Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 57 (1982)

Artikel: Une variété de dimension 4 avec forme d'intersection paire et signature - 8.

Autor: Habegger, Nathan

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43871

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici **57** (1982) 22–24 0010–2571/82/000122–03$01.50+0.20/0
© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

Une variété de dimension 4 avec forme d'intersection paire et signature −8

NATHAN HABEGGER

Quelles sont les formes bilinéaires symétriques unimodulaires qui peuvent être la forme d'intersection d'une variété close de dimension 4? Il résulte du théoréme de Rochlin [1] que la signature d'une variété close simplement connexe de dimension 4 et dont la forme d'intersection est paire est divisible par 16. Dans cette note, nous présentons un exemple qui montre que l'hypothèse de simple connectivité est indispensable dans l'énoncé ci-dessus.

Le théorème de Rochlin dit que la signature d'une variété close de dimension 4 et presque parallélisable est divisible par 16. D'autre part une variété orientable M de dimension 4 est presque parallélisable si et seulement si sa deuxième classe de Stiefel–Whitney $w_2(M) \in \mathrm{H}^2(M; \mathbf{Z}_2)$ est nulle. Cette condition peut encore s'exprimer à l'aide de la forme d'intersection mod 2 comme suit: Soit $u_2 = u_2(M) \in \mathrm{H}^2(M; \mathbf{Z}_2)$, la deuxième classe de Wu définie par la formule $\langle u_2 \cdot x, [M]\rangle = \langle \mathrm{Sq}^2(x), [M]\rangle$ pour tout $x \in \mathrm{H}^{n-2}(M; \mathbf{Z}_2)$. On rappelle la formule de Wu, $w = \mathrm{Sq}(u)$, où $w = 1 + w_1 + w_2 + \cdots$ et $u = 1 + u_1 + u_2 + \cdots$ sont respectivement les classes totales de Stiefel-Whitney et de Wu. Pour la suite, M désigne maintenant une variété close orientable de dimension 4. On a alors $w_1(M) = 0$ et la formule de Wu donne $w_2(M) = u_2(M)$. On a donc la formule $w_2 \cdot x = \mathrm{Sq}^2(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathrm{H}^2(M; \mathbf{Z}_2)$. Ainsi pour M close orientable de dimension 4, on a $w_2 = 0$ si et seulement si $x^2 = 0$ pour tout $x \in \mathrm{H}^2(M; \mathbf{Z}_2)$.

Soit $T^2 = T^2(M; \mathbf{Z})$ le sous-groupe de torsion de $\mathrm{H}^2 = \mathrm{H}^2(M; \mathbf{Z})$ et soit $\rho : \mathrm{H}^2(M; \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^2(M; \mathbf{Z}_2)$ la réduction mod 2. Les sous-espaces $\rho(T^2)$ et $\rho(\mathrm{H}^2)$ sont mutuellement orthogonaux (pour le produit mod 2). En fait, pour des raisons de dimension (cf. [2]) chacun est le complément orthogonal de l' autre. Il s'ensuit que

(i) $w_2(M) \in \rho(\mathrm{H}^2)$

(ii) $w_2(M) \in \rho(T^2) \Leftrightarrow$ la forme d'intersection sur H^2/T^2 est paire.

Ainsi pour M^4 simplement connexe ($T^2 = 0$) les conditions

(a) M a forme d'intersection paire ($w_2 \in \rho(T^2)$)

(b) M est presque parallélisable ($w_2 = 0$)

sont équivalentes.

On trouve ainsi comme corollaire du théorème de Rochlin l'énoncé du début. Si M de dimension 4 est simplement connexe et possède une forme d'intersection

paire, alors sa signature est divisible par 16. Mais en général, la condition (a) ci-dessus est plus faible que (b) comme on peut voir sur l'exemple suivant:

Soit $\tilde{M} = S^2 \times S^2$ et $M = \tilde{M}/\mathbf{Z}_2$ où $\mathbf{Z}_2$ agit sur $\tilde{M}$ par $(x, y) \to (-x, -y)$. On a rang $\mathrm{H}^2(M) + 2 = \chi(M) = \frac{1}{2}\chi(\tilde{M}) = 2$ donc rang $\mathrm{H}^2(M) = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{H}^2(M) = T^2(M)$. D'autre part, à partir du plongement diagonal $S^2 \hookrightarrow S^2 \times S^2$ on obtient par passage aux quotients un plongement $\mathbf{R}P^2 \overset{i}{\hookrightarrow} M$ avec self-intersection 1. Si $x \in \mathrm{H}^2(M; \mathbf{Z}_2)$ est la duale de Poincaré de $i_*[\mathbf{R}P^2] \in \mathrm{H}_2(M; \mathbf{Z}_2)$, on a $w_2 \cdot x = x^2 = 1$ et donc $w_2 \neq 0$.

La variété ci-dessus a signature zéro, puisque $\mathrm{H}^2/T^2 = 0$. Cependant, sa construction nous a donné l'espoir qu'il puisse exister une variété avec forme d'intersection paire et signature $\equiv 8 \bmod 16$. Voici un tel exemple: Soit M l'hypersurface de degré 4 dans $\mathbf{C}P^3$ donnée par l'équation $Z_0^4 + Z_1^4 + Z_2^4 + Z_3^4 = 0$. On définit une involution sur $\mathbf{C}P^3$ par $(Z_0, Z_1, Z_2, Z_3) \mapsto (\bar{Z}_1, -\bar{Z}_0, \bar{Z}_3, -\bar{Z}_2)$. On vérifie aisément que c'est une involution sans points fixes qui laisse $\tilde{M}$ invariant. Par passage aux quotients on obtient un plongement $M = \tilde{M}/\mathbf{Z}_2 \overset{i}{\to} Q = \mathbf{C}P(3)/\mathbf{Z}_2$. On vérifie aisément que M est orientable avec fibré normal $v(i)$ non-orientable.

Nous allons vérifier que la forme d'intersection de M est paire, signature$(M) = -8$, rang $\mathrm{H}^2(M : \mathbf{Z}) = 10$. D'après la classification des formes symétriques unimodulaires paires indéfinies (cf [4]), on obtient la

PROPOSITION. *Toute forme bilinéaire symétrique unimodulaire paire telle que* $|\text{signature}| \leq 4/5$ *rang est la forme d'intersection d'une variété close de dimension* 4.

La variété $\tilde{M}$ a les propriétés suivantes (cf. [3]). $\tilde{M}$ est simplement connexe, rang $\mathrm{H}^2(\tilde{M}; \mathbf{Z}) = 22$, signature $(\tilde{M}) = -16$. On a $-16 = \text{signature}\ (\tilde{M}) = \langle p_1(\tilde{M})/3,\ [\tilde{M}] \rangle = \langle p_1(M)/3,\ 2[M] \rangle = 2$ signature (M), donc signature $M = -8$. D'autre part rang $\mathrm{H}^2(M) + 2 = \chi(M) = \frac{1}{2}\chi(\tilde{M}) = \frac{1}{2}$ (rang $\mathrm{H}^2(\tilde{M}) + 2) = 12$ et donc rang $\mathrm{H}^2(M) = 10$.

Il reste à voir que la forme d'intersection de M est paire. D'après ce qui précède, il suffit de voir que $w_2(M) \in \rho(T^2(M, \mathbf{Z}))$. De l'équation fibré $T_M + v(i) = i^* T_Q$ déduit de l'inclusion $M \overset{i}{\to} Q$ on tire $w_2(M) + w_2(v(i)) = i^* w_2(Q)$. Nous allons montrer que $\mathrm{H}^2(Q, \mathbf{Z}_2) = \rho(T^2(Q, \mathbf{Z}))$ et $w_2(v(i)) = 0$. Il s'ensuit que $w_2(M) = i^* w_2(Q) \in i^* \rho(T^2(Q, \mathbf{Z}) \subset \rho(T^2(M, \mathbf{Z}))$.

Soit $\mathbf{C}P(1) \hookrightarrow \mathbf{C}P(3)$ donné par $Z_2 = Z_3 = 0$. Par passage aux quotients, on obtient $\mathbf{R}P^2 = \mathbf{C}P(1)/\mathbf{Z}_2 \overset{j}{\hookrightarrow} Q$. Rappelons que pour $\tilde{X} \to X$ un revêtement à deux feuilles, on a la suite exacte courte de complexes de chaînes: $0 \to C(X) \otimes \mathbf{Z}_2 \to C(\tilde{X}) \otimes \mathbf{Z}_2 \to C(X) \otimes \mathbf{Z}_2 \to 0$. On obtient donc le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{H}_2(CP(1); \mathbf{Z}_2) & \xrightarrow{0} & H_2(\mathbf{R}P^2; \mathbf{Z}_2) & \to & \mathrm{H}_1(\mathbf{R}P^2; \mathbf{Z}_2) & \to & H_1(CP(1); \mathbf{Z}_2) = 0 \\
\downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow \wr & & \downarrow \\
\mathrm{H}_2(CP(3); \mathbf{Z}_2) & \to & \mathrm{H}_2(Q; \mathbf{Z}_2) & \to & \mathrm{H}_1(Q; \mathbf{Z}_2) & \to & \mathrm{H}_1(CP(3); \mathbf{Z}_2) = 0
\end{array}$$

Il s'ensuit que $H_2(\mathbf{R}P^2;\mathbf{Z}_2)\to H_2(Q;\mathbf{Z}_2)$ est un isomorphisme. Par dualité, $H^2(Q;\mathbf{Z}_2)\to H^2(\mathbf{R}P^2;\mathbf{Z}_2)$ est un isomorphisme. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ext}\,(H_1(Q;\mathbf{Z}),\mathbf{Z}) & \to & H^2(Q;\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\rho} & H^2(Q;\mathbf{Z}_2) \\
\downarrow{\scriptstyle R} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R} \\
\mathrm{Ext}\,(H_1(\mathbf{R}P^2;\mathbf{Z}),\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\simeq} & H^2(\mathbf{R}P^2;\mathbf{Z})) & \xrightarrow[\simeq]{\rho} & H^2(\mathbf{R}P^2;\mathbf{Z}_2)
\end{array}$$

établit que $\rho(T^2(Q;\mathbf{Z}))=H^2(Q;\mathbf{Z}_2)$.

Comme $j_*[\mathbf{R}P^2]$ engendre $H_2(Q;\mathbf{Z}_2)$ et que l'intersection de $\mathbf{R}P^2$ et M est zéro ($\tilde{M}$ est de degré 4), il s'ensuit que $i_*[M]=0$ dans $H_4(Q;\mathbf{Z}_2)$. La classe d'Euler du fibré normal $v(i)$ est donc aussi triviale, ce qui montre que $w_2(v(i))=0$.

Je voudrais remercier M. Michel Kervaire pour l'intérêt qu'il a pris pendant l'élaboration de ce travail.

REFERENCES

[1] MILNOR, J. and KERVAIRE, M., *Bernoulli Numbers, Homotopy Groups and a Theorem of Rochlin*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (1958) 454–458.

[2] MASSEY W. S. and PETERSON, F. P., *On the dual Stiefel-Whitney classes of a manifold*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) *8* (1963), 1–13.

[3] KULKARNI R. and WOOD, J., *Topology of Nonsingular Complex Hypersurfaces*, Advances in Mathematics *35*, 239–263 (1980).

[4] SERRE, J. P. *Cours d'Arithmétique*, Presse Universitaire de France (1970).

Section de Mathematiques
de l'Université de Genève
2–4, *rue du Lièvre*
CH–1211 Genève 24

Recu le 3 septembre 1981