}_v$ domine $\mathcal{O}_l$.*

Preuve. Soit $G/H \hookrightarrow X$, Y une réalisation géométrique de l. Désignons par $\tilde{X}$ l'éclaté normalisé de X le long de Y, et notons $\pi: \tilde{X} \to X$ le morphisme naturel. Le groupe G opère dans $\tilde{X}$, et puisque $\pi: \pi^{-1}(G/H) \xrightarrow{\sim} G/H$ est un isomorphisme, $\tilde{X}$ est l'espace d'un plongement de G/H. Choisissons une composante irréductible $\tilde{Y}$ de $\pi^{-1}(Y)$; $\tilde{Y}$ est stable par G et de codimension 1 dans $\tilde{X}$. Par conséquent, il existe une valuation v dans $\mathcal{V}(G/H)$ telle que $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{Y}}$. Par construction, $\mathcal{O}_v$ domine $\mathcal{O}_{X,Y} = \mathcal{O}_l$.

4. Plongements élémentaires et germes de courbes

On désigne par $k[[t]]$ l'algèbre des séries formelles en une indéterminée t, et par $k(t))$ le corps des fractions de $k[[t]]$. On note $(G/H)_{k((t))}$ (resp. $(G/H)_{k[[t]]}$)

l'ensemble des points de G/H à valeurs dans $k((t))$ (resp. dans $k[[t]]$), et on pose $(G/H)^*_{k((t))} = (G/H)_{k((t))} - (G/H)_{k[[t]]}$: c'est "l'ensemble des germes de courbe formels divergents dans G/H". Dans ce §, on fera correspondre à tout élément de $(G/H)^*_{k((t))}$ un plongement élémentaire, puis on étudiera cette correspondance.

4.1. Pour la commodité du lecteur, rappelons quelques généralités au sujet des points à valeur dans $k((t))$.

Soit X une variété algébrique (intègre) sur k. Un élément λ de $X_{k((t))}$ est la donnée d'une localité $\mathcal{O}, \mathfrak{M}$ de X et d'un homomorphisme de k-algèbres $\lambda: \mathcal{O} \to k((t))$ qui induit une injection $\mathcal{O}/\mathfrak{M} \to k((t))$. On appelle $\mathcal{O}$ le domaine de définition de λ. Le cas où X est affine est particulièrement simple: on a alors forcément $k[X] \subset \mathcal{O}$, et λ est déterminé par sa restriction à $k[X]$.

Un $\lambda \in X_{k((t))}$ est dit convergent, s'il existe $x \in X$ tel que $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}$ et $\lambda(\mathcal{O}_x) \subset k[[t]]$; on appelle alors x la limite de λ et on écrit $x = \lim_{t \to 0} \lambda(t)$ (l'unicité de la limite résulte de la séparation de X). On note $X_{k[[t]]}$ l'ensemble des points convergents de $X_{k((t))}$. Si X est affine, pour que λ soit convergent, il faut et il suffit que $\lambda(k[X]) \subset k[[t]]$, et la limite est alors donnée par $k[X] \xrightarrow{\lambda} k[[t]] \to k[[t]]/tk[[t]] = k$.

Nous utiliserons la structure naturelle de groupe sur $G_{k((t))}$, induite par la structure de groupe algébrique sur G; $G_{k[[t]]}$ est un sous-groupe de $G_{k((t))}$, et G s'identifie à un sous-groupe de $G_{k[[t]]}$. Nous utiliserons aussi l'opération naturelle de $G_{k((t))}$ dans $(G/H)_{k((t))}$.

4.2. Quel que soit le corps K, nous désignerons par $v_t: K((t))^* \to \mathbb{Z}$ la valuation discrète naturelle sur $K((t))$ (l'ordre en t des séries formelles). Dans ce qui va suivre, on considère $k[G] \otimes k((t))$, ainsi que son corps des fractions, plongé de manière naturelle dans $k(G)((t))$.

Soit $\lambda \in (G/H)_{k((t))}$. L'opération de G dans G/H donne un morphisme dominant

$$G \times \operatorname{Spec} k((t)) \xrightarrow{1 \times \lambda} G \times G/H \to G/H$$

d'où une injection de corps $i_\lambda: k(G/H) \to k(G)((t))$.

Posons $\mathcal{O}_\lambda = (i_\lambda)^{-1}(k(G)[[t]])$; c'est une algèbre locale dont nous noterons m_λ l'idéal maximal et k_λ le corps résiduel. Posons $v_\lambda = v_t \cdot i_\lambda: k(G/H)^* \to \mathbb{Z}$. Lorsque $\mathcal{O}_\lambda \neq k(G/H)$, v_λ est une valuation discrète (non nécessairement normalisée) de $k(G/H)$, dont $\mathcal{O}_\lambda$ est la sous-algèbre de valuation discrète (voir 3.1); désignons par n_λ l'entier positif tel que $(1/n_\lambda)v_\lambda$ soit normalisée.

Nous verrons plus loin que $(1/n_\lambda)v_\lambda \in \mathcal{V}_1(G/H)$. Le point délicat est la géométricité de $\mathcal{O}_\lambda$, que nous démontrerons en 4.6. Vérifions déjà que $\mathcal{O}_\lambda$ est stable par G et que ${}^G k_\lambda = k$: le premier résulte de ce que $k(G)[[t]]$ est stable sous l'opération de G par translations à gauche dans $k(G)$ et de ce que i_λ commute aux opérations de G; le second de ce que k_λ s'identifie à un sous-corps de $k(G)$.

4.3. Le morphisme canonique $G \to G/H$ induit une application $G_{k((t))} \to (G/H)_{k((t))}$. Si $\lambda \in G_{k((t))}$, notons $\bar{\lambda}$ son image dans $(G/H)_{k((t))}$. Du diagramme clairement commutatif

$$\begin{tikzcd} k(G) \arrow[dr, "i_\lambda"] & \\ & k(G)((t)) \\ k(G/H) \arrow[uu, hook] \arrow[ur, "i_{\bar{\lambda}}"'] & \end{tikzcd}$$

résulte que $v_{\bar{\lambda}}$ est la restriction de v_λ.

L'application $G_{k((t))} \to (G/H)_{k((t))}$ n'est pas en général surjective. Néanmoins, on obtient par un argument classique un résultat qui est presque aussi bon que la surjectivité.

LEMME. *Pour tout $\mu \in (G/H)_{k((t))}$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in G_{k((\sqrt[n]{t}))}$, tels que $\bar{\lambda} = \mu$ (où l'on considère μ comme point de G/H à valeurs dans $k((\sqrt[n]{t})) \supset k((t))$).*

Preuve. D'après le théorème de normalisation de Noether, on peut trouver des sous-algèbres affines A de $k(G/H)$ et B de $k(G)$ vérifiant

1) $A \subset B$;
2) $X_A \subset G/H$ *et* $X_B \subset G$;
3) il existe des éléments $g_1, \dots, g_m$ de B algébriquement indépendants sur A, tels que B soit fini sur $A[g_1, \dots, g_m]$.

Quitte à translater A et B par un $s \in G$ convenable, on peut supposer de plus que $\mu \in (X_A)_{k((t))}$. Il est alors clair que μ peut se relever en un point de G à valeurs dans une extension finie de $k((t))$, lesquelles sont isomorphes aux $k((\sqrt[n]{t}))$, $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui démontre le lemme.

Ce lemme (et la remarque qui le précède) vont nous permettre dans l'étude des éléments de $(G/H)_{k((t))}$ de supposer qu'ils proviennent d'éléments de $G_{k((t))}$.

4.4. Le groupe $G_{k((t))}$ opère "par translations à droite" dans $k[G] \otimes k((t))$, en respectant sa structure de $k((t))$-algèbre. Précisons l'opération: soit $\lambda \in G_{k((t))}$, que nous considérons comme un homomorphisme de k-algèbres $\lambda : k[G] \to k((t))$;

alors R_λ, la "translation à droite par λ", est donnée sur $k[G]$ par

$$k[G] \xrightarrow{\text{comult.}} k[G]\otimes k[G] \xrightarrow{1\otimes\lambda} k[G]\otimes k((t)),$$

homomorphisme de k-algèbres qui se prolonge par $k((t))$-linéarité en un isomorphisme de $k[G]\otimes k((t))$ sur lui-même.

Si $\lambda \in G_{k[[t]]}$, on voit que R_λ laisse stable $k[G]\otimes k[[t]]$. Il s'ensuit que l'opération de $G_{k[[t]]}$ dans $k[G]\otimes k((t))$ se prolonge en une opération dans $k(G)((t))$ vérifiant $v_t \circ R_\lambda = v_t$, pour tout $\lambda \in G_{k[[t]]}$. Par contre, l'opération de $G_{k((t))}$ ne se prolonge pas à $k(G)((t))$; tout au plus peut-on la prolonger au corps des fractions de $k[G]\otimes k((t))$.

Remarquons que, dans le cas où $H=\{e\}$, l'injection i_λ définie dans 4.2 coïncide avec R_λ, modulo les inclusions $k(G) \hookrightarrow$ corps des fractions de $k[G]\otimes k((t)) \hookrightarrow k(G)((t))$; cette remarque nous servira dans la démonstration suivante.

LEMME. *Si $\lambda \in (G/H)_{k((t))}$ et si $\mu \in G_{k[[t]]}$, alors $v_\lambda = v_{\mu\lambda}$.*

Preuve. D'après 4.3, on peut supposer que $\lambda \in G_{k((t))}$. Quel que soit $f \in k(G)$, on a alors $v_{\mu\lambda}(f) = (v_t \circ i_{\mu\lambda})(f) = v_t(R_{\mu\lambda}f) = v_t(R_\mu R_\lambda f) = v_t(R_\lambda f) = (v_t \circ i_\lambda)(f) = v_\lambda(f)$.

4.5. On appellera germe de courbe (éventuellement divergent) dans G/H la donnée

1) d'une courbe lisse C,
2) d'un point c de C,
3) d'un morphisme $\gamma : C-\{c\} \to G/H$.

Tout isomorphisme $\hat{\mathcal{O}}_{C,c} \simeq k[[t]]$ donne une inclusion $k(C) \hookrightarrow k((t))$, qui permet d'associer au germe de courbe un point de $(G/H)_{k((t))}$, qu'on appellera un germe formel associé au germe de courbe. Soit $\lambda \in (G/H)_{k((t))}$, et désignons par $\mathcal{O}$ le domaine de définition de λ; pour que λ puisse s'obtenir comme germe formel associé à un germe de courbe, il faut et il suffit clairement que $\lambda(\mathcal{O})$ soit un sous-corps de $k((t))$ de degré de transcendance ≤ 1 sur k.

LEMME. *Pout tout $\lambda \in G_{k((t))}$ il existe $\mu \in G_{k[[t]]}$ tel que $\mu\lambda$ soit le germe formel associé à un germe de courbe dans G.*

Preuve. Plongeons G comme un sous-groupe fermé dans un $SL(n)$. Soient $p_1, \ldots, p_m \in k[x_{ij}, 1 \le i, j \le n]$ des équations polynômes qui définissent G dans l'ensemble des matrices $n \times n$. Si $\rho(t) = (\rho_{ij}(t))_{1\le i,j\le n}$, avec $\rho_{ij}(t) \in k((t))$, on a

$\rho(t) \in G_{k((t))}$ si et seulement si

$$(*) \quad p_r(\rho_{ij}(t), \quad 1 \leq i,j \leq n) = 0, \quad \text{pour} \quad r = 1, \ldots, m.$$

D'après un théorème d'Artin ([1]), pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $\bar{\lambda}(t) = (\bar{\lambda}_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ vérifiant

1) les $\bar{\lambda}_{ij}(t)$ sont algébriques sur $k(t)$;
2) les $\bar{\lambda}_{ij}(t)$ vérifient les équations (*);
3) on a $\lambda_{ij}(t) - \bar{\lambda}_{ij}(t) \in t^N k[[t]]$.

Pour N assez grand, on a $\bar{\lambda}(t)\lambda(t)^{-1} = \mu(t) \in G_{k[[t]]}$, ce qui s'écrit aussi $\mu(t)\lambda(t) = \bar{\lambda}(t)$. Les coefficients de $\bar{\lambda}(t)$ étant tous algébriques sur $k(t)$, tous les éléments de $\bar{\lambda}(k[G])$ sont algébriques sur $k(t)$. Le sous-corps de $k((t))$ engendré par $\bar{\lambda}(k[G])$ est donc bien de degré de transcendance ≤ 1 sur k, ce qu'il fallait démontrer.

4.6. A tout $\lambda \in (G/H)_{k((t))}$ tel que $\mathcal{O}_\lambda \neq k(G/H)$, nous avons associé en 4.2 une valuation discrète normalisée $(1/n_\lambda)v_\lambda$ de $k(G/H)$.

PROPOSITION. *On a* $(1/n_\lambda)v_\lambda \in \mathcal{V}_1(G/H)$.

Preuve. Nous savons déjà que v_λ est invariante par G, et que ${}^G k_\lambda = k$ (voir 4.2). Reste à prouver que $\mathcal{O}_\lambda$ est géométrique.

D'après 4.3 et 3.1, il suffit de considérer le cas $H = \{e\}$. D'après 4.4 et 4.5, nous pouvons de plus supposer que λ est le germe formel d'un germe de courbe dans G.

Soit donc $C, c \in C, \gamma : C - \{c\} \to G$ un tel germe de courbe. Le morphisme dominant

$$G \times (C - \{c\}) \xrightarrow{1 \times \gamma} G \times G \xrightarrow{\text{mult.}} G$$

se reflète en une injection $i_\lambda : k(G) \to k(G \times C)$. L'isomorphisme $\hat{\mathcal{O}}_{C,c} \simeq k[[t]]$ induit une identification de $\hat{\mathcal{O}}_{G \times C, G \times \{c\}}$ avec $k(G)[[t]]$, d'où une injection de corps $j : k(G \times C) \hookrightarrow k(G)((t))$. Par construction, on a $i_\lambda = j \circ i_\gamma$. Puisque $k(G \times C) \cap \hat{\mathcal{O}}_{G \times C, G \times \{c\}} = \mathcal{O}_{G \times C, G \times \{c\}}$, il s'ensuit que $\mathcal{O}_\lambda = (i_\gamma)^{-1}(\mathcal{O}_{G \times C, G \times \{c\}})$, et $\mathcal{O}_\lambda$ est géométrique d'après 3.1.

4.7. Soit $\lambda \in (G/H)_{k((t))}$. Si $f \in k(G/H)$, posons $i_\lambda(f) = \sum_{n \gg -\infty} f_{\lambda,n} t^n$, où i_λ est l'injection de $k(G/H)$ dans $k(G)((t))$ introduite dans 4.2.

LEMME. *Pout tout $f \in k(G/H)$, il existe un ouvert non vide U de G vérifiant: pour tout $s \in U$, on a*

1) $f_{\lambda,n} \in \mathcal{O}_{G,s}$ *pour tout* n;
2) $s^{-1} \cdot f$ *est dans le domaine de définition de* λ;
3) $\lambda(s^{-1} \cdot f) = \sum_{n \gg -\infty} f_{\lambda,n}(s) t^n$.

Preuve. D'après 4.3, on peut supposer que $\lambda \in G_{k((t))}$. Dans ce cas λ est donné par un homomorphisme d'algèbres $\lambda : k[G] \to k((t))$, et l'application i_λ est donnée sur $k[G]$ par

$$k[G] \xrightarrow{\text{comult.}} k[G] \otimes k[G] \xrightarrow{1 \otimes \lambda} k[G] \otimes k((t)) \hookrightarrow k[G]((t));$$

il s'ensuit que, pour $f \in k[G]$, les trois propriétés sont vraies avec $U = G$. Dans le cas général, écrivons $f = g/h$, où $g, h \in k[G]$. Soit $i_\lambda(h) = \sum_{n \geq n_0} h_{\lambda,n} t^n$, avec $h_{\lambda,n_0} \neq 0$. On vérifie sans peine que l'ouvert $U = \{s \in G, h_{\lambda,n_0}(s) \neq 0\}$ convient pour f.

4.8. Soit $\lambda \in (G/H)_{k((t))}$ tel que $\mathcal{O}_\lambda \neq k(G/H)$. D'après 4.6 et 3.3, $\mathcal{O}_\lambda$ correspond à un plongement élémentaire de G/H. Nous le désignerons par X_λ, et par T_λ l'orbite fermée de G dans X_λ.

PROPOSITION. *Dans X_λ, $\lim_{t \to 0} \lambda(t)$ existe et appartient à T_λ.*

Preuve. Choisissons une sous-algèbre affine A de $k(G/H)$ vérifiant: $X_A \subset X_\lambda$ et $X_A \cap T_\lambda \neq \varnothing$; en particulier, on a $A \subset \mathcal{O}_{X_\lambda, T_\lambda} = \mathcal{O}_\lambda$. D'après 4.7, quitte à translater A par un $s \in G$ convenable, on peut supposer de plus que, pour tout $f \in A$, on a

1) $f_{\lambda,n} \in \mathcal{O}_{G,e}$ pour tout n;
2) f appartient au domaine de définition de λ;
3) $\lambda(f) = \sum_{n \gg -\infty} f_{\lambda,n}(e) t^n$.

Puisque $A \subset \mathcal{O}_\lambda$, on en déduit que $\lambda(A) \subset k[[t]]$, c'est-à-dire que $\lim_{t \to 0} \lambda(t)$ existe dans X_A. De plus, on voit que λ envoie l'idéal $A \cap \mathfrak{m}_\lambda$, qui correspond au fermé $X_A \cap T_\lambda$, dans $tk[[t]]$, ce qui signifie bien que $\lim_{t \to 0} \lambda(t) \in T_\lambda$.

Rappelons que $(G/H)^*_{k((t))} = (G/H)_{k((t))} - (G/H)_{k[[t]]}$.

COROLLAIRE. *Soit $\lambda \in (G/H)_{k((t))}$. Pour que $\mathcal{O}_\lambda \neq k(G/H)$, il faut et il suffit que $\lambda \in (G/H)^*_{k((t))}$.*

Preuve. Si $\mathcal{O}_\lambda \neq k(G/H)$, la proposition précédente montre que $\lambda \in (G/H)^*_{k((t))}$. Si $\mathcal{O}_\lambda = k(G/H)$, un argument très voisin de celui employé dans la démonstration précédente montre que $\lambda \in (G/H)_{k[[t]]}$.

4.9. Soient X un plongement de G/H, T une orbite de G dans X. Soit $\lambda \in (G/H)^*_{k((t))}$.

PROPOSITION. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:
(1) $\lim_{t\to 0} \lambda(t)$ *existe dans* X *et appartient à* T;
(2) *l'identité de* G/H *se prolonge en un morphisme* $\varphi : X_\lambda \to X$ *tel que* $\varphi(T_\lambda) = T$;
(3) $\mathcal{O}_\lambda$ domine $\mathcal{O}_{X,T}$.

Preuve. L'équivalence (2)$\Leftrightarrow$(3) résulte de 2.4, l'implication (2)$\Rightarrow$(1) de 4.8.

Reste à montrer (1)$\Rightarrow$(3). Posons $x = \lim_{t\to 0} \lambda(t) \in T$. Choisissons une sous-algèbre affine A de $k(G/H)$ telle que $x \in X_A \subset X$. Choisissons ensuite un ouvert non vide U de G tel que $sx \in X_A$ quel que soit $s \in U$, et tel que U vérifie les trois conditions du lemme 4.7 pour tout $f \in A$. Si $f \in A$ et si $s \in U$, on a donc $\lambda(s^{-1}f) = \sum_{n \gg -\infty} f_{\lambda,n}(s)t^n$. Puisque $\lim_{t\to 0} s\lambda(t) = sx$ existe dans X_A, il s'ensuit que $f_{\lambda,n}(s) = 0$ pour $n < 0$ et $s \in U$, c'est-à-dire $f_{\lambda,n} = 0$ pour $n < 0$, autrement dit $v_\lambda(f) \geq 0$. De plus $v_\lambda(f) = 0$ équivaut à $f_{\lambda,0} \neq 0$, et cette dernière condition signifie qu'il existe $s \in U$ tel que $0 \neq f_{\lambda,0}(s) = \lim_{t\to 0} f(s)\lambda(t) = f(sx)$. Autrement dit, on a $A \subset \mathcal{O}_\lambda$, et $A \cap \mathfrak{m}_\lambda$ est l'idéal des $f \in A$ qui s'annulent sur $X_A \cap T$, ce qui entraîne bien que $\mathcal{O}_\lambda$ domine $\mathcal{O}_{X_A, X_A \cap T} = \mathcal{O}_{X,T}$.

4.10. Le groupe $\mathrm{Aut}_k\, k[[t]]$ opère de manière naturelle dans $G_{k[[t]]}$, par automorphismes de groupes. On peut donc former le produit semi-direct $\Gamma = G_{k[[t]]} \times \mathrm{Aut}_k\, k[[t]]$. Le groupe Γ opère dans $(G/H)^*_{k((t))}$ par

$$[(\mu, \alpha) \cdot \lambda](t) = \mu(t)\lambda(\alpha(t)), \quad (\mu, \alpha) \in \Gamma, \quad \lambda \in (G/H)^*_{k((t))}.$$

Considérons l'application $(G/H)^*_{k((t))} \to \mathcal{V}_1(G/H) \times \mathbb{N}^*$ qui envoie λ sur $[(1/n_\lambda)v_\lambda, n_\lambda]$.

PROPOSITION. *L'application précédente passe au quotient en une bijection*

$$\Gamma \backslash (G/H)^*_{k((t))} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_1(G/H) \times \mathbb{N}^*.$$

Preuve. D'après 4.4, l'application est constante sur les orbites de $G_{k[[t]]}$; il est clair qu'elle l'est aussi sur les orbites de $\mathrm{Aut}_k\, k[[t]]$; elle passe donc bien au quotient par Γ.

Considérons un plongement élémentaire X d'orbite fermée T. Choisissons une courbe lisse C, un point $c \in C$ et un morphisme $\gamma : C \to X$ vérifiant: $\gamma(c) = x \in T$

et γ est transverse à T. Cette dernière condition implique que le morphisme $G\times C\to X$, qu'on déduit de l'opération de G dans X, est lisse. Soit $\lambda\in(G/H)^*_{k((t))}$ un germe formel associé à γ comme dans 4.5. En raisonnant comme en 4.6, on voit que $X_\lambda=X$; de la lissité de $G\times X\to X$ résulte en plus que $n_\lambda=1$. En considérant les $\lambda(t^n)$, $n\in\mathbb{N}^*$, on voit que l'application $\Gamma\backslash(G/H)^*_{k((t))}\to \mathcal{V}_1(G/H)\times\mathbb{N}^*$ est surjective.

Soit $\lambda'\in(G/H)^*_{k((t))}$ tel que $X_{\lambda'}=X$. D'après 4.8, quitte à multiplier λ' par un $s\in G$ convenable, on peut supposer que $\lim_{t\to 0}\lambda'(t)=x$. Grâce à une propriété de relèvement bien connue des morphismes lisses, il existe $\mu\in G_{k[[t]]}$ (vérifiant $\lim_{t\to 0}\mu(t)=e$) et $\beta\in tk[[t]]$ tels que $\lambda'(t)=\mu(t)\lambda(\beta(t))$. Il suffit alors de prendre une racine n-ième de β, où n est l'ordre de β, pour voir que $\lambda'(t)$ est sur l'orbite de Γ passant par $\lambda(t^n)$. On a visiblement $n=n_{\lambda'}$, d'où il suit que l'application $\Gamma\backslash(G/H)^*_{k((t))}\to\mathcal{V}_1(G/H)\times\mathbb{N}^*$ est aussi injective.

Remarque. Résumons pour la suite une partie des résultats précédents, en les reformulant légèrement. A normalisation près, toute valuation de $\mathcal{V}_1(G/H)$ s'obtient comme restriction à $k(G/H)$ d'un v_λ, $\lambda\in G_{k((t))}$. De plus, si $(\mu,\nu,\alpha)\in G_{k[[t]]}\times H_{k((t))}\times(tk[[t]]-t^2k[[t]])$, et si $\lambda'(t)=\mu(t)\lambda(\alpha(t))\nu(t)$, alors v_λ et $v_{\lambda'}$ ont même restriction à $k(G/H)$.

4.11. Soit $v\in\mathcal{V}(G/H)$. Si V est un sous-espace vectoriel de $k(G/H)$ et si $j\in\mathbb{Q}$, on pose

$$F^j_v V=\{f\in V,\ v(f)\geq j\};$$

les F^j_vV sont des sous-espaces vectoriels de V, et $i<j$ implique $F^i_vV\supset F^j_vV$.

On dira qu'une suite v_n $(n\in\mathbb{N})$ dans $\mathcal{V}(G/H)$ converge géométriquement vers v dans $\mathcal{V}(G/H)$ si

1) il existe une suite r_n $(n\in\mathbb{N})$ de nombres rationnels positifs telle que $r_nv_n(f)$ converge vers $v(f)$, quel que soit $f\in k(G/H)$;
2) pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie V de $k(G/H)$, il existe un entier $n(V)$ tel que, pour tout $n\geq n(V)$, chacun des F^i_vV $(i\in\mathbb{Z})$ est égal à l'un des $F^j_{v_n}V$ $(j\in\mathbb{Z})$.

Lorsqu'on connait déjà les valuations de $\mathcal{V}_1(G/H)$, pour déterminer celles de $\mathcal{V}_2(G/H)$, on peut parfois se servir de la proposition suivante (voir par exemple [16]).

PROPOSITION. *Tout élément de $\mathcal{V}(G/H)$ est limite géométrique d'une suite d'éléments de $\mathcal{V}_1(G/H)$.*

Soit $G/H \hookrightarrow X$ un plongement de G/H, avec la variété X affine. Soit Y un fermé de X, stable par G. Choisissons un point x dans Y. Soit $\lambda \in (G/H)_{k((t))}$ tel que $\lim_{t \to 0} \lambda(t) = x$.

LEMME 1. *Pour tout $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ et pour tout voisinage assez petit U de e dans G, λ est défini en $s^{-1} \cdot f$ pour tout $s \in U$, et $v_\lambda(f) = \inf_{s \in U} v_t(\lambda(s^{-1} \cdot f))$.*

Preuve. Pour tout $f \in k(G/H)$, posons comme dans 4.7 $i_\lambda(f) = \sum_{n \gg -\infty} f_{\lambda,n} t^n$; par définition de v_λ on a $v_\lambda(f) = v_t(i_\lambda(f))$. Si $g \in k[G/H]$, on a $g_{\lambda,n} \in k[G]$ quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, λ est définie sur $s^{-1} \cdot g$ quel que soit $s \in G$, et $\lambda(s^{-1} \cdot g) = \sum_{n \gg -\infty} g_{\lambda,n}(s) t^n$; par suite, quel que soit l'ouvert non vide U de G, on a $v_\lambda(g) = \inf_{s \in U} v_t(s^{-1} \cdot g)$. Si $h \in k[X] \subset k[G/H]$, $\lim_{t \to 0} \lambda(t) = x \in X$ implique $k[X] \subset \mathcal{O}_{v_\lambda}$, donc $h_{\lambda,n} = 0$ pour $n < 0$; si de plus pour un $s \in G$, $h(s \cdot x) \neq 0$, alors $\lambda(s^{-1} \cdot h) = \sum_{n \geq 0} h_{\lambda,n}(s) t^n \neq 0$, car $h_{\lambda,0}(s) = h(s \cdot x) \neq 0$ et $v_t(s^{-1} \cdot h) = v_\lambda(h) = 0$.

Soit maintenant $f \in \mathcal{O}_{X,x}$. On peut écrire $f = g/h$, avec $g, h \in k[X]$ et $h(x) \neq 0$. Soit U un voisinage de e dans G vérifiant $h(s \cdot x) \neq 0$ quel que soit $s \in U$. Alors, on a clairement

$$v_\lambda(f) = v_\lambda(g) = \inf_{s \in U} v_t(s^{-1} \cdot g) = \inf_{s \in U} v_t(s^{-1} \cdot f), \quad \text{c.q.f.d.}$$

Gardons les mêmes hypothèses que pour le lemme 1. Supposons de plus X normale, Y de codimension 1 dans X, et x lisse dans X et dans Y. Désignons par v la valuation de $\mathcal{V}(G/H)$ telle que $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}_{X,Y}$.

LEMME 2. *Pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie V de $\mathcal{O}_{X,x}$, il existe un entier p qui vérifie: pour tout $q > p$, on peut trouver $\lambda \in (G/H)^*_{k((t))}$ tel que*

1) $\lim_{t \to 0} \lambda(t) = x$;
2) $F_v^j V = F_{v_\lambda}^{qj} V$, *quel que soit* $j \in \mathbb{Z}$;
3) $\left| v(f) - \dfrac{1}{q} v_\lambda(f) \right| \leq p/q$, *quel que soit* $f \in V - \{0\}$.

Preuve. Choisissons $f_1, \ldots, f_r \in m_x \cap k[X] \subset k[G/H]$ des coordonnées locales en x, de manière à ce que $f_1 = 0$ définit Y au voisinage de x. On utilisera les identifications $\mathcal{O}_{X,x} \subset \hat{\mathcal{O}}_{X,x} = k[[f_1, \ldots, f_r]]$. Tout $f \in k[[f_1, \ldots, f_r]]$ peut s'écrire de manière unique $f = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(f) f_1^i$, où $c_i(f) \in k[[f_2, \ldots, f_r]]$; on définit ainsi des applications linéaires $c_i : k[[f_1, \ldots, f_r]] \to k[[f_2, \ldots, f_r]]$ $(i \in \mathbb{N})$. Choisissons $\alpha_2, \ldots, \alpha_r \in tk[[t]]$ algébriquement indépendant sur k, et désignons par $\lambda' : k[[f_2, \ldots, f_r]] \to k[[t]]$ l'unique homomorphisme d'algèbres tel que $\lambda'(f_i) = \alpha_i$ $(i = 2, \ldots, r)$. Par construction, λ' est injectif en restriction à $k[f_2, \ldots, f_r]$. Il en résulte que λ' reste injectif en restriction à la sous-algèbre des éléments de

$k[[f_2, \ldots, f_r]]$ qui sont algébriques sur $k[f_2, \ldots, f_r]$. Tout $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ est algébrique sur $k[f_1, \ldots, f_r]$; il s'ensuit facilement, par récurrence sur i, que $c_i(f)$ est algébrique sur $k[f_2, \ldots, f_r]$ quel que soit $i \in \mathbb{N}$. Par suite, on peut choisir N assez grand pour que $(c_0(f), \ldots, c_N(f)) \neq (0, \ldots, 0)$ quel que soit $f \in V - \{0\}$. Posons

$$p = \max\{v_t(\lambda'(c_i(f))), f \in V - \{0\}, c_i(f) \neq 0, i \in [0, N]\}.$$

Choisissons $q > p$ et désignons par $\lambda : k[[f_1, \ldots, f_r]] \to k[[t]]$ l'unique homomorphisme d'algèbres tel que $\lambda(f_1) = t^q$ et $\lambda(f_i) = \alpha_i$ $(i = 2, \ldots, r)$. Via les inclusions $k(G/H) \supset \mathcal{O}_{X,x} \subset k[[f_1, \ldots, f_r]]$, on peut considérer λ comme élément de $(G/H)_{k((t))}$. Reste à vérifier que p, q et λ possèdent les propriétés 1), 2) et 3) du lemme 2.

Par construction, il est clair que $\lim_{t \to 0} \lambda(t) = x$, d'où 1).

Soit $f \in V - \{0\}$. Supposons que $v(f) = j$. On peut alors écrire $f = f_1^j g$, où $g \in \mathcal{O}_{X,x} - f_1\mathcal{O}_{X,x}$ (l'algèbre $\mathcal{O}_{X,x}$ est factorielle). Autrement écrit, cela devient

$$f = c_j(f) f_1^j + h f_1^{j+1} = f_1^j(c_j(f) + h f_1),$$

où $c_j(f) \in k[[f_2, \ldots, f_r]] - \{0\}$ et $h \in k[[f_1, \ldots, f_r]]$. On a clairement $j \leq N$. Par suite $v_t(\lambda(c_j(f))) = v_t(\lambda'(c_j(f))) \leq p$. Puisque $v_t(\lambda(hf_1) \geq v_t(\lambda(f_1)) = q$ et que par hypothèse $q > p$, on a $v_t(\lambda(g)) = v_t(\lambda(c_j(f))) \leq p$. D'après le lemme 1, il en résulte que $v_\lambda(g) \leq p$.

D'un autre côté, désignons par U l'ouvert des $s \in G$ tels que $s^{-1} \cdot f_1 = 0$ soit encore une équation de Y au voisinage de x. Si $s \in U$, on peut écrire $s^{-1} \cdot f_1 = f_1 u$, où $u \in \mathcal{O}_{X,x}$ vérifie $u(x) \neq 0$. D'où, pour tout $s \in U$, $v_t(\lambda(s^{-1} \cdot f_1)) = v_t(\lambda(f_1)) = q$, puisque $v_t(\lambda(u)) = 0$. Il en résulte, puisque $f_1 \in k[X] \subset k[G/H]$, que $v_\lambda(f_1) = \inf_{s \in U} v_t(\lambda(s^{-1} \cdot f)) = v_t(\lambda(f_1)) = q$.

En résumé, on a montré que pour tout $f \in V - \{0\}$, $v(f) = j$ entraîne

$$qj \leq v_\lambda(f) \leq qj + p < q(j+1).$$

D'où aussitôt 3) et l'inclusion $F_v^j V \subset F_{v_\lambda}^{qj} V$, quel que soit $j \in \mathbb{Z}$. Si $f \notin F_v^j V$, on a $v(f) = j' < j$, donc $v_\lambda(f) < q(j'+1) \leq qj$, d'où $f \notin F_{v_\lambda}^{qj}$, ce qui entraîne l'égalité de 2).

Preuve de la proposition. Grâce à 3.2, il suffit de considérer le cas $H = \{e\}$.

Montrons qu'on peut en plus supposer que $v \in \mathcal{V}(G/\{e\})$ prenne au moins une valeur strictement positive sur $k[G]$. Considérons $G = G \times \{e\} \subset G \times k^*$ et posons $k[G \times k^*] = k[G][t, t^{-1}]$. Il existe une unique valuation $\bar{v} \in \mathcal{V}((G \times k^*)/\{e\})$ dont la restriction à $k(G)$ est v et qui vérifie $\bar{v}(t) = 1$. Il est clair qu'il suffit de démontrer la proposition pour $\bar{v}$.

Supposons donc que $v \in \mathcal{V}(G/\{e\})$ et qu'il existe $f \in k[G]$ tel que $v(f) > 0$. Dans ce cas, on peut trouver un plongement $G = G/\{e\} \hookrightarrow X$, avec la variété X affine et normale, et un fermé Y dans X, stable par G et de codimension 1, tels que $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}_{X,Y}$. Autrement dit, nous sommes dans les conditions du lemme 2.

Soit V_n $(n \in \mathbb{N})$ une suite croissante de sous-espaces vectoriels de dimension finie de $k[X]$, telle que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n = k[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit p_n l'entier que le lemme 2 associe à V_n; choisissons $q_n > p_n$ tel que la suite $p_n/q_n \to 0$; soit enfin λ_n l'élément de $G^*_{k((t))}$ que le lemme 2 associe à V_n et q_n. Désignons par v_n la valuation de $\mathcal{V}_1(G/\{e\})$ obtenue en normalisant v_{λ_n}.

Alors v_n tend géométriquement vers v. En effet, soit r_n $(n \in \mathbb{N})$ la suite des nombres rationnels positifs telle que $r_n v_n = (1/q_n) v_{\lambda_n}$. D'après la propriété 3) du lemme 2, si $f \in k[X]$, dès que $f \in V_n$, on a $|r_n v_n(f) - v(f)| \leq p_n/q_n$ qui tend vers 0. Si $f \in k(G/H)$, écrivons $f = g/h$ avec $g, h \in k[X]$; alors $r_n v_n(f) = r_n v_n(g) - r_n v_n(h)$ qui tend vers $v(g) - v(h) = v(f)$. D'autre part, si V est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $k(G)$, il existe $g \in k[G]$ et $n = n(V)$ tels que $gV \subset V_n$. Alors, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, si $j = (i + v(g))/r_n - v_n(g)$, de la propriété 2) du lemme 2 on déduit que $F^i_v V = F^j_{v_n} V$, ce qui termine la preuve de la proposition.

5. Compléments sur les plongements élémentaires

Les plongements élémentaires sont les plongements les plus simples possibles. A ce titre, ils méritent d'être étudiés, ce que nous commencerons à faire, après deux préliminaires, dans les trois derniers numéros de ce paragraphe.

5.1. Soit G' un sous-groupe algébrique de G contenant H.

Sous l'opération de G' par translations à droite, G est l'espace total d'un fibré principal de base G/G'. Pour toute G'-variété X', on peut donc former le fibré associé à ce fibré principal, de fibre type X'. On le notera $G *_{G'} X'$. L'opération de G dans lui-même par translations à gauche, passe au quotient en une opération de G dans $G *_{G'} X'$.

Il est clair que, pour que X' soit un plongement (resp. un plongement élémentaire) de G'/H, il faut et il suffit que $G *_{G'} X'$ soit un plongement (resp. un plongement élémentaire) de G/H.

LEMME. *Soit X un plongement élémentaire de G/H d'orbite fermée T. Pour qu'il existe un plongement élémentaire X' de G'/H tel que $X \simeq G *_{G'} X'$, il faut et il suffit que l'adhérence de G'/H dans X rencontre T.*

Preuve. Il est clair que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est aussi suffisante. Désignons par X' l'adhérence de G/H dans X. C'est un plongement de G'/H, mais a priori X' n'est pas nécessairement lisse. Considérons le G-morphisme naturel $\varphi: G *_{G'} X' \to X$. Modulo l'identification $G/H = G *_{G'} G'/H$, φ induit l'identité de G/H, et en particulier φ est birationnel. Pour tout $x \in T$, on a $\dim G_x = \dim H + 1$. Par suite, $\dim G'_x \leq \dim H + 1$, d'où

$$\dim G'/G'_x = \dim G' - \dim G'_x \geq \dim G' - \dim H - 1 = \dim G'/H - 1.$$

Puisque $\dim(T \cap X') < \dim G'/H$, il s'ensuit que G' a au plus un nombre fini d'orbites dans $X' \cap T$, et que les fibres de φ sont finies. D'après le théorème principal de Zariski, φ est un isomorphisme. Il s'ensuit que X' est un plongement élémentaire de G'/H, ce qui démontre le lemme.

5.2. La proposition du numéro suivant s'appuiera également sur le lemme que voici (qui concerne les groupes réductifs de transformations).

LEMME. *Soient K un groupe algébrique réductif connexe, X une variété algébrique affine lisse dans laquelle K opère algébriquement, Y une sous-variété lisse de X distincte de X et stable par K, et enfin x un point de Y fixé par K. On suppose que K n'a pas de point fixe dans $X - Y$. Il existe alors une orbite de K dans $X - Y$ dont l'adhérence dans X contient x.*

Ce lemme résulte par exemple sans peine des résultats de [7].

5.3. Dans la suite de ce paragraphe, on se bornera à considérer le cas $H = \{e\}$.

Soit X un plongement élémentaire de $G = G/\{e\}$ (on considère G comme espace homogène, G opérant dans lui-même par translations à gauche), d'orbite fermée T. Si $x \in T$, le groupe d'isotropie G_x est de dimension 1. Deux cas peuvent se produire: ou bien $(G_x)^0$, la composante connexe de G_x, est isomorphe au groupe multiplicatif k^*; ou bien $(G_x)^0$ est isomorphe au groupe additif k. Dans ce numéro et le suivant nous allons considérer le premier cas, et dans le numéro 5.5 nous pensons plutôt au second.

Voici une manière simple de construire des plongements élémentaires de G: choisissons un sous-groupe G' de G isomorphe à k^*, et considérons le plongement élémentaire $k^* \hookrightarrow k$, où k^* opère linéairement dans k; il induit par $G *_{G' \simeq k^*} k$ un plongement élémentaire de G. Ce qu'on a obtenu ainsi comme G-variété n'est rien d'autre qu'un G-fibré en droites sur G/G', dont la section nulle forme une orbite fermée, et dont le complémentaire de la section nulle est isomorphe à G.

PROPOSITION. *Soit X un plongement élémentaire de G d'orbite fermée T, et soit $x \in T$. On suppose $(G_x)^0 \simeq k^*$. Alors $G_x \simeq k^*$, et il existe un conjugué G' de G_x dans G tel que $X \simeq G *_{G' \simeq k^*} k$.*

Preuve. D'après un théorème de Sumihiro (voir [6]), $(G_x)^0$ étant un tore et X lisse donc normal, on peut trouver un voisinage de x dans X, ouvert affine et stable par $(G_x)^0$. D'après 5.2, il existe une orbite de $(G_x)^0$ dans $X-T$ dont l'adhérence dans X contient x. On en déduit l'existence d'un conjugué G' de $(G_x)^0$ dans G, dont l'adhérence dans X rencontre T. D'après 5.1, on peut trouver un plongement élémentaire X' de G' tel que $X \simeq G *_{G'} X'$. Puisque les seuls plongements élémentaires de k^* sont k et $\mathbb{P}_1 - \{0\}$, quitte à choisir convenablement l'isomorphisme $G' \simeq k^*$, on a $X \simeq G *_{G' \simeq k^*} k$. Il s'ensuit que G_x est un conjugué de G'; en particulier, G_x est connexe.

5.4. On désigne par $X_*(G)$ l'ensemble des morphismes de groupes algébriques $\lambda : k^* \to G$ non triviaux (c'est-à-dire tels que $\lambda(k^*) \neq \{e\}$). L'inclusion $k[t, t^{-1}] \subset k((t))$ permet de plonger $X_*(G)$ dans $G^*_{k((t))}$.

Pour tout $\lambda \in G^*_{k((t))}$, on note $G(\lambda)$ l'ensemble des $s \in G$ tels que $\lambda(t) s \lambda(t)^{-1} \in G_{k[[t]]}$; on vérifie sans peine que $G(\lambda)$ est un sous-groupe de G. Si $\lambda', \lambda \in X_*(G)$, on pose $\lambda' \sim \lambda$, s'il existe $n', n \in \mathbb{N}^*$ et $s \in G(\lambda)$ tels que $\lambda'(t^{n'}) = s\lambda(t^n)s^{-1}$.

Si $\lambda \in X_*(G) \subset G^*_{k((t))}$, rappelons qu'on désigne par X_λ le plongement élémentaire associé à λ (voir 4.8). Posons $G' = \lambda(k^*) \subset G$; c'est un sous-groupe algébrique de G isomorphe à k^*. Il est clair d'après 5.3 que $X_\lambda \simeq G *_{G' \simeq k^*} k$.

PROPOSITION. *Soient $\lambda', \lambda \in X_*(G)$. Pour que $X_{\lambda'} \simeq X_\lambda$, il faut et il suffit que $\lambda' \sim \lambda$.*

Preuve. Pour démontrer la proposition, on peut clairement se ramener au cas où les deux morphismes $\lambda', \lambda : k^* \to G$ sont injectifs; il suffit alors de montrer que $X_{\lambda'} \simeq X_\lambda$ si et seulement s'il existe $s \in G(\lambda)$ tel que $\lambda'(t) = s\lambda(t)s^{-1}$.

Supposons qu'il existe $s \in G(\lambda)$ tel que $\lambda'(t) = s\lambda(t)s^{-1}$. Alors, si l'on pose $\mu(t) = s\lambda(t)s^{-1}\lambda(t)^{-1}$, on a $\mu(t) \in G_{k[[t]]}$ et $\lambda'(t) = \mu(t)\lambda(t)$, d'où $X_{\lambda'} \simeq X_\lambda$ d'après 4.10.

Inversement, supposons $X_{\lambda'} \simeq X_\lambda$. Puisque $\lambda(k^*)$ et $\lambda'(k^*)$ s'interprètent comme groupes d'isotropie des orbites fermées dans X_λ et $X_{\lambda'}$, on voit qu'il existe $s \in G$ tel que $\lambda'(t) = s^{-1}\lambda(t)s$. Par ailleurs, en raisonnant comme dans 4.10, on peut trouver $(\alpha, \mu) \in \mathrm{Aut}_k\, k[[t]] \times G_{k[[t]]}$ tel que $\lambda'(t) = \mu(t)\lambda(\alpha(t))$. Puisque λ est un morphisme de groupes, on a $\lambda(\alpha(t))\lambda(t)^{-1} = \lambda(\alpha(t)/t) \in G_{k[[t]]}$. D'où $\lambda(t)s\lambda(t)^{-1} = s\lambda'(t)\lambda(t)^{-1} = s\mu(t)\lambda(\alpha(t))\lambda(t)^{-1} \in G_{k[[t]]}$. Il s'ensuit que $s \in G(\lambda)$, autrement dit que $\lambda' \sim \lambda$.

Remarque. Lorsque G est réductif, on peut montrer que les $G(\lambda)$, $\lambda \in X_*(G)$ sont des sous-groupes paraboliques de G, et l'ensemble quotient $X_*(G)/\sim$ n'est alors rien d'autre que la version de Mumford de l'immeuble sphérique de G (voir [8]), qu'on peut donc considérer comme plongé dans $\mathcal{V}_1(G/\{e\})$.

5.5. *Soit X un plongement élémentaire de G d'orbite fermée T, et soit $x \in T$.*

PROPOSITION. *Le groupe $G_x/(G_x)^0$ est cyclique.*

Preuve. Comme dans 4.10, soit λ un germe formel associé à une courbe dans X transverse à T, tel qu'on ait $\lim_{t\to 0} \lambda(t) = x$. Si $s \in G$, on a alors $s \in G_x$ si et seulement si $\lim_{t\to 0} s\lambda(t) = x$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $(\mu, \alpha) \in G_{k[[t]]} \times \mathrm{Aut}_k k[[t]]$ vérifiant $\lim_{t\to 0} \mu(t) = e$ et $s\lambda(t) = \mu(t)\lambda(\alpha(t))$.

Afin de pouvoir reformuler cette caractérisation de G_x de façon plus commode, introduisons quelques notations. Posons $\mathcal{A} = \mathrm{Aut}_k\, k[[t]]$, et désignons par $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des $\alpha \in \mathcal{A}$ qui induisent l'identité dans $k[[t]]/t^{n+1}k[[t]]$. Les $\mathcal{A}_n$ sont des sous-groupes distingués dans $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$, et l'on a $\mathcal{A}/\mathcal{A}_1 \simeq k^*$ et $\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_{n+1} \simeq k$ si $n \geq 1$. Designons par $\mathcal{A}(\lambda)$ l'ensemble des $\alpha \in \mathcal{A}$ tels que $\lim_{t\to 0} \lambda(\alpha(t))\lambda(t)^{-1}$ existe dans G. Définissons $h: \mathcal{A}(\lambda) \to G$ par $h(\alpha) = \lim_{t\to 0} \lambda(\alpha(t))\lambda(t)^{-1}$. On vérifie sans peine que $\mathcal{A}(\lambda)$ est un sous-groupe de $\mathcal{A}$, et que h est un homomorphisme de groupes. La caractérisation précédente de G_x peut se reformuler de la façon suivante: on a $h(\mathcal{A}(\lambda)) = G_x$.

De plus, on vérifie sans peine que, dès que n est assez grand:

1) $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}(\lambda)$;
2) $\mathcal{A}(\lambda)/\mathcal{A}_n$ est un sous-groupe algébrique du groupe algébrique $\mathcal{A}/\mathcal{A}_n$;
3) h passe au quotient en un morphisme de groupes algébriques $\mathcal{A}(\lambda)/\mathcal{A}_n \to G$. Puisque $(\mathcal{A}(\lambda) \cap \mathcal{A}_1)/\mathcal{A}_n$, étant unipotent, est connexe, et que $\mathcal{A}(\lambda)/(\mathcal{A}(\lambda) \cap \mathcal{A}_1)$ s'injecte dans $\mathcal{A}/\mathcal{A}_1 \simeq k^*$, on voit que $(\mathcal{A}(\lambda)/\mathcal{A}_n)/(\mathcal{A}(\lambda)/\mathcal{A}_n)^0$ est cyclique. Par suite $G_x/(G_x)^0$ est cyclique, comme quotient d'un groupe cyclique.

6. Reformulation de la définition des plongements

Dans ce §, nous assemblons les résultats des §§1 à 4.

6.1. Rappelons que l'ensemble $\mathfrak{L}_1(G/H)$ est en bijection naturelle avec l'ensemble des orbites de G dans $\mathfrak{X}(G/H)$ (voir 2.2); si $l \in \mathfrak{L}_1(G/H)$; nous avons désigné par T_l l'orbite qui lui correspond. Si X est un sous-ensemble stable par G de $\mathfrak{X}(G/H)$, nous désignerons par $L(X)$ l'ensemble des $l \in \mathfrak{L}_1(G/H)$ tels que $T_l \subset X$.

PROPOSITION. *Soit X un sous-ensemble stable par G de $\mathfrak{X}(G/H)$.*

1) *Pour que X soit ouvert dans $\mathfrak{X}(G/H)$, il faut et il suffit que $L(X)$ soit ouvert dans $\mathfrak{L}_1(G/H)$.*
2) *Pour que X soit noethérien, il faut et il suffit que $L(X)$ le soit.*

Preuve. Soit A une sous-algèbre affine stable par $\mathfrak{B}$ de $k(G/H)$. Rappelons que nous avons noté X_A l'ensemble des $x \in \mathfrak{X}(G/H)$ tels que $\mathcal{O}_x$ soit un localisé de A; désignons de manière analogue par L_A l'ensemble des $l \in \mathfrak{L}_1(G/H)$ tels que $\mathcal{O}_l$ soit un localisé de A. Il est clair que $X_A \subset X$ si et seulement si $L_A \subset L(X)$. La première partie de la proposition en résulte aussitôt.

Si X est noethérien, on a $X \subset \bigcup_{i=1}^m X_{A_i}$, pour des sous-algèbres affines stables par $\mathfrak{B}$ de $k(G/H)$ convenables, d'où $L(X) \subset \bigcup_{i=1}^m L_{A_i}$, ce qui montre bien que $L(X)$ est noethérien. Inversement, si $L(X)$ est noethérien, on a $L(X) \subset \bigcup_{i=1}^m L_{A_i}$, où $A_1, \ldots, A_m$ sont certaines sous-algèbres affines stables par $\mathfrak{B}$ de $k(G/H)$, d'où $X \subset G(\bigcup_{i=1}^m X_{A_i})$, ce qui d'après 1.5 implique bien que X est noethérien.

6.2. Soit $l \in \mathfrak{L}_1(G/H)$. Nous désignerons par $\mathcal{F}_l$ l'ensemble des $v \in \mathcal{V}_1(G/H)$ tels que $\mathcal{O}_v$ domine $\mathcal{O}_l$. Nous appellerons $\mathcal{F}_l$ la facette de l. Il résulte de 4.9 que $\mathcal{F}_l \neq \emptyset$. La facette $\mathcal{F}_l$ constitue un renseignement important sur l; dans certains cas, les éléments de $\mathfrak{L}_1(G/H)$ sont même déterminés par leur facette (voir §9).

Si L est un sous-ensemble de $\mathfrak{L}_1(G/H)$, nous dirons que L est séparé si les facettes $\mathcal{F}_l$, $l \in L$ sont disjointes.

PROPOSITION. *Soit X un ouvert stable par G de $\mathfrak{X}(G/H)$. Pour que X soit séparé, il faut et il suffit que $L(X)$ le soit.*

Preuve. Il est bien connu qu'aucune localité ne peut dominer deux localités distinctes d'une variété séparée; par suite, si X est séparé, les facettes $\mathcal{F}_l$, $l \in L(X)$ sont disjointes.

Réciproquement, supposons X non séparé. On a alors $\bar{\Delta}_X \neq \Delta_X$, où Δ_X désigne la diagonale de $X \times X$. L'opération diagonale de G dans $X \times X$ laisse stable Δ_X, $\bar{\Delta}_x$ et $\bar{\Delta}_X - \Delta_X$. Il n'est pas difficile de voir que $\bar{\Delta}_X$ s'identifie à un ouvert stable par G de $\mathfrak{X}(G/H)$, et que les deux projections $X \xleftarrow{\pi_1} X \times X \xrightarrow{\pi_2} X$ induisent deux morphismes $X \xleftarrow{\pi_1} \bar{\Delta}_X \xrightarrow{\pi_2} X$ qui commutent à l'opération de G et qui induisent l'identité de G/H. Soit T une orbite de G dans $\bar{\Delta}_X - \Delta_X$. Puisque toute orbite de G dans $\mathfrak{X}(G/H)$ possède un voisinage séparé (1.5), on a $\pi_1(T) \neq \pi_2(T)$. Désignons par l_1 et l_2 les éléments de $L(X)$ qui correspondent à $\pi_1(T)$ et $\pi_2(T)$. Par construction, $\mathcal{O}_{\bar{\Delta}_X, T}$ domine $\mathcal{O}_{l_1}$ et $\mathcal{O}_{l_2}$. D'après 4.9, il existe $v \in \mathcal{V}_1(G/H)$ tel que $\mathcal{O}_v$ domine $\mathcal{O}_{\bar{\Delta}_X, T}$. Il s'ensuit que les facettes $\mathcal{F}_{l_1}$ et $\mathcal{F}_{l_2}$ ne sont pas disjointes.

6.3. Nous pouvons maintenant reformuler la définition des plongements.

DEFINITION. Un plongement de G/H est la donnée d'un sous-ensemble ouvert, noethérien et séparé de $\mathfrak{L}_1(G/H)$.

On voit comment cette reformulation se rattache à la définition des plongements donnée au §1: posons $X(L) = \bigcup_{l \in L} T_l \subset \mathfrak{X}(G/H)$; lorsque L parcourt les différents sous-ensembles ouverts noethériens et séparés de $\mathfrak{L}_1(G/H)$, grâce à 6.1 et 6.2, on obtient par $X(L)$ les différents plongements de G/H.

De 2.3, on déduit que $\mathfrak{L}_f(G/H)$ est ouvert dans $\mathfrak{L}_1(G/H)$; de plus, pour qu'un sous-ensemble L de $\mathfrak{L}_f(G/H)$ soit ouvert, il faut et il suffit manifestement qu'il soit saturé par localisation dans $\mathfrak{L}_f(G/H)$ (c'est-à-dire, tout l de $\mathfrak{L}_f(G/H)$, pour lequel il existe $l' \in L$ tel que $\mathcal{O}_l$ soit un localisé de $\mathcal{O}_{l'}$, appartient à L). Il s'ensuit, pour les plongements de G/H dont le nombre d'orbites est fini, une caractérisation particulièrement simple: ce sont les sous-ensembles finis de $\mathfrak{L}_f(G/H)$, saturés par localisation dans $\mathfrak{L}_f(G/H)$, et séparés.

Soit H' un sous-groupe algébrique de G contenant H. Soient X un plongement de G/H, X' un plongement de G/H'. De 2.3, on tire aussitôt que les assertions suivantes sont équivalentes.

1) Le morphisme naturel $G/H \to G/H'$ se prolonge en un morphisme $X \to X'$.

2) Pour tout $l \in L(X)$ il existe un (unique) $l' \in L(X')$ tel que $\mathcal{O}_l$ domine $\mathcal{O}_{l'}$.

6.4. Soit H' un sous-groupe algébrique de G contenant H. Soient X un plongement de G/H, X' un plongement de G/H'. Si $v \in \mathcal{V}_1(G/H)$, rappelons que l'on désigne par X_v le plongement élémentaire correspondant.

On dira que v domine X si l'identité de G/H se prolonge en un morphisme $X_v \to X$; on dira que v domine X' si le morphisme naturel $G/H \to G/H'$ se prolonge en un morphisme $X_v \to X'$. Si le morphisme naturel $G/H \to G/H'$ se prolonge en un morphisme $X \to X'$, il est clair que tout $v \in \mathcal{V}_1(G/H)$ qui domine X, domine aussi X'.

PROPOSITION. *Supposons que le morphisme naturel $G/H' \to G/H$ se prolonge en un morphisme $\varphi : X \to X'$. Pour que φ soit propre, il faut et il suffit que tout $v \in \mathcal{V}_1(G/H)$ qui domine X', domine déjà X.*

Preuve. Soient X, Y deux variétés algébriques intègres, U un ouvert non vide de X, et $\varphi : X \to Y$ un morphisme. Si $\lambda \in X_{k((t))}$, on note $\varphi \circ \lambda$ son image par φ dans $Y_{k((t))}$. On a le critère suivant de propreté: pour que φ soit propre, il faut et il suffit que, si $\lambda \in U_{k((t))}$, toutes les fois que $\lim_{t \to 0} (\varphi \circ \lambda)(t)$ existe dans Y, alors $\lim_{t \to 0} \lambda(t)$ existe déjà dans X. La proposition résulte aussitôt de là et de 4.9.

COROLLAIRE. *Soit X un plongement de G/H. Pour que X soit une variété complète, il faut et il suffit que tout $v \in \mathcal{V}_1(G/H)$ domine X.*

7. Valuations invariantes sous un groupe réductif

Dans la suite, nous supposerons le groupe G réductif et l'algèbre $k[G]$ factorielle. Au début de ce §, nous expliquons de quelle manière nous utiliserons ces hypothèses. Puis en 7.4, nous commençons par en tirer des conséquences pour les valuations invariantes. Comme première application, nous obtiendrons en 7.5 que, pour certains espaces homogènes, le nombre d'orbites dans tout plongement est fini. Enfin en 7.6, nous esquisserons une voie à suivre pour déterminer les valuations invariantes.

7.1. Supposons que l'algèbre $k[G]$ soit factorielle.

Pour l'étude des plongements, cette hypothèse n'est pas très restrictive: il est bien connu que pour tout groupe algébrique affine G, il existe un revêtement fini de groupes algébriques $p: \tilde{G} \to G$ tel que $k[\tilde{G}]$ est factorielle; et si $\tilde{H} = p^{-1}(H)$, on peut clairement identifier plongements de G/H et plongements de $\tilde{G}/\tilde{H}$.

Désignons par $k[G]^*$ l'ensemble des éléments inversibles de $k[G]$. Il est bien connu que tout élément de $k[G]^*$ est, à facteur scalaire près, un caractère (c'est-à-dire un morphisme de groupes algébriques $G \to k^*$).

Désignons par $\mathcal{D}(G)$ l'ensemble des fermés irréductibles de G de codimension 1. Pour tout $D \in \mathcal{D}$, choisissons un $f_D \in k[G]$ qui engendre l'idéal des $f \in k[G]$ nuls sur D. Tout $f \in k(G)$ s'écrit alors de manière unique

$$f = g \prod_{D \in \mathcal{D}(G)} f_D^{v_D(f)}$$

où $g \in k[G]^*$ et où les $v_D(f)$, $D \in \mathcal{D}(G)$ sont des entiers presque tous nuls. Pour tout $D \in \mathcal{D}(G)$, la fonction $v_D: k(G)^* \to \mathbb{Z}$ est une valuation discrète de $k(G)$.

Soit H un sous-groupe algébrique de G (non nécessairement connexe). Désignons par $\pi: G \to G/H$ la projection naturelle et par $\mathcal{D}(G/H)$ l'ensemble des fermés irréductibles de G/H de codimension 1. Pour tout $D \in \mathcal{D}(G/H)$, H opère (par translations à droite) de façon transitive dans l'ensemble des composantes irréductibles $D_1, \ldots, D_r$ de $\pi^{-1}(D)$. Posons $f_D = f_{D_1} \cdot \cdots \cdot f_{D_r}$. Il est clair que les f_D $(D \in \mathcal{D}(G/H))$ sont des vecteurs propres de H. De plus, tout vecteur propre $f \in k(G)$ de H (et en particulier tout $f \in k(G/H)$) s'écrit de manière unique

$$f = g \prod_{D \in \mathcal{D}(G/H)} f_D^{v_D(f)},$$

où $g \in k[G]^*$ et où les $v_D(f)$, $D \in \mathscr{D}(G/H)$ sont des entiers presque tous nuls. Pour tout $D \in \mathscr{D}(G/H)$, la fonction $v_D : k(G/H)^* \to \mathbb{Z}$ est une valuation discrète de $k(G/H)$.

Soit $f \in k(G/H)$. Ecrivons $f = gh^{-1}$, avec $g, h \in k[G]$ sans diviseur commun. De ce qui précède résulte aussitôt que g et h sont des vecteurs propres de H, de même caractère.

Autre fait que nous utiliserons: pour tout $f \in k[G]$, il existe $s \in G$ tel que f et $s \cdot f$ sont sans diviseur commun. En effet, pour $s \in G$ en "position générale", le fermé de G où s'annulent f et $s \cdot f$ est de codimension ≥ 2.

7.2. Supposons que le groupe G soit réductif. Rappelons quelques faits de base sur les groupes réductifs et leurs représentations rationnelles (en caractéristique nulle).

Toute représentation rationnelle d'un groupe réductif est complètement réductible. Pour connaître un G-module rationnel N, il suffit donc de connaître tous les sous-G-modules irréductibles de N.

Désignons par $\hat{G}$ l'ensemble des (classes d'isomorphismes de) G-modules rationnels irréductibles. Pour décrire $\hat{G}$ on procède traditionnellement de la manière suivante. On fixe un sous-groupe unipotent maximal U de G. On pose $B = N_G(U)$, le normalisateur de U dans G; c'est un sous-groupe résoluble maximal de G, qui est connexe et dont le radical unipotent est U. On écrit T pour le quotient B/U qui est un tore, et on note $X(T)$ le groupe des caractères de T (et de B). Pour tout $M \in \hat{G}$, l'espace vectoriel ${}^UM$ est de dimension 1. L'opération naturelle de T dans ${}^UM$ fournit donc un caractère χ_M de T. L'application $\hat{G} \to X(T)$ qui envoie M sur χ_M est injective. On note P l'image de cette application, et on appelle P l'ensemble des poids dominants.

On se sert de P pour indexer $\hat{G}$ et pour manier les G-modules rationnels. De manière plus précise, soit N un G-module rationnel, et soit $M \in \hat{G}$ de poids dominant $\pi \in P$; alors un sous-G-module de N est irréductible et isomorphe à M si et seulement s'il est engendré par un vecteur propre de B dans N, de caractère π. Autrement dit, pour connaître l'opération de G dans N, il suffit de connaître les vecteurs propres de B dans N et leurs caractères.

7.3. Supposons maintenant à la fois G réductif et l'algèbre $k[G]$ factorielle.

Fixons un sous-groupe algébrique H et un sous-groupe unipotent maximal U de G. Dans ce qui suit, les groupes G, U et $B = N_G(U)$ opèreront toujours par "translations à gauche" et le groupe H toujours par "translations à droite".

On désignera par $\mathscr{P}$ l'ensemble des $f \in k(G)$ qui sont à la fois vecteur propre de B et vecteur propre de H; $\mathcal{P}$ est un sous-groupe multiplicatif de $k(G)^*$. On notera ${}^B\mathcal{D}(G/H)$ l'ensemble des $D \in \mathcal{D}(G/H)$ qui sont stables par B. Si $D \in \mathcal{D}(G/H)$, pour que $f_D \in \mathcal{P}$, il faut et il suffit que $D \in {}^B\mathcal{D}(G/H)$. De plus, il est clair que tout $f \in \mathcal{P}$ s'écrit de manière unique

$$f = g \prod_{D \in {}^B\mathcal{D}(G/H)} f_D^{v_D(f)},$$

où $g \in k[G]^*$.

Soit A un sous-espace vectoriel de $k(G/H)$. Nous dirons que A est quasi-G-stable, s'il existe une famille $M(h)$, $h \in \mathcal{P}$ de sous-G-modules de $k[G]$ telle que $A = \bigcup_{h \in \mathcal{P}} hM(h)$.

Nous dirons d'un sous-espace vectoriel N de A qu'il est "bon", s'il existe un ensemble $\mathcal{W}$ de valuations (discrètes, normalisées) G-invariantes de $k(G/H)$, et une famille d'entiers n_w $(w \in \mathcal{W})$, tels que N est l'ensemble des $f \in A$ qui vérifient $w(f) \geq n_w$, quel que soit $w \in \mathcal{W}$.

LEMME. *Soit A un sous-espace vectoriel quasi-G-stable de $k(G/H)$, et soient N et N' deux "bons" sous-espaces vectoriels de A. Pour que $N - N' \neq \varnothing$, il faut et il suffit que $\mathcal{P} \cap (N - N') \neq \varnothing$.*

Preuve. Si $h \in \mathcal{P}$, désignons par $N(h)$ (resp. $N'(h)$) l'ensemble des $g \in M(h)$ tels que $gh \in N$ (resp. N'). D'après le corollaire 2 de 3.2, on a $v((s \cdot g)h) = v(gh)$, quels que soient $s \in G$ et $g \in M(h)$ et quelle que soit la valuation G-invariante v de $k(G/H)$. Puisque N et N' sont "bons," il s'ensuit que $N(h)$ et $N'(h)$ sont des sous-G-modules de $M(h)$. Si $N - N' \neq \varnothing$, il existe $h \in \mathcal{P}$ tel que $N(h) - N'(h) \neq \varnothing$. Grâce aux propriétés des représentations rationnelles des groupes réductifs rappelées en 7.2, B possède un vecteur propre f dans $N(h) - N'(h)$. Puisque $h \in \mathcal{P}$ et que $hM(h) \subset A \subset k(G/H)$, tous les éléments de $M(h)$ sont des vecteurs propres de H. Par conséquent $f \in \mathcal{P}$ et $hf \in \mathcal{P} \cap (N - N') \neq \varnothing$, c.q.f.d.

Remarque. Nous avons vu en passant qu'un "bon" sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel quasi-G-stable est encore quasi-G-stable.

7.4. Rappelons que, dans toute la suite, G sera un groupe réductif dont l'algèbre $k[G]$ est factorielle, H un sous-groupe algébrique de G, et U un sous-groupe unipotent maximal de G, qui resteront fixés. De plus, sauf mention expresse du contraire, les groupes G, U, $B = N_G(U)$ opèreront par "translations à gauche", et le groupe H par "translations à droite".

PROPOSITION. *Deux valuations discrètes G-invariantes de $k(G/H)$, qui coïncident en restriction à $\mathcal{P} \cap k(G/H)$, sont égales.*

Preuve. Désignons par A l'ensemble des $f \in k(G/H)$ qui peuvent s'écrire $f = gh$, avec $g \in k[G]$ et $h \in \mathcal{P}$; A est une sous-algèbre de $k(G/H)$.

Soit $f \in k(G/H)$. Ecrivons $f = g_1 g_2^{-1}$, où $g_1, g_2 \in k[G]$ sont sans diviseur commun. D'après 7.1, g_1 et g_2 sont des vecteurs propres de H, de même caractère. Dans le G-module engendré par g_1 choisissons un vecteur propre h de B (voir 7.2). Il est clair que h est aussi un vecteur propre de H de même caractère que g_1 et g_2. Par suite $h \in \mathcal{P}$ et $g_1 h^{-1}$, $g_2 h^{-1} \in A$. Il s'ensuit que f est dans le corps des fractions de A. Autrement dit, nous avons montré que A possède $k(G/H)$ comme corps des fractions.

Pour tout $h \in \mathcal{P}$, désignons par $M(h)$ l'ensemble des $g \in k[G]$ qui sont vecteur propre de H, de caractère inverse à celui de h. Il est clair que les $M(h)$, $h \in \mathcal{P}$ sont des sous-G-modules de $k[G]$, et que $A = \bigcup_{h \in \mathcal{P}} hM(h)$. Autrement dit, A est quasi-G-stable (voir 7.3).

Soient maintenant v_1 et v_2 deux valuations discrètes G-invariantes de $k(G/H)$, qui coïncident en restriction à $\mathcal{P} \cap k(G/H) = \mathcal{P} \cap A$. Puisque A est quasi-G-stable, de 7.3 résulte aussitôt que v_1 et v_2 coïncident sur A. Puisque le corps des fractions de A est $k(G/H)$, il s'ensuit que $v_1 = v_2$, c.q.f.d.

7.5. Si le degré de transcendance de ${}^{B}k(G/H)$ sur k est ≤ 1 (autrement dit, si B possède une orbite de codimension ≤ 1 dans G/H), la structure de ${}^{B}\mathcal{D}(G/H)$ est particulièrement simple.

1) Si $\deg \operatorname{tr}_k {}^{B}k(G/H) = 0$, c'est-à-dire si B a une orbite ouverte dans G/H, ${}^{B}\mathcal{D}(G/H)$ est l'ensemble fini des composantes irréductibles du complémentaire de cette orbite ouverte (l'orbite étant affine, son complémentaire est pur de codimension 1).
2) Si $\deg \operatorname{tr}_k {}^{B}k(G/H) = 1$, soit U l'ouvert de G/H formé des orbites de B de codimension 1 dans G/H; alors, si $D \in {}^{B}\mathcal{D}(G/H)$, ou bien D est l'adhérence dans G/H d'une orbite de B dans U, ou bien D est une composante du complémentaire de U dans G/H.

PROPOSITION (voir aussi [19]). *On suppose que B a une orbite ouverte dans G/H. Alors le nombre des orbites de G dans tout plongement de G/H est fini.*

Preuve. Si B a une orbite ouverte dans G/H, nous venons de voir que l'ensemble ${}^{B}\mathcal{D}(G/H)$ est fini. Il est clair que cela implique que les groupes $\mathcal{P}/k^*$ et $(\mathcal{P} \cap k(G/H))/k^*$ sont de type fini. Soient $f_1, \ldots, f_r$ des éléments de $\mathcal{P} \cap k(G/H)$ qui avec k^* engendrent le groupe $\mathcal{P} \cap k(G/H)$. D'après 8.1, toute valuation $v \in \mathcal{V}(G/H)$ est déterminée par $(v(f_1), \ldots, v(f_r)) \in \mathbb{Z}^r$. Il s'ensuit que l'ensemble $\mathcal{V}(G/H)$ est dénombrable.

Raisonnons maintenant à l'envers. Supposons qu'il existe un plongement X de

G/H dont le nombre des orbites est infini. Ce nombre est alors forcément non dénombrable (nous supposons le corps de base non dénombrable!). Soit $L \subset \mathfrak{L}_1(G/H)$ l'ensemble des orbites de G dans X. On sait que les facettes $\mathscr{F}_l$, $l \in L$ sont disjointes (cela exprime le fait que X est séparé, voir 6.2) et non vides (voir 4.9). De L non dénombrable suit donc $\mathscr{V}_1(G/H)$ non dénombrable, ce qui démontre la proposition.

Remarques. 1) Lorsque B a une orbite ouverte dans G/H, il résulte aussitôt de la proposition précédente que $\mathscr{V}(G/H) = \mathscr{V}_1(G/H)$, et plus généralement que $\mathfrak{L}(G/H) = \mathfrak{L}_1(G/H) = \mathfrak{L}_f(G/H)$.

2) De nombreux auteurs ont déjà étudié (et classé) les sous-groupes H de G tels que B possède une orbite ouverte dans G/H (en demandant parfois que H possède une orbite ouverte dans G/B, ce qui revient au même), voir par exemple [17]. Voici quelques cas de tels H: les sous-groupes de G qui contiennent un sous-groupe unipotent maximal; les sous-groupes de G fixés par un automorphisme involutif.

7.6. Terminons ce § par quelques indications pratiques sur la détermination de $\mathscr{V}(G/H)$.

Pour tout $\pi \in \mathscr{P}$, désignons par M_π un G-module rationnel irréductible de poids dominant π. Notons M'_π le dual de M_π. Il est bien connu que $k[G]$, en tant que $G \times G$-module (G opérant par "translations à gauche et à droite"), est isomorphe à $\bigoplus_{\pi \in P} M'_\pi \otimes M_\pi$. Il s'ensuit que ${}^U k[G]$, l'algèbre des invariants de U opérant par "translations à gauche", est isomorphe, en tant que G-module (G opérant par "translations à droite"), à $\bigoplus_{\pi \in P} M_\pi$. L'opération de $T = B/U$ dans ${}^U k[G]$ se retrouve dans la graduation de $\bigoplus_{\pi \in P} M_\pi$ par les poids $P \subset X(T)$.

Pour tout $\pi \in P$, choisissons un isomorphisme de M_π sur l'unique sous-G-module de ${}^U k[G]$ qui lui est isomorphe, et convenons dans la suite d'identifier M_π à son image (deux telles identifications ne diffèrent que par une homothétie). L'ensemble $\mathscr{P} \cap k[G]$ s'identifie alors à la réunion des vecteurs propres de H dans les M_π, $\pi \in P$.

Pour simplifier notre discussion, supposons que G/H soit quasi-affine. Dans ce cas, on peut trouver des f_σ $(\sigma \in \Sigma)$ dans $\mathscr{P} \cap k[G/H]$ qui engendrent le groupe $\mathscr{P} \cap k(G/H)$. D'après 7.4, toute valuation v de $\mathscr{V}(G/H)$ est déterminée par les $v(f_\sigma)$ $(\sigma \in \Sigma)$. Reste alors à trouver les familles d'entiers n_σ $(\sigma \in \Sigma)$ pour lesquelles il existe $v \in \mathscr{V}(G/H)$ tel que $v(f_\sigma) = n_\sigma$.

Lorsque $\lambda \in G_{k((t))}$, on peut calculer $v_\lambda(f_\sigma)$ de la manière suivante. Supposons que $f_\sigma \in M_\pi = M_\pi \otimes k \subset M_\pi \otimes k((t))$. Le groupe $G_{k((t))}$ opère de manière naturelle dans $M_\pi \otimes k((t))$ et $v_\lambda(f_\sigma)$ n'est rien d'autre que l'ordre en t de la série formelle

$\lambda \cdot f_\sigma \in M_\pi \otimes k((t))$. De plus, le groupe

$$\Gamma = (G_{k[[t]]} \times H_{k((t))}) \times \mathrm{Aut}_k\, k[[t]]$$

opère de manière naturelle dans $G_{k((t))}$, et v_λ et $v_{\lambda'}$ coïncident en restriction à $k(G/H)$ lorsque $\lambda, \lambda' \in G_{k((t))}$ sont sur une même orbite de Γ (voir 4.10).

D'où une voie à suivre pour déterminer $\mathscr{V}_1(G/H)$: on cherche d'abord sur chaque orbite de Γ dans $G_{k((t))}$ un λ d'une forme simple, puis on calcule les $v_\lambda(f_\sigma)$ $(\sigma \in \Sigma)$. Enfin, pour trouver les valuations de $\mathscr{V}_2(G/H)$, on peut se servir de 4.11.

Ces indications semblent assez raisonnables lorsque le degré de transcendance de ${}^B k(G/H)$ sur k est ≤ 1 (pour un exemple, voir [16]).

8. Germes de plongements normaux sous un groupe réductif

Dans ce §, nous étudierons les germes de plongements (lorsque la variété est normale et le groupe est réductif) dans le même esprit qu'au § précédent les valuations invariantes. Pour cela, nous nous appuierons beaucoup sur la théorie des anneaux de Krull (pour un bon exposé de cette théorie, voir par exemple [3], chap. 7).

8.1. Désignons par $\mathfrak{L}^n(G/H)$ l'ensemble des $l \in \mathfrak{L}(G/H)$ tels que $\mathcal{O}_l$ soit une algèbre intégralement close dans $k(G/H)$. Si $l \in \mathfrak{L}^n(G/H)$, $\mathcal{O}_l$ est un anneau noethérien intégralement clos, donc un anneau de Krull, dont les valuations essentielles sont manifestement de deux sortes:

1) un nombre fini de valuations appartenant à $\mathscr{V}(G/H)$ (si X est un plongement de G/H et si Y est un fermé stable par G de X, tels que $\mathcal{O}_{X,Y} = \mathcal{O}_l$, il s'agit des valuations correspondant aux composantes irréductibles de $X - G/H$, qui sont de codimension 1 dans X et qui contiennent Y); on notera $\mathscr{V}_l$ l'ensemble de ces valuations;
2) un certain nombre de valuations du type v_D, où $D \in \mathscr{D}(G/H)$ (si X, Y sont comme plus haut, il s'agit des D dont l'adhérence dans X contient Y); on notera $\mathscr{D}_l$ l'ensemble de ces éléments de $\mathscr{D}(G/H)$.

Puisque $\mathcal{O}_l$ est un anneau de Krull, $\mathcal{O}_l$ est déterminé par $\mathscr{V}_l$ et $\mathscr{D}_l$; plus précisément

$$\mathcal{O}_l = \bigcap_{v \in \mathscr{V}_l} \mathcal{O}_v \cap \bigcap_{D \in \mathscr{D}_l} \mathcal{O}_{v_D}.$$

Voici en gros le programme de ce §: nous montrerons que tout $l \in \mathfrak{L}^n(G/H)$ est déjà déterminé par $\mathcal{V}_l$ et ${}^B\mathcal{D}_l = \mathcal{D}_l \cap {}^B\mathcal{D}(G/H)$ (8.3), puis nous caractériserons les couples $\mathcal{V}_l, {}^B\mathcal{D}_l$ (8.8).

8.2. Si $N \subset k[G]$ et si $g \in k(G)$, on désignera par gN le sous-ensemble de $k(G)$ des gf ($f \in N$), et par $k[gN]$ la sous-algèbre de $k(G)$ engendrée par gN.

LEMME. *Soit $l \in \mathfrak{L}^n(G/H)$. Il existe un sous-$G$-module de dimension finite M de $k[G]$ et un $h \in \mathcal{P} \cap M$ vérifiant:*

1) $h^{-1}M \subset \mathcal{O}_l$;

2) *$\mathcal{O}_l$ est le localisé de $k[h^{-1}M]$ en l'idéal premier $k[h^{-1}M] \cap \mathfrak{m}_l$.*

De plus, h vérifie alors forcément $v_D(h) = 0$ quel que soit $D \in \mathcal{D}_l$.

Preuve. La localité l étant géométrique, on peut trouver une sous-algèbre de type fini A de $\mathcal{O}_l$ telle que $\mathcal{O}_l$ soit le localisé de A en l'idéal premier $A \cap \mathfrak{m}_l$. Choisissons un système de générateurs de A sous la forme $f_1g^{-1}, \ldots, f_rg^{-1}$, où $f_1, \ldots, f_r$ et g sont des éléments de $k[G]$ sans diviseur commun. D'après 7.1, $f_1, \ldots, f_r$ et g sont alors des vecteurs propres de H, de même caractère. Si N désigne le sous-espace vectoriel de $k[G]$ engendré par $f_1, \ldots, f_r$ et g, on a $A = k[g^{-1}N]$. Puisque N et g sont dans diviseur commun, et que $g^{-1}N \subset A \subset \mathcal{O}_l$, $v_D(g) = 0$ quel que soit $D \in \mathcal{D}_l$.

Désignons par M le sous-G-module de $k[G]$ engendré par N. Puisque les opérations par translations à gauche et à droite commutent, les éléments de M sont encore des vecteurs propres de H, de même caractère que g. Par suite $g^{-1}M \subset k(G/H)$. D'après le corollaire 2 de 3.2, il s'ensuit que $v(g^{-1}(s \cdot f)) = v(g^{-1}f) \geq 0$, quels que soient $s \in G, f \in N$ et $v \in \mathcal{V}_l$. D'autre part, $v_D(g^{-1}f) \geq v_D(g^{-1}) = 0$, quels que soient $f \in M$ et $D \in \mathcal{D}_l$. Par suite, toutes les valuations essentielles de $\mathcal{O}_l$ restent positives sur $g^{-1}M$, d'où il suit que $g^{-1}M \subset \mathcal{O}_l$.

Choisissons un $v \in \mathcal{V}(G/H)$ tel que $\mathcal{O}_v$ domine $\mathcal{O}_l$ (voir 3.5). Le sous-espace vectoriel M' des $f \in M$ tels que $g^{-1}f \in \mathfrak{m}_l$ peut alors aussi se définir par l'inégalité $v(g^{-1}f) > 0$. Par suite, du corollaire 2 de 3.2 résulte que M' est stable par G. Par construction, $g \in M - M' \neq \emptyset$. Grâce aux propriétés des représentations rationnelles des groupes réductifs rappelées en 7.2, B possède un vecteur propre h dans $M - M'$. Puisque les éléments de M sont des vecteurs propres de H, $h \in \mathcal{P}$. Par construction $g^{-1}h \in \mathcal{O}_l^*$. Par suite, $h^{-1}M = (g^{-1}h)^{-1} \cdot g^{-1}M \subset \mathcal{O}_l$, d'où 1). De $g^{-1}M = (gh^{-1})^{-1} \cdot h^{-1}M$ résulte que $g^{-1}M$ (et donc aussi A) est contenu dans le localisé de $k[h^{-1}M]$ en l'idéal premier $k[h^{-1}M] \cap \mathfrak{m}_l$, d'où aussitôt 2).

Enfin, M est un sous-G-module de $k[G]$, $h \in M$ et $h^{-1}M \subset \mathcal{O}_l$; puisqu'on peut choisir $s \in G$ tel que h et $s \cdot h$ sont sans diviseur commun, de $(s \cdot h)h^{-1} \in \mathcal{O}_l$ suit aussitôt $v_D(h) = 0$ quel que soit $D \in \mathcal{D}_l$.

8.3. Soit $\mathscr{D} \subset {}^B\mathscr{D}(G/H)$ *et soit* $\mathscr{W} \subset \mathscr{V}(G/H)$.

PROPOSITION. *Il existe au plus un* $l \in \mathfrak{L}^n(G/H)$ *tel que* ${}^B\mathscr{D}_l = \mathscr{D}$ *et* $\mathscr{V}_l = \mathscr{W}$.

Preuve. Désignons par $\mathscr{P}(\mathscr{D})$ l'ensemble des $h \in \mathscr{P}$ tels que $v_D(h) = 0$ quel que soit $D \in \mathscr{D}$. Désignons par $A(\mathscr{D})$ la sous-algèbre des $f \in k(G/H)$ qui peuvent s'écrire $f = gh$, où $g \in k[G]$ et $h \in \mathscr{P}(\mathscr{D})$. Enfin, désignons par $A = A(\mathscr{D}, \mathscr{W})$ la sous-algèbre des $f \in A(\mathscr{D})$ tels que $w(f) \geq 0$ quel que soit $w \in \mathscr{W}$.

Soit $l \in \mathfrak{L}^n(G/H)$ tel que ${}^B\mathscr{D}_l = \mathscr{D}$ et $\mathscr{V}_l = \mathscr{W}$. Puisque toute valuation essentielle de $\mathcal{O}_l$ reste positive sur A, $\mathcal{O}_l$ contient A. Si M et h sont comme dans le lemme de 8.2, il est clair que $h^{-1}M \subset A$. Il s'ensuit que $\mathcal{O}_l$ est le localisé de A en l'idéal premier $A \cap \mathfrak{m}_l$. Enfin, $\mathscr{P} \cap A \cap \mathfrak{m}_l$ peut aussi se décrire comme l'ensemble des $f \in \mathscr{P}$ qui vérifient $v_D(f) \geq 0$ $(D \in \mathscr{D} = {}^B\mathscr{D}_l)$ et $w(f) \geq 0$ $(w \in \mathscr{W} = \mathscr{V}_l)$, l'une au moins des inégalités étant stricte.

Soit maintenant l' un "autre" élément de $\mathfrak{L}^n(G/H)$ tel que ${}^B\mathscr{D}_{l'} = \mathscr{D}$ et $\mathscr{V}_{l'} = \mathscr{W}$. Il est clair que $A(\mathscr{D})$ est quasi-G-stable, au sens de 7.3. D'autre part, $A \cap \mathfrak{M}_l$ et $A \cap \mathfrak{M}_{l'}$, sont des "bons" sous-espaces de $A(\mathscr{D})$: en effet, si $v \in \mathscr{V}(G/H)$ est tel que $\mathcal{O}_v$ domine $\mathcal{O}_l$ (voir 3.5), $A \cap \mathfrak{M}_l$ peut aussi se décrire comme l'ensemble des $f \in A(\mathscr{D})$ tels que $w(f) \geq 0$ $(w \in \mathscr{W})$ et $v(f) > 0$, et pareil pour $A \cap \mathfrak{M}_{l'}$. D'après 7.3, de $\mathscr{P} \cap A \cap \mathfrak{M}_l = \mathscr{P} \cap A \cap \mathfrak{M}_{l'}$ résulte alors $A \cap \mathfrak{M}_l = A \cap \mathfrak{M}_{l'}$, d'où $l = l'$, c.q.f.d.

8.4. On notera $X(H)$ le groupe des caractères de H. Si $f \in k(G)$ est un vecteur propre de H, on notera χ_f son caractère, $\chi_f \in X(H)$. Soit $E \subset k(G)$. Si $\chi \in X(H)$, on notera E_χ l'ensemble des vecteurs propres de H dans E de caractère χ. Enfin, on désignera par $X_E(H)$ l'ensemble des $\chi \in X(H)$ tels que $E_\chi \neq \varnothing$.

En général, on a $X_{k[G]}(H) \neq X(H)$; $X_{k[G]}(H)$ est seulement un sous-monoïde de $X(H)$ qui engendre $X(H)$ en tant que groupe; pour que $X_{k[G]}(H) = X(H)$, il faut et il suffit que l'espace homogène G/H soit une variété quasi-affine (voir [8]).

Posons $\mathscr{P}^+ \doteq \mathscr{P} \cap k[G]$. Pour tout $\chi \in X(H)$, $k[G]_\chi$ est un sous-G-module de $k[G]$. Par suite, grâce aux propriétés des représentations rationnelles des groupes réductifs rappelées en 7.2, si $k[G]_\chi \neq 0$, B possède un vecteur propre dans $k[G]_\chi$. Il s'ensuit que $X_{k[G]}(H) = X_{\mathscr{P}^+}(H)$.

Soit $\mathscr{D} \subset {}^B\mathscr{D}(G/H)$. Rappelons que $\mathscr{P}(\mathscr{D})$ est le sous-groupe des $f \in \mathscr{P}$ tels que $v_D(f) = 0$ quel que soit $D \in \mathscr{D}$, et que $A(\mathscr{D})$ est la sous-algèbre des $f \in k(G/H)$ qui peuvent s'écrire $f = gh$, avec $g \in k[G]$ et $h \in \mathscr{P}(\mathscr{D})$.

LEMME. *Pour que le corps des fractions de* $A(\mathscr{D})$ *soit égal à* $k(G/H)$, *il faut et il suffit que* $\mathscr{D}$ *vérifie la condition*

(D) $X(H)$ *est engendré, en tant que monoïde, par* $X_{\mathscr{P}^+}(H)$ *et* $X_{\mathscr{P}(\mathscr{D})}(H)$.

Preuve. Supposons que $\mathscr{D}$ vérifie (D). Soit $f \in k(G/H)$. Ecrivons $f = f_1 f_2^{-1}$, où

$f_1, f_2 \in k[G]$ sont sans diviseur commun. Nous savons que f_1 et f_2 sont alors des vecteurs propres de H, de même caractère. D'après (D), il existe un vecteur propre g de H dans $k[G]$ et un $h \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$, tels que $\chi_{f_1}^{-1} = \chi_{f_2}^{-1} = \chi_g \chi_h$. Puisque $f_1 gh$ et $f_2 gh$ appartiennent alors à $A(\mathcal{D})$, f est dans le corps des fractions de $A(\mathcal{D})$. Par conséquent, le corps des fractions de $A(\mathcal{D})$ est bien $k(G/H)$.

Inversement, supposons le corps des fractions de $A(\mathcal{D})$ égal à $k(G/H)$. Puisque $X_{\mathcal{P}^+}(H)$ engendre le groupe $X(H)$, pour montrer que $\mathcal{D}$ vérifie (D), il suffit de voir que, pour tout vecteur propre g de H dans $k[G]$, χ_g est dans le monoïde engendré par $X_{\mathcal{P}^+}(H)$ et $X_{\mathcal{P}(\mathcal{D})}(H)$. Choisissons $s \in G$ tel que g et $s \cdot g$ sont sans diviseur commun. On a $(s \cdot g)g^{-1} \in k(G/H)$. Par hypothèse, il existe $f_1, f_2 \in k[G]$ et $h \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ tels que $f_1 h, f_2 h \in k(G/H)$ et $(s \cdot g)g^{-1} = f_1 h (f_2 h)^{-1} = f_1 f_2^{-1}$. Les éléments g et $s \cdot g$ étant sans diviseur commun, il existe $f \in k[G]$ tel que $gf = f_2$. Il est clair que f_2 et f sont des vecteurs propres de H. De $g^{-1} = ff_2^{-1} = fh(f_2 h)^{-1}$, on tire alors $\chi_g^{-1} = \chi_g \chi_h$, c.q.f.d.

8.5. Soit $\mathcal{D} \subset {}^B\mathcal{D}(G/H)$ et soit $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}(G/H)$. Rappelons que nous avons désigné par $A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$ la sous-algèbre des $f \in A(\mathcal{D})$ tels que $w(f) \geq 0$ quel que soit $w \in \mathcal{W}$.

Pour tout $D \in \mathcal{D}(G/H)$, choisissons $s \in G$ tel que f_D et $s \cdot f_D$ sont dans diviseur commun (pour la définition de f_D, voir 7.1). Posons $g_D = (s \cdot f_D) f_D^{-1}$. On vérifie sans peine les assertions suivantes: $g_D \in k(G/H)$, $v_D(g_D) < 0$, $v_{D'}(g_D) \geq 0$ quel que soit $D' \in \mathcal{D}(G/H) - \{D\}$, et $v(g_D) = 0$ quel que soit $v \in \mathcal{V}(G/H)$ (cette dernière assertion résulte du corollaire 2 de 3.2).

LEMME 1. *Soit $D \in {}^B\mathcal{D}(G/H)$. Pour que $D \in \mathcal{D}$, il faut et il suffit que v_D reste positif sur $A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$.*

Preuve. Si $D \in \mathcal{D}$, il est clair que v_D reste positif sur $A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$. Si $D \in {}^B\mathcal{D}(G/H) - \mathcal{D}$, alors $g_D \in A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$ et $v_D(g_D) < 0$.

Dans la suite de ce numéro, on supposera que $\mathcal{W}$ est un sous-ensemble fini de $\mathcal{V}(G/H)$.

LEMME 2. *Pour que le corps des fractions de $A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$ soit égal à $k(G/H)$, il faut et il suffit que $\mathcal{D}, \mathcal{W}$ vérifient les conditions (D) et*

(W) *Il existe $f \in \mathcal{P} \cap A(\mathcal{D})$ tel que $w(f) > 0$ quel que soit $w \in \mathcal{W}$.*

Preuve. Posons $A = A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$.

Supposons que le corps des fractions de A est $k(G/H)$. Puisque $A \subset A(\mathcal{D}) \subset k(G/H)$, le corps des fractions de $A(\mathcal{D})$ est alors aussi $k(G/H)$. D'après 8.4, il s'ensuit que $\mathcal{D}$ vérifie (D). D'autre part, pour tout $w \in \mathcal{W}$, $A \cap \mathfrak{m}_w \neq \{0\}$: en effet, sinon, puisque le corps des fractions de A est $k(G/H)$, w s'annulerait sur $k(G/H)^*$, ce qui n'est pas possible. Il s'ensuit que $A \cap \bigcap_{w\in\mathcal{W}} \mathfrak{m}_w \neq \{0\}$. Il est clair que $A(\mathcal{D})$ est quasi-G-stable (au sens de 7.3), et que $A \cap \bigcap_{w\in\mathcal{W}} \mathfrak{m}_w$ est un "bon" sous-espace de $A(\mathcal{D})$. D'après 7.3, il s'ensuit que $\mathcal{P} \cap A \cap \bigcap_{w\in\mathcal{W}} \mathfrak{m}_w \neq \varnothing$, ce qui signifie que $\mathcal{D}, \mathcal{W}$ vérifient (W).

Inversement, supposons que $\mathcal{D}, \mathcal{W}$ vérifient (D) et (W). Soit $g \in A(\mathcal{D})$. Si $f \in \mathcal{P} \cap A(\mathcal{D})$ possède les propriétés de (W), alors $f \in A$ et $gf^N \in A$, dès que $N \in \mathbb{N}$ est assez grand. Il s'ensuit que A et $A(\mathcal{D})$ ont même corps de fractions. D'après 8.4, puisque $\mathcal{D}$ vérifie (D), ce corps est $k(G/H)$.

Posons $\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup (\mathcal{D}(G/H) - {}^B\mathcal{D}(G/H)$.

LEMME 3. *On suppose que $\mathcal{D}, \mathcal{W}$ vérifient (D) et (W). L'algèbre $A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$ est un anneau de Krull dont les valuations essentielles sont les v_D $(D \in \tilde{\mathcal{D}})$ et certaines des valuations de $\mathcal{W}$.*

Preuve. Posons $A = A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$. D'après le lemme 2 le corps des fractions de A est $k(G/H)$. Désignons par A' le localisé de $k[G]$ en la partie multiplicative $k[G] \cap \mathcal{P}(\mathcal{D})$; A' est un anneau factoriel. Du fait que $A = A' \cap \bigcap_{w\in\mathcal{W}} \mathcal{O}_w$, il résulte que A est un anneau de Krull (toute intersection finie d'anneaux de Krull est encore un anneau de Krull). Puisque $A = \bigcap_{D\in\tilde{\mathcal{D}}} \mathcal{O}_{v_D} \cap \bigcap_{w\in\mathcal{W}} \mathcal{O}_w$, il est clair que les valuations essentielles de A se trouvent parmi les v_D $(D \in \tilde{\mathcal{D}})$ et les w $(w \in \mathcal{W})$. Si $D \in \tilde{\mathcal{D}}$, on a $v_D(g_D) < 0$, donc $g_D \notin A$, mais $v_{D'}(g_D) \geq 0$ quel que soit $D' \in \tilde{\mathcal{D}} - \{D\}$, et $w(g_D) = 0$ quel que soit $w \in \mathcal{W}$; par suite, les valuations v_D $(D \in \tilde{\mathcal{D}})$ sont toutes essentielles pour A.

Considérons encore les deux conditions suivantes portant sur $\mathcal{D}, \mathcal{W}$.

$(W')_1$ Pour tout $w \in \mathcal{W}$, il existe $g_w \in \mathcal{P} \cap A(\mathcal{D})$ tel que $w(g_w) < 0$.

$(W')_{\geq 2}$ Si card $\mathcal{W} \geq 2$, pour tout $w \in \mathcal{W}$, il existe $f_w \in \mathcal{P} \cap A(\mathcal{D})$ tel que

$$w(f_{w'}) \begin{cases} >0 & \text{si} \quad w \in \mathcal{W} - \{w'\} \\ =0 & \text{si} \quad w = w'. \end{cases}$$

Remarques. 1) Si l'espace homogène G/H est affine, la condition $(W')_1$ est toujours remplie: en effet, toute valuation de $\mathcal{V}(G/H)$ prend alors des valeurs strictement négatives sur $k[G/H]$, donc aussi sur $\mathcal{P} \cap k[G/H]$.

2) Lorsque card $\mathcal{W} \geq 2$, $(W')_{\geq 2}$ implique (W) (il suffit de prendre pour f le produit de deux des f_w, $w \in \mathcal{W}$).

Pour abréger, nous désignerons par (W') la réunion des conditions $(W')_1$ et $(W')_{\geq 2}$.

LEMME 4. *On suppose que $\mathcal{D}, \mathcal{W}$ vérifient (D) et (W). Pour que toutes les valuations de $\mathcal{W}$ soient essentielles pour $A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$, il faut et il suffit que $\mathcal{D}, \mathcal{W}$ vérifient (W').*

Preuve. Posons $A = A(\mathscr{D}, \mathscr{W})$. Par hypothèse, le corps des fractions de A est $k(G/H)$.

Si toutes les valuations de $\mathscr{W}$ sont essentielles pour A, on a

$$A(\mathscr{D}) - A(\mathscr{D}, \{w\}) \neq \varnothing$$

et

$$\Big(A(\mathscr{D}) \cap \bigcap_{w \in \mathscr{W}-\{w'\}} \mathfrak{m}_w\Big) - \mathfrak{m}_{w'} \neq \varnothing,$$

quels que soient $w, w' \in \mathscr{W}$. D'après 7.3, ces ensembles contiennent des éléments de $\mathscr{P}$, d'où aussitôt $(W')_1$ et $(W')_{\geq 2}$.

Soit $w \in \mathscr{W}$. De $(W')_1$ suit que w est une valuation essentielle pour $A(\mathscr{D}) \cap \mathcal{O}_w = A(\mathscr{D}, \{w\})$. Cela termine la preuve si card $\mathscr{W} = 1$. En tout cas, $\mathcal{O}_w$ est alors le localisé de $A(\mathscr{D}) \cap \mathcal{O}_w$ en l'idéal premier $A(\mathscr{D}) \cap \mathfrak{M}_w$. Soit $g \in A(\mathscr{D}) \cap \mathcal{O}_w$. Si card $\mathscr{W} \geq 2$, d'après $(W')_{\geq 2}$, il existe $f_w \in A(\mathscr{D}) \cap \mathcal{O}_w$, inversible dans $\mathcal{O}_w$, et tel que $gf_w^N \in A$ dès que $N \in \mathbb{N}$ est assez grand. Il s'ensuit que $\mathcal{O}_w$ est encore le localisé de A en l'idéal premier $A \cap \mathfrak{m}_w$, ce qui montre bien que w est une valuation essentielle pour A.

8.6. Soit $\mathscr{D} \subset {}^B\mathscr{D}(G/H)$ et soit $\mathscr{W} \subset \mathscr{V}(G/H)$. On dira d'un sous-ensemble qu'il est cofini si son complémentaire est fini.

LEMME 1. *Si $A(\mathscr{D}, \mathscr{W})$ est une algèbre de type fini, alors $\mathscr{D}$ est cofini dans ${}^B\mathscr{D}(G/H)$.*

Preuve. Soit $f_1, \ldots, f_r$ un système de générateurs de l'algèbre $A(\mathscr{D}, \mathscr{W})$. D'après le lemme 1 de 8.5, $\mathscr{D}$ peut se caractériser comme l'ensemble des $D \in {}^B\mathscr{D}(G/H)$ tels que v_D reste positif sur $A(\mathscr{D}, \mathscr{W})$. Mais v_D reste positif sur $A(\mathscr{D}, \mathscr{W})$ si et seulement si $v_D(f_1) \geq 0, \ldots, v_D(f_r) \geq 0$, condition qui détermine un sous-ensemble confini de ${}^B\mathscr{D}(G/H)$.

LEMME 2. *Pour que l'algèbre $A(\mathscr{D}, \mathscr{W})$ soit de type fini, il faut et il suffit que $\mathscr{D}, \mathscr{W}$ vérifient la condition*

(F) *$\mathscr{P} \cap A(\mathscr{D}, \mathscr{W})$ engendre une sous-algèbre de type fini de $k(G)$.*

Preuve. L'opération de B dans $k(G)$ laisse stable $A(\mathscr{D}, \mathscr{W})$. La sous-algèbre de $k(G)$ engendrée par $\mathscr{P} \cap A(\mathscr{D}, \mathscr{W})$ n'est rien d'autre que ${}^UA(\mathscr{D}, \mathscr{W})$. On doit donc montrer que $A(\mathscr{D}, \mathscr{W})$ est de type fini si et seulement si ${}^UA(\mathscr{D}, \mathscr{W})$ l'est. Soit t une indéterminée. Pour tout $h \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$, notons $\rho_h : k[G][t] \to k(G)$ l'homomorphisme d'algèbres qui prolonge l'inclusion $k[G] \subset k(G)$ et qui envoie t sur h. Faisons opérer G dans $k[G][t] = k[G] \otimes k[t]$ par "translations à gauche" dans $k[G]$ et trivialement dans $k[t]$; ρ_h commute seulement à l'opération de U. Nous savons que $A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$ est quasi-G-stable (plus précisément, si $h \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ et si $M(h)$ est l'ensemble des $g \in k[G]$ tels que $hg \in A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$, alors les $M(h)$, $h \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ sont des sous-G-modules de $k[G]$, et $A(\mathcal{D}, \mathcal{W}) = \bigcup_{h \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} hM(h)$). Si A est une sous-algèbre de $k[G][t]$, stable par G, grâce aux propriétés des représentations rationnelles des groupes réductifs, il s'ensuit que $\rho_h(A) = A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$ si et seulement si $\rho_h({}^U A) = {}^U A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$. Pour conclure, il suffit alors de savoir que A est de type fini si et seulement si ${}^U A$ l'est. Puisque G opère rationnellement dans A, ce résultat est bien connu.

8.7. Soit $l \in \mathfrak{L}^n(G/H)$ et soit $\mathcal{D} \subset {}^B\mathcal{D}(G/H)$. Nous dirons que $\mathcal{D}$ est adapté à l, si

1) $A(\mathcal{D}, \mathcal{V}_l)$ est une algèbre de type fini;
2) $A(\mathcal{D}, \mathcal{V}_l) \subset \mathcal{O}_l$;
3) $\mathcal{O}_l$ est le localisé de $A(\mathcal{D}, \mathcal{V}_l)$ en l'idéal premier $A(\mathcal{D}, \mathcal{V}_l) \cap \mathfrak{m}_l$.

D'après 8.5 et 8.6, ces conditions entraînent que $\mathcal{D}_l \subset \mathcal{D}$, et que $\mathcal{D}, \mathcal{V}_l$ vérifient $(D), (W), (W'), (F)$ (d'où en particulier que $\mathcal{D}$ est cofini dans ${}^B\mathcal{D}(G/H)$).

Si $\mathcal{D}$ est adapté à l, l'algèbre $A(\mathcal{D}, \mathcal{V}_l)$ est une sous-algèbre affine de $k(G/H)$, qui est clairement stable par l'algèbre de Lie de G; il lui correspond donc un ouvert $X_{A(\mathcal{D}, \mathcal{V}_l)}$ de $\mathfrak{X}(G/H)$ (voir §1).

PROPOSITION. *Soit $l \in \mathfrak{L}^n(G/H)$. Il existe des $\mathcal{D} \subset {}^B\mathcal{D}(G/H)$ adaptés à l. De plus, pour toute réalisation géométrique X', Y' de l, on peut trouver $\mathcal{D} \subset {}^B\mathcal{D}(G/H)$, adapté à l et tel que $X_{A(\mathcal{D}, \mathcal{V}_l)} \subset X'$.*

Preuve. Soit X', Y' une réalisation géométrique de l. Puisque $\mathcal{O}_l$ est intégralement clos, l'ouvert des points normaux de X' rencontre Y'. Par conséquent, quitte à rétrécir X', on peut supposer la variété X' normale.

Soient M et h comme dans 8.2, et posons $A = k[h^{-1}M]$; c'est une sous-algèbre affine de $k(G/H)$, stable par l'algèbre de Lie de G. Notons X_A l'ouvert de $\mathfrak{X}(G/H)$ qui correspond à A, et posons $X = G \cdot X_A$; c'est l'espace d'un plongement de G/H. Désignons par Y le fermé de X tel que $\mathcal{O}_l = \mathcal{O}_{X,Y}$; par $Y_1, \ldots, Y_\alpha, Y_{\alpha+1}, \ldots, Y_\beta$ les composantes irréductibles de $X - G/H$ qui sont de codimension 1 dans X, où $Y_1, \ldots, Y_\alpha$ sont celles qui contiennent Y et qui correspondent aux éléments de $\mathcal{V}_l$; enfin désignons par $Y'_1, \ldots, Y'_\gamma$ les composantes irréductibles de $X - X'$.

L'inclusion $M \subset k[G]$ induit des applications naturelles $S^n(M) \to k[G]$ (où $S^n(M)$ est la puissance symétrique n-ième de M). Notons $\bar{S}^n(M)$ l'image de

$S^n(M)$ dans $k[G]$. Il est clair que tout $f \in A$ peut s'écrire $f = h^{-n}g$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $g \in \bar{S}^n(M)$. Il s'ensuit que A est quasi-G-stable.

Pour tout fermé Z de X, désignons par $\mathfrak{a}(Z)$ l'idéal des éléments de A qui s'annulent sur $Z \cap X_A$. Si Z est irréductible et stable par G, on peut choisir $v \in \mathcal{V}(G/H)$ tel que $\mathcal{O}_v$ domine $\mathcal{O}_{X,Z}$; $\mathfrak{a}(Z)$ peut alors aussi se décrire comme l'ensemble des $f \in A$ tels que $v(f) > 0$.

Puisque Y n'est pas contenu dans $Y_{\alpha+1}, \ldots, Y_\beta, Y'_1, \ldots, Y'_\gamma$, on a

$$(\mathfrak{a}(Y_{\alpha+1}) \cap \cdots \cap \mathfrak{a}(Y_\beta) \cap \mathfrak{a}(Y'_1) \cap \cdots \cap \mathfrak{a}(Y'_\gamma)) - \mathfrak{a}(Y) \neq \emptyset.$$

D'après 7.3, dans cet ensemble existe au moins un élément de $\mathcal{P}$, disons h'. Posons $A' = A[(h')^{-1}]$; A' est une algèbre de type fini. La variété $X_{A'}$ s'identifie à l'ouvert de X_A où la fonction h' ne n'annule pas. Puisque h' s'annule sur $X - X'$, et que nous supposons X' normale, A' est intégralement clos, donc un anneau de Krull. Puisque h' s'annule sur $Y_{\alpha+1}, \ldots, Y_\beta$ mais ne s'annule pas sur Y, on voit que les valuations essentielles de A' sont celles de $\mathcal{V}_l$ et certaines des v_D, $D \in \mathcal{D}(G/H)$.

Désignons par $\mathcal{D}$ l'ensemble des $D \in {}^B\mathcal{D}(G/H)$ tels que $v_D(h) = v_D(h') = 0$. Si $D \in \mathcal{D}(G/H)$, il est clair que $A' \subset \mathcal{O}_{v_D}$ si et seulement si $D \in \tilde{\mathcal{D}}$. Par suite, on a $A' = A(\mathcal{D}, \mathcal{V}_l)$. Il s'ensuit que $A(\mathcal{D}, \mathcal{V}_l)$ est une algèbre de type fini. Puisque h' ne s'annule par sur Y, on a $A(\mathcal{D}, \mathcal{V}_l) = A' \subset \mathcal{O}_l$. Puisque $A \subset A' = A(\mathcal{D}, \mathcal{V}_l)$, on voit que $\mathcal{D}$ est adapté à l. Enfin, puisque h' s'annule sur $X - X'$, on a $X_{A(\mathcal{D}, \mathcal{V}_l)} = X_{A'} \subset X'$.

8.8. Soit $\mathcal{D} \subset {}^B\mathcal{D}(G/H)$ et soit $\mathcal{W}$ un sous-ensemble fini de $\mathcal{V}(G/H)$. Si $l \in \mathfrak{L}_1^n(G/H)$, on désignera par $\mathcal{D}(\mathcal{W}, l)$ l'ensemble des $D \in \mathcal{D}$ tels que v_D s'annule sur $\mathcal{P} \cap A(\mathcal{D}, \mathcal{W}) \cap \mathcal{O}_l^*$, et par $\mathcal{W}(\mathcal{D}, l)$ l'ensemble des $w \in \mathcal{W}$ qui s'annulent sur $\mathcal{P} \cap A(\mathcal{D}, \mathcal{W}) \cap \mathcal{O}_l^*$.

Soit $v \in \mathcal{V}_1(G/H)$. Voici deux conditions portant sur $\mathcal{D}, \mathcal{W}, v$.

(V) Pour tout $f \in \mathcal{P} \cap A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$, on a $v(f) \geq 0$.

(V′) Tout $w \in W$ s'annule sur $\mathcal{P} \cap A(\mathcal{D}, \mathcal{W}) \cap \mathcal{O}_v^*$ (autrement dit, $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathcal{D}, v)$).

PROPOSITION. *On suppose que $\mathcal{D}, \mathcal{W}$ vérifient* (D), (W), (W′), (F).

1) *Soit $v \in \mathcal{V}_1(G/H)$ tel que $\mathcal{D}, \mathcal{W}, v$ vérifient* (V). *Il existe alors $l \in \mathfrak{L}_1^n(G/H)$ tel que $\mathcal{O}_l$ est le localisé de $A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$ en l'idéal premier $A(\mathcal{D}, \mathcal{W}) \cap \mathfrak{m}_v$. On a $v \in \mathcal{F}_l$, ${}^B\mathcal{D}_l = \mathcal{D}(\mathcal{W}, v)$ et $\mathcal{V}_l = \mathcal{W}(\mathcal{D}, v)$.*

2) *Inversement, soit $l \in \mathfrak{L}_1^n(G/H)$ qui vérifie ${}^B\mathcal{D}_l = \mathcal{D}(\mathcal{W}, l)$ et $\mathcal{V}_l = \mathcal{W}(\mathcal{D}, l)$, et soit $v \in \mathcal{F}_l$. Alors $\mathcal{D}, \mathcal{W}, v$ vérifient* (V) *et $\mathcal{O}_l$ est le localisé de $A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$ en l'idéal premier $A(\mathcal{D}, \mathcal{W}) \cap \mathfrak{m}_v$.*

Preuve. Posons $A = A(\mathscr{D}, \mathscr{W})$. D'après 8.5 et 8.6, A est une sous-algèbre affine de $k(G/H)$, et A est un anneau de Krull, dont les valuations essentielles sont les v_D $(D \in \tilde{\mathscr{D}})$ et les w $(w \in \mathscr{W})$.

Soit $v \in \mathscr{V}_1(G/H)$ tel que $\mathscr{D}, \mathscr{W}, v$ vérifient (V). L'espace vectoriel A étant quasi-G-stable, la condition (V) entraîne $\mathcal{O}_v \supset A$ (voir 7.3). L'algèbre A étant stable par l'algèbre de Lie de G, il s'ensuit que le localisé de A en l'idéal premier $A \cap \mathfrak{M}_v$ détermine un $l \in \mathfrak{L}_1(G/H)$ (voir 2.5); A étant intégralement clos, $l \in \mathfrak{L}_1^n(G/H)$. Par construction, $v \in \mathscr{F}_l$.

Soit $D \in \mathscr{D}$. Pour que $D \in {}^B\mathscr{D}_l$, c'est-à-dire pour que la valuation v_D reste essentielle pour le localisé de A en l'idéal premier $A \cap \mathfrak{m}_v$, il faut et il suffit que

(*) $\quad A \cap \mathfrak{m}_{v_D} \subset \mathfrak{m}_v.$

Par définition de $\mathscr{D}(\mathscr{W}, v)$, pour que $D \in \mathscr{D}(\mathscr{W}, v)$, il faut et il suffit que

(**) $\quad \mathscr{P} \cap A \cap \mathfrak{m}_{v_D} \subset \mathfrak{m}_v.$

Il n'est pas difficile à voir que $A \cap \mathfrak{m}_{v_D}$ est quasi-G-stable: en effet, tout $f \in A \cap \mathfrak{m}_{v_D}$ peut s'écrire $f = hg$, où $h \in \mathscr{P}$ vérifie $v_D(h) > 0$ et $v_{D'}(h) = 0$ $(D' \in \mathscr{D} - \{D\})$, et où g appartient au sous-G-module des éléments de $k[G]$ qui vérifient $hg \in k(G/H)$ et $w(hg) \geq 0$ $(w \in \mathscr{W})$.

D'après 7.3, il s'ensuit que $(*) \Leftrightarrow (**)$.

De même, si $w \in \mathscr{W}$, pour que $w \in \mathscr{V}_l$, il faut et il suffit que

(*′) $\quad A \cap \mathfrak{m}_w \subset \mathfrak{m}_v.$

Pour que $w \in \mathscr{W}(\mathscr{D}, v)$, il faut et il suffit que

(**′) $\quad \mathscr{P} \cap A \cap \mathfrak{m}_w \subset \mathfrak{m}_v.$

L'espace vectoriel A étant quasi-G-stable, $(*') \Leftrightarrow (**')$.

Soit $l \in \mathfrak{L}_1^n(G/H)$ tel que ${}^B\mathscr{D}_l = \mathscr{D}(\mathscr{W}, l)$ et $\mathscr{V}_l = \mathscr{W}(\mathscr{D}, l)$, et soit $v \in \mathscr{F}_l$. De ${}^B\mathscr{D}_l \subset \mathscr{D}$ et $\mathscr{V}_l \subset \mathscr{W}$ résulte que $A \subset \mathcal{O}_l \subset \mathcal{O}_v$, d'où il suit que $\mathscr{D}$, $\mathscr{W}$, v vérifient (V). D'après la première partie de la proposition, il existe $l' \in \mathfrak{L}_1^n(G/H)$ tel que $\mathcal{O}_l$ soit le localisé de A en $A \cap \mathfrak{M}_v$. De ${}^B\mathscr{D}_l = \mathscr{D}(\mathscr{W}, \mathscr{V}) = \mathscr{D}(\mathscr{W}, l) = {}^B\mathscr{D}_l$ et de $\mathscr{V}_{l'} = \mathscr{W}(\mathscr{D}, v) = \mathscr{W}(\mathscr{D}, l) = \mathscr{V}_l$ résulte alors $l = l'$ (voir 8.3), ce qui termine la preuve de la proposition.

COROLLAIRE 1. *Soient* $l \in \mathfrak{L}_1^n(G/H)$, $v \in \mathcal{F}_l$ *et* $\mathcal{D} \subset {}^B\mathcal{D}(G/H)$. *Pour que* $\mathcal{D}$ *soit adapté à* l, *il faut et il suffit que* $\mathcal{D}, \mathcal{V}_l, v$ *vérifient* (D), (W), (W′), (F), (V), (V′) *et que* ${}^B\mathcal{D}_l = \mathcal{D}(\mathcal{V}_l, v)$.

COROLLAIRE 2. *Soit* $\mathcal{D} \subset {}^B\mathcal{D}(G/H)$ *et soit* $\mathcal{W}$ *un sous-ensemble fini de* $\mathcal{V}(G/H)$. *Pour qu'il existe* $l \in \mathfrak{L}_1^n(G/H)$ *tel que* ${}^B\mathcal{D}_l = \mathcal{D}$ *et* $\mathcal{V}_l = \mathcal{W}$, *il faut et il suffit qu'on puisse trouver* $\mathcal{D}' \subset {}^B\mathcal{D}(G/H)$ *et* $v \in \mathcal{V}_1(G/H)$ *possédant les propriétés suivantes*: $\mathcal{D}', \mathcal{W}, v$ *vérifient* (D), (W), (W′), (F), (V), (V′) *et* $\mathcal{D} = \mathcal{D}'(\mathcal{W}, v)$.

COROLLAIRE 3. *Soit* $l \in \mathfrak{L}_1^n(G/H)$, *soit* $\mathcal{D} \subset {}^B\mathcal{D}(G/H)$ *adapté à* l, *et soit* $v \in \mathcal{V}_1(G/H)$ *tel que* $\mathcal{D}, \mathcal{V}_l, v$ *vérifient* (V). *Pour que* $v \in \mathcal{F}_l$, *il faut et il suffit que* $\mathcal{D}, \mathcal{V}_l, v$ *vérifient* (V′) *et que* ${}^B\mathcal{D}_l = \mathcal{D}(\mathcal{V}_l, v)$.

8.9. Soit $l \in \mathfrak{L}_1^n(G/H)$ et soit $\mathcal{D} \subset {}^B\mathcal{D}(G/H)$. Désignons par $L(\mathcal{D}, l)$ l'ensemble des $l' \in \mathfrak{L}_1^n(G/H)$ possédant la propriété suivante: il existe $v' \in \mathcal{V}_1(G/H)$ tel que $\mathcal{D}, \mathcal{V}_l, v'$ vérifient (V) et tel que ${}^B\mathcal{D}_{l'} = \mathcal{D}(\mathcal{V}_l, v')$ et $\mathcal{V}_{l'} = \mathcal{V}_l(\mathcal{D}, v')$.

PROPOSITION. *La famille des* $L(\mathcal{D}, l)$, $\mathcal{D}$ *adapté à* l, *forme une base de voisinages de* l *dans* $\mathfrak{L}_1(G/H)$ (*pour la topologie de Zariski*).

Preuve. Soit $\mathcal{D} \subset {}^B\mathcal{D}(G/H)$ adapté à l; $A(\mathcal{D}, \mathcal{V}_l)$ est alors une algèbre affine de $k(G/H)$, stable par l'algèbre de Lie de G. D'après 8.8, $L(\mathcal{D}, l)$ peut aussi se décrire comme l'ensemble des $l' \in \mathfrak{L}_1(G/H)$ tel que $\mathcal{O}_{l'}$ soit un localisé de $A(\mathcal{D}, \mathcal{V}_l)$; par définition de la topologie de Zariski, $L(\mathcal{D}, l)$ est donc ouvert dans $\mathfrak{L}_1(G/H)$. D'autre part, si L est un voisinage quelconque de l dans $\mathfrak{L}_1(G/H)$, de 8.7 résulte qu'on peut trouver $\mathcal{D}$ adapté à l tel que $l \in L(\mathcal{D}, l) \subset L$.

8.10. Supposons maintenant que B ait une orbite ouverte U dans G/H. Désignons par $Y_1, \dots, Y_{r'}$ les composantes irréductibles de $G/H - U$; U étant affine, $Y_1, \dots, Y_{r'}$ sont de codimension 1 dans G/H, et constituent visiblement les différents éléments de ${}^B\mathcal{D}(G/H)$. Désignons par r'' le rang de $X(G)$, le groupe des caractères de G, et posons $r = r' + r''$. Il est clair que le groupe $\mathcal{P}/k^*$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^r$.

Soit $\mathcal{D} \subset {}^B\mathcal{D}(G/H)$ et soit $\mathcal{W}$ un sous-ensemble fini de $\mathcal{V}(G/H) = \mathcal{V}_1(G/H)$. Rappelons un résultat classique: quelles que soient les applications $\mathbb{Q}$-linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_\alpha, \varphi_{\alpha+1}, \dots, \varphi_\beta$ de $\mathbb{Q}^r$ dans $\mathbb{Q}$, le monoïde formé des $f \in \mathbb{Z}^r$ tels que $\varphi_1(f) \geq 0, \dots, \varphi_\alpha(f) \geq 0$ et $\varphi_{\alpha+1}(f) = \cdots = \varphi_\beta(f) = 0$, est de type fini. Il en résulte que $(\mathcal{P} \cap A(\mathcal{D}, \mathcal{W}))/k^*$ est un monoïde de type fini; en particulier, $\mathcal{P} \cap A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$ engendre une sous-algèbre de type fini de $k(G)$. On voit que la condition (F) est toujours remplie.

Soit $l \in \mathfrak{L}^n(G/H) = \mathfrak{L}_1^n(G/H) = \mathfrak{L}_f^n(G/H)$. De la finitude de ${}^B\mathcal{D}(G/H)$ et de ce qui précède, résulte que ${}^B\mathcal{D}_l$ est déjà adapté à l. La résultat du corollaire 2 de 8.8 se simplifie alors comme suit: soit $\mathcal{D} \subset {}^B\mathcal{D}(G/H)$ et soit $\mathcal{W}$ un sous-ensemble fini de $\mathcal{V}(G/H)$; pour qu'il existe $l \in \mathfrak{L}_1^n(G/H)$ tel que ${}^B\mathcal{D}_l = \mathcal{D}$ et $\mathcal{V}_l = \mathcal{W}$, il faut et il suffit qu'il existe $v \in \mathcal{V}_1(G/H)$ tel que $\mathcal{D}, \mathcal{W}, v$ vérifient $(D), (W), (W'), (V), (V')$ et que $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{W}, v)$.

Nous allons reformuler ce résultat, afin de faire ressortir davantage l'analogie avec le cas particulier des plongements toriques (voir [5], [6]). Désignons par V le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie obtenu en tensorisant par $\mathbb{Q}$ le $\mathbb{Z}$-module libre $(\mathcal{P} \cap k(G/H))/k^*$. Les éléments de $\mathcal{V}(G/H)$ et les v_D $(D \in {}^B\mathcal{D}(G/H))$ se laissent interpréter comme des éléments de V', l'espace vectoriel dual de V. On observera que l'application $D \mapsto v_D$ de ${}^B\mathcal{D}(G/H)$ dans V' n'est pas injective en général.

Soit C un cône convexe de $\mathbb{Q}^r$. Rappelons qu'on dit que C est saillant, si C ne contient aucune droite de $\mathbb{Q}^r$. On notera C^0 l'intérieur relatif de C (c'est-à-dire l'intérieur de C dans le sous-espace vectoriel engendré par C). Si C' est un autre cône convexe de $\mathbb{Q}^r$, on dit que C' est une facette de C, s'il existe une forme linéaire $\varphi : \mathbb{Q}^r \to \mathbb{Q}$, positive sur C, et telle que $C' = C \cap \varphi^{-1}(0)$.

Si $\mathcal{D} \subset {}^B\mathcal{D}(G/H)$ et si $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}(G/H)$, désignons par $C(\mathcal{D}, \mathcal{W})$ le cône convexe de V' engendré par $\mathcal{W}$ et les v_D $(D \in \mathcal{D})$. Si $l \in \mathfrak{L}^n(G/H)$, posons $C(l) = C({}^B\mathcal{D}_l, \mathcal{V}_l)$. Considérons les quatre conditions suivantes:

(a) Le cône $C(\mathcal{D}, \mathcal{W})$ est saillant.

(b) Les droites $\mathbb{Q}w$ $(w \in \mathcal{W})$ sont des droites extrémales de $C(\mathcal{D}, \mathcal{W})$ et ne coïncident pas avec l'une des $\mathbb{Q}v_D (D \in \mathcal{D})$.

(c) $C(\mathcal{D}, \mathcal{W})^0 \cap \mathcal{V}(G/H) \neq \emptyset$.

(d) $=(D)$.

PROPOSITION. 1) *Soit* $\mathcal{D} \subset {}^B(G/H)$ *et soit* $\mathcal{W}$ *un sous-ensemble fini de* $\mathcal{V}(G/H)$. *Pour qu'il existe* $l \in \mathfrak{L}_1^n(G/H)$ *tel que* ${}^B\mathcal{D}_l = \mathcal{D}$ *et* $\mathcal{V}_l = \mathcal{W}$, *il faut et il suffit que* $\mathcal{D}, \mathcal{W}$ *vérifient les conditions* (a), (b), (c), (d).

2) *Pour tout* $l \in \mathfrak{L}_1^n(G/H)$, *on a* $\mathcal{F}_l = \mathcal{V}_1(G/H) \cap C(l)^0$.

3) *Si* $l, l' \in \mathfrak{L}_1^n(G/H)$, *pour que* $\mathcal{O}_{l'}$ *soit un localisé de* $\mathcal{O}_l$, *il faut et il suffit que* $C(l')$ *soit une facette de* $C(l)$ *et que* $\mathcal{D}_{l'}$ *soit l'ensemble des* $D \in \mathcal{D}_l$ *vérifiant* $v_D \in C(l')$.

Preuve. Il est clair que $(a) = (W)$, que $(b) = (W')$, et que (c) remplace avantageusement $(V), (V')$ et $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{W}, v)$, d'où 1). Les assertions 2) et 3) résultent aussitôt de 8.8 et 8.9.

9. Classification des plongements normaux de $SL(2)$

Dans ce §, nous appliquerons les résultats des §§ précédents au cas où $G = SL(2)$ et $H = \{e\}$, pour obtenir la classification des plongements normaux de $SL(2)/\{e\} = SL(2)$.

9.1. Comme d'habitude, $SL(2)$ est le groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant $ad-bc=1$. Pour avoir des notations plus intrinsèques, désignons par $M=k^2$ l'unique $SL(2)$-module rationnel irréductible de dimension 2.

Désignons par U le sous-groupe unipotent maximal de $SL(2)$ formé des matrices $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et posons $B=N_{SL(2)}(U)$. Sauf mention expresse du contraire, $SL(2)$, U et B opèreront toujours par "translations à gauche".

Le $SL(2)$-module rationnel ${}^{U}k[SL(2)]$ ($SL(2)$ opérant par "translations à droite") contient un unique sous-module isomorphe à M. Vu la structure particulièrement simple de $SL(2)$, tout morphisme injectif de $SL(2)$-modules $M \to {}^{U}k[SL(2)]$ s'étend en un isomorphisme de $SL(2)$-algèbres $S(M) \xrightarrow{\sim} {}^{U}k[SL(2)]$, où $S(M)$ désigne l'algèbre symétrique de M. Nous fixerons dans la suite un tel isomorphisme et nous le traiterons comme une égalité.

Il y a une bijection naturelle entre $\mathbb{P}_1$, l'ensemble des droites de M, et ${}^{B}\mathscr{D}(SL(2))$, l'ensemble des fermés irréductibles de codimension 1 de $SL(2)$, stables par B. Si D est une droite de M, nous écrirons v_D pour la valuation qui lui correspond, lorsqu'on interprète D comme élément de ${}^{B}\mathscr{D}(SL(2))$; si $f \in M \subset {}^{U}k[SL(2)] \subset k(SL(2))$, on a

$$v_D(f)=\begin{cases} 0 & \text{si } f\in M-D \\ 1 & \text{si } f \in D-\{0\}. \end{cases}$$

En suivant les notations du § précédent, désignons par $\mathscr{P}$ l'ensemble des $f \in k(SL(2))$ qui sont des vecteurs propres de B (l'autre condition tombe, puisque $H=\{e\}$!). Il est clair que $\mathscr{P} \cap k[SL(2)]$ s'identifie à l'ensemble des éléments homogènes (non nuls) de $S(M)$ (homogènes au sens de la graduation naturelle $S(M)=\oplus_{n\in\mathbb{N}} S_n(M)$.

PROPOSITION. 1) *Toute valuation de $\mathscr{V}(SL(2)/\{e\})$ est déterminée par sa restriction à $M-\{0\}$.*

2) *Pour qu'une fonction $w: M-\{0\} \to \mathbb{Z}$ soit la restriction d'une valuation dans $\mathscr{V}_1(SL(2)/\{E\})$, il faut et il suffit qu'il existe une droite D de M et des entiers p, q premiers entre eux vérifiant $p<0$ et $p<q\leq -p$, tels que $w(M-D)=p$ et $w(D-\{0\})=q$.*

3) *Il n'existe qu'une seule valuation dans $\mathscr{V}_2(SL(2)/\{e\})$, et sa restriction à $M-\{0\}$ est identiquement égale à -1.*

Preuve. D'après 7.4, toute valuation de $\mathscr{V}(SL(2)/\{e\})$ est déterminée par sa restriction au groupe multiplicatif $\mathscr{P}$. D'après ce qui précède, il est clair que ce groupe est engendré par $M-\{0\}$, ce qui montre la partie 1) de la proposition.

Soit $v \in \mathcal{V}(SL(2)/\{e\})$. Si v restait positif sur $M-\{0\}$, v resterait aussi positif sur $\mathcal{P} \cap k[SL(2)]$, donc aussi sur $k[SL(2)]$. Mais cela n'est pas possible, car $k[SL(2)] \cap \mathfrak{m}_v$ serait alors un idéal propre non nul de $k[SL(2)]$, qui serait stable par translations à gauche. Par suite, v prend au moins une valeur strictement négative sur $M-\{0\}$.

Désignons par $M(2)$ l'espace vectoriel des matrices 2×2. Faisons opérer $SL(2)$ dans $M(2)\oplus k$, par multiplication à gauche et à droite dans $M(2)$ et trivialement dans k. Désignons par X la sous-variété lisse de $\mathbb{P}_4=\mathbb{P}(M(2)\oplus k)$ définie par l'équation $ad-bc-t^2=0$. L'inclusion $SL(2)\hookrightarrow M(2)$ passe au quotient en un plongement $SL(2)\hookrightarrow X$, dans lequel opère $SL(2)\times SL(2)$. On vérifie sans peine que $Y=X-SL(2)$ est une seule orbite sous $SL(2)\times SL(2)$, isomorphe à $\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1$; $SL(2)\hookrightarrow X$, considéré comme plongement sous $SL(2)\times SL(2)$, est donc un plongement élémentaire. Désignons par v la valuation de $k(SL(2))$ qui lui correspond. Puisque les orbites de $SL(2)$ dans Y (pour l'opération par multiplication à gauche) sont toutes de dimension 1, on a $v\in\mathcal{V}_2(SL(2)/\{e\})$. De l'invariance par "translations à droite" de v, il résulte que v reste constant sur $M-\{0\}$. Puisque v prend une valeur strictement négative sur $M-\{0\}$, et que v est normalisé, il s'ensuit que v est égal à -1 sur $M-\{0\}$.

Soit D une droite de M, et soient p, q deux entiers vérifiant $p<0$ et $p<q\leq -p$. Choisissons un $s\in SL(2)$ qui envoie le second vecteur de la base canonique de $k^2=M$ dans D, et considérons

$$\lambda(t)=\begin{pmatrix} t^p & t^q \\ 0 & t^{-p}\end{pmatrix}\cdot s^{-1}\in SL(2)_{k((t))}.$$

Il est clair que $v_\lambda(M-D)=p$ et que $v_\lambda(D-\{0\})=q$. Pour que v_λ soit normalisé, il faut et il suffit que p et q soient premiers entre eux.

Pour terminer la preuve de la proposition, il suffit de montrer que pour tout $v\in\mathcal{V}(SL(2)/\{e\})$, on a $q\leq -p$, où p (resp. q) désigne le minimum (resp. le maximum) de v dans $M-\{0\}$. On peut supposer que $q>0$. On voit alors facilement que l'ensemble des $f\in k[SL(2)]$ vérifiant $v(f)\geq 0$ forme une sous-algèbre de type fini A de $k[SL(2)]$ (voir aussi 9.2), et que A possède comme corps des fractions $k(SL(2))$. Puisque A est stable par $SL(2)$, on peut considérer A comme algèbre des fonctions régulières d'une $SL(2)$-variété affine X, et l'inclusion $A\subset k[SL(2)]$ se reflète en un plongement de $SL(2)/\{e\}$ dans X.

D'après le critère de Hilbert-Mumford (voir [8]) il existe un sous-groupe à 1-paramètre multiplicatif λ de $SL(2)$ tel que $\lim_{t\to 0}\lambda(t)$ existe dans X, autrement dit (voir §4) tel que $\mathcal{O}_{v_\lambda}\supset A$. Choisissons h et g linéairement indépendants dans M tels que $v(h)=q$, $v(g)=p$. Vu la manière dont on obtient v_λ sur M et l'hypothèse $h\in A\subset\mathcal{O}_{v_\lambda}$, il est clair que $v_\lambda(h)>0$ et $v_\lambda(g)=-v_\lambda(h)$. On a $h^{-p}g^q\in A$, car

$v(h^{-p}g^q) = -pq + pq = 0$. Par suite $v_\lambda(h^{-p}g^q) = -(p+q)v_\lambda(h) \geq 0$, d'où il suit bien que $q \leq -p$.

Profitons de cette description explicite des valuations de $\mathcal{V}(SL(2)/\{e\})$ pour changer légèrement nos conventions et pour introduire des notations commodes dans la suite.

Désormais, nous considérons les éléments de $\mathcal{V}(SL(2)/\{e\})$ renormalisés par la condition suivante: si $v \in \mathcal{V}(SL(2)/\{e\})$, on suppose que le minimum de v dans M est égal à -1 (pour pouvoir le faire, il faut bien sûr admettre des valuations à valeur dans $\mathbb{Q}$!). De manière plus précise, si D est une droite de M et si $r \in \mathbb{Q}$ vérifie $-1 < r \leq 1$, on désignera par $v(D, r)$ l'unique élément de $\mathcal{V}_1(SL(2)/\{e\})$ qui vaut -1 sur $M - D$ et r sur $D - \{0\}$ (avec les notations de la proposition, on a $r = -q/p$).

Nous désignerons enfin par $v(\ , -1)$ l'unique élément de $\mathcal{V}_2(SL(2)/\{e\})$ qui vaut -1 sur $M - \{0\}$; parfois, on écrira aussi $v(D, -1)$ pour $v(\ , -1)$, où D est une droite quelconque de M.

Si $E \subset [-1, 1]$, nous désignerons par $v(D, E)$ l'ensemble des $v(D, r), r \in E$.

9.2. Soit $\mathcal{D} \subset {}^B\mathcal{D}(SL(2)) = \mathbb{P}_1$ et soit $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}(SL(2)/\{e\})$.

PROPOSITION. *Si $\mathcal{D}$ est cofini dans $\mathbb{P}_1$ et si $\mathcal{W}$ est fini, alors $A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$ est une algèbre de type fini.*

Preuve. Posons $A = A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$. D'après 8.6, il suffit de montrer que ${}^UA$ est une algèbre de type fini. Choisissons $h \in \mathcal{P} \cap k[SL(2)]$ vérifiant: $v_D(h) = 0$ quel que soit $D \in \mathcal{D}$, et $v_{D'}(h) > 0$ quel que soit $D' \in \mathbb{P}_1 - \mathcal{D}$. Désignons par $D_1, \ldots, D_\beta$ les différentes droites de M sur lesquelles au moins un des $w \in \mathcal{W}$ n'est pas égal à -1. Choisissons $h_j \in D_j - \{0\}$ $(j = 1, \ldots, \beta)$, et choisissons deux éléments linéairement indépendants g_1, g_2 dans $M - \bigcup_{j=1}^{\beta} D_j$. Désignons par S le sous-monoïde des $(n_1, \ldots, n_\beta, m_1, m_2, n) \in \mathbb{N}^{\beta+3}$ tels que $h_1^{n_1} \cdot \cdots \cdot h_\beta^{n_\beta} \cdot g_1^{m_1} \cdot g_2^{m_2} \cdot h^{-n} \in {}^UA$ (autrement dit, tels que $n_1 w(h_1) + \cdots + n_\beta w(h_\beta) - m_1 - m_2 - nw(h) \geq 0$ quel que soit $w \in \mathcal{W}$). Il est classique que de tels monoïdes sont de type fini; désignons par S' un système fini de générateurs de S. On voit facilement que tout élément de ${}^UA$ est somme d'éléments de la forme $h_1^{n_1} \cdot \cdots \cdot h_\beta^{n_\beta} \cdot f_1 \cdot \cdots \cdot f_m \cdot h^{-n}$, où $f_1, \ldots, f_m \in M - \bigcup_{j=1}^{\beta} D_j$ et où $(n_1, \ldots, n_\beta, m, 0, n) \in S$. En écrivant $f_1, \ldots, f_m$ comme combinaison linéaire de g_1 et g_2, on voit que tout élément de ${}^UA$ est combinaison linéaire d'éléments de la forme $h_1^{n_1} \cdot \cdots \cdot h_\beta^{n_\beta} \cdot g_1^{m_1} \cdot g_2^{m_2} \cdot h^{-n}$, où $(n_1, \ldots, n_\beta, m_1, m_2, n) \in S$. Il s'ensuit que les $h_1^{n_1} \cdot \cdots \cdot h_\beta^{n_\beta} \cdot g_1^{m_1} \cdot g_2^{m_2} \cdot h^{-n}$, $(n_1, \ldots, n_\beta, m_1, m_2, n) \in S'$ forment un système fini de générateurs de ${}^UA$.

9.3. Soient $\mathcal{D}$ un sous-ensemble cofini de ${}^B\mathcal{D}(SL(2)) = \mathbb{P}_1$, $\mathcal{W}$ un sous-ensemble fini de $\mathcal{W}(SL(2)/\{e\})$ et $v \in \mathcal{V}_1(SL(2)/\{e\})$. Posons $\mathcal{W} = \{w_1, \ldots, w_\alpha\}$ et

$w_j = v(D_j, r_j)$ $(j = 1, \ldots, \alpha)$. Nous aurons à considérer les six types suivants de tels $\mathscr{D}$, $\mathscr{W}$, v.

Type A_α $(\alpha \geq 1)$

$\mathscr{D} = \mathbb{P}_1 - \{D_1, \ldots, D_\alpha\}$, où $D_1, \ldots, D_\alpha$ sont des droites différentes de M;

$$-1 < r_j \leq 1 \ (j = 1, \ldots, \alpha) \text{ et } \sum_{j=1}^{\alpha} \frac{1}{1+r_j} > 1$$

(compte tenu des premières inégalités, cette dernière condition est vide si $\alpha \geq 3$; si $\alpha = 2$, elle signifie que r_1 ou r_2 est <1; si $\alpha = 1$, elle signifie que $r_1 < 0$);

$$v \in \bigcup_{D \in \mathscr{D}} v(D,]-1, 1]) \cup \bigcup_{j=1}^{\alpha} v(D_j,]-1, r_j[).$$

Type AB $(\alpha = 2)$

$D_1 \notin \mathscr{D}$ et $\mathscr{D} \neq \mathbb{P}_1 - \{D_1\}$; $\qquad D_1 = D_2$ et $-1 \leq r_2 < r_1 \leq 1$; $\qquad v \in v(D_1,]r_2, r_1[)$.

Type B_+ $(\alpha = 1)$

$D_1 \in \mathscr{D} \neq \mathbb{P}_1$; $\qquad -1 \leq r_1 < 1$; $\qquad v \in v(D_1,]r_1, 1])$.

Type B_- $(\alpha = 1)$

$\mathscr{D} = \mathbb{P}_1 - \{D_1\}$; $\qquad 0 < r_1 < 1$; $\qquad v \in v(D_1,]r_1, 1])$.

Type B_0 $(\alpha = 1)$

$\mathscr{D} = \mathbb{P}_1$; $\qquad 0 < r_1 < 1$; $\qquad v \in v(D_1,]r_1, 1])$.

Type C

C'est le cas banal $\mathscr{W} = \{v\}$.

PROPOSITION. *Pour que $\mathscr{D}$, $\mathscr{W}$, v vérifient* (W), $(W')_{\geq 2}$, (V), (V'), *il faut et il suffit qu'ils appartiennent à l'un des types A_α, AB, B_+, B_-, B_0, C.*

Voici d'abord un lemme qui servira deux fois dans la démonstration de la proposition.

LEMME. *Soient $D_1, \ldots, D_\beta$ des droites différentes de M et $r_1, \ldots, r_\beta$ des* *nombres rationnels vérifiant* $-1 < r_j \leq 1$ $(j = 1, \ldots, \beta)$ *et*

$$t = \left(\sum_{j=1}^{\beta} \frac{1}{1+r_j}\right) - 1 > 0.$$

Posons $\mathcal{D} = \mathbb{P} - \{D_1, \ldots, D_\beta\}$ *et* $w_j = v(D_j, r_j)$ $(j = 1, \ldots, \beta)$. *Alors, pour tout*

$$v \in \bigcup_{D \in \mathcal{D}} v(D, [-1, 1]) \cup \bigcup_{j=1}^{\beta} v(D_j, [-1, r_j[),$$

il existe des nombres rationnels $\lambda_j > 0$ $(j = 1, \ldots, \beta)$ *et un homomorphisme de groupes* $z : \mathcal{P} \to \mathbb{Q}$, *positif sur* $\mathcal{P} \cap A(\mathcal{D})$, *tels que* $v = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_\beta w_\beta + z$.

Preuve. Posons $v = v(D, r)$. Si D coïncide avec l'un des D_i $(i = 1, \ldots, \beta)$, posons

$$\lambda_j = \frac{1}{t} \frac{r_i - r}{(r_i + 1)(r_j + 1)} + \delta_{ij} \frac{r+1}{r_i + 1}$$

(où δ_{ij} est le symbole de Kronecker), et définissons z sur $M - \{0\}$ par

$$z(f) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f \in \bigcup_{j=1}^{\beta} D_j \\ \dfrac{1}{t} \dfrac{r_i - r}{r_i + 1} & \text{sinon;} \end{cases}$$

si $D \in \mathcal{D}$, posons $\lambda_j = 1/t(r_j + 1)$, et définissons z sur $M - \{0\}$ par

$$z(f) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f \in \bigcup_{j=1}^{\beta} D_j \\ r + 1 + \dfrac{1}{t} & \text{si} \quad f \in D \\ \dfrac{1}{t} & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Il reste alors à vérifier, dans les deux cas, l'égalité du lemme sur $M - \{0\}$, ce qui n'est pas difficile.

Preuve de la proposition.

a) Démontrons que les $\mathscr{D}, \mathscr{W}, v$ des types $A_\alpha, AB, B_+, B_-, B_0, C$ vérifient les conditions $(W), (W')_{\geq 2}, (V), (V')$.

Le cas A_α

Choisissons $h_j \in D_j - \{0\}$ $(j = 1, \dots, \alpha)$ et $g \in M - \cup_{j=1}^{\alpha} D_j$. Soit p un entier strictement positif tel que

$$\frac{p}{1+r_j} \in \mathbb{Z} \qquad (j = 1, \dots, \alpha).$$

Posons

$$n_{ij} = -p\frac{1+\delta_{ij}}{1+r_j} \in \mathbb{Z}, \qquad m_i = p\left(t + \frac{1}{1+r_i}\right) \in \mathbb{N}$$

$$\text{et} \quad f_i = h_1^{n_{i1}} \cdot \dots \cdot h_\alpha^{n_{i\alpha}} \cdot g^{m_i} \in \mathscr{P} \cap A(\mathscr{D}) \quad (i, j = 1, \dots, \alpha).$$

On a

$$\begin{aligned} w_j(f_i) &= -\sum_{k=1}^{\alpha} n_{ik} + n_{ij}(1+r_j) - m_i \\ &= p\left(\sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1+\delta_{ik}}{1+r_k} + \frac{1+\delta_{ij}}{1+r_j}(1+r_j) - t - \frac{1}{1+r_i}\right) \\ &= p\left(t - 1 + \frac{1}{1+r_i} + 1 + \delta_{ij} - t - \frac{1}{1+r_i}\right) = p\delta_{ij}. \end{aligned}$$

D'où aussitôt (W). Si $\alpha \geq 2$, alors $g_j = \prod_{i \neq j} f_i \in \mathscr{P} \cap A(\mathscr{D})$, et

$$w_i(g_j) \begin{cases} >0 & \text{si} \quad i \neq j \\ =0 & \text{si} \quad i = j, \end{cases}$$

d'où $(W')_{\geq 2}$.

Du lemme précédent résulte l'existence de nombres rationnels $\lambda_j > 0$ $(j = 1, \dots, \alpha)$ et d'une application $z : \mathscr{P} \to \mathbb{Q}$, positive sur $\mathscr{P} \cap A(\mathscr{D})$, tels que $v = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_\alpha w_\alpha + z$. Les propriétés (V) et (V') en résultent aussitôt.

Le cas AB

Choisissons $D \in \mathbb{P}_1 - (\mathscr{D} \cup \{D_1\})$, $h \in D_1 - \{0\}$ et $g \in D - \{0\}$. Soit p un entier strictement positif tel que $pr_1, pr_2 \in \mathbb{Z}$. Posons $f_1 = h^p g^{pr_2}$ et $f_2 = h^{-p} g^{-pr_2}$. On a

$f_1, f_2 \in \mathcal{P} \cap A(\mathcal{D})$ et on vérifie facilement que $w_i(f_j) = \delta_{ij} p(r_1 - r_2)$ $(i, j = 1, 2)$. Puisque par hypothèse $r_2 < r_1$, les propriétés (W) et $(W')_{\geq 2}$ en résultent.

Si $v = v(D_1, r)$, et si

$$\lambda_1 = \frac{r - r_2}{r_1 - r_2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{r_1 - r}{r_1 - r_2}$$

on vérifie sans peine que $v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$. Puisque par hypothèse $r_2 < r < r_1$, on a $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, d'où aussitôt les propriétés (V) et (V').

Le cas B_+

Choisissons $D \in \mathbb{P}_1 - \mathcal{D}$ et $g \in D - \{0\}$. On a $g^{-1} \in \mathcal{P} \cap A(\mathcal{D})$ et $w_1(g^{-1}) = 1 > 0$, d'où la propriété (W).

Si $v = v(D_1, r)$, on vérifie sans peine que $v = w_1 + z$, où $z : \mathcal{P} \to \mathbb{Q}$ est l'homomorphisme de groupes déterminé par

$$z(f) = \begin{cases} r - r_1 & \text{si} \quad f \in D_1 - \{0\} \\ 0 & \text{si} \quad f \in M - D_1. \end{cases}$$

Puisque par hypothèse $r_1 < r$, les propriétés (V) et (V') en résultent aussitôt.

Les cas B_- **et** B_0

Si $h \in D_1 - \{0\}$, on a $w_1(h) = r_1 > 0$, d'où la propriété (W).

Si $v = v(D_1, r)$, on vérifie sans peine que $v = (r/r_1)w_1 + z$, où $z : \mathcal{P} \to \mathbb{Q}$ est l'homomorphisme de groupes déterminé par

$$z(f) = \begin{cases} \dfrac{r - r_1}{r_1} & \text{si} \quad f \in M - D_1 \\ 0 & \text{si} \quad f \in D_1 - \{0\}. \end{cases}$$

Par hypothèse, on a $0 < r_1 < r$, d'où aussitôt les propriétés (V) et (V').

Le cas C est banal

b) Démontrons que les $\mathcal{D}, \mathcal{W}, v$ qui vérifient les propriétés $(W), (W')_{\geq 2}, (V), (V')$ sont forcément de l'un des types $A_\alpha, AB, B_+, B_-, B_0, C$.

Posons $\mathcal{W} = \{w_1, \ldots, w_\alpha\}$ et $w_j = v(D_j, r_j)$ $(j = 1, \ldots, \alpha)$. On peut supposer que $D_1, \ldots, D_\beta$ $(\beta \leq \alpha)$ sont les différentes droites de M sur lesquelles au moins un des w_i n'est pas égal à -1. On peut supposer également, pour tout $i = 1, \ldots, \beta$, que r_i est maximal parmi les r_j tels que $D_j = D_i$. Choisissons $h_i \in D_i - \{0\}$ $(i = 1, \ldots, \beta)$. Enfin posons $v = v(D_0, r_0)$.

Supposons d'abord $\beta \geq 2$.

Montrons que $\mathbb{P}_1 - \{D_1, \ldots, D_\beta\} \subset \mathcal{D}$. Raisonnons par l'absurde: supposons qu'il existe $g \in M - \bigcup_{i=1}^{\beta} D_i$ tel que $g \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$. Puisque $\beta \geq 2$, on peut trouver $i \in [1, \beta]$ tel que $D_i \neq D_0$. On a $h_i g^{-1} \in \mathcal{P} \cap A(\mathcal{D})$ et

$$w_j(h_i g^{-1}) = \begin{cases} 1 + r_j & \text{si} \quad w_j \in v(D_i,]-1, 1]) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par suite, $h_i g^{-1} \in \mathcal{P} \cap A(\mathcal{D}, \mathcal{W})$. Si $g \in D_0$, on aurait $v(h_i g^{-1}) = -1 - r_0 < 0$, ce qui contredit (V). Si $g \notin D_0$, on aurait $v(h_i g^{-1}) = 0$ et $v_i(h_i g^{-1}) = 1 + r_i > 0$, ce qui contredit (V').

Supposons $\beta = 2$ et $r_1 = r_2 = 1$. Puisque $\mathbb{P}_1 - \{D_1, D_2\} \subset \mathcal{D}$, tout $f \in \mathcal{P} \cap A(\mathcal{D})$ peut s'écrire $f = h_1 h_2 g$, où $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ et où $g \in \mathcal{P} \cap k[SL(2)]$ vérifie $v_{D_1}(g) = v_{D_2}(g) = 0$. Pour tous ces f, on a $w_1(f) + w_2(f) = 2w_1(g) \leq 0$, ce qui contredit (W). Par suite, r_1 ou r_2 est <1.

D'après $(W')_{\geq 2}$, il existe $f_i \in \mathcal{P} \cap A(\mathcal{D})$ $(i = 1, \ldots, \beta)$ tels que

$$w_j(f_i) \begin{cases} >0 & \text{si} \quad i \neq j \\ =0 & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

Puisque $\mathcal{D} \supset \mathbb{P}_1 - \{D_1, \ldots, D_\beta\}$, on peut écrire

$$f_i = h_1^{n_{i1}} \cdot \cdots \cdot h_\beta^{n_{i\beta}} \cdot g_i$$

où $n_{ij} \in \mathbb{Z}$ et où $g_i \in \mathcal{P} \cap k[SL(2)]$ vérifie $v_{D_j}(g_i) = 0$ $(i, j = 1, \ldots, \beta)$. Posons $m_i = w_1(g_i) = \cdots = w_\beta(g_i) \leq 0$ et $N_i = -\sum_{j=1}^{\beta} n_{ij} + m_i$. On a $w_j(f_i) = (1 + r_j) n_{ij} + N_i$. Par suite,

$$0 \geq m_i = N_i + \sum_{j=1}^{\beta} n_{ij} > N_i\left(1 - \sum_{j=1}^{\beta} \frac{1}{1 + r_j}\right) = -tN_i.$$

Puisque nous savons déjà que $t > 0$, il s'ensuit que $N_i > 0$. Par conséquent,

$$n_{ii} = \frac{-N_i}{1 + r_i} < 0 \qquad (i = 1, \ldots, \beta),$$

ce qui montre que $\mathcal{D} = \mathbb{P}_1 - \{D_1, \ldots, D_\beta\}$.

Si $\beta<\alpha$, d'après le lemme, pour tout $j=\beta+1,\ldots,\alpha$, il existerait des $\lambda_{ij}>0$ $(i=1,\ldots,\beta)$ et un homomorphisme de groupes $z_j:\mathcal{P}\to\mathbb{Q}$, positif sur $\mathcal{P}\cap A(\mathcal{D})$, vérifiant $w_j=\lambda_{1j}w_1+\cdots+\lambda_{\beta j}w_\beta+z_j$. Manifestement cela contredirait $(W')_{\geq 2}$. Donc $\alpha=\beta$.

Choisissons un entier strictement positif p tel que

$$n_j=\frac{-p}{1+r_j}\in\mathbb{Z}\qquad (j=1,\ldots,\beta).$$

Choisissons $g\in M-\bigcup_{j=1}^{\beta}D_j$, et posons $f=h_1^{n_1}\cdot\cdots\cdot h_\beta^{n_\beta}\cdot g^{pt}$. On vérifie sans peine que $w_j(f)=0$ $(j=1,\ldots,\beta)$. Si $D_0=D_i$, de (V) résulte alors que

$$0\leq v(f)=\frac{p}{1+r_i}(r_i-r_0).$$

Puisque $\beta\geq 2$, on a $v\notin\mathcal{W}$, d'où $r_0<r_i$.

En résumé, si $\beta\geq 2$, nous avons montré que $\alpha=\beta$ et que $\mathcal{D}$, $\mathcal{W}$, v est du type A_α.

Supposons maintenant $\beta=1$ et $\alpha\geq 2$.

Quitte à renuméroter $w_1,\ldots,w_\alpha$, on peut supposer que $w_j=v(D_1,r_j)$, où $-1\leq r_\alpha<r_{\alpha-1}<\cdots<r_2<r_1\leq 1$. Pour tout $i=2,\ldots,\alpha-1$, l'égalité

$$w_i=\frac{r_i-r_\alpha}{r_1-r_\alpha}w_1+\frac{r_1-r_i}{r_1-r_\alpha}w_\alpha$$

n'est alors pas compatible avec $(W')_{\geq 2}$. Il s'ensuit que $\alpha=2$.

Montrons que $D_1\notin\mathcal{D}$ et que $\mathcal{D}\neq\mathbb{P}_1-\{D_1\}$. D'après $(W')_{\geq 2}$, il existe $f_1,f_2\in\mathcal{P}\cap A(\mathcal{D})$ tels que

$$w_i(f_j)\begin{cases}>0 & \text{si}\quad i\neq j\\ =0 & \text{si}\quad i=j.\end{cases}$$

Posons $f_i=h_1^{n_i}g_i$ $(i=1,2)$, où $n_1,n_2\in\mathbb{Z}$ et où $g_1,g_2\in\mathcal{P}$ vérifient $v_{D_1}(g_1)=v_{D_1}(g_2)=0$. De $w_1(f_1)<w_2(f_1)$, on déduit, puisque $w_1(g_1)=w_2(g_1)$, que $n_1r_1<n_1r_2$; d'ou, puisque $r_2<r_1$, que $n_1<0$. Il s'ensuit que $D_1\notin\mathcal{D}$. De $w_2(f_2)<w_1(f_2)$, on déduit de la même façon que $n_2>0$. Si $r_1>0$, de $0=w_1(f_1)=n_1r_1+w_1(g_1)$ résulte $w_1(g_1)>0$, d'où $g_1\notin k[SL(2)]$. Si $r_1\leq 0$, de $r_2<r_1$ et de $0=w_2(f_2)=n_2r_2+w_2(g_2)$ résulte $w_2(g_2)>0$, d'où $g_2\notin k[SL(2)]$. Dans les deux cas, il s'ensuit que $\mathcal{D}\neq\mathbb{P}_1-\{D_1\}$.

Montrons que $v \in v(D_1,]r_2, r_1[)$. Choisissons un entier strictement positif p tel que $pr_1, pr_2 \in \mathbb{Z}$. Choisissons $g \in M - D_1$ tel que $g \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$. Lorsque $D_0 = D_1$, de $w_1(h_1^p g^{pr_2}) = p(r_1 - r_2) > 0$ et $w_2(h_1^p g^{pr_2}) = 0$ résulte, grâce à (V), que $v(h_1^p g^{pr_2}) = p(r_0 - r_2) \geq 0$, c'est-à-dire $r_2 \leq r_0$; de $w_1(h^{-p} g^{-pr_1}) = 0$ et $w_2(h_1^{-p} g^{-pr_1}) = p(r_1 - r_2) > 0$ résulte, grâce à (V) que $v(h_1^p g^{pr_2}) = p(r_0 - r_2) \geq 0$, c'est-à-dire $r_0 \leq r_1$. Montrons que $D_0 \neq D_1$ n'est pas possible: en effet, si $g \in D_0$, on a $v(h_1^p g^{pr_2}) = p(r_0 r_2 - 1) < 0$ ce qui contredit (V); si $g \notin D_0$, on a

$$v(h_1^p g^{pr_2}) = -p(1 + r_2) \begin{cases} < 0 & \text{si} \quad -1 < r_2 \\ = 0 & \text{si} \quad -1 = r_2 \end{cases}$$

ce qui contredit (V) ou (V').

En résumé, si $\beta = 1$ et $\alpha \geq 2$, nous avons montré que $\alpha = 2$ et que $\mathcal{D}, \mathcal{W}, v$ est du type AB.

Il reste à examiner le cas $\alpha = 1$.

Supposons d'abord que $w_1 = v(D_1, r_1)$ vérifie $-1 < r_1$. Choisissons un entier strictement positif tel que $pr_1 \in \mathbb{Z}$.

Supposons qu'il existe $D \in \mathbb{P}_1 - (\mathcal{D} \cup \{D_1\})$. Choisissons $g \in D - \{0\}$. On a $h_1^p g^{pr_1} \in \mathcal{P} \cap A(\mathcal{D})$ et $w_1(h_1^p g^{pr_1}) = 0$. Il en résulte que $D_0 \neq D_1$ n'est pas possible: en effet, si $g \in D_0$, on aurait $v(h_1^p g^{pr_1}) = p(r_1 r_0 - 1) < 0$, et si $g \notin D_0$, on aurait $v(h_1^p g^{pr_1}) = -p(1 + r_1) < 0$, deux inégalités qui contredisent (V). Si $D_0 = D_1$, de (V) résulte que $v(h_1^p g^{pr_1}) = p(r_0 - r_1) \geq 0$, c'est-à-dire $r_0 \geq r_1$; si $r_0 > r_1$, on a $D_1 \in \mathcal{D}$ (en effet, sinon $h_1^{-p} g^{-pr_1} \in \mathcal{P} \cap A(\mathcal{D})$, $w_1(h_1^{-p} g^{-pr_1}) = 0$ et $v(h_1^{-p} g^{-pr_1}) = p(r_1 - r_0) < 0$, ce qui contredit (V)); autrement dit, nous sommes en type C ou B_+.

Supposons que $\mathcal{D} = \mathbb{P}_1 - \{D_1\}$. Choisissons $g \in M - D_1$. Si $r_1 < 0$, et si $D_0 = D_1$, on a $h_1^{-p} g^{-pr_1} \in \mathcal{P} \cap A(\mathcal{D})$ et $w_1(h_1^{-p} g^{-pr_1}) = 0$, donc d'après (V) on a $v(h_1^{-p} g^{-pr_1}) = p(r_1 - r_0) \geq 0$, c'est-à-dire $r_0 \leq r_1$ et nous sommes en type C ou A_1. Le cas $r_1 = 0$ n'est pas possible: en effet, on aurait alors $w_1(h_1^n g) \leq 0$ quel que soit $n \in \mathbb{Z}$ et $g \in \mathcal{P} \cap k[SL(2)]$, ce qui contredit (W). Si $r_1 > 0$, on a $h_1^p g^{pr_1} \in \mathcal{P} \cap A(\mathcal{D})$ et $w_1(h_1^p g^{pr_1}) = 0$. Comme plus haut, de (V) résulte alors que $D_0 = D_1$ et $r_0 \geq r_1$, et nous sommes en type C ou B_-.

Supposons $\mathcal{D} = \mathbb{P}_1$. Si $r_1 \leq 0$, w_1 resterait négatif ou nul sur $\mathcal{P} \cap k[SL(2)]$, ce qui contredit (W), donc $r_1 > 0$. Choisissons $g \in M - D_1$. De $w_1(h_1^p g^{pr_1}) = 0$ et de (V) on déduit alors comme plus haut que $D_0 = D_1$ et $r_0 \geq r_1$. Nous sommes donc en type C ou B_0.

Enfin, considérons le cas $w_1 = v(\ , -1)$. Choisissons $h_0 \in D_0 - \{0\}$ et $g \in M - D_0$. Puisque $v(\ , -1)$ est négatif ou nul sur $\mathcal{P} \cap k[SL(2)]$, $\mathcal{D} \neq \mathbb{P}_1$. Montrons que $D_0 \in \mathcal{D}$: en effet, sinon $gh_0^{-1} \in \mathcal{P} \cap A(\mathcal{D})$, $w_1(gh_0^{-1}) = 0$ et $v(gh_0^{-1}) = -(1 + r_0) < 0$, ce qui contredit (V). Par conséquent, nous sommes en type B_+.

9.4. Soient $\mathcal{D}, \mathcal{W}, v$ comme dans le numéro précédent. Supposons que $\mathcal{D}, \mathcal{W}, v$ vérifient $(W), (W')_{\geq 2}, (V), (V')$. D'après 9.2, $\mathcal{D}, \mathcal{W}$ vérifient aussi (F). D'autre part, $SL(2)/\{e\}$ étant un espace homogène affine, $\mathcal{D}, \mathcal{W}$ vérifient aussi (D) et $(W')_1$. Par conséquent, d'après 8.8, on peut associer à $\mathcal{D}, \mathcal{W}, v$ un $l \in \mathfrak{L}_1^n(SL(2)/\{e\})$ tel que $\mathcal{V}_l = \mathcal{W}$ et ${}^B\mathcal{D}_l = \mathcal{D}(\mathcal{W}, v)$.

PROPOSITION. *Si $\mathcal{D}, \mathcal{W}, v$ sont du type A_α (resp. AB, B_+, B_-, B_0), alors* ${}^B\mathcal{D}_l = \mathbb{P}_1 - \{D_1, \ldots, D_\alpha\}$ *(resp.* $\varnothing, \{D_1\}, \mathbb{P}_1 - \{D_1\}, \mathbb{P}_1$).

Preuve. Ces assertions se déduisent machinalement à partir de la définition de $\mathcal{D}(\mathcal{W}, v)$ et de 9.3.

Compte tenu de 8.8 et 9.3, la proposition précédente constitue une classification des éléments de $\mathfrak{L}_1^n(SL(2)/\{e\})$. Nous utiliserons dans la suite les notations suivantes.

Si $D_1, \ldots, D_\alpha$ sont des éléments différents de $\mathbb{P}_1$, et si $r_1, \ldots, r_\alpha$ vérifient

$$-1 < r_j \leq 1 \; (j = 1, \ldots, \alpha) \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{\alpha} \frac{1}{1+r_j} > 1, \qquad l(D_1, r_1; \ldots; D_\alpha, r_\alpha)$$

sera l'élément $l \in \mathfrak{L}_1^n(SL(2)/\{e\})$ tel que ${}^B\mathcal{D}_l = \mathbb{P}_1 - \{D_1, \ldots, D_\alpha\}$ et $\mathcal{V}_l = \{v(D_1, r_1), \ldots, v(D_\alpha, r_\alpha)\}$.

Si $D \in \mathbb{P}_1$ et si $-1 \leq r_2 < r_1 \leq 1$, $l(D, r_2, r_1)$ sera l'élément $l \in \mathfrak{L}_1^n(SL(2)/\{e\})$ tel que ${}^B\mathcal{D}_l = \varnothing$ et $\mathcal{V}_l = \{v(D, r_1), v(D, r_2)\}$.

Si $D \in \mathbb{P}_1$ et si $-1 \leq r < 1$, $l_+(D, r)$ sera l'élément $l \in \mathfrak{L}_1^n(SL(2)/\{e\})$ tel que ${}^B\mathcal{D}_l = \{D\}$ et $\mathcal{V}_l = \{v(D, r)\}$.

Si $D \in \mathbb{P}_1$ et si $0 < r < 1$, $l_-(D, r)$ (resp. $l_0(D, r)$) sera l'élément $l \in \mathfrak{L}_1^n(SL(2)/\{e\})$ tel que ${}^B\mathcal{D}_l = \mathbb{P}_1 - \{D\}$ (resp. $\mathbb{P}_1$) et $\mathcal{V}_l = \{v(D, r)\}$.

D'après ce qui précède, l'ensemble $\mathfrak{L}_1^n(SL(2)/\{e\})$ est composé des $l(D_1, r_1; \ldots; D_\alpha, r_\alpha)$, $l(D, r_2, r_1)$, $l_+(D, r)$, $l_-(D, r)$, $l_0(D, r)$ et de $\mathcal{V}_1(SL(2)/\{e\})$.

9.5. La proposition suivante décrit les facettes des éléments de $\mathfrak{L}_1^n(SL(2)/\{e\})$.

PROPOSITION 1. *Si $l = l(D_1, r_1; \ldots; D_\alpha, r_\alpha)$, alors*

$$\mathcal{F}_l = \bigcup_{D \in \mathbb{P}_1 - \{D_1, \ldots, D_\alpha\}} v(D,]-1, 1]) \cup \bigcup_{j=1}^{\alpha} v(D_j,]-1, r_j]).$$

Si $l = l(D, r_2, r_1)$, alors $\mathcal{F}_l = v(D,]r_2, r_1])$.

Si $l = l_+(D, r)$ (ou $l_-(D, r)$, ou $l_0(D, r)$), alors $\mathcal{F}_l = v(D,]r, 1])$.

Preuve. Ces assertions résultent directement du corollaire 3 de 8.8 et de 9.3.

Désignons par $\mathfrak{L}'$ l'ensemble des $l_+(D,-1), D \in \mathbb{P}_1$. La proposition suivante précise la topologie de Zariski de $\mathfrak{L}_1^n(SL(2)/\{e\})$.

PROPOSITION 2. a) *Les* $l(D_1, r_1; \ldots; D_\alpha, r_\alpha)$, $l_-(D, r)$, $l_0(D, r)$ *appartiennent à* $\mathfrak{L}_f^n(SL(2)/\{e\})$. *Pour que* $l(D, r_2, r_1)$ (*resp.* $l_+(D, r)$) *appartienne à* $\mathfrak{L}_f^n(SL(2)/\{e\})$, *il faut et il suffit que* $-1 < r_2$ (*resp.* $-1 < r$).

b) *Si* $l \in \mathfrak{L}_f^n(SL(2)/\{e\})$, *l'ouvert de* $\mathfrak{L}_f^n(SL(2)/\{e\})$ *qui correspond à la réalisation géométrique minimale de* l *est* $\{l\} \cup \mathcal{V}_l$.

c) *Si* $l = l(D, -1, r_1)$ (*resp.* $l_+(D, -1)$), *on obtient un système fondamental de voisinages de* l *dans* $\mathfrak{L}_1(SL(2)/\{e\})$ *par* $\{l\} \cup \{v(D, r_1)\} \cup L$ (*resp.* $\{l\} \cup L$), *où* L *parcourt les sous-ensembles cofinis de* $\mathfrak{L}'$.

Preuve. Ces assertions résultent directement de 8.9.

Remarque. Ce sont les réalisations géométriques minimales des $l_0(D, r)$ qui sont les seuls plongements normaux *affines* de $SL(2)$, étudiés par V. L. Popov dans [10].

9.6. D'après le §6, la donnée d'un plongement X de $SL(2)/\{e\}$ équivaut à la donnée d'un sous-ensemble ouvert, noethérien et séparé L de $\mathfrak{L}_1(SL(2)/\{e\})$; il est clair que X sera une variété normale si et seulement si $L \subset \mathfrak{L}_1^n(SL(2)/\{e\})$.

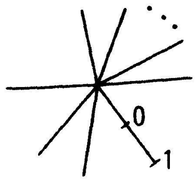
PROPOSITION. *Soit* L *un sous-ensemble de* $\mathfrak{L}_1^n(SL(2)/\{e\})$. *Pour que* L *soit ouvert, noethérien et séparé, il faut et il suffit que* L *vérifie les conditions suivantes.*

1) *Pour tout* $l \in L, \mathcal{V}_l \cap \mathcal{V}_1(SL(2)/\{e\}) \subset L$.
2) *S'il existe* $l \in L$ *tel que* $v(\ ,-1) \in \mathcal{V}_l$, *alors* L *contient un sous-ensemble cofini de* $\mathfrak{L}'$.
3) *L'ensemble* $L - \mathfrak{L}'$ *est fini.*
4) *Les* $\mathcal{F}_l$, $l \in L$ *sont disjoints.*

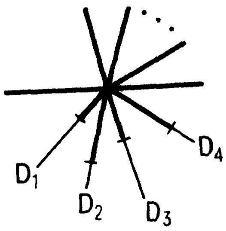
Preuve. D'après la proposition 2 de 9.5, 1) et 2) signifient que L est ouvert. Par définition, 4) signifie que L est séparé. On vérifie alors sans peine, pour que L soit noethérien, qu'il faut et qu'il suffit que L vérifie 3).

Remarque. La condition 4) restreint considérablement le choix des L: par exemple, elle implique que L contient au plus un des $l(D_1, r_1; \ldots; D_\alpha, r_\alpha)$; ou encore que, pour tout $D \in \mathbb{P}_1, L$ contient au plus un parmi les $l_+(D, r)$, $l_-(D, r)$, $l_0(D, r)$; etc...

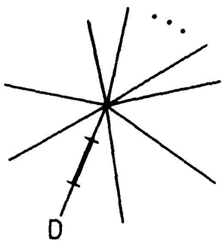
9.7. Terminons ce travail par une présentation graphique de notre classification des plongements normaux de $SL(2)/\{e\}$. Le "support" de la classification est l'ensemble $\mathcal{V}(SL(2)/\{e\})$, qu'on peut dessiner comme suit



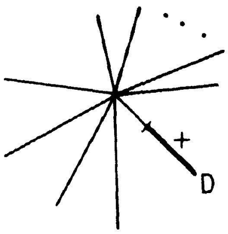
(ce dessin représente autant d'intervalles rationnels $[-1, 1]$ qu'il y a de points dans $\mathbb{P}_1$, recollés par leur extrémité gauche -1). Puisque les localités dans $\mathfrak{L}_1^n(SL(2)/\{e\})$ sont presque déterminées par leur facette, on peut les représenter par les dessins suivants:



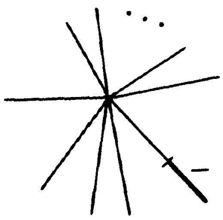
$l(D_1, r_1; \ldots; D_4, r_4)$



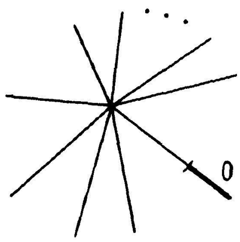
$l(D, r_2, r_1)$



$l_+(D, r)$

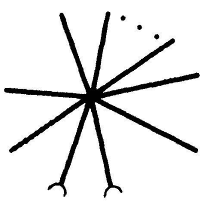


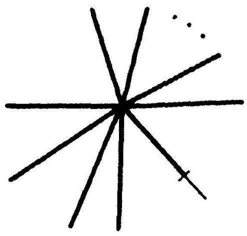
$l_-(D, r)$



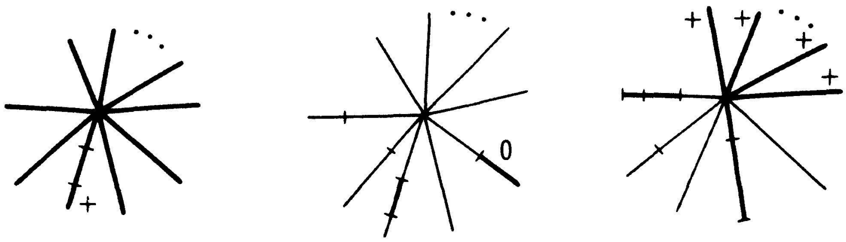
$l_0(D, r)$

N'oublions pas pour les localités $l(D_1, r_1; \ldots; D_\alpha r_\alpha)$ la conditions $\sum_{j=1}^{\alpha} 1/(1+r_j) > 1$: elle signifie que les dessins suivants ne sont pas permis





Les plongements normaux de $SL(2)/\{e\}$ sont alors classés par ce que nous pourrions appeler, si nous voulions suivre la terminologie de Demazure ([5]), des éventails coloriés: il s'agit d'ensembles d'éléments de $\mathfrak{L}_1^n(SL(2)/\{e\})$ satisfaisant aux quatre conditions de 9.6. Ne voulant par répéter ces conditions ici, donnons seulement trois exemples



Le dessin de gauche correspond à un plongement complet, les deux autres à des plongements non complets; le nombre d'orbites du plongement correspondant au dessin de droite est infini, les deux autres plongements contiennent respectivement six et huit orbites.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Artin, *Algebraic Approximation of Structures over Complete Local Rings*, Publ. Math. IHES n° 36, 1969.
[2] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, Benjamin, 1969.
[3] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Hermann, 1961.
[4] C. Chevalley, *Exposés 5 et 6 du Séminaire Cartan-Chevalley* 1955/56, E.N.S., Paris.
[5] M. Demazure, *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona*. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4e série, t. 3 (1970), 507–588.
[6] G. Kempf, F. Kundsen, D. Mumford et B. Saint-Donat, *Toroïdal Embeddings*, Springer Lecture Notes n° 339 (1974).
[7] D. Luna, *Slices étales*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 33, 81–105 (1973).
[8] D. Mumford, *Geometric Invariant Theory*, Springer, 1965.
[9] M. Nagata, *Lectures on the fourteenth problem of Hilbert*, Bombay, Tata Institute, 1965.
[10] V. L. Popov, *Quasihomogeneous affine algebraic varieties of the group $SL(2)$*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. Tom 37 n° 4 (1973), 793–831.
[11] M. Rosenlicht, *A remark on quotient spaces*, An. Acad. Brasil Ci. *35* (1963) 487–489.
[12] M. Sato and T. Kimura, *A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants*, Nagoya Math. J., vol. 65 (1977), 1–155.
[13] Th. Vust, *Opération de groupes réductifs dans un type de cônes presque homogènes*, Bull. Soc. math. France, *102* (1974), 317–334.
[14] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative algebra*, Van Nostrand, 1960.
[15] H. Sumihiro, *Equivariant completion*, J. Math. Kyoto Univ. *14* (1974), 1–28;
[16] B. Wargane, *Détermination des valuations invariantes de $SL(3)/T$*, Thèse de 3ème cycle, Grenoble (1982).
[17] E. B. Vinberg et B. N. Kimel'fel'd, *Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups*, Funct. Anal. and its Appl. *12* (1978), 168–174.
[18] A. Bialynicki-Birula, G. Hochschild et G. D. Mostow, *Extensions of representations of algebraic linear groups*, Am. J. Math. *85* (1963), 131–144.
[19] F. J. Servedio, *Prehomogeneous vector spaces and varieties*, Trans. Am. Math. Soc., *176* (1973), 421–444.

[20] F. PAUER, *Normale Einbettungen von G/U*, Math. Ann. *257* (1981), 371–396.
[21] F. PAUER, *Glatte Einbettungen von G/U*, à paraître.

12 rue Fracy
F38700 La Tronche

5 rue Montolieu
CH 1030 Bussigny

Reçu le 5 novembre 1982