Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 57 (1982)

Artikel: Equivalence élémentaire entre groupes finis-par-abéliens de type fini.
Autor: Oger, Francis
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43896

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 57 (1982) 469–480

0010-2571/82/003469-12$01.50 + 0.20/0
© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

Equivalence élémentaire entre groupes finis-par-abéliens de type fini

FRANCIS OGER

I. Introduction

Notre étude trouve son origine dans l'article [M], où Guido Mislin a donné, en 1974, une famille d'exemples de deux groupes G et H, nilpotents de classe 2, de type fini, à groupes dérivés finis, non isomorphes, qui vérifient $G \times \mathbf{Z} \cong H \times \mathbf{Z}$. (Rappelons qu'un groupe est dit *de type fini* s'il admet un système fini de générateurs.)

Les exemples de Mislin ont été repris par Warfield dans [W] (théorème 5.9 et exemple 8.16).

Dès 1971, Zil'ber, dans [Z], a étudié un de ces exemples, selon une perspective différente. Il a montré que les groupes considérés sont élémentairement équivalents. (Les groupes G et H sont *élémentairement équivalents* – ce que nous noterons par $G \equiv H$ – si toute formule ϕ du calcul des prédicats du premier ordre qui est valable dans l'un des deux groupes est aussi valable dans l'autre: $G \models \phi$ si et seulement si $H \models \phi$.)

Le résultat de Zil'ber paraît par la suite avoir été plus ou moins oublié. Personne ne semble s'en être inspiré; l'auteur du présent article n'en a eu connaissance que récemment.

Dans notre article, l'équivalence des propriétés $G \times \mathbf{Z} \cong H \times \mathbf{Z}$ et "$G \equiv H$" est prouvée pour les groupes finis-par-abéliens de type fini, et donc, en particulier, pour les exemples de Mislin.

On montre dans [W1] que, pour les groupes finis-par-abéliens de type fini, la propriété $G \times \mathbf{Z} \cong H \times \mathbf{Z}$ est équivalente à "G et H ont les mêmes images finies", ou encore, d'après [GPS], à "G et H ont la même complétion profinie".

L'idée principale de notre étude consiste à comparer les extensions élémentaires "suffisamment" saturées des groupes que nous considérons aux complétions profinies de ces groupes.

On trouvera dans [CK] les définitions et les résultats de théorie des modèles utilisés ici. Pour la théorie des groupes, on se reportera à [W] et [R].

Les résultats démontrés dans cet article étant susceptibles d'être étendus, nous

présentons toutes les propriétés intermédiaires sous une forme aussi générale que possible.

Un résumé de cet exposé figure dans [O1].

II Résultats préliminaires

1. *Groupes polycycliques-par-finis*

Dans cette partie, la plupart des résultats seront donnés sans démonstration. Le lecteur trouvera dans [GPS] d'utiles précisions.

PROPOSITION 2.1. *Soit G un groupe polycyclique-par-fini. Pour tout entier k, G/G^k est fini. De plus, il existe, pour tout entier k, un entier $n(k)$ tel que tout élément de G^k s'écrive $x_1^k \dots x_{n(k)}^k$ avec $x_1, \dots, x_{n(k)} \in G$.*

Démonstration. Il nous suffit d'établir, pour les groupes polycycliques-par-finis, la propriété (P): "Pour tout entier k, il existe des entiers $n(k)$ et $r(k)$ et des éléments $a_1, \dots, a_{r(k)}$ de G tels que tout élément de G soit de la forme $a_i \cdot x_1^k \dots x_{n(k)}^k$".

Les groupes finis et les groupes cycliques vérifient la propriété (P).

Le lecteur montrera aisément que si le groupe G est extension du groupe H par le groupe K, H et K vérifiant la propriété (P), alors G vérifie aussi la propriété (P).

On trouve dans [GPS] la définition de la topologie profinie et de la complétion profinie $\hat{G}$ d'un groupe polycyclique-par-fini G.

[GPS] établit que deux groupes polycycliques-par-finis ont la même complétion profinie ssi ils ont les mêmes images finies, et que toute classe de groupes polycycliques-par-finis ayant la même complétion profinie est réunion d'un nombre fini de classes d'isomorphisme. Cette dernière propriété généralise des résultats de [P1] et [P2].

[GPS] exprime aussi $\hat{G}$ comme limite projective:

$$\hat{G} = \varprojlim \{G/G^k \mid k \in \mathbf{N}^*\} = \varprojlim \{G/G^{n!} \mid n \in \mathbf{N}^*\}$$

Enfin, [GPS] montre, à la Proposition 2.1, que la topologie de $\hat{G}$ en tant que complétion de G coincide avec la topologie profinie, définie sur $\hat{G}$.

On a, évidemment, $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \hat{G}^{n!} = \{1\}$.

2. *Groupes finis-par-nilpotents de type fini*

Si G est un tel groupe, la suite centrale descendante $(\Gamma_i(G))_{i\in\mathbf{N}^*}$ est stationnaire; on peut donc définir, en la raffinant, une suite décroissante $(G_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ de sous-groupes de G pour laquelle:

(a) $G_1 = G$ et G_{n+1} est fini
(b) pour $1\leqslant i\leqslant n$, $[G, G_i]\subset G_{i+1}$
(c) pour $1\leqslant i\leqslant n$, G_i/G_{i+1} est cyclique.

A chaque entier $1\leqslant i\leqslant n$, on associe, alors, un entier r_i qui vaut 1 si G_i/G_{i+1} est infini et $|G_i/G_{i+1}|$ sinon. On note $r = |G_{n+1}|$.

PROPOSITION 2.2. *Un groupe fini-par-nilpotent de type fini G est polycylique-par-fini.*

Démonstration. G est poly-(cyclique ou fini), d'après ce que nous venons de voir, et donc polycyclique-par-fini (voir [R] page 65).

PROPOSITION 2.3. *Soit G un groupe fini-par-nilpotent de type fini. Avec les notations que nous venons d'introduire, si x est un élément de G et k un entier,*

$$|\{y\in G \mid y^k = x\}|\leqslant r_1 \ldots r_n \cdot r.$$

Cette propriété reste vraie pour tout groupe élémentairement équivalent à G.

Démonstration. Choisir un élément y tel que $y^k = x$, c'est préciser successivement ses classes modulo $G_1, \ldots, G_{n+1}, \{1\}$.

Si $1\leqslant i\leqslant n$, la classe de y modulo G_i étant donnée, on a, au plus, r_i choix possibles pour la classe de y modulo G_{i+1}: si $x = y^k = (ay)^k$ avec $a\in G_i$, on a, modulo G_{i+1}, $y^k = (ay)^k \approx a^k y^k$, d'où $a^k \approx 1$. Or, $\{a\in G_i/G_{i+1} \mid a^k = 1\}$ comporte, au plus, r_i éléments.

La classe de y modulo G_{n+1} étant donnée, on a, au plus, $|G_{n+1}|$ choix possibles pour y.

COROLLAIRE 2.4. *Si G est un groupe fini-par-nilpotent de type fini, l'ensemble $t(G)$ des éléments de torsion de G est un groupe fini.*

Démonstration. D'après le théorème 3.25 de [W], l'ensemble des éléments de torsion d'un groupe nilpotent est un sous-groupe. Cette propriété passe naturellement aux groupes finis par-nilpotents.

D'autre part, avec les notations de la Proposition 2.3, pour tout entier k, $|\{y \in G \mid y^k = 1\}| \leqslant r_1 \cdots r_n \cdot r$. Il existe donc un entier k tel que, pour tout entier l, $\{y \in G \mid y^l = 1\} \subset \{y \in G \mid y^k = 1\}$. On a alors: $t(G) = \{y \in G \mid y^k = 1\}$, d'où le résultat.

PROPOSITION 2.5. *Soit G un groupe fini-par-nilpotent de type fini. Pour tout entier $l \geqslant 1$, il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que tout élément de G^k soit de la forme x^l avec $x \in G$.*

Démonstration. Soit c un entier pour lequel $\Gamma_{c+1}(G)$ est fini. Puisque $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} G^n = \{1\}$, il existe un entier $n \geqslant 1$ pour lequel $G^n \cap \Gamma_{c+1}(G) = \{1\}$. Le groupe G^n est alors nilpotent de classe c.

D'après le lemme 2 de [Ma], tout élément de $(G^n)^{l^c}$ est de la forme x^l avec $x \in G^n$. Ainsi, l'entier $k = n \cdot l^c$ est tel que tout élément de $G^k \subset (G^n)^{l^c}$ est de la forme x^l avec $x \in G$.

III. Groupes polycycliques-par-finis

On considère, ici, un groupe polycyclique-par-fini G et une extension élémentaire S de G.

On définit le sous-groupe E_S des $x \in S$ qui sont tels que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un entier k et des éléments $a_1, \ldots, a_k$ de S tels que $x = a_1^n \cdots a_k^n$; $E_S = \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} S^n$.

D'après la Proposition 2.1, il existe, pour tout entier k, un entier N_k, tel que tout élément de G^k s'écrive: $a_1^k \cdots a_{N_k}^k$ avec $a_1, \ldots, a_{N_k} \in G$. Les entiers N_k seront fixés pour le présent chapitre.

LEMME 3.1. *Pour tout entier k, tout élément de S^k s'écrit sous la forme $x_1^k \cdots x_{N_k}^k$ avec $x_1, \ldots, x_{N_k} \in S$.*

Démonstration. Pour tout entier n, G vérifie l'énoncé:

$$(\forall x)[(\exists x_1 \cdots \exists x_n)(x = x_1^k \cdots x_n^k) \to (\exists x_1 \cdots \exists x_{N_k})(x = x_1^k \cdots x_{N_k}^k)];$$

donc, S vérifie ce même énoncé quel que soit n. D'où le lemme.

PROPOSITION 3.2. *E_S est un sous-groupe caractéristique de S. D'autre part, $E_S \cap G = \{1\}$.*

Démonstration du second résultat. Soit $x \in G \cap E_S$. Pour prouver que $x = 1$, il suffit d'établir que $x \in G^k$ pour tout entier k.

Pour tout entier k, $x \in S^k$, et donc il existe un entier n et des éléments $a_1, \ldots, a_n$ de S tels que $x = a_1^k \cdots a_n^k$.

De $S \models (\exists x_1 \cdots \exists x_n)(x = x_1^k \cdots x_n^k)$, on déduit $G \models (\exists x_1 \cdots \exists x_n)(x = x_1^k \cdots x_n^k)$, d'où le résultat cherché.

DÉFINITION. *Une extension élémentaire de G est dite G-saturée ssi elle réalise tous les 1-types à paramètres dans G.*

THÉORÈME 3.3. *Si S est G-saturée, alors S/E_S est isomorphe à la complétion profinie $\hat{G}$ de G.*

Démonstration. On définit l'isomorphisme comme suit:

A chaque $x \in \hat{G}$, on associe une suite d'éléments de G, $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, tendant vers x dans $\hat{G}$, telle que, pour tout entier n et tout entier $p \geqslant n$, $x_n \cdot x_p^{-1} \in G^{n!}$.

On note $\Sigma_x(v)$ l'ensemble constitué par les formules à une variable v à paramètres dans G:

$$(\exists u_1 \cdots \exists u_{N_{n!}})(v = x_n\, u_1^{n!} \cdots u_{N_{n!}}^{n!}).$$

Tout sous-ensemble fini de Σ_x est satisfaisable dans G, donc, Σ_x est satisfaisable dans l'extension G-saturée S de G.

Soit $y \in S$ tel que $S \models \Sigma_x(y)$.

Pour tout $z \in S$, $S \models \Sigma_x(z)$ ssi, pour tout entier n, $z \in S^{n!} \cdot y$; donc, pour tout $z \in S$, $S \models \Sigma_x(z)$ ssi $y \cdot z^{-1} \in E_S$.

On note f l'application obtenue en associant à tout élément x de $\hat{G}$ la classe modulo E_S des $y \in S$ qui vérifient $S \models \Sigma_x(y)$.

Il convient, tout d'abord, d'observer que la classe associée à chaque élément x de $\hat{G}$ ne dépend pas de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ choisie.

Soient $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(x'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites, dans G, qui tendent vers le même élément x de $\hat{G}$, et qui sont telles que, pour tout entier n et tout entier $p \geqslant n$,

$$x_n x_p^{-1} \in G^{n!} \quad \text{et} \quad x'_n x_p'^{-1} \in G^{n!}.$$

$(x_n x_n'^{-1})_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers 1 dans $\hat{G}$ et donc aussi dans G.

Pour tout entier n, il existe, par conséquent, un entier $k \geqslant n$ tel que $x_k x_k'^{-1} \in G^{n!}$. Il en résulte que $x_n x_n'^{-1} = (x_n x_k^{-1})(x_k x_k'^{-1})(x'_n x_k'^{-1})^{-1} \in G^{n!}$.

Ainsi, dans toute extension élémentaire de G,

$$(\exists u_1 \cdots \exists u_{N_{n!}})(v = x_n \cdot u_1^{n!} \cdots u_{N_{n!}}^{n!})$$

équivaut à

$$(\exists u_1 \cdots \exists u_{N_{n!}})(v = x'_n \cdot u_1^{n!} \cdots u_{N_{n!}}^{n!}).$$

On achève la démonstration du Théorème 3.3 en établissant successivement trois lemmes:

LEMME 3.3.1. *f est un homomorphisme de groupes.*

Démonstration. On considère deux éléments x, x' de $\hat{G}$ avec des suites associées $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies comme précédemment. $x_n x'_n$ tend vers xx'.

De plus, pour tout n et tout $p > n$, $a = x'_n x'^{-1}_p \in G^{n!}$, donc, il existe $b \in G^{n!}$ tel que $x_n a = b x_n$, d'où $(x_n x'_n)(x_p x'_p)^{-1} = x_n x'_n x'^{-1}_p x_p^{-1} = x_n a x_p^{-1} = b x_n x_p^{-1} \in G^{n!}$: Ainsi, $(x_n x'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est associé à xx'.

Soient y, y' des représentants dans S de $f(x), f(x')$. Nous devons montrer que yy' est un représentant de $f(xx')$ dans S.

Pour tout entier n, $y \in x_n \cdot S^{n!}$ et $y' \in x'_n \cdot S^{n!}$ et comme $S^{n!}$ est normal dans S, $yy' \in x_n x'_n \cdot S^{n!}$. Le Lemme 3.1 donne, alors, le résultat cherché.

LEMME 3.3.2. *f est injective.*

Démonstration. Pour la démonstration des Lemmes 3.3.2 et 3.3.3, nous noterons $\psi_k(x, y)$ la formule:

$$(\exists u_1 \cdots \exists u_{N_{k!}})(y = x u_1^{k!} \cdots u_{N_{k!}}^{k!}).$$

Dans G, cette formule équivaut à $xy^{-1} \in G^{k!}$. Dans S, d'après le Lemme 3.1, elle équivaut à $xy^{-1} \in S^{k!}$.

Pour montrer le Lemme 3.3.2, on considère un élément x de $\hat{G}$ qui est tel que $f(x) = 1$.

On se donne, comme précédemment, une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ associée à x.

Pour tout n, du fait que $f(x) = 1$,

$$S \models \psi_n(1, x_n), \quad \text{et donc} \quad G \models \psi_n(1, x_n).$$

Par conséquent, pour tout n, $x_n \in G^{n!}$, et $x = 1$.

LEMME 3.3.3. *f est surjective.*

Démonstration. A chaque élément y de S, nous allons associer une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de G telle que, pour tout n, $S\models\psi_n(x_n, y)$.

Nous aurons, alors, nécessairement, pour tout n et pour tout $p>n$, $S\models\psi_n(x_n, x_p)$ et donc $G\models\psi_n(x_n, x_p)$.

Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergera dans $\hat{G}$ vers un élément x qui vérifiera $f(x)=y$.

Il reste à établir l'existence des x_n.

Nous devons prouver que, pour tout $y\in S$ et tout entier k, il existe un élément $x\in G$ tel que $S\models\psi_k(x, y)$.

$G/G^{k!}$ est fini, donc, il existe un entier r tel que

$$G\models(\exists x_1\cdots\exists x_r)\left[\bigwedge_{1\leq i<j\leq r}\neg\psi_k(x_i, x_j)\wedge(\forall x)(\psi_k(x, x_1)\vee\cdots\vee\psi_k(x, x_r))\right]$$

S vérifie ce même énoncé, donc, il existe: $x_1, \ldots, x_r$ dans G tels que tout x dans G soit équivalent à un et un seul des x_i modulo $G^{k!}$, $y_1, \ldots, y_r$ dans S tels que tout x dans S soit équivalent à un et un seul des y_i modulo $S^{k!}$.

Chaque x_i est équivalent à un et un seul y_j modulo $S^{k!}$.

Pour établir que tout élément de S est équivalent à un x_i modulo $S^{k!}$, il nous suffit donc de voir que, pour $i\neq j$, $x_i x_j^{-1}\notin S^{k!}$.

Or, pour $i\neq j$, S ne peut pas vérifier la formule $\psi_k(x_i, x_j)$ puisque G ne la vérifie pas.

COROLLAIRE 3.4. *Soient G, H deux groupes polycycliques-par-finis, S une extension élémentaire G-saturée de G, et T une extension élémentaire H-saturée de H. Si $f: S\to T$ est un isomorphisme, la restriction de f à E_S est un isomorphisme de E_S vers E_T, et f induit par passage au quotient un isomorphisme de $\hat{G}$ vers $\hat{H}$.*

Démonstration. Il résulte de la définition de E_S et de E_T que $f(E_S)$ est contenu dans E_T et $f^{-1}(E_T)$ dans E_S. Donc, la restriction de f à E_S est un isomorphisme de E_S vers E_T.

Par passage au quotient, f induit un isomorphisme de $\hat{G}\cong S/E_S$ vers $\hat{H}\cong T/E_T$.

Remarque. Il résulte de ce corollaire que deux groupes polycycliques-par-finis élémentairement équivalents ont des complétions profinies isomorphes. Ils ont, alors, les mêmes images finies d'après le corollaire 2.3 de [GPS].

Ainsi, conformément au théorème donné dans l'introduction de [GPS], toute

classe de groupes polycycliques-par-finis élémentairement équivalents est obtenue par la réunion d'un nombre fini de classes d'isomorphisme.

IV. Groupes finis-par-nilpotents

THÉORÈME 4.1. *Soient G un groupe fini-par-nilpotent de type fini et S une extension élémentaire de G. Pour tout entier $n \geqslant 1$, tout élément de E_S admet dans E_S une racine n-ième et une seule (un groupe possèdant cette propriété sera dit radicable avec unicité).*

Démonstration. D'après la Proposition 3.2, $E_S \cap t(G) = \{1\}$. Ainsi, E_S est un groupe nilpotent sans torsion. Il résulte alors du théorème 4.10 de [W] que, pour tout entier $k \geqslant 1$, l'application $x \to x^k$ est injective dans E_S.

Nous allons, maintenant, démontrer la surjectivité de cette application.

Si G est tel que, pour deux entiers k, l, tout élément de G^k soit de la forme x^l, alors, pour tout entier r, G vérifie l'énoncé:

$$(\forall x)[(\exists x_1 \cdots x_r)(x = x_1^k \cdots x_r^k) \to (\exists y)(x = y^l)].$$

Comme S vérifie les mêmes énoncés que G, tout élément de S^k est de la forme x^l avec $x \in S$.

Il résulte, maintenant, de la Proposition 2.5, que, quel que soit l'entier $l \geqslant 1$, tout élément de $E_S = \bigcap_{k \in \mathbf{N}^*} S^k$ s'écrit sous la forme x^l avec $x \in S$.

Soient $k \geqslant 1$ un entier et x un élément de E_S. D'après la Proposition 2.3, $\{y \in S \mid y^k = x\}$ est fini. On note $y_1, \ldots, y_r$ les éléments de cet ensemble.

On choisit, d'autre part, pour tout entier l, un élément x_l de S tel que $x_l^{k \cdot l!} = x$.

Chaque $x_l^{l!}$ est égal à l'un des éléments $y_1, \ldots, y_r$. Donc, il existe un $i \in \{1, \ldots r\}$ tel que $\{l \in \mathbf{N} \mid x_l^{l!} = y_i\}$ soit infini; pour cet i, $y_i \in \bigcap_{l \in \mathbf{N}^*} S^l = E_S$.

Ceci montre que x admet une racine k-ième dans E_S.

On trouve dans [GS] des exemples de groupes nilpotents de classe 2, sans torsion, de type fini, non isomorphes, qui ont les mêmes images finies.

D'après le théorème 3 de [H2], si G et H sont deux des groupes considérés dans n'importe lequel de ces exemples, G et H ne peuvent vérifier $G \times \mathbf{Z} \cong H \times \mathbf{Z}$.

Il n'existe pas, non plus, un entier $n \geqslant 1$ tel que $\times^n G \cong \times^n H$, puisque cette propriété impliquerait $G \times \mathbb{Z} \cong H \times \mathbb{Z}$ d'après [H3] (voir aussi [H1] pour la réciproque de cette implication).

D'autre part, on montre dans [O2] que G et H ne sont jamais élémentairement équivalents.

On établira cependant au chapitre V que deux groupes finis-par-abéliens de type fini qui ont les mêmes images finies sont élémentairement équivalents.

V. Caractérisation algébrique de l'équivalence élémentaire pour les groupes finis-par-abéliens de type fini

Dans ce chapitre, G est un groupe fini-par-abélien de type fini et S une extension élémentaire G-saturée de G.

La proposition suivante reprend, pour l'essentiel, un résultat classique de P. Hall (cf. [W] page 12).

PROPOSITION 5.1. *$G/Z(G)$ et $S/Z(S)$ sont des groupes finis isomorphes.*

Démonstration: $Z(G)$ et $Z(S)$ sont définis par la formule $(\forall y)(xy = yx)$. Ainsi, $G/Z(G)$ et $S/Z(S)$ sont élémentairement équivalents, donc isomorphes puisque $G/Z(G)$ est fini.

PROPOSITION 5.2. *E_S est contenu dans le centre de S.*

Démonstration. Sinon, $E_S/(E_S \cap Z(S))$ serait non trivial, fini d'après la Proposition 5.1, et radicable, puisque E_S l'est conformément au Théorème 4.1, ce qui serait absurde.

THÉORÈME 5.3. *Il existe un sous-groupe K de S tel que $G \subset K$, $K \cap E_S = \{1\}$, et $\langle K, E_S\rangle = S$; il est possible de définir un isomorphisme de S sur $\hat{G} \times E_S$ qui fixe les points de E_S et ceux de G et envoie K sur $\hat{G}$.*

Démonstration. Compte tenu de ce qui précède, nous savons déjà que E_S est dans le centre de S et que $E_S \cap G = \{1\}$. Nous avons construit un isomorphisme de $\hat{G}$ vers S/E_S qui laisse fixes les éléments de G. D'autre part, E_S est radicable d'après le Théorème 4.1. Le Théorème 5.3 résulte alors du lemme suivant:

LEMME 5.3.1. *Soit M un groupe tel que $M/t(M)$ est abélien; soit R un sous-groupe radicable de M, contenu dans le centre de M, et tel que $R \cap t(M) = \{1\}$; soit N un sous-groupe de M, contenant $t(M)$, et tel que $N \cap R = \{1\}$. Il existe un sous-groupe P de M qui contient N et pour lequel il y a un isomorphisme $f: R \times (M/R) \to M$ tel que $f \mid R = id_R$, $f(M/R) = P$ et $f(x) = x$ pour tout $x \in N$.*

Un tel P sera dit *supplémentaire* de R dans M.

Démonstration. L'existence, dans $M/t(M)$, d'un supplémentaire T de R qui contient $N/t(M)$ résulte du théorème 2 de [K] et de sa démonstration.

L'image réciproque de T par l'homomorphisme canonique de M vers $M/t(M)$ est un supplémentaire de R dans M.

PROPOSITION 5.4. *E_S est muni naturellement d'une structure d'espace vectoriel sur* $\mathbf{Q}$.

Démonstration. Un groupe abélien divisible avec unicité est muni naturellement d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$.

THÉORÈME 5.5 *Pour des groupes finis-par-abéliens de type fini G et H, les propriétés suivantes sont équivalentes*:

1. *G et H ont les mêmes images finies.*
2. *$G/G^n \cong H/H^n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.*
3. *Il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $\times^n G \cong \times^n H$.*
4. *$G \times \mathbf{Z} \cong H \times \mathbf{Z}$.*
5. *Il existe un groupe L, tel que L/L^n est fini pour tout entier $n \geqslant 1$, et pour lequel $G \times L \cong H \times L$.*
6. *$\hat{G} \cong \hat{H}$.*
7. *G et H sont élémentairement équivalents.*

Démonstration. L'équivalence des propriétés 1., 2., 3., 4., 5., 6. résulte des théorèmes 1.2 et 2.1 de [W1].

7. $\Rightarrow$ 6. découle de la remarque qui suit le Corollaire 3.4.

Afin de prouver 6. $\Rightarrow$ 7., on établit que, pour tout ultrafiltre $\aleph_1$-incomplet u sur $\mathbf{N}$, $G^u \cong H^u$.

On peut, évidemment, supposer que G et H sont infinis.

Compte tenu du Théorème 5.3, il nous suffit de démontrer que $\hat{G} \cong \hat{H}$ et $E_{G^u} \cong E_{H^u}$.

$\hat{G} \cong \hat{H}$ est vrai par hypothèse.

D'après la Proposition 5.4, les groupes E_{G^u} et E_{H^u} sont munis naturellement de structures d'espaces vectoriels sur $\mathbf{Q}$.

Nous devons montrer que ces espaces vectoriels ont même dimension. Or, la dimension d'un espace vectoriel non dénombrable sur $\mathbf{Q}$ est égale à son cardinal.

Il suffit donc de démontrer que E_{G^u} et E_{H^u} ont même cardinal non dénombrable:

LEMME 5.5.1. *E_{G^u} et E_{H^u} ont même cardinal que $\mathbf{N}^u$. Ce cardinal est égal à $2^{\aleph_0}$.*

Démonstration. (pour E_{G^u}) E_{G^u} est contenu dans G^u qui est équipotent à $\mathbf{N}^u$ puisque G est dénombrable.

Il reste à définir une injection de $\mathbf{N}^u$ dans E_{G^u}. Pour cela, on se donne un élément x de G-$t(G)$, et on associe à chaque suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ la suite $(x^{a_n \cdot n!})_{n\in\mathbf{N}}$ dans $G^{\mathbf{N}}$. L'injection de $\mathbf{N}^u$ dans E_{G^u} est obtenue par passage au quotient.

COROLLAIRE 5.6. *Les exemples de groupes de type fini ayant les mêmes images finies considérés dans* [Ba] (*page* 249), [Br], [D] (*page* 146) *et* [M] *sont des exemples de groupes élémentairement équivalents.*

BIBLIOGRAPHIE

[Ba] BAUMSLAG, G., *Residually finite groups with the same finite images*, Compositio Math. *29* (1974), 249–252.

[Br] BRIGHAM, R. C., *On the isomorphism problem for just-infinite groups*, Comm. pure and applied Math. XXIV, (1971), 789–796.

[CK] CHANG, C. C. and H. J. KEISLER, *Model theory*, Studies in Logic 73, North-Holland Publishing Company (1973).

[D] DYER, L. L., *On the isomorphism problem for polycyclic groups*, Math. Zeitschr. *112* (1969), 145–153.

[GS] GRUNEWALD, FRITZ J. and RUDOLF SCHARLAU, *A note on finitely generated torsion-free nilpotent groups of class* 2, Journal of Algebra *58* (1979), 162–175.

[GPS] GRUNEWALD, F. J., P. F. PICKEL and D. SEGAL, *Polycyclic groups with isomorphic finite quotients*, Annals of Math. *111* (1980), 155–195.

[H1] HIRSHON, RONALD, *The cancellation of an infinite group in direct products*, Arch. Math. *26* (1975), 134–138.

[H2] HIRSHON, RONALD, *Some cancellation theorems with applications to nilpotent groups*, J. Austral. Math. Soc. 23, series A, (1977), 147–165.

[H3] HIRSHON, RONALD, *The equivalence of* $\times {}^tC \cong \times {}^tD$ *and* $J \times C \cong J \times D$, Trans. Amer. Math. Soc. *249* (1979), 331–340.

[K] KAPLANSKY, I., *Infinite Abelian groups*, University of Michigan Press (1969).

[M] MISLIN, GUIDO, *Nilpotent groups with finite commutator subgroups*, in Lecture Notes in Math. 418, Springer-Verlag (1974), 103–120.

[Ma] MAL'CEV, A. I., *Homomorphisms onto finite groups* (*en russe*), Ivanov. Gos. Ped, Inst. Ucĕn. Zap. *18* (1958), 49–60.

[O1] OGER, F., *Equivalence élémentaire et genre des groupes finis-par-abéliens de type fini*, C.R. Acad. Sci. Paris 293, Ser. I, 1–4, (1981).

[O2] OGER, F., *Des groupes nilpotents de classe* 2 *sans torsion de type fini ayant les mêmes images finies peuvent ne pas être élémentairement équivalents*, C.R. Acad. Sci. Paris 294, Ser. I, 1–4, (1982).

[P1] PICKEL, P. F., *Finitely generated nilpotent groups with isomorphic finite quotients*, Trans. Am. Math. Soc. *160* (1971), 327–341.

[P2] PICKEL, P. F., *Nilpotent-by-finite groups with isomorphic finite quotients*, Trans. Amer. Math. Soc. *183* (1973), 313–325.

[R] ROBINSON, DEREK, *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 62, Springer-Verlag (1972).

[W] WARFIELD, ROBERT B., JR., *Nilpotent groups*, Lecture Notes in Math. 513, Springer-Verlag (1976).

[W1] WARFIELD, ROBERT B., JR., *Genus and cancellation for groups with finite commutator subgroup*, Journal of Pure and Applied Algebra *6* (1975), 125–132.

[Z] ZIL'BER, B. I., *An example of two elementarily equivalent, but non isomorphic finitely generated metabelian groups*, Algebra I Logika *10* (1971), 309–315.

Département de Mathématiques
Université Paris VII
2, *place Jussieu*
75.005 *paris*
France

Reçu le 19 novembre 81/28 juin 82