Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 57 (1982)

Artikel: Caractères unipotents de 3D4(Fq).
Autor: Spaltenstein, N.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43905

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici **57** (1982) 676–691 0010–2571/82/004676–16$01.50+0.20/0
© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

Caractères unipotents de ${}^3D_4(\mathbb{F}_q)$

N. SPALTENSTEIN

On calcule les 8 caractères unipotents et les fonctions de Green du groupe fini ${}^3D_4(\mathbb{F}_q)$ ($q=p^e$, p premier).

Les autres caractères irréductibles complexes de ${}^3D_4(\mathbb{F}_q)$ s'obtiennent tous en prenant des combinaisons linéaires convenables des caractères des représentations virtuelles R_T^θ de Deligne et Lusztig [3], et ceux-ci peuvent être évalués à l'aide des fonctions de Green. On peut donc calculer tous les caractères irréductibles de ${}^3D_4(\mathbb{F}_q)$.

L'auteur tient à remercier le Science and Engineering Research Council pour son soutien.

0. Notations et rappels

0.1. k est une clôture algébrique d'un corps fini $\mathbb{F}_q$, $q=p^e$, p premier.

0.2. G est un groupe algébrique sur k, simple de type D_4, défini sur $\mathbb{F}_q$, déployé sur $\mathbb{F}_{q^3}$ mais non sur $\mathbb{F}_q$. On note F l'endomorphisme de Frobenius de G. Le groupe qui nous intéresse est $G^F=\{g\in G \mid F(g)=g\}$.

0.3. On peut considérer G comme un sous-groupe d'un groupe simple G' de type F_4 défini sur $\mathbb{F}_q$. Deux tores maximaux F-stables de G sont G^F-conjugués si et seulement s'ils sont G'^F-conjugués. Les classes de F-conjugaison dans *le* groupe de Weyl W de G [3] correspondent à certaines classes de conjugaison dans le groupe de Weyl de G'. Pour ces dernières on utilise les notations de [1]. On note T_w un tore maximal F-stable de G correspondant à $w\in W$, et $\ell(w)$ est la longueur de w dans W. Soit encore $C_{W,F}(w)=\{x\in W \mid xwF(x)^{-1}=w\}$. Il y a 7 classes de F-conjugaison dans W:

F-classe de w	$\lvert C_{W,F}(w)\rvert$	$\lvert T_w\rvert$	$(-1)^{\ell(w)}$
$\tilde{A}_2$	12	$(q-1)(q^3-1)$	1
$\tilde{A}_2+A_1$	4	$(q+1)(q^3-1)$	-1
C_3	4	$(q-1)(q^3+1)$	-1
C_3+A_1	12	$(q+1)(q^3+1)$	1
$\tilde{A}_2+A_2$	24	$(q^2+q+1)^2$	1
$F_4(a_1)$	24	$(q^2-q+1)^2$	1
F_4	4	q^4-q^2+1	1

0.4. Le groupe W^F est diédral d'ordre 12 et il est engendré comme groupe de Coxeter par deux éléments s_1, s_2 avec $\ell(s_1)=1$, $\ell(s_2)=3$. Soient $\mathbb{1}$, ε_1, ε_2 et ε ses quatre représentations de degré 1, où $\mathbb{1}$ est la représentation triviale, ε est le signe, $\varepsilon_1(s_1)=\varepsilon_2(s_2)=-1$ et $\varepsilon_1(s_2)=\varepsilon_2(s_1)=1$. On note ρ_1 la représentation standard et on pose $\rho_2=\rho_1\otimes\varepsilon_1$.

0.5. On note $\mathcal{U}$ la variété unipotente de G. Il y a 6 G-classes F-stables dans $\mathcal{U}$ qu'on note $\varnothing$, A_1, $3A_1$, A_2, $D_4(a_1)$, D_4. A l'exception de A_2, et de D_4 si $p=2$, chacune de ces classes donne une seule orbite dans G^F. Les ordres des centralisateurs sont les suivants.

G^F-classe		$\lvert C_G(u)^F\rvert$
$\varnothing$		$(q^2-1)(q^6-1)(q^8+q^4+1)q^{12}$
A_1		$(q^6-1)q^{12}$
$3A_1$		$(q^2-1)q^{10}$
A_2'		$2(q^2+q+1)q^8$
A_2''		$2(q^2-q+1)q^8$
$D_4(a_1)$		q^6
D_4	$(p\neq 2)$	q^4
D_4', D_4''	$(p=2)$	$2q^4$, $2q^4$

Après extension des scalaires à $\mathbb{F}_{q^3}$, on a l'interprétation suivante pour les classes A_2' et A_2'' (et pour D_4' et D_4'' si $p=2$). On a un espace vectoriel V sur $\mathbb{F}_{q^3}$, de dimension 8, muni d'une forme quadratique déployée Q et un élément u du groupe orthogonal. Si u appartient à la classe A_2 (ou D_4 si $p=2$) on peut trouver des sous-espaces orthogonaux u-stables V_1, V_2 tels que $V=V_1\oplus V_2$, $\dim V_1=2$, $\dim V_2=6$. Alors u appartient à A_2' (ou D_4' si $p=2$) si et seulement si la restriction de Q à V_1 (ou V_2) est déployée.

0.6. On suppose que G est adjoint. Si $\tilde{G}$ est simplement connexe de type D_4, défini sur $\mathbb{F}_q$, et $\pi:\tilde{G}\to G$ est une isogénie définie sur $\mathbb{F}_q$, $\tilde{G}^F\to G^F$ est un isomorphisme. Il s'ensuit par exemple que si $C\subset G$ est une classe semi-simple F-stable, alors C^F est une classe de conjugaison dans G^F.

0.7. Soient $B_0\subset G$ un sous-groupe de Borel et $T_0\subset B_0$ un tore maximal F-stables. On note U_0 le radical unipotent de B_0. Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_{12}$ les racines positives, et pour $1\leqslant i\leqslant 12$ soit $x_i:\mathbb{G}_a\to U_0$ un homomorphisme adapté à λ_i. Cela peut être fait de telle sorte que $\lambda_1=\alpha$, $\lambda_2=\beta$, $\lambda_3=\gamma$, $\lambda_4=\delta$ soient les racines simples, $\lambda_5=\alpha+\delta$, $\lambda_6=\beta+\delta$, $\lambda_7=\gamma+\delta$, $\lambda_8=\beta+\gamma+\delta$, $\lambda_9=\alpha+\gamma+\delta$, $\lambda_{10}=\alpha+\beta+\delta$, $\lambda_{11}=\alpha+\beta+\gamma+\delta$, $\lambda_{12}=\alpha+\beta+\gamma+2\delta$, $F(x_1(1))=x_2(1)$, $F(x_2(1))=x_3(1)$, $F(x_3(1))=x_1(1)$, $F(x_4(1))=x_4(1)$, $x_5(1)=[x_4(1),x_1(1)]$, $x_6(1)=[x_4(1),x_2(1)]$, $x_7(1)=[x_4(1),x_3(1)]$, $x_8(1)=[x_7(1),x_2(1)]=[x_6(1),x_3(1)]$, $x_9(1)=[x_5(1),x_3(1)]=$

$[x_7(1), x_1(1)]$, $x_{10}(1)=[x_6(1), x_1(1)]=[x_5(1), x_2(1)]$, $x_{11}(1)=[x_{10}(1), x_3(1)]=[x_9(1), x_2(1)]=[x_8(1), x_1(1)]$, $x_{12}(1)=[x_{11}(1), x_4(1)]=[x_5(1), x_8(1)]=[x_6(1), x_9(1)]=[x_7(1), x_{10}(1)]$.

On écrit les éléments de U_0 sous la forme $u=\prod_{1\leq i\leq 12} x_i(c_i)=x_1(c_1)\cdots x_{12}(c_{12})$. On pose $X_i=x_i(\mathbb{G}_a)$, $1\leq i\leq 12$.

0.8. Supposons p impair. Soit $s\in T_0^F$ l'élément tel que $\alpha(s)=\beta(s)=\gamma(s)=-\delta(s)=1$. Le centralisateur de s n'est pas connexe mais $C_G^0(s)$ est la seule composante F-stable. Il y a dans $C_G^0(s)^F$ deux classes unipotentes régulières qu'on note $4A_1'$ et $4A_1''$ et qui sont respectivement contenues dans les classes A_2' et A_2'' de G^F. Ces classes ont pour représentants $u'=x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_{12}(1)$ et $u''=x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_{12}(\zeta)$ où $\zeta\in\mathbb{F}_q$ n'est pas un carré.

0.9. Soient T un tore maximal F-stable de G et $\theta: T^F\to\mathbb{C}^*$ un caractère. Deligne et Lusztig [3] ont construit une représentation virtuelle R_T^θ de G^F. C'est ici le caractère de cette représentation qu'on note R_T^θ (en fait Deligne et Lusztig ne travaillent pas avec $\mathbb{C}$ mais au niveau des caractères cela n'a pas d'importance). La restriction de R_T^θ à $\mathcal{U}^F$ ne dépend pas de θ. C'est la fonction de Green $Q_{T,G}$. Si $g=su$ est la décomposition de Jordan de $g\in G^F$, on a

$$R_T^\theta(g)=\frac{1}{|C_G^0(s)^F|}\sum_{\substack{g\in G^F\\ gTg^{-1}\ni s}} Q_{gTg^{-1},C_G^0(s)}(u)\theta(g^{-1}sg)$$

0.10. Si H est un groupe algébrique défini sur $\mathbb{F}_q$, on pose $\varepsilon(H)=(-1)^r$, où r est la dimension d'un tore déployé maximal de H.

0.11. On note ϕ_i la valeur à q du i^e polynome cyclotomique (par exemple $\phi_6=q^2-q+1$).

0.12. Supposons p impair. On choisit un caractère $\psi:\mathbb{F}_{q^3}\to\mathbb{C}^*$ dont la restriction à $\mathbb{F}_q$ n'est pas triviale. Soit $\chi:\mathbb{F}_{q^3}^*\to\mathbb{C}^*$ l'homomorphisme tel que $\chi(x)=1$ si et seulement si x est un carré dans $\mathbb{F}_{q^3}$. Si $g=\sum_{a\in\mathbb{F}_q^*}\chi(a)\psi(a)$, on a $|g|=q^{1/2}$ [6, p. 197].

0.13. Si $p=2$, soit $L:\mathbb{F}_{q^3}\to\mathbb{F}_{q^3}$ l'homomorphisme de groupes additifs $x\mapsto x+x^2$. Le noyau de L est $\{0,1\}$ et on définit $\psi:\mathbb{F}_{q^3}\to\mathbb{C}^*$ par la condition $\mathrm{Ker}(\psi)=\mathrm{Im}(L)$. On considère l'extension $\mathbb{F}_{q^3}/\mathbb{F}_q$, avec $\mathrm{Tr}(x)=x+x^q+x^{q^2}$ et $\mathrm{N}(x)=x^{1+q+q^2}$. Nous aurons besoin de quelques résultats concernant ψ. Soit $E=\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$. Remarquons tout d'abord que $\mathrm{Tr}(x)=3x=x$ si $x\in\mathbb{F}_q$, et donc $E\cap\mathbb{F}_q=0$. En particulier $E\cap\mathrm{Ker}(L)=0$, et comme $\mathrm{Tr}(x^2)=\mathrm{Tr}(x)^2$ on voit que L induit un automorphisme de E, d'où $\psi(E)=0$. Soit $x\in E, x\neq 0$, et soit $T^3+aT+b\in\mathbb{F}_q[T]$ son polynome minimal. On a $E=\mathbb{F}_qx\oplus\mathbb{F}_qx^2$, et si $y=\alpha x+\beta x^2\in E$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{F}_q)$, alors $xy=\beta b+\beta ax+\alpha x^2$, d'où $|\{z\in\mathbb{F}_{q^3}\mid z\in E \text{ et } z^{-1}\in E\}|=(q-1)(1+(-1)^e)$. D'autre part tout $y\in\mathbb{F}_{q^3}$ est de la forme $\alpha+\beta x+\gamma x^2$

$(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}_q)$ et $\psi(y) = \psi(\alpha)$. Donc $E = \{y \in \mathbb{F}_{q^3} \mid \mathbb{F}_q y \subset \operatorname{Ker}(\psi)\}$. En particulier E est le plus grand $\mathbb{F}_q$-sous-espace de $\mathbb{F}_{q^3}$ contenu dans $\operatorname{Ker}(\psi)$. Remarquons encore que pour $a \in \mathbb{F}_{q^3}$, $aE \subset E \Leftrightarrow a \in \mathbb{F}_q$.

LEMME. i) $\displaystyle\sum_{\substack{b \in \mathbb{F}_{q^3}^*, c \in \mathbb{F}_{q^3} \\ \operatorname{Tr}(bc)=0}} \psi(b+c) = -q^2$

ii) $\displaystyle\sum_{b \in \mathbb{F}_{q^3}, \operatorname{Tr}(b)=0} \psi(b^{1+q}) = (-1)^e q.$

iii) $\displaystyle\sum_{b \in \mathbb{F}_{q^3}} \psi(b + b^{1+q}) = (-1)^e q^2.$

iv) Si $\lambda \in \mathbb{F}_q$, $\displaystyle\sum_{a \in \mathbb{F}_q^*, b \in \mathbb{F}_{q^3}} \psi\left(\lambda a + b + \frac{b^{q+q^2}}{a}\right) = (-1)^e \psi(\lambda) q^2.$

Dans chaque cas on note S la somme considérée.

i) $\displaystyle S = \sum_{b \in \mathbb{F}_{q^3}^*} \psi(b) \sum_{c \in b^{-1}E} \psi(c) = \sum_{b \in \mathbb{F}_q^*} \psi(b) q^2 = -q^2$

puisque $b^{-1}E \subset \operatorname{Ker}(\psi) \Leftrightarrow b \in \mathbb{F}_q^*$.

ii) $\displaystyle S = 1 + \sum_{\substack{b \in E \\ b \neq 0}} \psi\left(\frac{\mathrm{N}(b)}{b^{q^2}}\right) = 1 + \frac{1}{q-1} \sum_{\substack{b \in E \\ b \neq 0}} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^*} \psi\left(\frac{\mathrm{N}(xb)}{(xb)^{q^2}}\right)$

Mais

$$\frac{\mathrm{N}(xb)}{(xb)^{q^2}} = \frac{\mathrm{N}(b)}{b^{q^2}} x^2 \text{ et } b^{-q^2} \in E \Leftrightarrow b^{-1} \in E.$$

La seconde somme vaut donc $q-1$ si $b^{-1} \in E$, -1 si $b^{-1} \notin E$, et $S = (-1)^e q$.

iii) Pour $a \in \mathbb{F}_q$, $\psi(b + a + (b+a)^{1+q}) = \psi(b + b^{1+q})$. Donc

$$S = q \sum_{b \in E} \psi(b + b^{1+q}) = q \sum_{b \in E} \psi(b^{1+q}) = (-1)^e q^2.$$

iv) Posons $a = \alpha^2 = \alpha^{1+q}$, $\lambda = \mu^2$, $b = \alpha\beta$. Alors

$$S = \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_q^*, \beta \in \mathbb{F}_{q^3}} \psi(\mu^2\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^{q+q^2}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_q^*, \beta \in \mathbb{F}_{q^3}} \psi(\mu\alpha + \alpha\beta + \beta^{1+q})$$

$$= \sum_{\beta \in \mathbb{F}_{q^3}} \psi(\beta^{1+q}) \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_q^*} \psi(\alpha(\mu + \beta))$$

La seconde somme vaut $q-1$ si $\mu+\beta\in E$, -1 sinon. Comme $\beta\mapsto\beta^{1+q}$ est une permutation de $\mathbb{F}_{q^3}$, on trouve

$$S=\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{F}_{q^3}\\ \mathrm{Tr}(\mu+\beta)=0}}\psi(\beta^{1+q})q=q\sum_{\gamma\in E}\psi((\gamma+\mu)(\gamma^q+\mu))$$

$$=q\psi(\lambda)\sum_{\gamma\in E}\psi(\mu\gamma+\mu^q\gamma^q+\gamma^{1+q})=q\psi(\lambda)\sum_{\gamma\in E}\psi(\gamma^{1+q})=(-1)^e\psi(\lambda)q^2.$$

1. Fonctions de Green et caractères unipotents

Soit $T\subset G$ un tore maximal F-stable. La fonction de Green $Q_{T,G}$ définie par Deligne et Lusztig [3] est une application de $\mathcal{U}^F$ dans $\mathbb{Z}$, constante sur les G^F-classes. Il est pratique parfois de la considérer comme une fonction sur G^F nulle en dehors de $\mathcal{U}^F$. Soient $B\supset T$ un sous-groupe de Borel de G et $w\in W$ la position relative de B et FB. On sait que $Q_{T,G}$ ne dépend que de la classe de F-conjugaison de w dans W.

THÉORÈME 1. *Les fonctions de Green de G sont données par la Table* 1.

Si $s\in G^F$ est semi-simple, $s\neq 1$, les fonctions de Green de $C_G(s)$ sont connues. On peut donc calculer explicitement les caractères R_T^θ. En prenant des combinaisons linéaires convenables de ces caractères (les coefficients en sont explicitement connus) on trouve tous les caractères irréductibles de G^F à l'exception de quelques caractères unipotents. Il y a 8 caractères unipotents et nous n'avons que 7 fonctions de la forme R_T^1.

Les 6 représentations unipotentes qui apparaissent dans $R_{T_0}^1$ sont en correspondance avec les représentations de W^F. Avec les notations de [5] on a:

caractère de W^F	caractère de G^F	degré
$\mathbb{1}$	$[\mathbb{1}]=\mathbb{1}$	1
ε_1	$[\varepsilon_1]$	$q(q^4-q^2+1)$
ε_2	$[\varepsilon_2]$	$q^7(q^4-q^2+1)$
ε	$[\varepsilon]=\mathrm{St}$	q^{12}
ρ_1	$[\rho_1]$	$\frac{1}{2}q^3(q^3+1)^2$
ρ_2	$[\rho_2]$	$\frac{1}{2}q^3(q+1)^2(q^4-q^2+1)$

Il reste 2 représentations unipotentes paraboliques:

${}^3D_4[-1]$, de degré $\frac{1}{2}q^3(q^3-1)^2$,

et

${}^3D_4[1]$, de degré $\frac{1}{2}q^3(q-1)^2(q^4-q^2+1)$.

Les caractères R_T^1 se décomposent comme suit:

$$
\begin{array}{lllll}
\tilde{A}_2 : \mathbb{1} + \mathrm{St} + [\varepsilon_1] + [\varepsilon_2] + 2[\rho_1] + 2[\rho_2] & & & & \\
\tilde{A}_2 + A_1 : \mathbb{1} - \mathrm{St} - [\varepsilon_1] + [\varepsilon_2] & & & & \\
C_3 : \mathbb{1} - \mathrm{St} + [\varepsilon_1] - [\varepsilon_2] & & & & \\
C_3 + A_1 : \mathbb{1} + \mathrm{St} - [\varepsilon_1] - [\varepsilon_2] & & & -2\,{}^3D_4[-1] & -2\,{}^3D_4[1] \\
\tilde{A}_2 + A_2 : \mathbb{1} + \mathrm{St} - 2[\varepsilon_1] - 2[\varepsilon_2] + 2[\rho_1] - [\rho_2] & & & & +3\,{}^3D_4[1] \\
F_4(a_1) : \mathbb{1} + \mathrm{St} + 2[\varepsilon_1] + 2[\varepsilon_2] & & -3[\rho_2] & -2\,{}^3D_4[-1] & +{}^3D_4[1] \\
F_4 : \mathbb{1} + \mathrm{St} & -[\rho_1] & & +{}^3D_4[-1]. &
\end{array}
$$

Rappelons brièvement comment on obtient ces résultats. La décomposition de $R_{T_0}^1$ et le degré de ses constituants irréductibles sont connus par la théorie des algèbres de Hecke (voir par exemple [2]). On obtient de manière similaire la décomposition de R_T^1 pour les classes $\tilde{A}_2 + A_1$ et C_3. Le cas où T est un tore de Coxeter (c'est-à-dire correspond à la classe F_4) est traité en détail dans [4]. En utilisant les relations d'orthogonalité et les degrés on peut décomposer R_T^1 pour les classes restantes. Pour les détails, voir [5].

Remarque. La restriction sur q donnée par [5] n'est en fait nécessaire, mais les calculs sont un peu plus longs.

La fonction $f = [\rho_1] - [\rho_2] + {}^3D_4[-1] - {}^3D_4[1]$ est orthogonale à tous les R_T^θ. Les fonctions R_T^1 et f forment donc une base orthogonale de l'espace engendré par les caractères unipotents, et il est facile d'écrire chacun de ces caractères en fonction de f et des R_T^1. En particulier, les caractères unipotents qui peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires des R_T^1 sont ceux qui n'interviennent pas dans f.

Il est facile de décrire f, au signe près. Si $p = 2$ les caractères R_T^θ ne séparent pas les deux classes unipotentes régulières puisqu'ils prennent tous la valeur 1 sur ces deux classes. Soit $f_0 : G^F \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$
f_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ n'est pas unipotent regulier} \\ 2q^2 & \text{si } x \text{ est unipotent régulier déployé} \\ -2q^2 & \text{si } x \text{ est unipotent régulier tordu.} \end{cases}
$$

Il est clair que $f = \pm f_0$. Si $p \neq 2$, soit s l'élément de T_0^F tel que $\alpha(s) = \beta(s) = \gamma(s) = -\delta(s) = 1$ et soit $H = C_G(s)$. Il y a dans H^F deux classes unipotentes régulières qui

correspondent à A_2' et A_2'' (0.8). Si u', u'' appartiennent à ces classes, su' et su'' ne sont pas séparés par les R_T^θ. Soit $f_0: G^F \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f_0(x) = \begin{cases} 2q^2 & \text{si } x \text{ est } G^F\text{-conjugué à } su' \\ -2q^2 & \text{si } x \text{ est } G^F\text{-conjugué à } su'' \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Il est clair ici aussi que $f = \pm f_0$.

PROPOSITION. $f = f_0$.

THÉORÈME 2. *Les caractères unipotents de G^F sont donnés par la Table* 2.

2. Preuve du Théorème 1

On numérote les F-classes dans W dans l'ordre opposé à celui utilisé dans la Table 1, on note $Q_1, \ldots, Q_7$ les fonctions de Green et $P_1, \ldots, P_7$ les fonctions données par la Table 1 (de sorte que P_1, Q_1 correspondent à F_4 et P_7, Q_7 à $\tilde{A}_2$). On utilise les propriétés suivantes des fonctions de Green [3]:

1) $Q_{T,G}(u) = 1$ si $u \in \mathcal{U}^F$ est régulier.

2) $Q_{T,G}(1) = \varepsilon(T)\varepsilon(G)\dfrac{|G^F|}{|T^F|\,|U_0^F|}$

3) (Orthogonalité) Si T, T' sont des tores maximaux F-stables de G et $N(T, T') = \{g \in G \mid Tg = gT'\}$, alors

$$\sum_{u \in \mathcal{U}^F} Q_{T,G}(u) Q_{T',G}(u) = \frac{|N(T, T')^F|}{|T^F|\,|T'^F|}|G^F|$$

Ces propriétés sont vérifiées par les fonctions $P_1, \ldots, P_7$.

On utilise aussi:

4) Soient $P \supset T$ un sous-groupe parabolique F-stable de G, $L \supset T$ un facteur de Levi de P et π la projection de P^F sur L^F. Alors

$$Q_{T,G} = \mathrm{Ind}_{P^F}^{G^F}(Q_{L,T} \circ \pi).$$

On utilise (4) pour vérifier que $Q_i = P_i$, $5 \leq i \leq 7$. Le calcul est assez facile sauf pour A_2' et A_2'', mais en tenant compte de (3) on obtient le résultat désiré.

Soit $a' \in M_7(\mathbb{R})$ la matrice telle que $Q_i = \sum_{1 \leq j \leq 7} a'_{ij} P_j$ $(1 \leq i \leq 7)$ et soient

$$d = \begin{pmatrix} \phi_{12}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6\phi_6^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6\phi_3^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\phi_2^{-2}\phi_6^{-1} \end{pmatrix} \qquad x' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x'' = \begin{pmatrix} \phi_{12}^{-1} \\ \phi_6^{-2} \\ \phi_3^{-2} \\ \phi_2^{-2}\phi_6^{-1} \end{pmatrix}$$

On déduit de (1), (2) et (3) que a' est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, $a \in M_4(\mathbb{R})$, et que

$$ad\,{}^t a = d, \qquad ax' = x', \qquad ax'' = x''.$$

En particulier a appartient au groupe $K = \{g \in M_4(\mathbb{R}) \mid gd\,{}^t g = d,\ gx' = gx',\ gx'' = x''\}$ isomorphe à $O_2(\mathbb{R})$. Soit $V = \{v \in M_{4,1}(\mathbb{R}) \mid {}^t vx' = {}^t vx'' = 0\}$. Les réflections contenues dans K sont les matrices de la forme $I - 2b$ où $b = dv\,{}^t v/(v, v)$, $v \in V$, $v \neq 0$ et $(v, v) = {}^t vdv$. Les vecteurs

$$r = \begin{pmatrix} \phi_{12}(\phi_3^2 - \phi_2^2\phi_6) \\ 0 \\ \phi_3^2(\phi_2^2\phi_6 - \phi_{12}) \\ \phi_2^2\phi_6(\phi_{12} - \phi_3^2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s = \begin{pmatrix} \phi_{12}(\phi_6^2 - \phi_2^2\phi_6) \\ \phi_6^2(\phi_2^2\phi_6 - \phi_{12}) \\ 0 \\ \phi_2^2\phi_6(\phi_{12} - \phi_6^2) \end{pmatrix}$$

forment une base de V.

Soit $H = (X_8X_9X_{10}X_{11}X_{12})^F$ et soit $\phi : H \to \mathbb{C}^*$ le caractère défini par $\phi(h) = \psi(c_{12})$ si $h = \prod_{8 \leq i \leq 12} x_i(c_i)$. Sous l'action de $N_{G^F}(H)$, ϕ a $q^5 - q^3$ conjugués, et il s'ensuit que pour le caractère unipotent $\rho = [\varepsilon_1]$ de degré $q^5 - q^3 + q$ on doit avoir $\langle \phi, \rho \rangle_H \in \{0, 1\}$. On va utiliser cela pour montrer qu'il n'y a qu'un tout petit nombre de possibilités pour a, puis en utilisant le fait que les fonctions de Green sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$ on verra que $a = I$. Remarquons que si l'on utilise les fonctions données dans la Table 1 on a $\langle \rho, \phi \rangle_H = 1$.

Soient $c = \frac{1}{12}(0\ \ 1\ \ -1\ \ -1) \in M_{1,4}(\mathbb{R})$ et

$$y = \begin{pmatrix} \langle P_1, \phi \rangle_H \\ \langle P_2, \phi \rangle_H \\ \langle P_3, \phi \rangle_H \\ \langle P_4, \phi \rangle_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^7 & -q \\ q^7 + 2q^6 - 4q^4 - 4q^3 + 3q + 2 \\ q^7 - 2q^6 + 4q^4 - 4q^3 + 3q - 2 \\ q^7 - q^6 - q^4 + 2q^3 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{R}).$$

On a $cdr = 6q^2$, $cds = 18q^2$, ${}^t ry = -2q^8 + 2q^2$, ${}^t sy = -6q^8 + 6q^2$.

On a $cay = cy$ si $\langle \rho, \phi \rangle_H = 1$, $cay = cy - 1$ si $\langle \rho, \phi \rangle_H = 0$. On va voir qu'en fait $cay - cy \geq 0$.

Cas I. $\det(a)=1$, $a\neq I$. On prend $a=(I-2b_0)(I-2b)$ où

$$b_0=\frac{dr^tr}{(r,r)},\ b=\frac{dv^tv}{(v,v)} \text{ et } v=\lambda r+s.$$

Comme

$$b_0b=\frac{dr^trdv^tv}{(r,r)(v,v)}=\frac{(r,v)dr^tv}{(r,r)(v,v)},$$

on a

$$\begin{aligned}(r,r)(v,v)(cay-cy)&=-2(v,v)cdr^try-2(r,r)cdv^tvy+4(r,v)cdr^tvy\\&=-2(6q^2)(-2q^8+2q^2)((v,v)+(r,r)(\lambda+3)^2-2(r,v)\\&\qquad\times(\lambda+3))\\&=24q^4(q^6-1)(v-(\lambda+3)r,v-(\lambda+3)r)>0.\end{aligned}$$

On a donc $cay-cy>0$, une contradiction.

Cas II. $\det(a)=-1$. On prend $a=I-2b$ où $b=dv^tv/(v,v)$, $v=\lambda r+\mu s\in V$, $v\neq 0$. On a $(v,v)(cay-cy)=-2cdv^tvy=24q^4(q^6-1)(\lambda+3\mu)^2$, d'où $\lambda+3\mu=0$. Pour démontrer le Théorème 1 il suffit de montrer que cela n'est pas possible. Si $u\in\mathcal{U}^F$ est sous-régulier,

$$Q_2(u)=2q+1-\frac{2q^3(q^2+q+1)^2}{2q^8+6q^7+11q^6+14q^5+15q^4+14q^3+11q^2+6q+2}\notin\mathbb{Z},$$

une contradiction.

3. Preuve du théorème 2 et de la proposition

Comme on l'a remarqué plus haut, les caractères unipotents de G^F sont des combinaisons linéaires des caractères virtuels R_T^1 et de $f=[\rho_1]-[\rho_2]+{}^3D_4[-1]-{}^3D_4[1]$. On peut calculer les R_T^1 à l'aide de (0.9) puisque les fonctions de Green de G et des centralisateurs des éléments semi-simples de G^F sont connues. On sait aussi que $f=\varepsilon f_0$ où f_0 est comme au paragraphe 1 et $\varepsilon=\pm1$. On peut donc calculer les caractères unipotents à l'exception de $[\rho_1]$, $[\rho_2]$, ${}^3D_4[1]$ ${}^3D_4[-1]$ sur les deux classes qui forment le support de f_0.

Supposons p impair. On utilise les notations de (0.8). Soient $H_0=(X_1X_2X_3X_{12})^F$ et $H=H_0\cup sH_0$. Soit θ le caractère linéaire de H défini par $\theta(s)=1$ et $\theta(x_1(a)x_2(a^q)x_3(a^{q^2})x_{12}(b))=\psi(a+b)$ $(a\in\mathbb{F}_{q^3}, b\in\mathbb{F}_q)$.

Soient $g_1 = \sum_{a \in \mathbb{F}_{q^3}^*} \chi(a)\psi(a)$, $g_2 = \sum_{b \in \mathbb{F}_{q^3}^*} \chi(b)\psi(b)$ et $a = g_1 g_2 q^{-2}$. On sait que $|g_1| = q^{3/2}$, $|g_2| = q^{1/2}$, donc $|a| = 1$. Un calcul facile montre que $\langle [\rho_1], \theta \rangle_H = \frac{1}{4}(q^5 + q^2 + a(q+\varepsilon))$. Donc $a \in \mathbb{R}$, $a = \pm 1$ et

$$q^5 + q^2 + a(q+\varepsilon) \equiv 0 \qquad (\text{mod } 4).$$

Comme $q+\varepsilon$ est pair, $a(q+\varepsilon) \equiv q+\varepsilon$ (mod 4). Donc

$$q^5 + q^2 + q + \varepsilon \equiv 0 \qquad (\text{mod } 4),$$

d'où $\varepsilon \equiv 1$ (mod 4), et finalement $\varepsilon = 1$.

Si $p = 2$ on prend $H_0 = (\prod_{4 \leq i \leq 12} X_i)^F$ et $H = H_0 \cup x_1(1)x_2(1)x_3(1)H_0$. Soit θ le caractère linéaire de H tel que $\theta(u) = \psi(c_5 + c_8)$ et $\theta(x_1(1)x_2(1)x_3(1)) = 1$, où $c_1, \ldots, c_{12}$ sont comme en (0.7). On calcule $\langle [\rho_1], \theta \rangle_H$ à l'aide du lemme (0.13).

On écrit $u \in H$ comme en (0.7) et on pose $a = c_4 \in \mathbb{F}_q$, $b = c_5 \in \mathbb{F}_{q^3}$, $c = c_8 \in \mathbb{F}_{q^3}$, $d = c_{11} \in \mathbb{F}_q$, $e = c_{12} \in \mathbb{F}_q$.

L'élément u de H est régulier si et seulement si $c_1 = 1$ et $a \neq 0$, et il appartient à D_4' si de plus $\psi(c/a + b^{1+q}/a^2) = 1$. On a donc

$$\langle f_0, \theta \rangle_H = q^{-7} \sum_{\substack{a,b,c,d,e \\ a \neq 0}} \psi\left(b + c + \frac{c}{a} + \frac{b^{1+q}}{a^2}\right).$$

En sommant sur c on trouve 0 sauf si $a = 1$. Donc

$$\langle f_0, \theta \rangle_H = q^{-2} \sum_b \psi(b + b^{1+q}) = (-1)^e.$$

Si $c_1 = 1$ et $a = 0$, u appartient à la classe A_2 si $b \in \mathbb{F}_q$ et $\mathrm{Tr}\,(b+c) \neq 0$, et à A_2' si de plus

$$\psi\left(\frac{e + bd + b^2 + (b+c)^{1+q^2}}{\mathrm{Tr}\,(b+c)^2}\right) = 1.$$

On est ainsi amené à calculer

$$\sum_{\substack{b,c,d,e \\ b \in \mathbb{F}_q, \mathrm{Tr}\,(b+c) \neq 0}} \psi(b+c) = q^3 \sum_{\substack{x \in \mathbb{F}_{q^3} \\ \mathrm{Tr}(x) \neq 0}} \psi(x) = -q^5$$

et

$$\sum_{\substack{b,c,d,e \\ b\in\mathbb{F}_q,\,\mathrm{Tr}(b+c)\neq 0}} \psi\left(b+c+\frac{e+bd+b^2+(b+c)^{1+q^2}}{\mathrm{Tr}\,(b+c)^2}\right)=0$$

comme on le voit en sommant d'abord sur e.

Considérons maintenant quelques éléments de H_0. Si $a=0$, u appartient à la classe A_2 si $\mathrm{Tr}\,(bc)\neq 0$, et à A_2' si de plus

$$\psi\left(\frac{\mathrm{N}\,(b)d}{\mathrm{Tr}\,(bc)^2}+\frac{(bc)^{1+q}}{\mathrm{Tr}\,(bc)^2}\right)=1.$$

On doit donc calculer

$$\sum_{\substack{b,c,d,e \\ \mathrm{Tr}(bc)\neq 0}} \psi(b+c)=q^2 \sum_{\substack{b\neq 0,c \\ \mathrm{Tr}(bc)\neq 0}} \psi(b+c)=-q^2 \sum_{\substack{b\neq 0,c \\ \mathrm{Tr}(bc)=0}} \psi(b+c)=q^4$$

et

$$\sum_{\substack{b,c,d,e \\ \mathrm{Tr}(bc)\neq 0}} \psi\left(b+c+\frac{\mathrm{N}(b)d}{\mathrm{Tr}\,(bc)^2}+\frac{(bc)^{1+q}}{\mathrm{Tr}\,(bc)^2}\right)=0$$

comme on le voit en sommant d'abord sur d, puisque $\mathrm{N}(b)/\mathrm{Tr}(bc)^2\in\mathbb{F}_q^*$.

Si $a^*\neq 0$, soient $x=c+b^{q+q^2}/a$, $y=d+\mathrm{Tr}(bc)/a$. Alors u appartient à la classe A_2 si $y\neq 0$, et à A_2' si de plus $\psi(\mathrm{N}\,(x)/ay^2)=1$. On calcule

$$\sum_{\substack{a,b,c,d,e \\ a\neq 0,ad\neq \mathrm{Tr}(bc)}} \psi(b+c)=q(q-1)\sum_{\substack{a,b,c \\ a\neq 0}} \psi(b+c)=0$$

et

$$S=\sum_{\substack{a,b,c,e,y \\ a\neq 0,y\in\mathbb{F}_q^*}} \psi\left(b+c+\frac{\mathrm{N}\,(x)}{ay^2}\right)=q\sum_{\substack{a,b,c \\ a\neq 0}} \psi(b+c)\sum_{y\in\mathbb{F}_q^*}\psi\left(\frac{\mathrm{N}\,(x)}{ay^2}\right),$$

où x est défini comme ci-dessus. La dernière somme sur y vaut -1 si $x\neq 0$, et $q-1$ si $x=0$. Donc

$$S=-q\sum_{\substack{a,b,c \\ a\neq 0}} \psi(b+c)+q^2\sum_{\substack{a,b,c \\ x=0}} \psi(b+c)=q^2\sum_{\substack{a,b \\ a\neq 0}} \psi\left(b+\frac{b^{q+q^2}}{a}\right)=(-1)^e q^4.$$

Les autres classes sont plus faciles à décrire et tous les calculs peuvent se faire à l'aide du lemme. On trouve finalement $\langle[\rho_1], \theta\rangle_H = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}(-1)^e(\varepsilon+1)$. C'est aussi un entier, et comme $\varepsilon = \pm 1$, on doit avoir $\varepsilon = 1$.

Remarque. Dans le cas où $p=2$, on peut modifier θ comme suit. On peut prendre $\theta(x_1(1)x_2(1)x_3(1)) = -1$. On peut aussi poser $\theta(u) = (\lambda c_4 + c_5 + c_8)$ $(u \in H_0)$, où $\lambda \in \mathbb{F}_q$, $\psi(\lambda) = -1$. On obtient ainsi 4 caractères non conjugués sous l'action du normalisateur de H. Chacun de ces caractères apparaît dans la restriction d'exactement un des caractères $[\rho_1], [\rho_2], {}^3D_4[-1], {}^3D_4[1]$, et avec multiplicité 1.

4. Tables

La Table 1 donne les fonctions de Green et la Table 2 les caractères unipotents.

Soit $g = su$ la décomposition de Jordan de $g \in G^F$ (s semi-simple, u unipotent). La valeur à g des caractères unipotents ne dépend que de la classe de conjugaison de $C_G^0(s)$ (sous l'action de G^F) et de la classe de u dans $C_G^0(s)^F$ Soient $T \subset B$ un tore maximal et un sous-groupe de Borel F-stables de $C_G^0(s)$. La classe de G^F-conjugaison de $C_G^0(s)$ est caractérisée par le type de $C_G^0(s)$ et l'ordre de T^F. Lorsque g est semi-simple régulier, l'indication de la classe de u est omise.

Table 1
Fonctions de Green de ${}^3D_4(\mathbb{F}_q)$

	$\varnothing$	A_1	$3A_1$	A_2'	A_2''	$D_4(a_1)$	D_4
$\tilde{A}_2$	$q^{12}+q^{11}+q^9+2q^8+q^7$ $+q^5+2q^4+q^3+q+1$	q^7+2q^4 $+q^3+q+1$	$2q^4+2q^3$ $+q+1$	$2q^3+q^2$ $+q+1$	$2q^3-q^2$ $+q+1$	$q+1$	1
$\tilde{A}_2+A_1$	$-q^{12}+q^{11}-q^9+q^7$ $-q^5+q^3-q+1$	q^7+q^3 $-q+1$	$-q+1$	$-q^2$ $-q+1$	q^2 $-q+1$	$-q+1$	1
C_3	$-q^{12}-q^{11}+q^9-q^7$ $+q^5-q^3+q+1$	$-q^7-q^3$ $+q+1$	$q+1$	q^2 $+q+1$	$-q^2$ $+q+1$	$q+1$	1
C_3+A_1	$q^{12}-q^{11}-q^9+2q^8-q^7$ $-q^5+2q^4-q^3-q+1$	$-q^7+2q^4$ $-q^3-q+1$	$2q^4-2q^3$ $-q+1$	$-2q^3-q^2$ $-q+1$	$-2q^3-q^2$ $-q+1$	$-q+1$	1
$\tilde{A}_2+A_2$	$q^{12}-2q^{11}+4q^9-4q^8-2q^7$ $+6q^6-2q^5-4q^4+4q^3-2q+1$	$-2q^7+3q^6-4q^4$ $+4q^3-2q+1$	$-q^4+2q^3$ $-2q+1$	$5q^3-2q^2$ $-2q+1$	$-q^3+2q^2$ $-2q+1$	$-2q+1$	1
$F_4(a_1)$	$q^{12}+2q^{11}-4q^9-4q^8+2q^7$ $+6q^6+2q^5-4q^4-4q^3+2q+1$	$2q^7+3q^6-4q^4$ $-4q^3+2q+1$	$-q^4-2q^3$ $+2q+1$	q^3+2q^2 $+2q+1$	$-5q^3-2q^2$ $+2q+1$	$2q+1$	1
F_4	$q^{12}-2q^6+1$	$-q^6+1$	$-q^4+1$	$-q^3+1$	q^3+1	1	1

Table 2
Caractères unipotents de ${}^3D_4(\mathbb{F}_q)$

	$\varnothing, \phi_1^2\phi_3$								
	$\varnothing$	A_1	$3A_1$	A_2'	A_2''	$D_4(a_1)$	D_4 $p\neq 2$	D_4' $p=2$	D_4'' $p=2$
$[\mathbf{1}]=\mathbf{1}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$[\varepsilon_1]$	q^5-q^3+q	$-q^3+q$	q	q^2+q	$-q^2+q$	q	0	0	0
$[\rho_1]$	$\frac{1}{2}q^3(q^3+1)^2$	$\frac{1}{2}q^3(q^3+1)$	$\frac{1}{2}q^3(q+1)$	q^3	0	0	0	$\frac{1}{2}q^2$	$-\frac{1}{2}q^2$
$[\rho_2]$	$\frac{1}{2}q^3(q+1)^2(q^4-q^2+1)$	$\frac{1}{2}q^3(-q^3+2q+1)$	$\frac{1}{2}q^3(q+1)$	0	q^3	0	0	$-\frac{1}{2}q^2$	$\frac{1}{2}q^2$
${}^3D_4[-1]$	$\frac{1}{2}q^3(q^3-1)^2$	$\frac{1}{2}q^3(-q^3+1)$	$\frac{1}{2}q^3(-q+1)$	0	q^3	0	0	$\frac{1}{2}q^2$	$-\frac{1}{2}q^2$
${}^3D_4[1]$	$\frac{1}{2}q^3(q-1)^2(q^4-q^2+1)$	$\frac{1}{2}q^3(q^3-2q+1)$	$\frac{1}{2}q^3(-q+1)$	q^3	0	0	0	$-\frac{1}{2}q^2$	$\frac{1}{2}q^2$
$[\varepsilon_2]$	$q^{11}-q^9+q^7$	q^7	0	0	0	0	0	0	0
$[\varepsilon]=\mathrm{St}$	q^{12}	0	0	0	0	0	0	0	0

Table 2·
Caractères unipotents de ${}^3D_4(\mathbb{F}_q)$ (*suite*)

	$4A_1, \phi_1^2\phi_3$ $(p \neq 2)$					$3A_1, \phi_1^2\phi_3$		$3A_1, \phi_1\phi_2\phi_3$		$A_2, \phi_1^2\phi_3$		
	$\varnothing$	A_1	$3A_1$	$4A_1'$	$4A_1''$	$\varnothing$	$3A_1$	$\varnothing$	$3A_1$	$\varnothing$	A_1	A_2
$[\mathbf{1}]=\mathbf{1}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$[\varepsilon_1]$	q	0	q	0	0	1	1	-1	-1	q^2+q-1	$q-1$	-1
$[\rho_1]$	$\frac{1}{2}(q^4+q^3+q+1)$	$\frac{1}{2}(q^3+1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q^2+1)$	$\frac{1}{2}(-q^2+1)$	q^3+1	1	0	0	q^3+1	1	1
$[\rho_2]$	$\frac{1}{2}(q^4+q^3+q+1)$	$\frac{1}{2}(q^3+1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(-q^2+1)$	$\frac{1}{2}(q^2+1)$	q^3+1	1	0	0	q^2+q	q	0
${}^3D_4[-1]$	$\frac{1}{2}(-q^4+q^3+q-1)$	$\frac{1}{2}(q^3-1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}(q^2-1)$	$\frac{1}{2}(-q^2-1)$	0	0	q^3-1	-1	0	0	0
${}^3D_4[1]$	$\frac{1}{2}(-q^4+q^3+q-1)$	$\frac{1}{2}(q^3-1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}(-q^2-1)$	$\frac{1}{2}(q^2-1)$	0	0	q^3-1	-1	q^3-q^2-q+1	$-q+1$	1
$[\varepsilon_2]$	q^3	q^3	0	0	0	q^3	0	q^3	0	$-q^3+q^2+q$	q	0
$[\varepsilon]=\mathrm{St}$	q^4	0	0	0	0	q^3	0	$-q^3$	0	q^3	0	0

Table 2
Caractères unipotents de ${}^3D_4(\mathbb{F}_q)$ (*fin*)

	$A_2, \phi_1\phi_2\phi_6$			$A_1, \phi_1^2\phi_3$		$A_1, \phi_1\phi_2\phi_6$		$\varnothing$ (éléments semi-simples réguliers)						
	$\varnothing$	A_1	A_2	$\varnothing$	A_1	$\varnothing$	A_1	$\phi_1^2\phi_3$	$\phi_1\phi_2\phi_3$	$\phi_1\phi_2\phi_6$	$\phi_2^2\phi_6$	ϕ_3^2	ϕ_6^2	ϕ_{12}
$[\mathbf{1}]=\mathbf{1}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$[\varepsilon_1]$	$-q^2+q+1$	$q+1$	1	q	0	q	0	1	-1	1	-1	-2	2	0
$[\rho_1]$	0	0	0	$q+1$	1	0	0	2	0	0	0	2	0	-1
$[\rho_2]$	q^3+q^2-q-1	$-q-1$	-1	$q+1$	1	0	0	2	0	0	0	-1	-3	0
${}^3D_4[-1]$	q^3-1	-1	-1	0	0	$q-1$	-1	0	0	0	-2	0	-2	1
${}^3D_4[1]$	$-q^2+q$	q	0	0	0	$q-1$	-1	0	0	0	-2	3	1	0
$[\varepsilon_2]$	$-q^3-q^2+q$	q	0	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-2	2	0
$[\varepsilon]=\mathrm{St}$	$-q^3$	0	0	q	0	$-q$	0	1	-1	-1	1	1	1	1

RÉFÉRENCES

[1] CARTER R. W., *Conjugacy classes in the Weyl group. Dans: A. Borel et al., Seminar on algebraic groups and related finite groups.* Lecture Notes in Math. *131*. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag 1970.

[2] CURTIS, C. W., IWAHORI, N. et KILMOYER, R., *Hecke algebras and characters of parabolic type of finite groups with (B, N)-pairs.* Publ. Math. I.H.E.S. *40* (1972), 81–116.

[3] DELIGNE P. et LUSZTIG G., *Representations of reductive groups over finite fields.* Annals of Math. *103* (1976), 103–161.

[4] LUSZTIG G., *Coxeter orbits and eigenspaces of Frobenius.* Inventiones Math. *38* (1976), 101–159.

[5] LUSZTIG G., *On the unipotent characters of the exceptional groups over finite fields.* Inventiones Math. *60* (1980), 173–193.

[6] SGA $4\frac{1}{2}$, *Cohomologie étale (dirigé par P. Deligne).* Lecture Notes in Math. *569*. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag 1977.

Forschungsinstitut für Mathematik
ETH-Zentrum
CH-8092 Zürich

Reçu le 25 juin 1982