Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 57 (1982)

Artikel: Ueber das Spektrum des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen.

Autor: Huber, Heinz

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43903

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 57 (1982) 627–647 0010–2571/82/004627-21$01.50+0.20/0
© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

Ueber das Spektrum des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen

HEINZ HUBER

1. Einleitung

Wir betrachten kompakte Riemannsche Flächen $\mathcal{F}$ vom Geschlecht $g(\mathcal{F}) \geq 2$, versehen mit ihrer Poincaré-Metrik konstanter Krümmung -1. Es sei $A(t, \mathcal{F})$ die Anzahl der Eigenwerte $\leq t$ des zugehörigen Laplace-Operators $-\Delta_{\mathcal{F}}$. Nach H. Weyl gilt

$$A(t, \mathcal{F})/g(\mathcal{F}) - 1 \sim t \quad \text{für} \quad t \to +\infty.$$

Wir interessieren uns für das Verhalten dieses Quotienten, wenn die Länge $l(\mathcal{F})$ der kürzesten geschlossenen Geodätischen auf $\mathcal{F}$ sehr gross wird. Wegen der negativen Krümmung ist es nicht selbstverständlich, dass es Flächen mit beliebig grosser Länge $l(\mathcal{F})$ gibt. Solche Flächen können aber konstruiert werden als Quotienten der Poincaréschen Halbebene nach gewissen arithmetisch definierten nichteuklidischen Bewegungsgruppen [4]. P. Buser [1] hat sogar gezeigt, dass es Flächen mit beliebig vorgegebener Länge $l(\mathcal{F})$ und vorgeschriebenem Geschlecht $g(\mathcal{F}) > \exp(l^2/4)$ gibt.

In der vorliegenden Arbeit soll nun das folgende Theorem bewiesen werden:

Für jede Folge $\{\mathcal{F}_k\}_1^\infty$ mit $l(\mathcal{F}_k) \to \infty$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} A(t, \mathcal{F}_k)/g(\mathcal{F}_k) - 1 = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ F(t) & \text{für} \quad t \geq \frac{1}{4}, \end{cases}$$

$$F(t) = t - \tfrac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \int_0^{a(t)} \frac{y e^{-y}}{1+e^{-y}}\, dy, \qquad a(t) = 2\pi(t - \tfrac{1}{4})^{1/2}.$$

(Das Integral strebt für $t \to \infty$ gegen $\pi^2/12$).

Wir werden sogar etwas mehr beweisen: Definieren wir für $\mu > 0$, $t \geq 0$

$$q(\mu, t) = \inf_{\mathcal{F}} \{A(t, \mathcal{F})/g(\mathcal{F}) - 1 \mid l(\mathcal{F}) \geq \mu\}$$

$$Q(\mu, t) = \sup_{\mathcal{F}} \{A(t, \mathcal{F})/g(\mathcal{F}) - 1 \mid l(\mathcal{F}) \geq \mu\},$$

so gilt *gleichmässig* in jedem kompakten Intervall

$$\lim_{\mu\to\infty} q(\mu, t) = \lim_{\mu\to\infty} Q(\mu, t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4} \\ F(t) & \text{für} \quad t > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Dies folgt für das Intervall $[0, \frac{1}{4}]$ aus der Abschätzung

$$A(\tfrac{1}{4}, \mathcal{F})/g(\mathcal{F}) - 1 \leqslant \tfrac{3}{8}\pi^2(\log \operatorname{Cos} l(\mathcal{F})/4)^{-3},$$

welche in [4] hergeleitet wurde.[1] Der Beweis für das Intervall $[\frac{1}{4}, T]$ stützt sich einerseits auf die Selbergsche Spurformel [5], andererseits aber auf das folgende

LEMMA. *Für alle Flächen $\mathcal{F}$ mit $l(\mathcal{F}) \geqslant \mu > 0$ gilt*

$$s\int_0^\infty A(\lambda, \mathcal{F}) e^{-s\lambda}\, d\lambda \leqslant 3(g(\mathcal{F}) - 1)\left\{\frac{1}{s} + \operatorname{Sin}^{-2} \mu/4\right\}, \qquad s > 0.$$

Schliesslich möchte der Verfasser dankbar die Anregung erwähnen, die ihm aus dem Studium einer Arbeit von G. H. Hardy und J. E. Littlewood [2] erwachsen ist.

2. Beweis des Lemmas

1. *Es sei* $l(\mathcal{F}) \geqslant \mu > 0$ und

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$$

die Folge aller Eigenwerte von $-\Delta_{\mathcal{F}}$, wobei jeder Eigenwert seiner Multiplizität entsprechend oft auftrete. Dann gilt für jede im Intervall $[1, \operatorname{Cos} \mu/2]$ quadratisch integrierbare Funktion f:

$$2(g(\mathcal{F}) - 1)\int_1^{\operatorname{Cos} \mu/2} f^2(t)\, dt = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_1^{\operatorname{Cos} \mu/2} f(t) F_{\lambda_j}(t)\, dt\right)^2 \tag{1}$$

Dabei ist F_λ eine Legendre-Funktion:

$$F_\lambda(t) = P_\nu(t), \qquad \nu(\nu+1) = -\lambda \leqslant 0, \qquad t \geqslant 1.$$

---

[1] Die hyperbolischen Funktionen werden im folgenden mit Cos, Sin, *Tg* bezeichnet.

2. *Beweis.* Wir versehen den Einheitskreis $E=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|<1\}$ mit der hyperbolischen Metrik

$$ds=2\frac{|dz|}{1-|z|^2}, \tag{2}$$

welche die Krümmung -1 besitzt, und bezeichnen mit $\rho(z,w)$ die hyperbolische Distanz der Punkte $z, w\in E$. Führen wir geodätische Polarkoordinaten

$$\rho=\rho(z,0), \qquad \vartheta=\arg z$$

ein, so wird $ds^2=d\rho^2+\operatorname{Sin}^2\rho\, d\rho^2$. Somit ist

$$d\omega=\operatorname{Sin}\rho\, d\rho\, d\vartheta \tag{3}$$

das Flächenelement dieser Metrik.

Wegen $g(\mathcal{F})\geqslant 2$ gibt es eine konforme Ueberlagerungsabbildung $\gamma: E\to\mathcal{F}$, welche den Nullpunkt in einen beliebig vorgegebenen Punkt $q\in\mathcal{F}$ überführt:

$$\gamma(0)=q. \tag{4}$$

Da jede Decktransformation von γ eine Isometrie der Differentialgeometrie (2) ist, können wir diese Geometrie mit γ von E auf $\mathcal{F}$ verpflanzen und erhalten so die Poincaré-Metrik von $\mathcal{F}$, i.e. die einzige Metrik konstanter Krümmung -1, welche mit der konformen Struktur von $\mathcal{F}$ verträglich ist. Wir bezeichnen ihr Flächenelement mit $d\omega_{\mathcal{F}}$ und ihren Laplaceoperator mit $\Delta_{\mathcal{F}}$.

Die Ueberlagerungsabbildung γ ist injektiv auf

$$K=\{z\in E\mid \rho(z,0)<\mu/2\}$$

(Siehe z.B. [4] 3.2). Daher wird durch

$$h(\gamma(z))=f(\operatorname{Cos}\rho(z,0)), \qquad z\in K$$
$$h=0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{F}-\gamma(K)$$

eine auf ganz $\mathcal{F}$ eindeutige Funktion h definiert. Wegen (3) wird

$$\int_{\mathcal{F}} h^2\, d\omega_{\mathcal{F}}=\int_{\gamma(K)} h^2\, d\omega_{\mathcal{F}}=\int_K f^2(\operatorname{Cos}\rho(z,0))\, d\omega$$
$$=2\pi\int_0^{\mu/2} f^2(\operatorname{Cos}\rho)\operatorname{Sin}\rho\, d\rho=2\pi\int_1^{\operatorname{Cos}\mu/2} f^2(t)\, dt. \tag{5}$$

Nun sei $\{\varphi_j\}_0^\infty$ ein zur Eigenwertfolge $\{\lambda_j\}_0^\infty$ gehöriges orthonormalsystem reeller Eigenfunktionen: $\Delta_{\mathcal{F}}\varphi_j + \lambda_j\varphi_j = 0$. Setzen wir

$$\varphi_j(\gamma(z)) = \Phi_j(\rho, \vartheta), \qquad \rho = \rho(z; 0) \qquad \vartheta = \arg z,$$

so wird wegen (4) nach [4] 3.3

$$\int_0^{2\pi} \Phi_j(\rho, \vartheta)\, d\vartheta = 2\pi\varphi_j(q) F_{\lambda_j}(\operatorname{Cos}\rho).$$

Somit wird

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}} h\varphi_j\, d\omega_{\mathcal{F}} &= \int_{\gamma(K)} h\varphi_j\, d\omega_{\mathcal{F}} = \int_K h(\gamma(z))\varphi_j(\gamma(z))\, d\omega \\ &= 2\pi\varphi_j(q)\int_0^{\mu/2} f(\operatorname{Cos}\rho) F_{\lambda_j}(\operatorname{Cos}\rho)\operatorname{Sin}\rho\, d\rho \\ &= 2\pi\varphi_j(q)\int_1^{\operatorname{Cos}\mu/2} f(t) F_{\lambda_j}(t)\, dt. \qquad (6)\end{aligned}$$

Da das Orthonormalsystem $\{\varphi_j\}$ vollständig ist, folgt aus (5), (6) nach der Besselschen Gleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_1^{\operatorname{Cos}\mu/2} f^2(t)\, dt = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^2(q)\left(\int_1^{\operatorname{Cos}\mu/2} f(t) F_{\lambda_j}(t)\, dt\right)^2.$$

Das gilt für alle $q \in \mathcal{F}$. Daraus ergibt sich die Behauptung (1) durch Integration über $\mathcal{F}$, wenn noch berücksichtigt wird, dass nach dem Theorem von Gauss–Bonnet

$$\int_{\mathcal{F}} d\omega_{\mathcal{F}} = 4\pi(g(\mathcal{F}) - 1).$$

3. Es sei jetzt $\tau \geqslant \operatorname{Sin}^{-2}\mu/4$, also $1 + 2/\tau \leqslant \operatorname{Cos}\mu/2$. Wir betrachten die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} F_\tau(t) & \text{für} \quad 1 \leqslant t < 1 + 2/\tau \\ 0 & \text{für} \quad 1 + 2/\tau \leqslant t \leqslant \operatorname{Cos}\mu/2 \end{cases}$$

Dann folgt aus (1)

$$2(g(\mathcal{F})-1)\int_1^{1+2/\tau} F_\tau^2(t)\,dt = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\int_1^{1+2/\tau} F_\tau(t)F_{\lambda_j}(t)\,dt\right)^2$$
$$\geqslant \sum_{\lambda_j\leqslant\tau}\left(\int_1^{1+2/\tau} F_\tau(t)F_{\lambda_j}(t)\,dt\right)^2. \tag{7}$$

Nach [3] pag. 258–259 gilt

$$F_\tau(t)\geqslant 1-\frac{\tau}{2}(t-1)\geqslant 0 \quad \text{in} \quad [1, 1+2/\tau]. \tag{8}$$

Daraus folgt nach [4] Lemma 4 pag. 221

$$F_\lambda(t)\geqslant F_\tau(t)\geqslant 0 \quad \text{in} \quad [1, 1+2/\tau] \quad \text{für} \quad \lambda\leqslant\tau.$$

Somit wird

$$\int_1^{1+2/\tau} F_\tau(t)F_{\lambda_j}(t)\,dt \geqslant \int_1^{1+2/\tau} F_\tau^2(t)\,dt \quad \text{für} \quad \lambda_j\leqslant\tau$$

und es ergibt sich aus (7)

$$2(g(\mathcal{F})-1)\geqslant A(\tau,\mathcal{F})\int_1^{1+2/\tau} F_\tau^2(t)\,dt. \tag{9}$$

Aus (8) folgt aber

$$\int_1^{1+2/\tau} F_\tau^2(t)\,dt \geqslant \int_1^{1+2/\tau}\left(l-\frac{\tau}{2}(t-1)\right)^2 dt = 2/3\tau.$$

Somit ergibt sich aus (9)

$$A(\tau,\mathcal{F})\leqslant 3(g(\mathcal{F})-1)\tau \quad \text{für} \quad \tau\geqslant b=\operatorname{Sin}^{-2}\mu/4.$$

Daraus folgt nun für $s>0$:

$$\int_0^\infty A(\tau,\mathcal{F})e^{-s\tau}\,d\tau \leqslant 3(g-1)b\int_0^b e^{-s\tau}\,d\tau + 3(g-1)\int_b^\infty \tau e^{-s\tau}\,d\tau$$
$$= 3(g-1)\left(\frac{b}{s}+\frac{1}{s^2}e^{-bs}\right)\leqslant 3(g-1)\left(\frac{b}{s}+\frac{1}{s^2}\right).$$

Damit ist unser Lemma bewiesen.

3. "Kleine" Hilfssätze

1. Das Polynom

$$P_n(u) = u^n(1-u)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u^{n+k}, \qquad n \geqslant 1, \tag{1}$$

ist monoton wachsend in $[0, \frac{1}{2}]$ und fallend in $[\frac{1}{2}, 1]$. Das Polynom

$$Q_n(u) = \int_0^u P_n(v)\, dv = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{u^{n+k+1}}{n+k+1} \tag{2}$$

ist monoton wachsend in $[0, 1]$ und es gilt

$$Q_n(1) = Q_n(u) + Q_n(1-u), \tag{3}$$

also insbesondere

$$Q_n(\tfrac{1}{2}) = Q_n(1)/2. \tag{4}$$

$Q_n(1)$ ist ein Eulersches Beta-Integral:

$$Q_n(1) = B(n+1, n+1) = \Gamma(n+1)\Gamma(n+1)/\Gamma(2(n+1)). \tag{5}$$

Daraus folgt wegen

$$\Gamma(2(n+1)) = 2^{2n+1}\Gamma(n+1)\Gamma(n+\tfrac{3}{2})/\Gamma(\tfrac{1}{2})$$
$$Q_n(1) = 2^{-2n-1}\Gamma(n+1)\Gamma(\tfrac{1}{2})/\Gamma(n+\tfrac{3}{2}) = 2^{-2n-1}B(n+1, \tfrac{1}{2}). \tag{6}$$

Nun ist

$$B(n+1, \tfrac{1}{2}) = \int_0^1 t^n(1-t)^{-1/2}\, dt = 2\int_0^1 (1-u^2)^n\, du \geqslant 2\int_0^1 (1-u)^n\, du = 2/n+1.$$

Daher folgt aus (4) und (6)

$$1/Q_n(\tfrac{1}{2}) \leq 2(n+1)2^{2n}. \tag{7}$$

2. Das Polynom

$$T_n(u) = \int_0^u Q_n(v)\, dv/v = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{u^{n+k+1}}{(n+k+1)^2} \tag{8}$$

wächst monoton in [0, 1] und es gilt

$$T_n(u) = R_n(u) - Q_n(u) \log u^{-1} \tag{9}$$

$$R_n(u) = \int_0^u P_n(v) \log v^{-1}\, dv. \tag{10}$$

$R_n(u)$ ist wieder monoton wachsend in [0, 1]. Wir zeigen:

$$\alpha_n = R_n(1)/Q_n(1) \log 2 \to 1 \quad \text{für} \quad n \to \infty. \tag{11}$$

In der Tat: Für $0 < \eta < \frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned} \alpha_n Q_n(1) \log 2 &= \int_0^\eta P_n(v) \log v^{-1}\, dv + \int_\eta^1 P_n(v) \log v^{-1}\, dv \\ &\leq \eta^n (1-\eta)^n \int_0^1 \log v^{-1}\, dv + \log \eta^{-1} \int_\eta^1 P_n(v)\, dv \\ &\leq \eta^n (1-\eta)^n + Q_n(1) \log \eta^{-1} \end{aligned}$$

und somit wegen (4), (7)

$$\begin{aligned} \alpha_n &\leq \eta^n (1-\eta)^n / Q_n(1) \log 2 + \log \eta^{-1} / \log 2 \\ &\leq (n+1)(4\eta(1-\eta))^n / \log 2 + \log \eta^{-1} / \log 2. \end{aligned}$$

Wegen $4\eta(1-\eta) < 1$ folgt daraus

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n \leq \log \eta^{-1} / \log 2.$$

Daraus ergibt sich für $\eta \to \frac{1}{2}$:

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n \leq 1. \tag{12}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}(\alpha_n - 1)Q_n(1)\log 2 &= \int_0^{1/2} P_n(v)\log v^{-1}\,dv + \int_0^{1/2} P_n(v)\log(1-v)^{-1}\,dv - \log 4\int_0^{1/2} P_n(v)\,dv \\ &= \int_0^{1/2} P_n(v)\log(4v(1-v))^{-1}\,dv\end{aligned}$$

und daher $\alpha_n > 1$. Somit folgt aus (12) die Behauptung (11).

3. Wir definieren

$$c_n(\eta) = R_n(1)/Q_n(\eta)\log 2 \tag{13}$$

und zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} c_n(\eta) = 1 \quad \text{für} \quad \tfrac{1}{2} < \eta < 1. \tag{14}$$

In der Tat: Wegen (11) und (3) gilt

$$c_n(\eta) = \alpha_n Q_n(1)/Q_n(\eta) = \alpha_n(1 + Q_n(1-\eta)/Q_n(\eta)) \tag{15}$$

Nun ist aber wegen $\frac{1}{2} < \eta < 1$ und (7)

$$0 < Q_n(1-\eta)/Q_n(\eta) \leqslant \tfrac{1}{2}\eta^n(1-\eta)^n/Q_n(\tfrac{1}{2}) \leqslant (n+1)(4\eta(1-\eta))^n.$$

Daraus und aus (11), (15) folgt aber die Behauptung (14).

4. Nun zeigen wir:

$$c_n(\eta) \leqslant 6/\log 2 \quad \text{für} \quad \tfrac{1}{2} < \eta < 1, \qquad n \geqslant 1. \tag{16}$$

In der Tat: Für $0 \leqslant u \leqslant 1$ gilt

$$Q_n(u) = \int_0^u v^n(1-v)^n\,dv \leq u\int_0^1 v^{n-1}(1-v)^n\,dv = uB(n, n+1)$$

Somit ist wegen (8), (9)

$$R_n(1) = \int_0^1 Q_n(u)\,du/u \leqslant B(n, n+1).$$

Daher folgt aus (13) und (4), (5)

$$c_n(\eta) \leq B(n, n+1)/Q_n(\tfrac{1}{2}) \log 2 = 2B(n, n+1)/B(n+1, n+1) \log 2$$
$$= 2\left(2+\frac{1}{n}\right)\Big/\log 2 \leq 6/\log 2.$$

5. Wir definieren

$$F(t) = t - \tfrac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\int_0^{a(t)} \frac{ye^{-y}}{1+e^{-y}}\,dy, \qquad a(t) = 2\pi(t-\tfrac{1}{4})^{1/2} \tag{17}$$

und zeigen

$$\pi\int_0^{(t-1/4)^{1/2}} \frac{r^2+\frac{1}{4}}{\operatorname{Cos}^2 \pi r}\,dr = t\operatorname{Tg}\pi(t-\tfrac{1}{4})^{1/2} - F(t) \tag{18}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{r^2+\frac{1}{4}}{\operatorname{Cos}^2 \pi r}\,dr = \frac{1}{3\pi} \tag{19}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{ye^{-y}}{1+e^{-y}}\,dy = \pi^2/12. \tag{20}$$

Beweis. Setzen wir

$$J(\rho) = \int_0^{\rho} x^2\,dx/\operatorname{Cos}^2 x, \tag{21}$$

so wird

$$\pi\int_0^{(t-1/4)^{1/2}} \frac{r^2+\frac{1}{4}}{\operatorname{Cos}^2 \pi r}\,dr = \frac{1}{\pi^2} J(\pi(t-\tfrac{1}{4})^{1/2}) + \tfrac{1}{4}\operatorname{Tg}\pi(t-\tfrac{1}{4})^{1/2}. \tag{22}$$

Aus (21) ergibt sich durch zweimalige partielle Integration

$$J(\rho) = \rho^2 \operatorname{Tg}\rho - 2\rho \log \operatorname{Cos}\rho + 2\int_0^{\rho} \log \operatorname{Cos} x\,dx. \tag{23}$$

Wegen

$$2 \log \operatorname{Cos} x = 2x - 2\log 2 + 2\log(1+e^{-2x}) \tag{24}$$

wird

$$2\int_0^{\rho} \log \operatorname{Cos} x\, dx = \rho^2 - 2\rho \log 2 + \int_0^{2\rho} \log(1+e^{-y})\, dy. \tag{25}$$

Aus (23)–(25) ergibt sich

$$J(\rho) = \rho^2 Tg\rho - \rho^2 - 2\rho \log(1+e^{-2\rho}) + \int_0^{2\rho} \log(1+e^{-y})\, dy.$$

Daraus folgt durch partielle Integration:

$$J(\rho) = \rho^2 Tg\rho - \rho^2 + \int_0^{2\rho} \frac{ye^{-y}}{1+e^{-y}}\, dy. \tag{26}$$

Nun folgt die Behauptung (18) aus (22) und (26). Daraus ergibt sich ferner

$$\pi \int_0^{\infty} \frac{r^2+\frac{1}{4}}{\operatorname{Cos}^2 \pi r}\, dr = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{ye^{-y}}{1+e^{-y}}\, dy + \tfrac{1}{4}$$

Nun ist aber

$$\int_0^{\infty} \frac{ye^{-y}}{1+e^{-y}}\, dy = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\infty} ye^{-(k+1)y}\, dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \pi^2/12.$$

Somit sind auch (19) und (20) bewiesen.

4. "Grosse" Hilfssätze

SATZ 1. *Es sei*

$$t \geqslant \tfrac{1}{4}, \qquad 0 < \eta < 1, \qquad \xi = \xi(r) = \exp(-(r^2+\tfrac{1}{4})t^{-1} \log \eta^{-1}).$$

Dann gilt für alle Flächen $\mathcal{F}$ mit $l(\mathcal{F}) \geqslant \mu > 0$:

$$(g(\mathcal{F})-1)^{-1} \int_0^1 A(t \log v^{-1}/\log \eta^{-1}, \mathcal{F}) P_n(v)\, dv$$

$$= \frac{\pi t}{\log \eta^{-1}} \int_0^{\infty} T_n(\xi) \operatorname{Cos}^{-2} \pi r\, dr + Q_n(\tfrac{1}{2}) G_n$$

mit

$$|G_n| \leqslant \frac{\alpha}{\mu^2} \frac{2^{3n}}{\eta^{2n+1}}, \qquad (\alpha = 160).$$

Beweis. Der Beweis stützt sich auf die Selbergsche Spurformel (3.2) in [5]. Wählt man in jener Formel

$$h(r) = \exp(-sr^2), \qquad s > 0,$$

so ergibt sich für $s > 0$:

$$2e^{s/4} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-s\lambda_k} = \frac{2\pi}{s}(g(\mathscr{F}) - 1) \int_0^{\infty} e^{-sr^2} \operatorname{Cos}^{-2} \pi r \, dr + D(s)/2\pi^{1/2} s^{1/2} \tag{1}$$

mit

$$D(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} l_i \operatorname{Sin}^{-1}(kl_i/2) \exp(-k^2 l_i^2/4s). \tag{2}$$

Dabei sind die l_i die Längen der primitiven geschlossenen Geodätischen auf $\mathscr{F}$. Wegen $l_i \geqslant l(\mathscr{F}) \geqslant \mu$ wird

$$\exp(-k^2 l_i^2/4s) \leqslant \exp(-\mu^2/8s) \exp(-k^2 l_i^2/8s), \qquad k \geqslant 1, \qquad s > 0.$$

Daher folgt aus (2)

$$D(s) \leqslant \exp(-\mu^2/8s) D(2s), \qquad s > 0. \tag{3}$$

Wegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-s\lambda_k} = s \int_0^{\infty} A(\lambda, \mathscr{F}) e^{-s\lambda} \, d\lambda$$

können wir die Spurformel (1) in der folgenden Gestalt schreiben:

$$(g(\mathscr{F}) - 1)^{-1} \int_0^{\infty} A(\lambda, \mathscr{F}) e^{-s\lambda} \, d\lambda = \frac{\pi}{s^2} \int_0^{\infty} \exp(-(r^2 + \tfrac{1}{4})s) \operatorname{Cos}^{-2} \pi r \, dr + E(s) \tag{4}$$

$$E(s) = s^{-3/2} e^{-s/4} D(s)/4\pi^{1/2}(g-1). \tag{5}$$

Daraus folgt zunächst

$$0<E(s)<(g-1)^{-1}\int_0^\infty A(\lambda)e^{-s\lambda}\,d\lambda$$

und somit nach unserem Lemma:

$$E(s)\leqslant\frac{3}{s}\left(b+\frac{1}{s}\right),\qquad b=\operatorname{Sin}^{-2}\mu/4.$$

Daraus folgt nach (5):

$$D(s)/4\pi^{1/2}(g-1)\leqslant 3s^{1/2}\left(b+\frac{1}{s}\right)e^{s/4}$$

Somit folgt aus (3)

$$D(s)/4\pi^{1/2}(g-1)\leqslant 3\sqrt{2}\,s^{1/2}\left(b+\frac{1}{2s}\right)e^{s/2}\exp(-\mu^2/8s).$$

Daher ergibt sich wieder aus (5):

$$E(s)\leqslant 3\sqrt{2}\,s^{-1}e^{s/4}\left(b+\frac{1}{2s}\right)\exp(-\mu^2/8s). \tag{6}$$

Nun ist aber

$$\left(b+\frac{1}{2s}\right)\exp(-\mu^2/8s)\leqslant b+\operatorname*{Max}_{s>0}\frac{1}{2s}\exp(-\mu^2/8s)=b+4e^{-1}\mu^{-2}$$
$$=\left(16\left(\frac{\mu/4}{\operatorname{Sin}\mu/4}\right)^2+4e^{-1}\right)\mu^{-2}\leqslant(16+4e^{-1})\mu^{-2}.$$

Somit folgt aus (6):

$$E(s)\leqslant\frac{\alpha}{2s\mu^2}e^{s/4},\qquad(\alpha=160). \tag{7}$$

Aus (4) und 3.(1), 3.(8) ergibt sich

$$(g-1)^{-1}\int_0^\infty A(\lambda)P_n(e^{-s\lambda})e^{-s\lambda}\,d\lambda = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(g-1)^{-1}\int_0^\infty A(\lambda)e^{-(n+k+1)s\lambda}\,d\lambda$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{\pi}{(n+k+1)^2s^2}\int_0^\infty \exp\left(-(r^2+\tfrac{1}{4})(n+k+1)s\right)\operatorname{Cos}^{-2}\pi r\,dr + E((n+k+1)s)\right)$$

$$= \frac{\pi}{s^2}\int_0^\infty T_n(\exp\left(-(r^2+\tfrac{1}{4})s\right)\operatorname{Cos}^{-2}\pi r\,dr + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}E((n+k+1)s).$$

Machen wir im ersten Integral die Variabelnsubstitution $v=e^{-s\lambda}$, so ergibt sich

$$(g-1)^{-1}\int_0^1 A(s^{-1}\log v^{-1})P_n(v)\,dv$$

$$= \frac{\pi}{s}\int_0^\infty T_n(\exp\left(-(r^2+\tfrac{1}{4})s\right)\operatorname{Cos}^{-2}\pi r\,dr + Q_n(\tfrac{1}{2})G_n \tag{8}$$

mit

$$G_n = sQ_n^{-1}(\tfrac{1}{2})\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}E((n+k+1)s).$$

Wegen 3.(7) und $E>0$ folgt daraus

$$|G_n| \leq 2s(n+1)2^{2n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E((n+k+1)s). \tag{9}$$

Nach (7) gilt aber

$$E((n+k+1)s) \leq \frac{\alpha}{2(n+k+1)s\mu^2}e^{(n+k+1)s/4} \leq \frac{\alpha}{2(n+1)s\mu^2}e^{(2n+1)s/4}.$$

Somit folgt aus (9)

$$|G_n| \leq \frac{\alpha}{\mu^2}2^{3n}e^{(2n+1)s/4}. \tag{10}$$

Nun folgt Satz 1 aus (8) und (10) für

$$s = t^{-1}\log\eta^{-1} \leq 4\log\eta^{-1}.$$

SATZ 2. *Für* $\frac{1}{2}<\eta<1$, $t\geqslant\frac{1}{4}$ *gilt*

$$\frac{\pi t}{\log \eta^{-1}}\int_0^\infty \frac{T_n(\xi)}{Q_n(\eta)}\operatorname{Cos}^{-2}\pi r\,dr$$

$$\leqslant F(t)+S(\eta,t)+t(c_n(\eta)-1)+\frac{2t}{\log \eta^{-1}}(n+1)(4\eta(1-\eta))^n.$$

Dabei ist $S(\eta,t)$ *stetig in* $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]\times[\frac{1}{4},\infty)$ *und* $S(\frac{1}{2},t)=0$ *für* $t\geqslant\frac{1}{4}$.

Beweis. Wegen $\xi(r)=\exp(-(r^2+\frac{1}{4})t^{-1}\log\eta^{-1})$ ist nach 3.(9)

$$T_n(\xi)=R_n(\xi)-Q_n(\xi)(r^2+\tfrac{1}{4})t^{-1}\log\eta^{-1}$$

Somit wird

$$\int_0^\infty \frac{T_n(\xi)}{Q_n(\eta)}\operatorname{Cos}^{-2}\pi r\,dt=I_1-I_2t^{-1}\log\eta^{-1} \tag{11}$$

mit

$$I_1=\int_0^\infty \frac{R_n(\xi)}{Q_n(\eta)}\frac{dr}{\operatorname{Cos}^2\pi r}=\int_{\xi(r)<1-\eta}+\int_{\xi(r)\geqslant 1-\eta}=B_1+B_2. \tag{12}$$

$$I_2=\int_0^\infty \frac{Q_n(\xi)}{Q_n(\eta)}\frac{r^2+\frac{1}{4}}{\operatorname{Cos}^2\pi r}\,dr\geqslant\int_{\xi(r)\geqslant\eta}\frac{r^2+\frac{1}{4}}{\operatorname{Cos}^2\pi r}\,dr=\int_0^{(t-1/4)^{1/2}}\frac{r^2+\frac{1}{4}}{\operatorname{Cos}^2\pi r}\,dr. \tag{13}$$

Im Integral B_1 wird

$$\frac{R_n(\xi)}{Q_n(\eta)}\leqslant\frac{R_n(1-\eta)}{Q_n(\eta)}\leqslant\frac{\eta^n(1-\eta)^n}{Q_n(\frac{1}{2})}\int_0^1\log v^{-1}\,dv=\frac{\eta^n(1-\eta)^n}{Q_n(\frac{1}{2})}$$
$$\leqslant 2(n+1)(4\eta(1-\eta))^n$$

(siehe 3.(10) und 3.(7)). Daraus ergibt sich

$$B_1\leqslant 2(n+1)(4\eta(1-\eta))^n\int_0^\infty\operatorname{Cos}^{-2}\pi r\,dr=\frac{2}{\pi}(n+1)(4\eta(1-\eta))^n. \tag{14}$$

Im Integral B_2 wird

$$\frac{R_n(\xi)}{Q_n(\eta)}\leqslant\frac{R_n(1)}{Q_n(\eta)}=c_n(\eta)\log 2,$$

(siehe 3.(13)). Somit wird

$$B_2 \leq c_n(\eta) \log 2 \int_{\xi(r) \geq 1-\eta} \operatorname{Cos}^{-2} \pi r \, dr = c_n(\eta) \log 2 \int_0^w \operatorname{Cos}^{-2} \pi r \, dr$$

$$= \frac{\log 2}{\pi} c_n(\eta) Tg \pi w \tag{15}$$

$$w = \left(\frac{\log (1-\eta)^{-1}}{\log \eta^{-1}} t - \tfrac{1}{4} \right)^{1/2} > (t - \tfrac{1}{4})^{1/2}. \tag{16}$$

Aus (11)–(15) ergibt sich nun wegen 3.(18)

$$\frac{\pi t}{\log \eta^{-1}} \int_0^\infty \frac{T_n(\xi)}{Q_n(\eta)} \operatorname{Cos}^{-2} \pi r \, dr$$

$$\leq \frac{\log 2}{\log \eta^{-1}} c_n(\eta) t Tg \pi w - \pi \int_0^{(t-1/4)^{1/2}} \frac{r^2 + \frac{1}{4}}{\operatorname{Cos}^2 \pi r} dr + \frac{2t}{\log \eta^{-1}} (n+1)(4\eta(1-\eta))^n$$

$$= F(t) + td + \frac{2t}{\log \eta^{-1}} (n+1)(4\eta(1-\eta))^n. \tag{17}$$

mit

$$d = \frac{\log 2}{\log \eta^{-1}} c_n(\eta) Tg \pi w - Tg \pi (t - \tfrac{1}{4})^{1/2}$$

$$= \frac{\log 2}{\log \eta^{-1}} c_n(\eta)(Tg \pi w - Tg \pi (t - \tfrac{1}{4})^{1/2}) + \left(\frac{\log 2}{\log \eta^{-1}} c_n(\eta) - 1 \right) Tg \pi (t - \tfrac{1}{4})^{1/2}$$

$$\leq \frac{\log 2}{\log \eta^{-1}} c_n(\eta)(Tg \pi w - Tg \pi (t - \tfrac{1}{4})^{1/2}) + \left(\frac{\log 2}{\log \eta^{-1}} - 1 \right) c_n(\eta) + c_n(\eta) - 1.$$

Somit wird wegen 3.(16)

$$d \leq \frac{6}{\log \eta^{-1}} (Tg \pi w - Tg \pi (t - \tfrac{1}{4})^{1/2}) + \frac{6}{\log 2} \left(\frac{\log 2}{\log \eta^{-1}} - 1 \right) + c_n(\eta) - 1. \tag{18}$$

Definieren wir jetzt

$$S(\eta, t) = \frac{6t}{\log \eta^{-1}} (Tg \pi w - Tg \pi (t - \tfrac{1}{4})^{1/2}) + \frac{6t}{\log 2} \left(\frac{\log 2}{\log \eta^{-1}} - 1 \right),$$

so folgt aus (17) und (18)

$$\frac{\pi t}{\log \eta^{-1}} \int_0^\infty \frac{T_n(\xi)}{Q_n(\eta)} \operatorname{Cos}^{-2} \pi r \, dr$$

$$\leq F(t) + S(\eta, t) + t(c_n(\eta) - 1) + \frac{2t}{\log \eta^{-1}} (n+1)(4\eta(1-\eta))^n.$$

Wegen (16) ist $S(\eta, t)$ in der Tat stetig in $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \times [\frac{1}{4}, \infty)$ und es gilt $S(\frac{1}{2}, t) = 0$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

SATZ 3. *Zu $\delta > \frac{1}{4}$ werde $\eta_0 \in (0, \frac{1}{2})$ so gewählt, dass*

$$\frac{\log (1-\eta)^{-1}}{\log \eta^{-1}} \delta - \tfrac{1}{4} > 0 \quad \forall \eta \in [\eta_0, \tfrac{1}{2}].$$

Dann gilt für $\eta \in (\eta_0, \frac{1}{2})$ und $t \geq \delta$:

$$F(t) \leq \frac{\pi t}{\log \eta^{-1}} \int_0^\infty \frac{T_n(\xi)}{Q_n(1-\eta)} \operatorname{Cos}^{-2} \pi r \, dr + R(\eta, t) + \tfrac{1}{3}(n+1)(4\eta(1-\eta))^n.$$

Dabei ist $R(\eta, t)$ stetig in $[\eta_0, \frac{1}{2}] \times [\delta, \infty)$ und $R(\frac{1}{2}, t) = 0$ für $t \geq \delta$.

Beweis. Wegen $\xi(r) = \exp(-(r^2 + \frac{1}{4}) t^{-1} \log \eta^{-1})$ ist nach 3.(9)

$$\int_0^\infty \frac{T_n(\xi)}{Q_n(1-\eta)} \operatorname{Cos}^{-2} \pi r \, dr = I_1 - I_2 t^{-1} \log \eta^{-1} \tag{19}$$

mit

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{R_n(\xi)}{Q_n(1-\eta)} \operatorname{Cos}^{-2} \pi r \, dr \tag{20}$$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{Q_n(\xi)}{Q_n(1-\eta)} \frac{r^2 + \frac{1}{4}}{\operatorname{Cos}^2 \pi r} \, dr = \int_{\xi(r) < \eta} + \int_{\xi(r) \geq \eta} = B_1 + B_2. \tag{21}$$

Aus (20) ergibt sich

$$I_1 \geq \int_{\xi(r) \geq 1-\eta} \frac{R_n(\xi)}{Q_n(1-\eta)} \operatorname{Cos}^{-2} \pi r \, dr \geq \frac{R_n(1-\eta)}{Q_n(1-\eta)} \int_{\xi(r) \geq 1-\eta} \operatorname{Cos}^{-2} \pi r \, dr$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{R_n(1-\eta)}{Q_n(1-\eta)} \operatorname{Tg} \pi w \tag{22}$$

$$w = \left(\frac{\log (1-\eta)^{-1}}{\log \eta^{-1}} t - \tfrac{1}{4} \right)^{1/2} \geq \left(\frac{\log (1-\eta)^{-1}}{\log \eta^{-1}} \delta - \tfrac{1}{4} \right)^{1/2} > 0. \tag{23}$$

Nun ist aber

$$R_n(1-\eta)=\int_0^{1-\eta} P_n(v)\log v^{-1}\,dv \geqslant \log(1-\eta)^{-1}\int_0^{1-\eta} P_n(v)\,dv$$
$$=Q_n(1-\eta)\log(1-\eta)^{-1}$$

Somit folgt aus (22)

$$I_1 \geqslant \frac{\log(1-\eta)^{-1}}{\pi}\,Tg\pi w. \tag{24}$$

Im Integral B_1 ist

$$\frac{Q_n(\xi)}{Q_n(1-\eta)} \leqslant \frac{Q_n(\eta)}{Q_n(\frac{1}{2})} \leqslant \frac{\eta^n(1-\eta)^n}{2Q_n(\frac{1}{2})} \leqslant (n+1)(4\eta(1-\eta))^n.$$

Daher wird

$$B_1 \leqslant (n+1)(4\eta(1-\eta))^n \int_{\xi(r)<\eta} \frac{r^2+\frac{1}{4}}{\operatorname{Cos}^2 \pi r}\,dr$$
$$=(n+1)(4\eta(1-\eta))^n \int_{(t-1/4)^{1/2}}^{\infty} \frac{r^2+\frac{1}{4}}{\operatorname{Cos}^2 \pi r}\,dr \tag{25}$$

Im Integral B_2 ist wegen 3.(3)

$$\frac{Q_n(\xi)}{Q_n(1-\eta)} \leqslant \frac{Q_n(1)}{Q_n(1-\eta)} = 1+\frac{Q_n(\eta)}{Q_n(1-\eta)} \leqslant 1+\frac{Q_n(\eta)}{Q_n(\frac{1}{2})} \leqslant 1+(n+1)(4\eta(1-\eta))^n$$

Somit wird

$$B_2 \leqslant (1+(n+1)(4\eta(1-\eta))^n)\int_0^{(t-1/4)^{1/2}} \frac{r^2+\frac{1}{4}}{\operatorname{Cos}^2 \pi r}\,dr. \tag{26}$$

Aus (21), (25) und (26) ergibt sich wegen 3.(19):

$$I_2 \leqslant \int_0^{(t-1/4)^{1/2}} \frac{r^2+\frac{1}{4}}{\operatorname{Cos}^2 \pi r}\,dr + \frac{1}{3\pi}(n+1)(4\eta(1-\eta))^n \tag{27}$$

Aus (19), (24) und (27) ergibt sich wegen 3.(18):

$$\frac{\pi t}{\log \eta^{-1}} \int_0^\infty \frac{T_n(\xi)}{Q_n(1-\eta)} \operatorname{Cos}^{-2} \pi r \, dr$$

$$\geqslant \frac{\log (1-\eta)^{-1}}{\log \eta^{-1}} t \operatorname{Tg} \pi w - \pi \int_0^{(t-1/4)^{1/2}} \frac{r^2+\frac{1}{4}}{\operatorname{Cos}^2 \pi r} \, dr - \tfrac{1}{3}(n+1)(4\eta(1-\eta))^n$$

$$= F(t) - R(\eta, t) - \tfrac{1}{3}(n+1)(4\eta(1-\eta))^n \tag{28}$$

mit

$$R(\eta, t) = t\left(\operatorname{Tg} \pi (t-\tfrac{1}{4})^{1/2} - \frac{\log (1-\eta)^{-1}}{\log \eta^{-1}} \operatorname{Tg} \pi w\right).$$

Wegen (23) ist $R(\eta, t)$ stetig in $[\eta_0, \frac{1}{2}] \times [\delta, \infty)$ und es gilt $R(\frac{1}{2}, t) = 0$ für $t \geqslant \delta$. Daher ist mit (28) Satz 3 bewiesen.

5. Beweis des Theorems

1. Wir zeigen: Zu $\varepsilon > 0$, $T > \frac{1}{4}$ gibt es ein $\mu_1(\varepsilon, T) > 0$ derart, dass

$$A(t, \mathscr{F})/g(\mathscr{F}) - 1 < F(t) + \varepsilon$$

sobald $l(\mathscr{F}) > \mu_1$ und $t \in [\frac{1}{4}, T]$.

2. *Beweis.* Es sei

$$l(\mathscr{F}) \geqslant \mu > 0, \qquad \tfrac{1}{2} < \eta < 1, \qquad t \geqslant \tfrac{1}{4}. \tag{1}$$

Wegen

$$\int_0^1 A(t \log v^{-1}/\log \eta^{-1}) P_n(v) \, dv \geqslant \int_0^\eta \geqslant A(t) \int_0^\eta P_n(v) \, dv = A(t) Q_n(\eta)$$

folgt aus Satz 1:

$$A(t)/g - 1 \leqslant \frac{\pi t}{\log \eta^{-1}} \int_0^\infty \frac{T_n(\xi)}{Q_n(\eta)} \operatorname{Cos}^{-2} \pi r \, dr + \frac{\alpha}{\mu^2} \frac{2^{3n}}{\eta^{2n+1}}.$$

Somit folgt aus Satz 2:

$$A(t)/g-1 \leqslant F(t)+S(\eta, t)+t(c_n(\eta)-1)+\frac{2t}{\log \eta^{-1}}(n+1)(4\eta(1-\eta))^n$$
$$+\frac{\alpha}{\mu^2}\frac{2^{3n}}{\eta^{2n+1}}. \tag{2}$$

$S(\eta, t)$ ist gleichmässig stetig in $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]\times[\frac{1}{4}, T]$ und $S(\frac{1}{2}, t)=0$. Daher können wir $\eta=\eta(\varepsilon, T)\in(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ so wählen, dass $S(\eta, t)<\varepsilon/3\ \forall t\in[\frac{1}{4}, T]$. Dann folgt aus (2) für $t\in[\frac{1}{4}, T]$:

$$A(t)/g-1<F(t)+\varepsilon/3+T(c_n(\eta)-1)+\frac{2T}{\log \eta^{-1}}(n+1)(4\eta(1-\eta))^n+\frac{\alpha}{\mu^2}\frac{2^{3n}}{\eta^{2n+1}}.$$

Wegen $4\eta(1-\eta)<1$ und 3.(14) können wir alsdann $n=n(\eta, T, \varepsilon)$ so wählen, dass

$$T(c_n(\eta)-1)+\frac{2T}{\log \eta^{-1}}(n+1)(4\eta(1-\eta))^n<\varepsilon/3$$

und haben nun

$$A(t, \mathscr{F})/g(\mathscr{F})-1<F(t)+2\varepsilon/3+\frac{\alpha}{\mu^2}\frac{2^{3n}}{\eta^{2n+1}}$$

sobald $l(\mathscr{F})\geqslant\mu$ und $t\in[\frac{1}{4}, T]$. Damit ist 1. bewiesen.

3. Jetzt zeigen wir: Zu $\varepsilon>0$, $T>\frac{1}{4}$ gibt es ein $\mu_2(\varepsilon, T)>0$ derart, dass

$$F(t)<A(t, \mathscr{F})/g(\mathscr{F})-1+\varepsilon \tag{3}$$

soblad $l(\mathscr{F})>\mu_2$ und $t\in[\frac{1}{4}, T]$.

4. *Beweis.* Wegen $F(\frac{1}{4})=0$ können wir zunächst $\delta=\delta(\varepsilon)>\frac{1}{4}$ so wählen, dass

$$F(t)<\varepsilon\ \forall t\in[\tfrac{1}{4}, \delta].$$

Dann gilt die Ungleichung (3) für $t\in[\frac{1}{4}, \delta]$ und alle Flächen $\mathscr{F}$. Es sei nun

$$l(\mathscr{F})\geqslant\mu>4, \qquad t\geqslant\delta. \tag{4}$$

$\eta_0 \in (0, \frac{1}{2})$ werde so gewählt, dass

$$\frac{\log(1-\eta)^{-1}}{\log \eta^{-1}} \delta - \tfrac{1}{4} > 0 \quad \forall \eta \in [\eta_0, \tfrac{1}{2}] \tag{5}$$

Für $\eta \in (\eta_0, \frac{1}{2})$ gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 & A(t \log v^{-1}/\log \eta^{-1}) P_n(v)\, dv \\ &= \int_0^\eta + \int_\eta^1 \leqslant \eta^n (1-\eta)^n \int_0^1 A(t \log v^{-1}/\log \eta^{-1})\, dv + A(t) \int_\eta^1 P_n(v)\, dv. \end{aligned} \tag{6}$$

Nach 3.(3) ist aber $\int_\eta^1 P_n(v)\, dv = Q_n(1-\eta)$ und aus unserem Lemma ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^1 A(t \log v^{-1}/\log \eta^{-1})\, dv &= t^{-1} \log \eta^{-1} \int_0^\infty A(\lambda) \exp(-\lambda t^{-1} \log \eta^{-1})\, d\lambda \\ &\leqslant 3(g-1)\left(\frac{t}{\log \eta^{-1}} + \operatorname{Sin}^{-2} \mu/4\right) \\ &\leqslant 3(g-1)\left(\frac{t}{\log \eta^{-1}} + 1\right).\end{aligned}$$

Sommit folgt aus (6):

$$\begin{aligned}Q_n^{-1}(1-\eta)(g-1)^{-1} & \int_0^1 A(t \log v^{-1}/\log \eta^{-1}) P_n(v)\, dv \\ &\leqslant 3\left(\frac{t}{\log \eta^{-1}} + 1\right) \frac{\eta^n (1-\eta)^n}{Q_n(1-\eta)} + \frac{A(t)}{g-1} \\ &\leqslant 6\left(\frac{t}{\log \eta^{-1}} + 1\right)(n+1)(4\eta(1-\eta))^n + \frac{A(t)}{g-1},\end{aligned}$$

(wegen $Q_n(1-\eta) \geqslant Q_n(\frac{1}{2})$ und 3.(7)). Daher folgt aus Satz 1:

$$\begin{aligned}\frac{\pi t}{\log \eta^{-1}} \int_0^\infty \frac{T_n(\xi)}{Q_n(1-\eta)} \operatorname{Cos}^{-2} \pi r\, dr \leqslant & \frac{A(t)}{g-1} + 6\left(\frac{t}{\log \eta^{-1}} + 1\right)(n+1)(4\eta(1-\eta))^n \\ & + \frac{\alpha}{\mu^2} \frac{2^{3n}}{\eta^{2n+1}}\end{aligned}$$

Somit folgt aus Satz 3:

$$F(t) \leqslant \frac{A(t)}{g-1} + R(\eta, t) + \left(7 + \frac{6t}{\log \eta^{-1}}\right)(n+1)(4\eta(1-\eta))^n + \frac{\alpha}{\mu^2} \frac{2^{3n}}{\eta^{2n+1}} \tag{7}$$

$R(\eta, t)$ ist gleichmässig stegig in $[\eta_0, \frac{1}{2}] \times [\delta, T]$ und $R(\frac{1}{2}, t) = 0$. Daher können wir $\eta = \eta(\varepsilon, T) \in (\eta_0, \frac{1}{2})$ so wählen, dass

$$R(\eta, t) < \varepsilon/3 \quad \forall t \in [\delta, T].$$

Dann folgt aus (7) für $t \in [\delta, T]$:

$$F(t) \leqslant \frac{A(t)}{g-1} + \varepsilon/3 + \left(7 + \frac{6T}{\log \eta^{-1}}\right)(n+1)(4\eta(1-\eta))^n + \frac{\alpha}{\mu^2} \frac{2^{3n}}{\eta^{2n+1}}.$$

Wegen $4\eta(1-\eta) < 1$ können wir endlich $n = n(\eta, T, \varepsilon)$ so wählen, dass der dritte Term kleiner als $\varepsilon/3$ ausfällt und haben dann

$$F(t) \leqslant A(t, \mathscr{F})/g(\mathscr{F}) - 1 + 2\varepsilon/3 + \frac{\alpha}{\mu^2} \frac{2^{3n}}{\eta^{2n+1}}$$

sobald $l(\mathscr{F}) \geqslant \mu > 4$ und $t \in [\delta, T]$. Damit ist 3. bewiesen und folglich auch unser Theorem.

LITERATUR

[1] BUSER, P., *Riemannsche Flächen mit grosser Kragenweite*, Comment. Math. Helv. *53* (1978).

[2] HARDY, G. H. and LITTLEWOOD, J. E., *Notes on the theory of series (XI): On Tauberian theorems.* Collected papers of G. H. Hardy, vol. VI, 745–759, (Oxford 1974).

[3] HUBER, H., *Ueber den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen*, Comment. Math. Helv. *49* (1974) 251–259.

[4] HUBER, H., *Ueber die Eigenwerte des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen*, Comment. Math. Helv. *51* (1976) 215–231.

[5] SELBERG, A., *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. *20* (1956) 47–87.

Mathematisches Institut der Universität
Rheinsprung 21, CH-4000 Basel.

Eingegangen den 2. Februar 1982