

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 57 (1982)

**Artikel:** Treue einfach zusammenhängende Algebren I.  
**Autor:** Bongartz, Klaus  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43888>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 07.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Treue einfach zusammenhängende Algebren I

KLAUS BONGARTZ

Die in den letzten Jahren entwickelte Ueberlagerungstheorie führt viele Fragen über darstellungsendliche Algebren zurück auf die Untersuchung sogenannter einfach zusammenhängender Algebren, deren Studium daher von Interesse ist. Eine Algebra heisst einfach zusammenhängend, wenn sie endlich-dimensional über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist, nur ein-dimensionale einfache Moduln hat (d.h. sauber ist) und einen endlichen einfach zusammenhängenden Darstellungskörper besitzt.

In dieser Arbeit und der folgenden klassifizieren wir die unzerlegbaren Moduln über einfach zusammenhängenden Algebren. In der vorliegenden Arbeit geben wir eine Liste von einfach zusammenhängenden Algebren mit treuen Unzerlegbaren an, die alle derartigen Algebren enthält bis auf endlich viele Ausnahmen in kleinen Dimensionen. Wir beweisen anhand der Liste, dass die Dimensionen der Unzerlegbaren einer darstellungsendlichen Algebra  $A$  durch ein lineares Polynom in  $\dim A$  beschränkt sind. Als weiteres Hauptergebnis zeigen wir, dass die Dimensionen der Unzerlegbaren an den einzelnen Punkten für eine einfach zusammenhängende Algebra 6 nicht überschreiten. Beide Ergebnisse zusammen ermöglichen es, den Darstellungstyp einer Algebra und im endlichen Fall den Darstellungskörper zu bestimmen, wenn man eine schöne Ueberlagerung kennt.

Die Arbeit enthält kaum neue Begriffe. Die Klassifikation beruht auf der induktiven Konstruktion einfach zusammenhängender Algebren ([8]) und auf den Resultaten der Kiev-Schule über darstellungsendliche geordnete Mengen ([17], [18], [20]). In einzelnen Fällen sind bereits mehrere Autoren ähnlich vorgegangen ([19], [7], vor allem [23]). Bemerkenswert ist aber, dass man mit diesem theoretisch einfachen Verfahren zum Endergebnis gelangt. Allerdings übersteigt die Zahl der Fallunterscheidungen sicher die Geduld der meisten Leser, so dass wir die naheliegende Lösung verworfen haben, alle Ergebnisse auf einen Schlag in einer einzigen Induktion zu beweisen. Stattdessen haben wir die Arbeit folgendermassen aufgebaut, wobei sich nun verschiedene Teile überlappen. Im ersten Abschnitt erinnern wir an die Ergebnisse über darstellungsendliche geordnete Mengen. Danach bestimmen wir die möglichen Bäume extremer Algebren und

klassifizieren anschliessend diese bis auf endlich viele. Der vierte Abschnitt enthält den Beweis, dass die Dimensionen Unzerlegbarer an den einzelnen Punkten  $\leq 6$  sind. Die Beweise in den Paragraphen 3 und 4 bestehen meistens in der sorgfältigen Untersuchung von Einzelfällen, die einander ähneln. Deshalb erläutern wir das dabei angewandte Prinzip jeweils an einem Beispiel genauer und geben danach dem Leser nur noch eine zweckmässige Gliederung in die verschiedenen Fälle und die dabei erhaltenen Ergebnisse an. Im letzten Absatz zeigen wir, dass eine darstellungsendliche saubere Algebra der Dimension  $n$  nur Unzerlegbare der Dimension  $\leq 2n + 1000$  besitzt.

Die nachfolgende Arbeit soll die Klassifikation der treuen einfach zusammenhängenden Algebren in kleinen Dimensionen enthalten. Die dabei auftretende Vielfalt erfordert den Einsatz eines Computers. Mit einem ersten provisorischen Programm, dessen Kapazität nich ausreicht, haben wir bereits etwa 10 000 Algebren bestimmt. Immerhin ersieht man aus dieser unvollständigen Liste, dass der Träger eines Unzerlegbaren  $U$  über einer einfach zusammenhängenden Algebra  $A$  gesättigt ist, d.h. für jeden Weg  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$  im Köcher von  $A$  mit  $U(x_1) \neq 0 \neq U(x_n)$  gilt auch  $U(x_i) \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Mein herzlicher Dank gilt meinem Lehrer Peter Gabriel, der mich mit den in dieser Arbeit angewandten Techniken vertraut machte.

Zeitweilig wurde ich bei dieser Arbeit durch ein Stipendium der Deutschen Forschungsgemeinschaft unterstützt.

## 1. Unterraumkategorien

Dieser einführende Abschnitt fasst die Ergebnisse von Kleiner, Nazarova und Roiter über darstellungsendliche geordnete Mengen zusammen, damit wir später bequem darauf verweisen können. Unsere Formulierung folgt einem Vorschlag Gabriels.

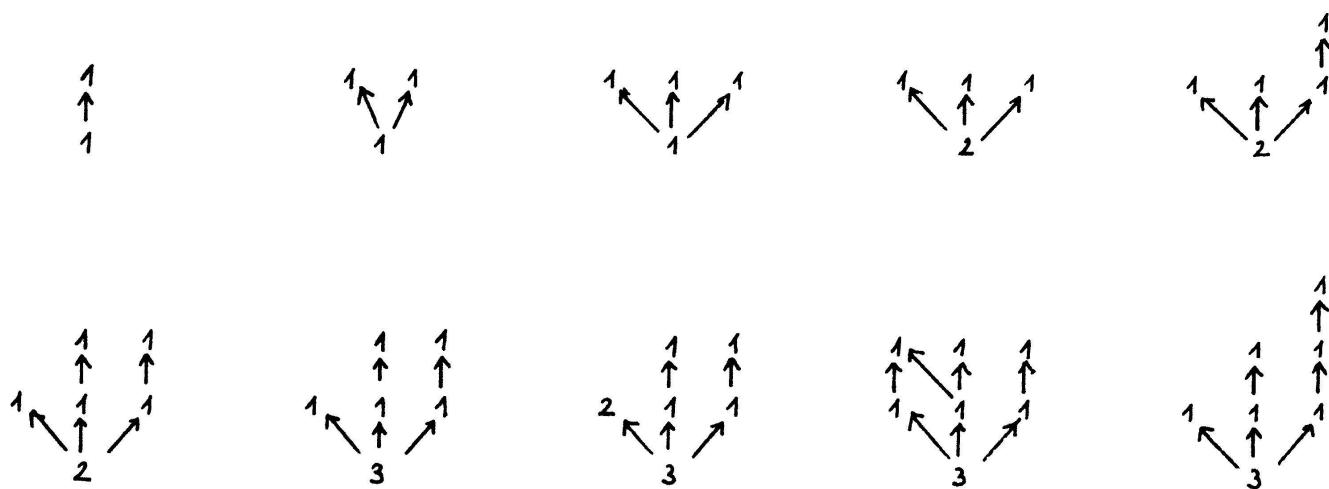
Wir halten uns während der gesamten Arbeit eng an die in [8] eingeführten Bezeichnungen und verweisen jeweils beim ersten Gebrauch eines Symbols oder Begriffes auf die entsprechende Stelle. Insbesondere steht  $k$  immer für einen algebraisch abgeschlossenen Körper und  $\text{mod } A$  für die Kategorie der endlich-dimensionalen  $A$ -Rechtsmoduln über einer endlichdimensionalen Algebra  $A$ , die wir oft als endliche  $k$ -Kategorie ([8], 2.1) auffassen.

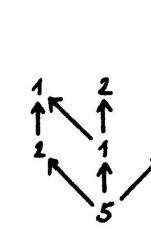
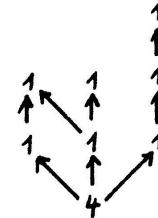
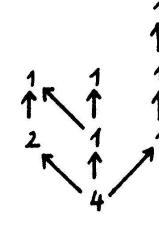
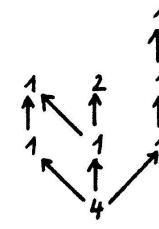
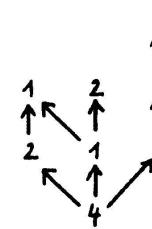
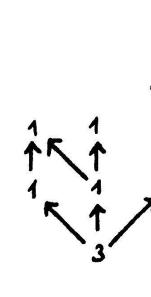
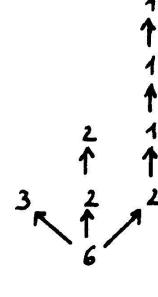
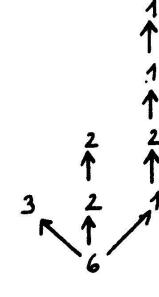
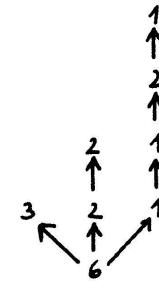
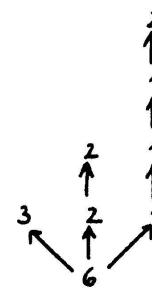
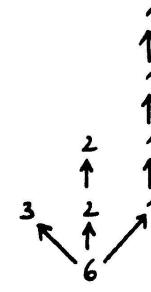
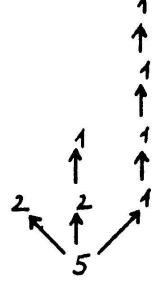
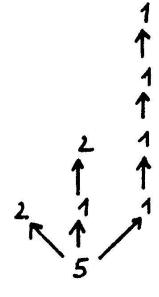
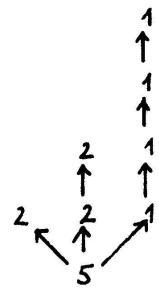
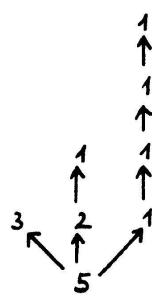
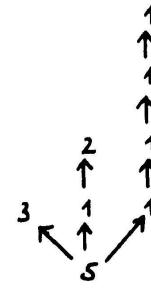
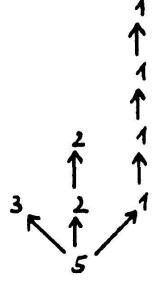
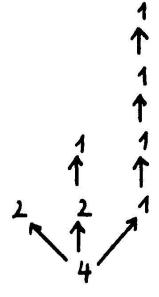
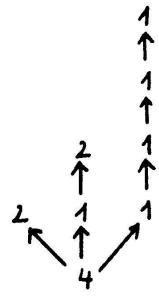
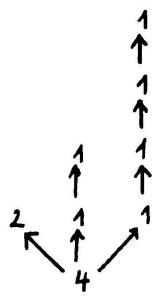
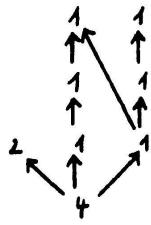
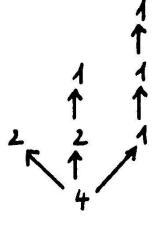
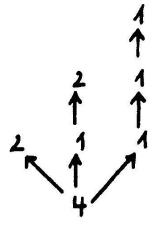
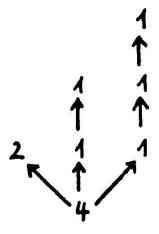
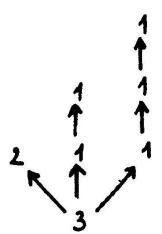
**1.1** Eine *Vektorraumkategorie*  $(\mathcal{V}, F)$  über  $k$  besteht aus einer  $k$ -Kategorie  $\mathcal{V}$  und einem  $k$ -linearen Funktor  $F: \mathcal{V} \rightarrow \text{mod } k$ . Dabei setzen wir folgendes voraus: Jedes Objekt in  $\mathcal{V}$  ist endliche direkte Summe Unzerlegbarer mit lokalen Endomorphismenringen. Ferner gibt es in  $\mathcal{V}$  nur endlich viele Isomorphieklassen

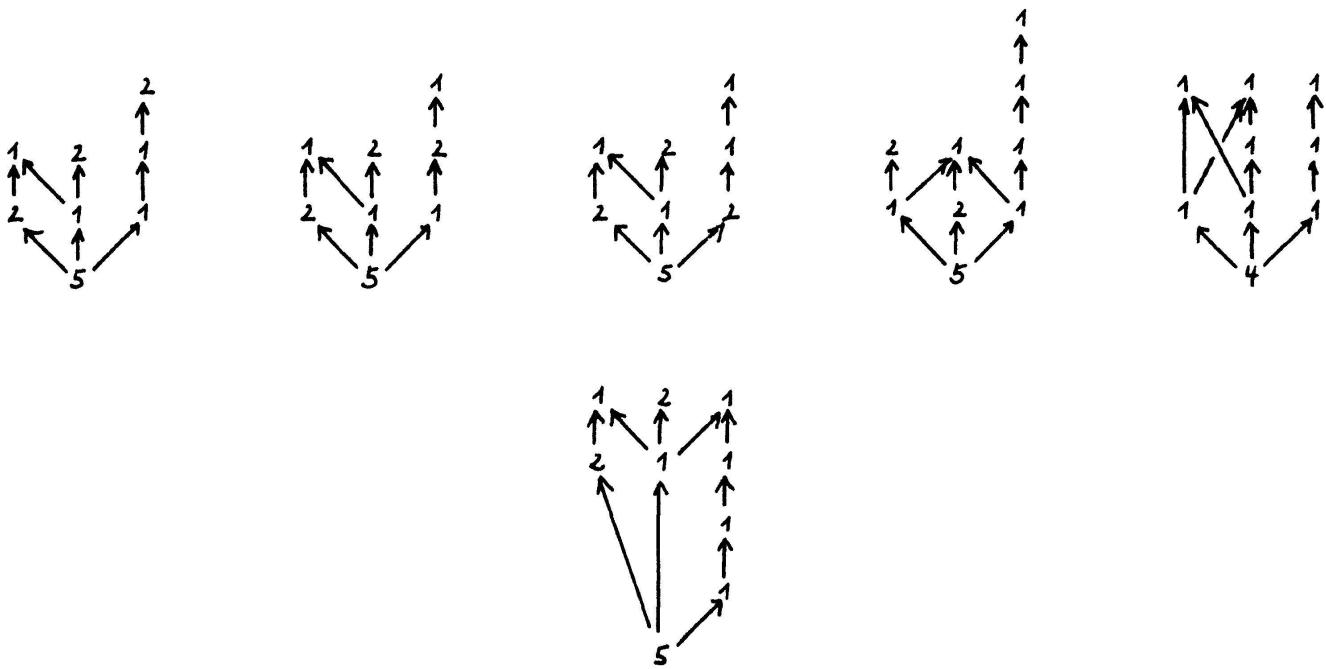
Unzerlegbarer. Die zu  $(\mathcal{V}, F)$  gehörige **Unterraumkategorie**  $\mathcal{V}_F$  hat als Objekte die Tripel  $(W, \varphi, V)$  bestehend aus  $W \in \text{mod } k$ ,  $V \in \mathcal{V}$  und  $\varphi \in \text{Hom}_k(W, FV)$ . Ein Morphismus  $(W, \varphi, V) \rightarrow (W', \varphi', V')$  ist ein Paar  $(\alpha, \beta)$  mit  $\alpha \in \text{Hom}_k(W, W')$  und  $\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{V}}(V, V')$ , so dass  $\varphi' \circ \alpha = F\beta \circ \varphi$ . In  $\mathcal{V}_F$  ist jedes Objekt endliche direkte Summe Unzerlegbarer mit lokalen Endomorphismenringen. Der Name Unterraumkategorie röhrt daher, dass  $\varphi$  stets injektiv ist, wenn nicht  $(k, 0, 0)$  direkter Summand von  $(W, \varphi, V)$  ist. Uns interessiert folgendes Beispiel einer Unterraumkategorie: Sei  $A$  eine lokalbeschränkte Kategorie ([8], 2.1) mit einer Senke  $s$  (d.h.  $A(s, t) = 0$  für  $t \neq s$ ). Sei  $B$  die volle Unterkategorie von  $A$  bestehend aus den Objekten, die von  $s$  verschieden sind. Ferner sei  $R$  der  $B$ -Modul  $A(?, s) \mid B$  und  $F: \text{mod } B \rightarrow \text{mod } k$  der Funktor  $\text{Hom}_B(R, ?)$ . Falls  $B$  darstellungsendlich ist, bildet das Paar  $(\text{mod } B, F)$  eine Vektorraumkategorie über  $k$ . Die zugehörige Unterraumkategorie  $(\text{mod } B)_F$  ist äquivalent zu  $\text{mod } A$ . Denn ein  $A$ -Modul  $M$  ist gegeben durch  $M \mid B, M(s)$  und durch ein  $\varphi \in \text{Hom}_B(M(s) \otimes_k R, M \mid B) \cong \text{Hom}_k(M(s), \text{Hom}_B(R, M \mid B))$ , also durch das Tripel  $(M(s), \varphi, M \mid B)$ .

**1.2** Eine besonders schöne Situation liegt vor, wenn alle Unzerlegbare in  $\mathcal{V}$  nur den Grundkörper  $k$  als Endomorphismenalgebra haben. Dann muss nämlich  $\dim FV \leq 1$  für alle Unzerlegbaren in  $\mathcal{V}$  gelten, wenn  $\mathcal{V}_F$  nur endlich viele Unzerlegbare besitzt.

Ist die Bedingung  $\dim FV \leq 1$  für alle Unzerlegbaren  $V$  aus  $\mathcal{V}$  erfüllt, so wählen wir Repräsentanten der Unzerlegbaren  $U$  mit  $FU \neq 0$  und ordnen sie vermöge " $U \geq V \Leftrightarrow FV(U, V) \neq 0$ " partiell an. Zu den gewählten Repräsentanten fügen wir noch formal ein kleinstes Element  $\omega$  hinzu und nennen die so erhaltene geordnete Menge  $S = S(\mathcal{V}, F)$ . Wir betrachten Funktionen  $\mu: S \rightarrow \mathbb{N}$  und versehn deren Träger  $S_{\mu}$  mit der von  $S$  induzierten Ordnung. Wir nennen  $\mu$  eine **Multiplizitätsfunktion**, wenn  $(S_{\mu}, \mu \mid S)$  eine der folgenden Gestalten hat:



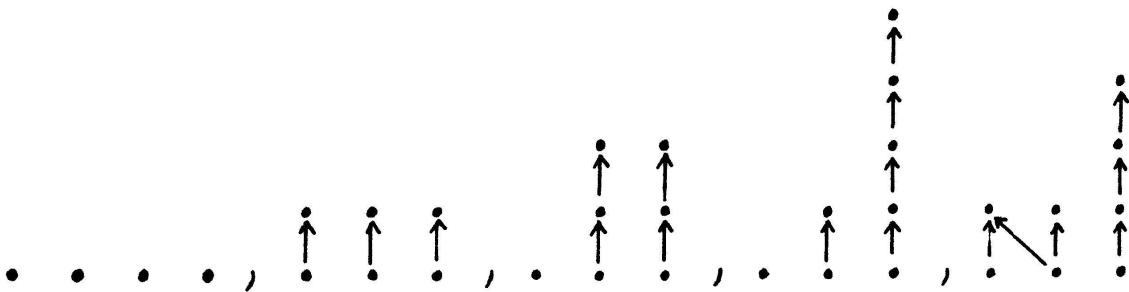




Dabei bedeutet  $x \rightarrow y$ , dass  $x \leq y$  ist, und dass dazwischen keine Punkte mehr liegen. Die Zahlen geben jeweils den Wert von  $\mu$  an. Die untere Zahl ist der Wert an der Stelle  $\omega$ . Für jedes unzerlegbare Objekt  $X = (W, \varphi, V)$  aus  $\mathcal{V}_F$  mit  $\varphi \neq 0$  definieren wir eine Funktion  $\mu = \mu_X : S \rightarrow \mathbb{N}$  durch  $\mu(\omega) = \dim W$  und  $V = \bigoplus U^{\mu(U)}$ , wobei die Summe über alle  $U \in S \setminus \{\omega\}$  läuft.

**SATZ.** Sei  $(\mathcal{V}, F)$  eine Vektorraumkategorie mit  $\dim FV \leq 1$  für alle Unzerlegbaren  $V \in \mathcal{V}$ .

(a) (Nazarova-Roiter, Kleiner) Genau dann gibt es nur endlich viele Isomorphieklassen Unzerlegbarer in  $\mathcal{V}_F$ , wenn  $S$  keine der geordneten Mengen  $[1, 1, 1, 1]$ ,  $[2, 2, 2]$ ,  $[1, 3, 3]$ ,  $[1, 2, 5]$  oder  $[N, 4]$  enthält, die wir der Reihe nach durch ihr Hasse-Diagramm definieren.



(b) (Kleiner) Ist  $\mathcal{V}_F$  darstellungsendlich, so liefert die Abbildung  $X \mapsto \mu_X$  eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen Unzerlegbarer  $X = (W, \varphi, V)$  in  $\mathcal{V}_F$  mit  $\varphi \neq 0$  und den Multiplizitätsfunktionen auf  $S$ .

**1.3** Die in 1.2 geschilderte Situation liegt vor, wenn im Beispiel von 1.1 die

Algebra  $A$  einfach zusammenhängend ist. Sei dann  $M = (W, \varphi, V)$  ein unzerlegbarer  $A$ -Modul mit  $\varphi \neq 0$  und Multiplizitätsfunktion  $\mu$ . Das *Gerippe* von  $M$  ist die geordnete Menge  $S_\mu \setminus \{\omega\}$ . Wir sind im folgenden stark am *Dimensionsvektor*  $\text{Dim } M = (\dim M(a))_{a \in A}$  interessiert. Offenbar gilt:

$$\dim M(b) = \sum_{U \in S_\mu \setminus \{\omega\}} \mu(U) \dim U(b) \quad \text{für } b \in B \quad \text{und}$$

$$\dim M(s) = \dim W.$$

Diese Formeln spielen eine entscheidende Rolle in der gesamten Arbeit.

## 2. Extremale Algebren

**2.1** Wir verwenden die Bezeichnungen von [8], 6. Dabei unterscheiden wir meistens nicht zwischen einem darstellungsendlichen graduierten Baum  $(T, g)$  ([8], 6.3) und der zugehörigen einfach zusammenhängenden Algebra  $A = A^T$  ([8], 6.4). Sei also von nun an  $A = (T, g)$  eine einfach zusammenhängende Algebra mit Darstellungsköcher  $R$  und Köcher  $K$ . Auf der Punktmenge  $K_0$  des Köchers ist durch

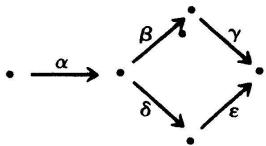
“ $x \leq y$  genau dann, wenn es einen Weg von  $x$  nach  $y$  in  $K$  gibt”

eine Ordnungsrelation definiert. Ein  $A$ -Modul  $E$  heisst *extremal* (bzw. *omnipräsent*), wenn  $E$  unzerlegbar ist und  $E(x) \neq 0$  für alle bzgl. der eben eingeführten Ordnung extremalen Punkte (bzw. für alle Punkte) gilt. Die *Trägeralgebra*  $T(M)$  eines  $A$ -Moduls  $M$  definieren wir als die volle Unterkategorie von  $A$  bestehend aus dem Träger  $\{x \in K_0 : M(x) \neq 0\}$  von  $M$ . Mit  $A$  hat auch  $T(M)$  keinen orientierten Zyklus im Darstellungsköcher. Nach einem Ergebnis von Happel–Ringel ([15]) ist jeder unzerlegbare  $A$ -Modul  $U$  sogar ein treuer  $T(U)$ -Modul, d.h.  $T(U)$  identifiziert sich mit der Restklassenkategorie von  $A$  nach dem Annihilator von  $U$ .

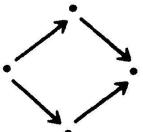
Eine *extremale Algebra* ist eine einfach zusammenhängende Algebra, die einen extremalen Modul besitzt. Hauptgegenstand unserer Untersuchungen ist die Klassifikation aller extremaler Algebren mit den zugehörigen extremalen Moduln.

Dass wir statt treuer Algebren und Moduln extremele betrachten, erschwert die Beweisführung nicht und hat folgenden Grund: Wir möchten gern alle Unzerlegbare über allen einfach zusammenhängen Algebren kennen. Ist  $A$  einfach zusammenhängend mit Unzerlegbarem  $U$ , so ist zunächst nicht klar, dass

$T(U)$  wieder einfach zusammenhängend ist. Die einfach zusammenhängende Algebra



mit  $\gamma\beta = \epsilon\delta$  und  $\gamma\beta\alpha = 0$  hat z.B. als volle Unterkategorie die nicht einfach zusammenhängende Algebra  $A'$



mit  $\text{rad}^2 A' = 0$ .

Hingegen kann man nach der Charakterisierung einfach zusammenhängender Algebren von Bautista–Larrión–Salmerón ([5], [4]) und Gabriel ([14]) nacheinander solange maximale oder minimale Punkte weglassen, bis man eine einfach zusammenhängende Algebra  $B$  erhält, die  $T(U)$  umfasst, sodass  $U$  ein extremaler  $B$ -Modul ist.

Als Nebenergebnis unserer Klassifikation finden wir im zweiten Teil der Arbeit, dass alle extremalen Moduln treu sind. Ferner haben Bautista, Larrión und Salmerón inzwischen bewiesen: “Eine darstellungsendliche Algebra mit zykellosem Darstellungsköcher und treuem Unzerlegbaren ist einfach zusammenhängend.” Aus jedem der beiden Resultate ergibt sich sofort, dass Trägeralgebren wieder einfach zusammenhängend sind. Wir benutzen jedoch diese Tatsache nicht.

**2.2** Auf dem Darstellungsköcher  $R$  ist analog zu  $K$  eine Ordnungsrelation  $\leq_R$  definiert. Die Spur  $\leq_R$  dieser Ordnungsrelation auf  $K$ -identifiziere die Punkte von  $K$  mit den projektiven Punkten von  $R$ -ist stärker als  $\leq$ . Jeder  $\leq_R$ -extremale Punkt von  $K$  ist also auch  $\leq$ -extremal, aber die Umkehrung ist i.a. falsch.

Die in [8], 6.6, für einen Projektiven  $P = (g(m), m)$  mit maximalem Grad angestellten Überlegungen gelten für jeden  $\leq_R$ -maximalen Projektiven.

**LEMMA.** *Sei  $P = (g(m), m)$  ein  $\leq_R$ -maximaler Projektiver, und sei  $m - t_1 = y_0 - y_1 - y_2 - \dots - y_n$  ein Weg aus lauter verschiedenen Punkten im Baum  $T$ . Hat  $A = (T, g)$  einen extremalen Modul  $E$ , so gehören  $(g(m) - 1, t_1), (g(m), y_1), \dots, (g(m) + n - 1, y_n)$  zu  $R$ .*

**Beweis.** Per Induktion nach  $n$ . Seien  $Q = (q, y_n)$  der Projektive und  $I = (i, y_n)$  der Injektive in der  $\tau$ -Bahn<sup>(1)</sup> von  $y_n$ . Da  $P \leq_R$ -maximal ist, gilt  $q \leq g(m) + n - 1$ .

<sup>1</sup> Abweichend vom üblichen Gebrauch bezeichnet  $\tau$  die Translation nach rechts.

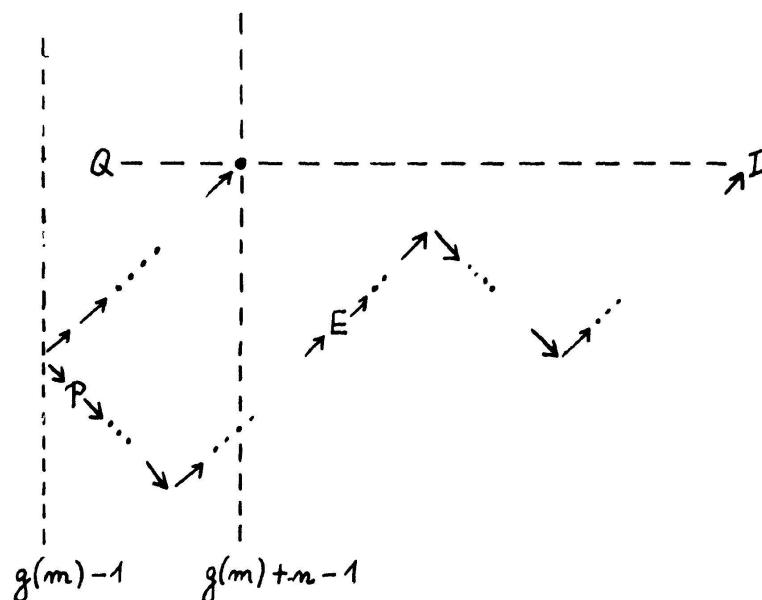


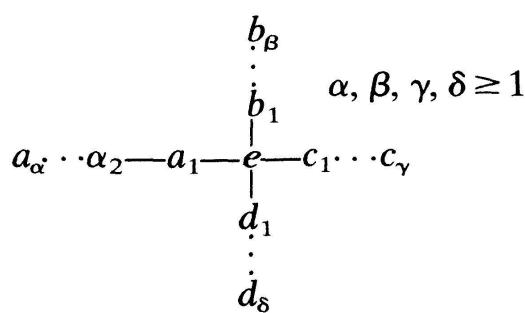
Fig. 2.2

Andererseits gibt es einen Weg  $P \rightarrow \dots \rightarrow E \rightarrow \dots \rightarrow I$  in  $R$ , was  $i \geq g(m) + n + 1$  zur Folge hat. Die angegebenen Punkte gehören also zu  $R$  (Siehe Fig. 2.2). *q.e.d.*

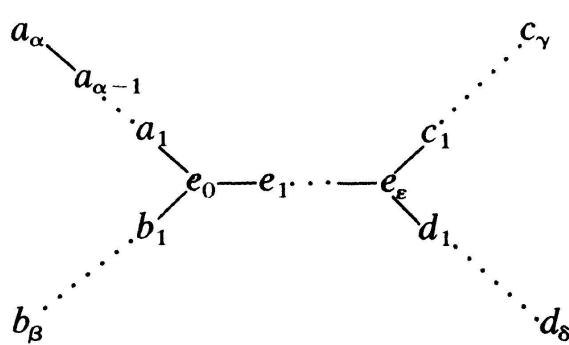
Das Lemma erlaubt uns, für jeden Nachbarn  $t_i$  von  $m$  in  $T$  den Baum  $T^i$  ([8], 6.6) in der Orientierung, wo  $t_i$  einzige Quelle ist, mit einem Schnitt ([3]) durch den Darstellungsköcher  $R_{Ti}$  ([8], 6.6) zu identifizieren.

**2.3 LEMMA.** *Höchstens folgende Bäume  $T$  erlauben eine Graduierung  $g$ , so dass  $(T, g)$  eine extreme Algebra ist:*

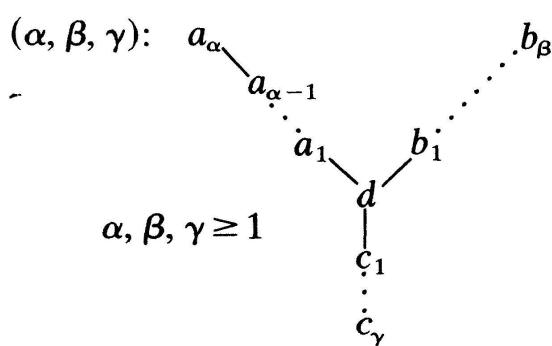
$(\alpha, \beta, \gamma, \delta):$



$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon): \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \geq 1$



$(\alpha, \beta, \gamma):$



$A_\alpha: a_1 - a_2 - \dots - a_\alpha, \alpha \geq 1$

Wie üblich benutzen wir für  $(\alpha, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 1)$ ,  $(3, 2, 1)$  und  $(4, 2, 1)$  auch die Bezeichnungen  $D_{\alpha+3}$ ,  $E_6$ ,  $E_7$  und  $E_8$ .

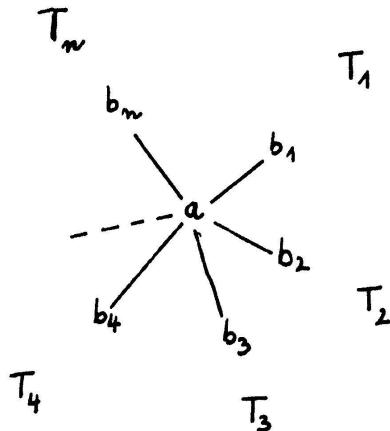
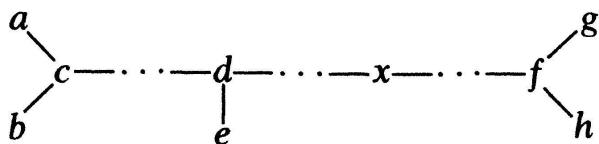


Fig. 2.3

*Beweis.* Sei zuerst  $T$  ein Baum mit einem Punkt  $a$  von maximaler Ordnung  $n \geq 4$ , und sei  $P = (g(m), m)$  ein  $\leq_R$ -maximaler Projektiver (Siche Fig. 2.3). Für  $m = a$  enthält  $\coprod_{i=1}^n S_{x_i}$  ([8], 6.6) die Menge  $[1, 1, 1, 1]$ . Sei daher ohne Einschränkung  $m \in T_1$ , das die Zusammenhangskomponente von  $b_1$  in  $T \setminus \{a\}$  bezeichnet. Nach Lemma 2.2 liefern die Punkte  $b_2, \dots, b_n$  für  $n \geq 5$  die geordnete Menge  $[1, 1, 1, 1]$ . Daher ist  $n = 4$ . Wäre  $m$  kein Randpunkt, so fände man wieder  $[1, 1, 1, 1]$ . Aus dem gleichen Grund sind alle Bäume  $T_i$  unverzweigt, d.h. es gilt  $T = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  für geeignete Parameter  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Außerdem ist bis auf Umbenennung  $m = a_\alpha$ .

Nun habe  $T$  mehr als zwei Punkte der Ordnung 3, d.h.



ist ein Teilbaum von  $T$ . Liegt  $m$  auf einem Ast, der zwischen zwei Punkten der Ordnung 3 abzweigt, etwa in  $x$ , so liefern  $a, b, g$  und  $h$  die geordnete Menge  $[1, 1, 1, 1]$ . Gleiches gilt, wenn  $m$  auf dem Zweig von  $e$  liegt. Befindet sich  $m$  auf dem Ast von  $h$ , so findet man  $[1, 1, 1, 1]$  mit  $a, b, e$  und  $g$ . Deshalb hat  $T$  höchstens zwei Punkte der Ordnung 3. Ferner zeigt obige Ueberlegung, dass für  $T = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$  bis auf Umbenennungen der Fall  $m = a_\alpha$  vorliegt.  $q.e.d.$

**2.4** Nun geben wir zu den einzelnen Bäumen einige Algebren durch Köcher mit Relationen an. Dabei gelten immer alle möglichen Kommutativitätsrelationen. Eine Nullrelation deuten wir durch eine gestrichelte Linie längs des betreffenden Weges an, und eine Kante  $x—y$  kann durch einen Pfeil in beliebiger Richtung ersetzt werden.

$$A_\alpha, \alpha \geq 1: \quad u_1 - u_2 - \cdots - \cdots - u_\alpha \quad (1)$$

$$D_{\alpha+3}, \alpha \geq 1: \quad \begin{array}{c} u \\ \diagdown \quad \diagup \\ v_0 - v_1 - \cdots - \cdots - v_\alpha \\ w \end{array} \quad (2)$$

$$D_{\alpha+3}, \alpha \geq 1: \quad \begin{array}{c} u \\ \diagdown \\ w \end{array} \quad \begin{array}{c} v_0 - v_1 - \dots \\ \diagup \\ v_p \end{array} \quad \begin{array}{c} x_1 - x_2 - \dots - x_q \\ \diagup \\ u \end{array} \quad \begin{array}{c} y_2 - \dots - y_r \\ \diagup \\ u \end{array} \quad (3)$$

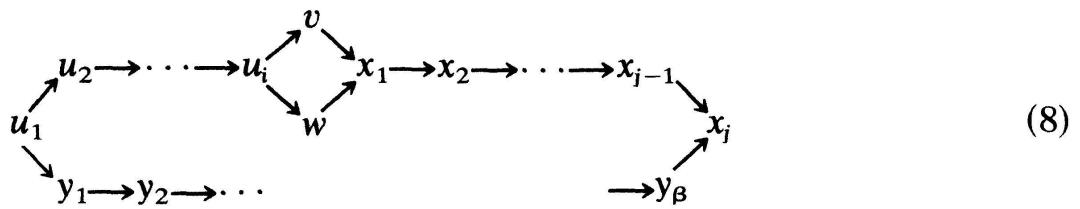
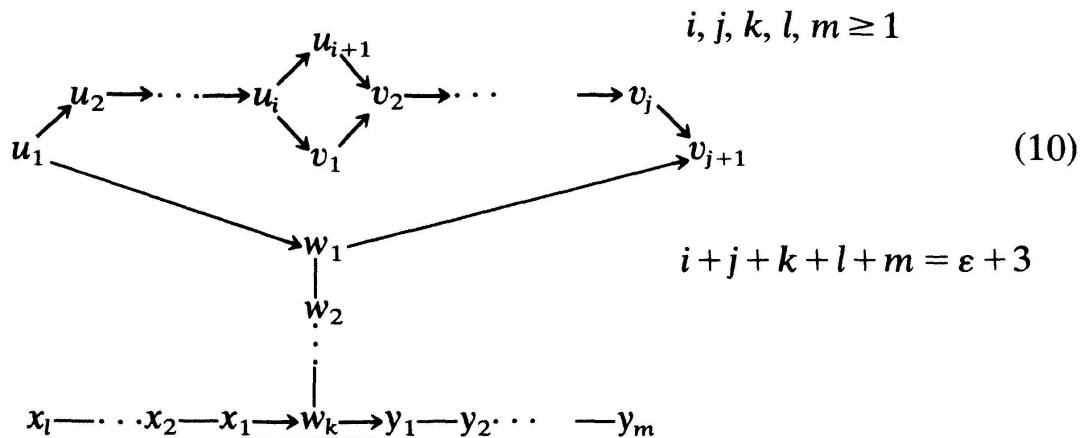
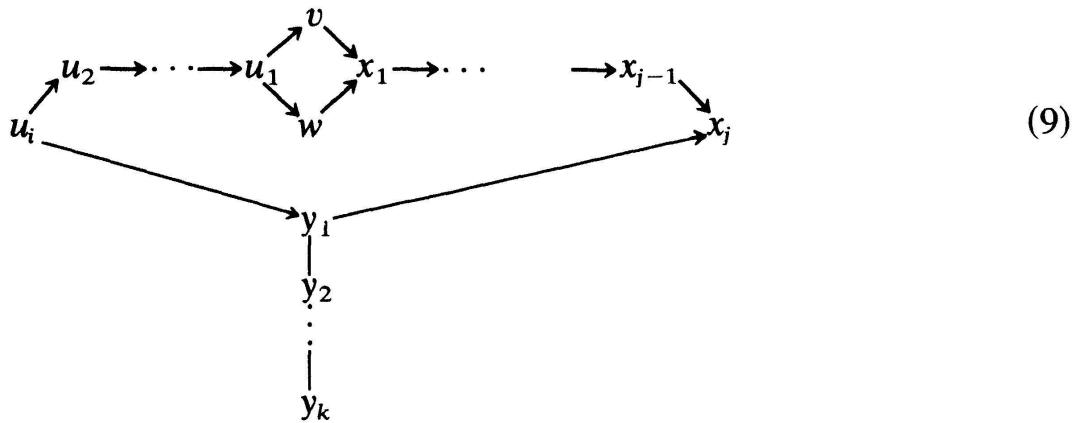
$p \geq 0, \quad q, r \geq 1, \quad p + q + r = \alpha$

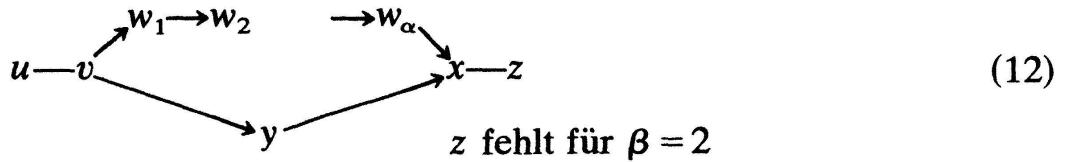
(4)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & u & & & & \\
 & & \swarrow & \searrow & & & \\
 x_q & - \cdots - & x_2 & - x_1 & - & w_1 & - w_2 - \cdots - w_p \\
 & & \downarrow & \downarrow & & & \\
 & & v & & & & \\
 \end{array} \quad (6)$$

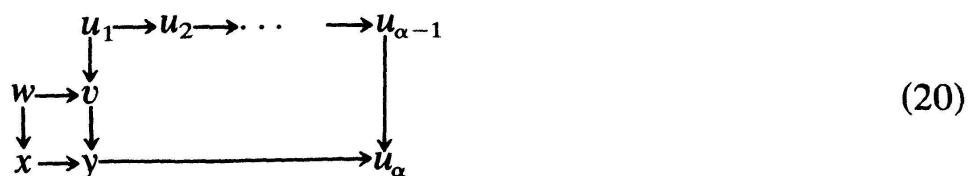
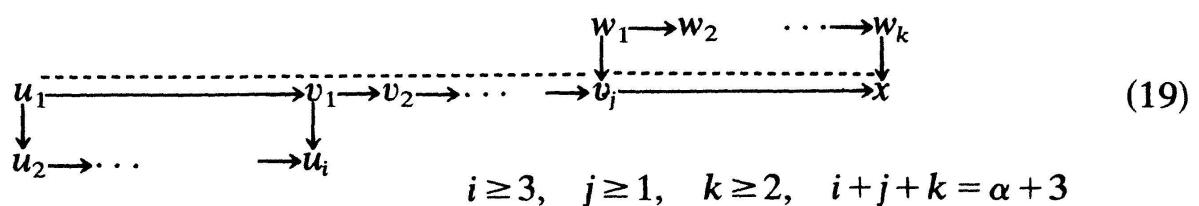
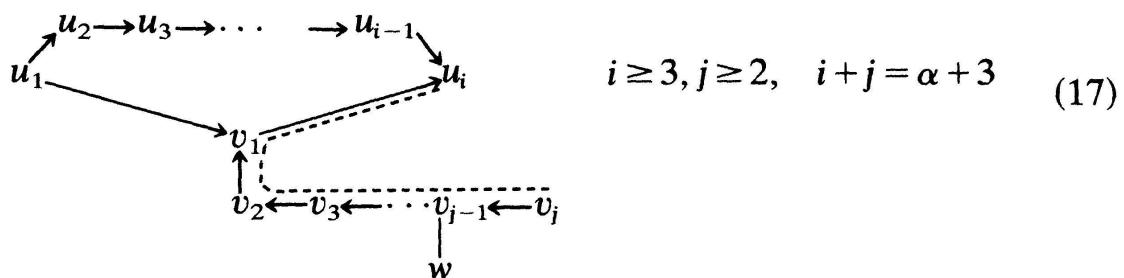
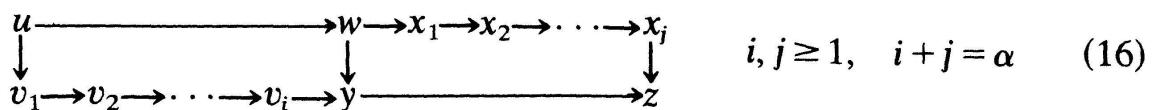
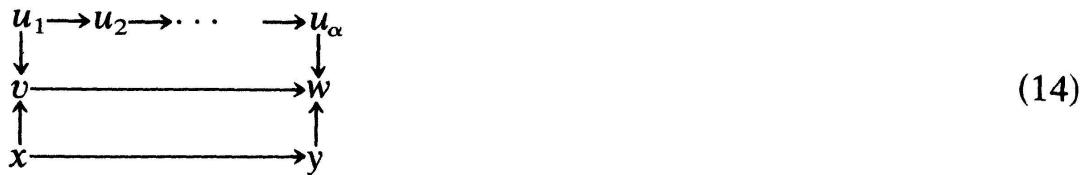
$p, q \geq 1, \quad p + q = \alpha + 1$

$(1, 1, 1, \delta), \delta \geq 1$ : (7)

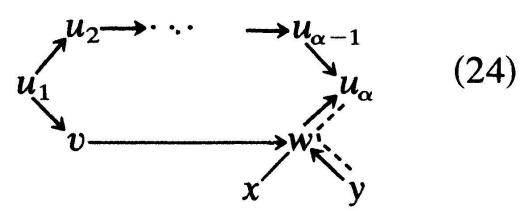
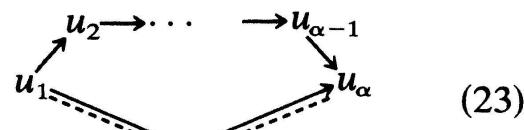
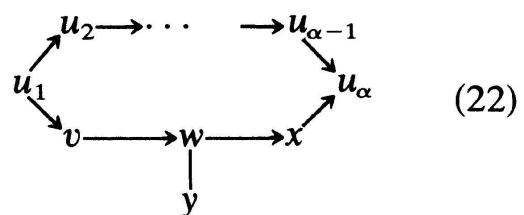
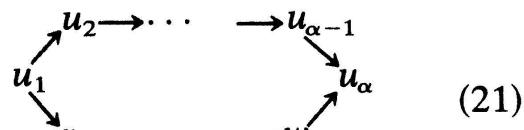
$(1, \beta, 1, 1, \varepsilon), \beta \geq 2, \varepsilon \geq 1:$ 
 $i, j \geq 1, \quad i + j = \varepsilon + 2$ 

 $(1, 1, 1, 1, \varepsilon), \varepsilon \geq 1:$ 
 $i, j, k \geq 1, \quad i + j + k = \varepsilon + 3$ 

 $(\alpha, \beta, 1), \alpha \geq \beta \geq 2:$ 

 $(\alpha, \beta, 1), \alpha \geq \beta, 3 \geq \beta \geq 2:$ 


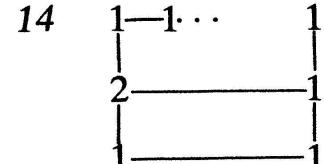
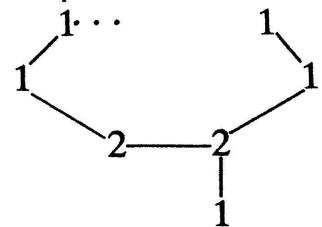
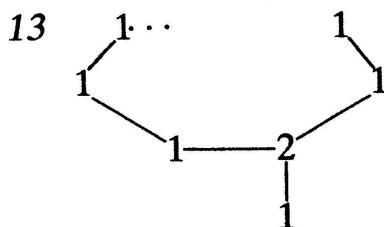
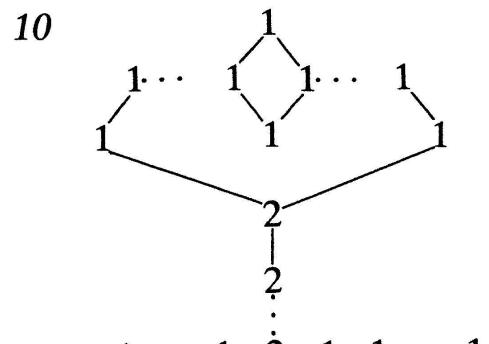
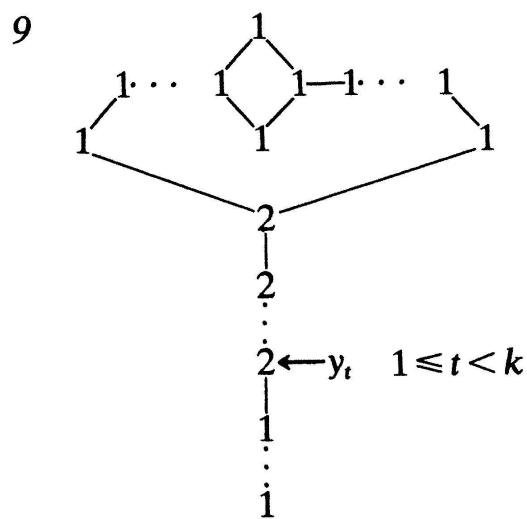
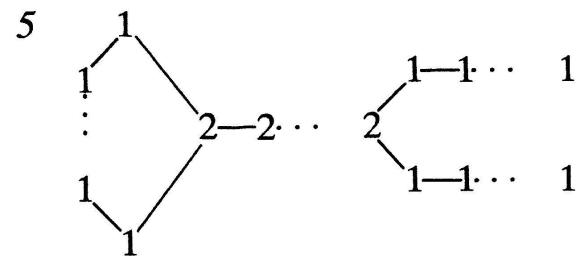
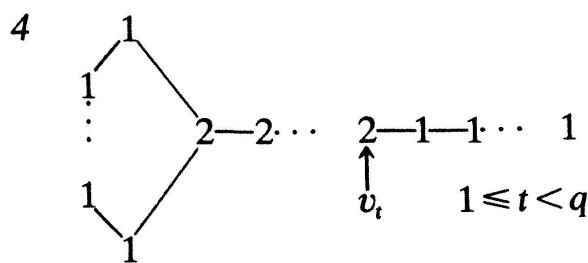
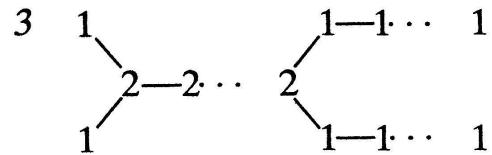
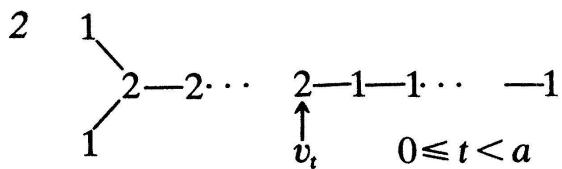
$(\alpha, 2, 1), \alpha \geq 3$ :



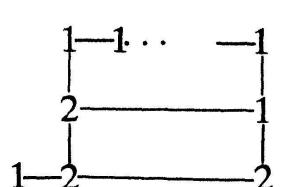
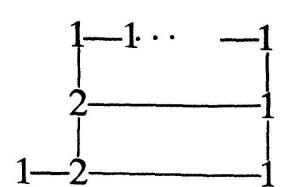
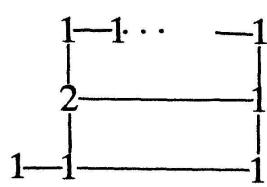
$(\alpha, 2, 1)$ ,  $\alpha \geq 3$ :



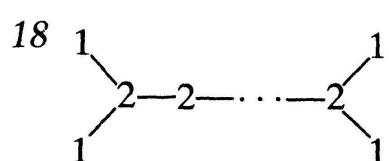
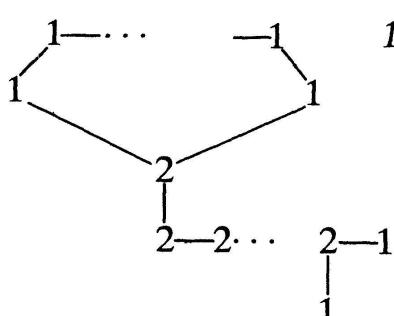
Als nächstes führen wir zu einigen Algebren gewisse Dimensionsvektoren an, wobei der zweite Vektor bei 22 auch zu spiegeln ist.



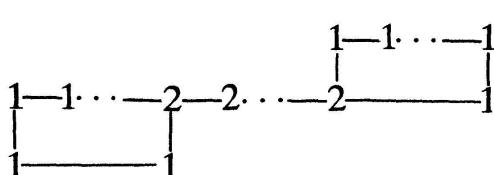
15



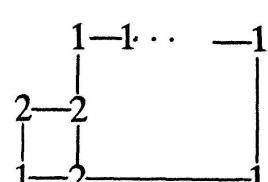
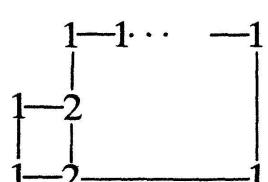
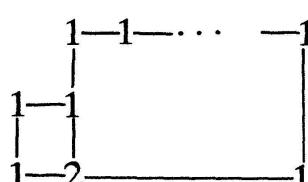
17



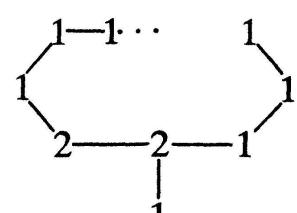
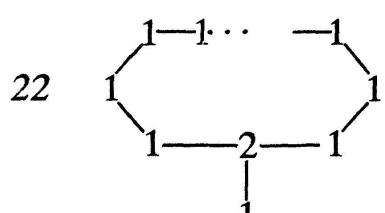
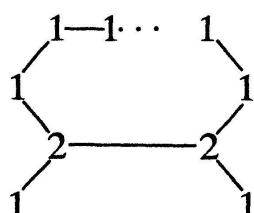
19



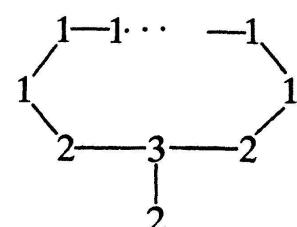
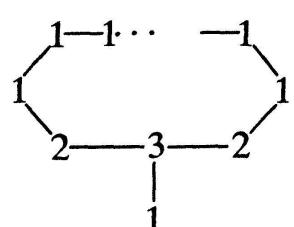
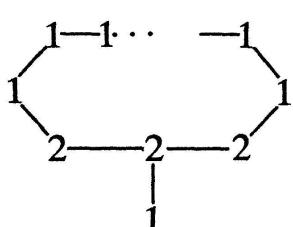
20



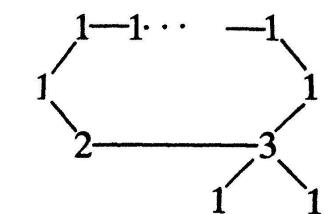
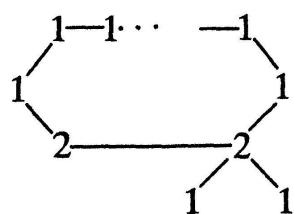
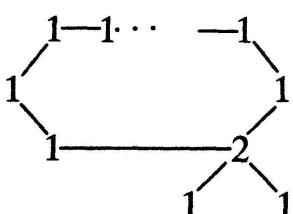
21

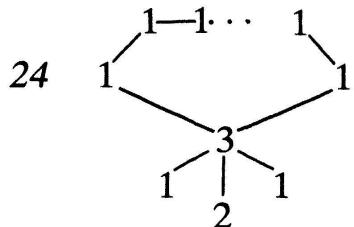
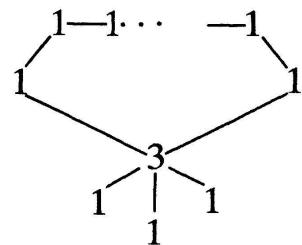
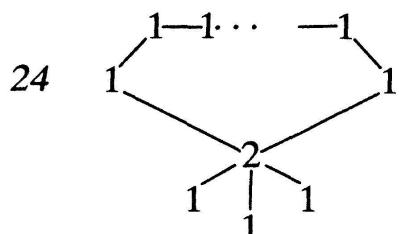
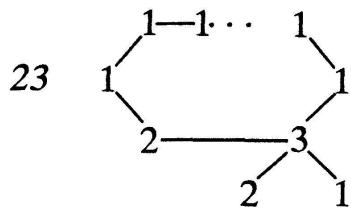


22



23





**KLASSIFIKATIONSSATZ:** (a) *Alle Algebren der Familien (1) bis (24) sind extremal – also insbesondere von der Form  $(T, g)$  – und haben den jeweils angegebenen Baum  $T$ . Dabei induziert für jede Algebra die Zuordnung  $M \mapsto \text{Dim } M$  eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen extremer Moduln, deren Dimensionsvektor an einem Punkt  $\geq 2$  ist, und den zur betreffenden Algebra angeführten Dimensionsvektoren.*

- (b) *Für die Bäume  $A_\alpha$  und  $D_{\alpha+3}$  enthält die Liste alle extremalen Algebren.*  
 (c) *Sei  $A = (T, g)$  eine extreme Algebra. Ist  $T$  einer der Bäume  $(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  oder  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ , wobei einer der Parameter  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  oder  $\varepsilon$  echt grösser als 67 ist, so ist  $A$  oder  $A^{\text{op}}$  isomorph zu einer der Algebren aus der Liste.*

Die Aussage a) kann man verhältnismässig leicht direkt verifizieren. Dabei ist die Injektivität der Abbildung  $M \mapsto \text{Dim } M$  wohlbekannt ([15]). Die wesentlichen Teile des Satzes sind b) und vor allem c), weil uns nun nach 2.3 und [8], 6.7 nur noch endlich viele extreme Algebren zu “kleinen” Bäumen unbekannt sind. Diese Ausnahmealgebren sollen in der nachfolgenden Arbeit mit dem Computer klassifiziert werden. Den Beweis des Klassifikationssatzes führen wir in Abschnitt 3.

**2.5** Am Ende dieses Paragraphen möchten wir anhand eines Beispiels das Prinzip des Beweises von Satz 2.4 erklären. Dazu benötigen wir noch folgende Bemerkung aus [22].

**LEMMA.** *Sei  $\Delta$  ein Untertranslationsköcher des Translationsköchers  $\Gamma$ . Dann gilt für  $x, y \in \Delta_0$ :  $\dim k(\Delta)(x, y) \leq \dim k(\Gamma)(x, y)$ .*

**Beweis.** Erinnern wir daran, dass  $\Delta$  ein Untertranslationsköcher von  $\Gamma$  ist, falls gilt: a)  $\Delta$  ist voller Unterköcher von  $\Gamma$ , b) Für  $x \in \Delta_0$  mit  $\tau_\Gamma x \in \Delta_0$  ist auch  $\tau_\Delta$  definiert, c) Existiert  $\tau_\Delta x$  für  $x \in \Delta_0$ , so auch  $\tau_\Gamma x$  und es gilt  $\tau_\Delta x = \tau_\Gamma x$ .

Unter diesen Voraussetzungen identifiziert sich  $k(\Delta)(x, y)$  mit dem Quotienten von  $k(\Gamma)(x, y)$  durch das Ideal, das von den Wegen durch einen Punkt aus  $\Gamma_0 \setminus \Delta_0$  erzeugt wird. *q.e.d.*

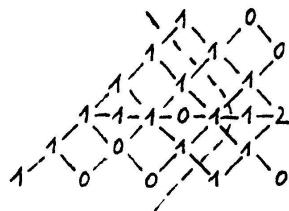


Fig. 2.5.1

Sei z.B.  $A = (T, g)$  eine extreme Algebra zum Baum  $T = (3, 3, 1)$ . Nehmen wir ferner an, es gebe einen  $\leq_R$ -maximalen Projektiven  $P = (g(m), m)$  mit  $m = b_3$ . Wir setzen  $B = (T^1, g_1)$  und skizzieren den Beginn der startenden Funktion von  $b_2$  in  $k(\mathbb{Z}T^1)$  ([8], 6.6, siehe Fig. 2.5.1).

Nun identifizieren wir nach 2.2  $T^1$  in der Orientierung mit  $b_2$  als einziger Quelle mit dem Schnitt durch  $R_{T^1}$ , der  $\text{rad } P = (g(m) - 1, b_2)$  als einzige Quelle hat. Innerhalb von  $R_{T^1}$  liegt vor der gestrichelten Linie ein Injektiver, weil sonst die startende Funktion von  $\text{rad } P$  den Wert 2 annimmt, was der Darstellungsendllichkeit von  $A$  widerspricht ([8], 6.6).

Wir müssen also verschiedene Fälle untersuchen und wählen darunter denjenigen, wo  $\tau a_1$  injektiv ist, aber keiner seiner Vorgänger. Sei  $\Delta$  der Untertranslationsköcher von  $\mathbb{Z}T^1$ , in dem  $\tau a_1$  injektiv ist. Wir skizzieren die startende Funktion  $s$  von  $b_2$  in  $k(\Delta)$  (siehe Fig. 2.5.2).

Weil  $R_{T^1}$  Untertranslationsköcher von  $\Delta$  ist, liegt nach obigem Lemma der Träger  $U$  der startenden Funktion von  $\text{rad } P$  in  $k(R_{T^1})$  im Träger  $S$  von  $s$ . Dabei gilt für zwei Punkte  $x, y \in U$ , dass  $x \leq_U y$  genau dann, wenn es in  $S$  einen Weg von  $x$  nach  $y$  gibt (Beweis per Induktion nach Weglänge).

Der Köcher von  $B$  entsteht aus demjenigen von  $A$  durch Weglassen von  $P$ . Dabei bleiben extreme Punkte erhalten, man hat aber eventuell einige Nachbarn von  $P$  als maximale Punkte hinzuzufügen.

Sei nun  $E$  ein extremer  $A$ -Modul mit Gerippe  $G$ . Per Definition verschwindet  $E$  also nicht auf den extremen Punkten des Köchers von  $A$ . Nach obiger

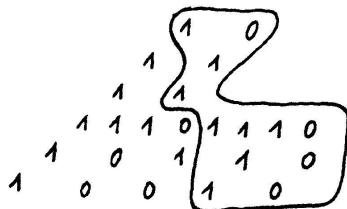
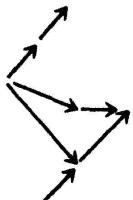


Fig. 2.5.2

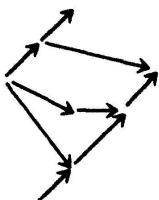
Bemerkung und der Dimensionsformel 1.3 liegen daher die Injektiven zu extremalen Punkten des Köchers von  $B$  in der Vereinigung der Träger der startenden Funktionen zu den  $g \in G$  und zu  $\text{rad } P$ . Da  $E$  am minimalen Punkt, der  $\tau a_1$  entspricht, nicht verschwindet, muss  $G$  einen Vorgänger von  $\tau a_1$  enthalten. Unter allen nach der Kleinerschen Liste möglichen derartigen Gerippen betrachten wir als Beispiel

$$G = \left\{ \begin{matrix} \tau^2 c_1 \\ a_3, \tau^3 b_2, \tau a_1 \end{matrix} \right\}.$$

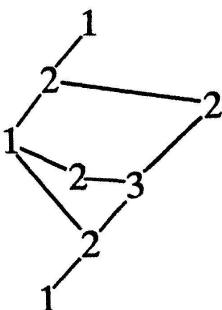
Die injektiven Punkte von  $R_{T^1}$  liegen dann alle im umrandeten Gebiet von  $\Delta$  und müssen so gewählt werden, dass  $B$  darstellungsendlich ist (diese Bedingung ist im Beispiel immer erfüllt), und dass alle nach links verschobenen Punkte, die zu  $S$  gehören, bereits zu  $R_{T^1}$  gehören ([8], 6.6). So kann man als Injektive nicht  $a_3$ ,  $\tau a_2$ ,  $\tau a_1$ ,  $\tau^2 c_1$ ,  $\tau^3 d$ ,  $\tau^4 b_1$  und  $\tau^3 b_2$  wählen, weil dann  $\tau^2 c_1$  auch projektiv ist, wie man durch Rechnen mit Dimensionen von rechts nach links sofort erkennt. Hingegen können  $\tau a_3$ ,  $\tau a_2$ ,  $\tau a_1$ ,  $\tau^2 c_1$ ,  $\tau^3 d$ ,  $\tau^3 b_1$  und  $\tau^3 b_2$  als Injektive auftreten, deren Dimensionsvektoren dann leicht berechnet werden können. Nach [6] ist  $B$  dann durch die entsprechenden Kommutativitäts- und Nullrelationen bestimmt. In unserem Beispiel erhalten wir die Algebra



mit Kommutativitätsrelation. Da wir auch den Dimensionsvektor von  $\text{rad } P$  kennen, finden wir für  $A$



mit Kommutativitätsrelationen. Schliesslich berechnet man nach 1.3 den Dimensionsvektor von  $E$  als



Dabei findet man i.a. natürlich mehrere Dimensionsvektoren.

### 3. Beweis des Klassifikationssatzes

Wir bestimmen die extremalen Algebren  $A = (T, g)$  getrennt für die in 2.3 eingeführten Bäume  $T$ , indem wir [8], 6.6 anwenden. Dabei überlassen wir die Berechnung der Dimensionsvektoren extremaler Moduln meist dem Leser.

#### 3.1 Der Baum $A_\alpha$

Dieser Fall ist in der Literatur eingehend behandelt (z.B. [8], 7). Die von uns benötigten Eigenschaften sind jedoch einfach abzulesen. Der Unterschied im Schwierigkeitsgrad zwischen der Klassifikation der treuen und derjenigen aller einfach zusammenhängenden Algebren mit Baum  $A_\alpha$  lässt vermuten, dass die Beschreibung aller einfach zusammenhängenden Algebren knifflig ist.

Natürlich sind Köcheralgebren vom Typ  $A_\alpha$  extreme Algebren mit Baum  $A_\alpha$ . Umgekehrt zeigt das induktive Verfahren aus [8], 6.6 zunächst, dass einfach zusammenhängende Algebren mit Baum  $A_\alpha$  als Köcher einen Baum haben. Daher sind extreme Moduln treu. Im Träger der startenden Funktion eines Extremalen  $E$  müssen also alle Injektiven liegen. Als Träger der startenden Funktion eines Punktes innerhalb von  $k(\mathbb{Z}A_\alpha)$  erhält man das wohlbekannte Rechteck  $V$  ([12], siehe Fig. 3.1.1). Von oben nach unten absteigend zeigt man, dass die Injektiven alle auf einem Schnitt innerhalb von  $V$  liegen. Eine extreme Algebra mit Baum  $A_\alpha$  ist also eine Köcheralgebra vom Typ  $A_\alpha$ . Später brauchen wir noch diejenigen Algebren mit Baum  $A_\alpha$ , die eine aufsteigende Diagonale als Schnitt haben und darauf 2 Punkte  $x$  und  $y$ , deren Träger zusammengenommen alle Injektiven enthalten (siehe Fig. 3.1.2).

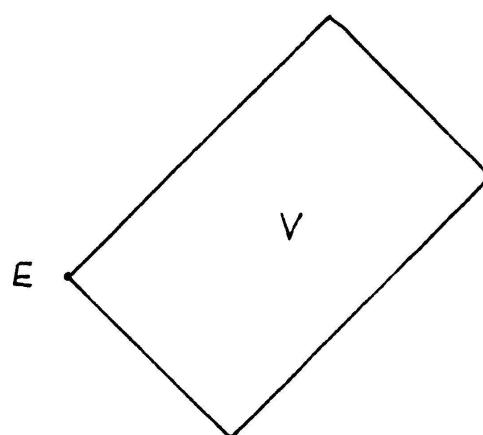


Fig. 3.1.1

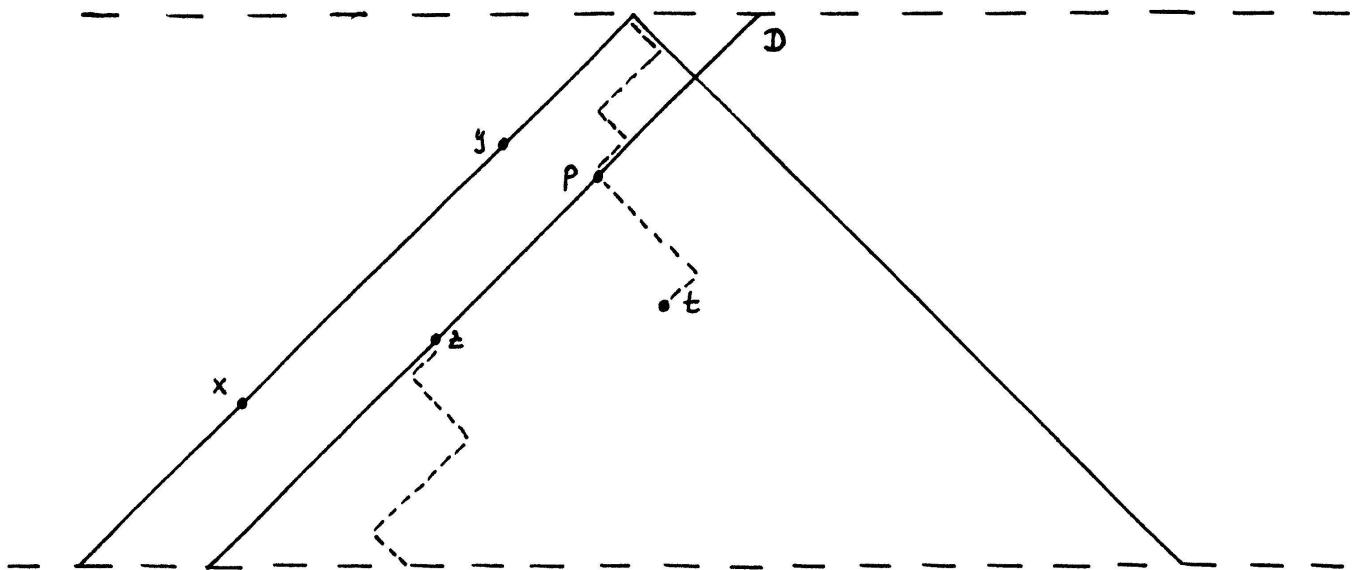


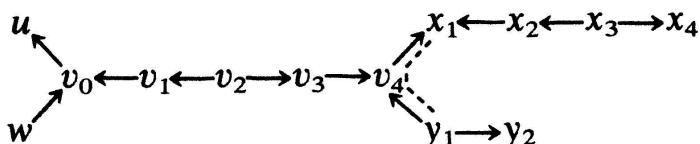
Fig. 3.1.2

Wir können annehmen, dass weder  $x$  noch  $y$  treu ist. Sei  $D$  die aufsteigende Diagonale am weitesten links, die einen Injektiven  $z$  enthält, der nur von  $x$  aus erreichbar ist. Wir wählen  $z$  als höchsten Punkt auf  $D$  mit dieser Eigenschaft. Der Injektive  $t$  auf der nächsthöheren Stufe liegt dann auf der absteigenden Diagonale durch  $y$ . Unterhalb von  $z$  und oberhalb von  $y$  liegen die Injektiven auf Schnitten. Man erhält so Algebren, deren Köcher ein Baum ist, mit genau einem Punkt  $p$  der Ordnung 3 und genau einer Nullrelation der Gestalt  $\rightarrow p \rightarrow = 0$ .

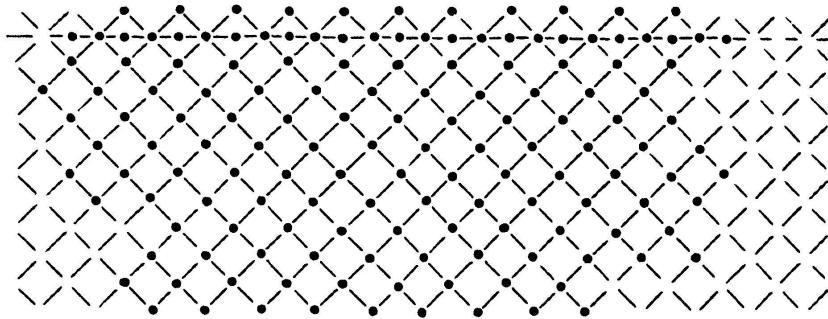
### 3.2 Der Baum $D_{\alpha+3}$

Mit Hilfe der bekannten startenden Funktionen von  $k(\mathbb{Z}D_{\alpha+3})$  ([12]) überprüfen wir zunächst, dass die Darstellungsköcher der in Satz 2.4 angegebenen Algebren  $D_{\alpha+3}$  als zugehörigen Baum haben.

Dies ist klar für Algebren aus der Familie (2). Bei einer Algebra aus der Familie (3) nimmt man zuerst den Darstellungsköcher der Algebra ohne die  $x_i$  und hängt dann an der absteigenden Diagonale durch  $v_p$  noch den linearen Köcher  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_q$  dran. (Bei  $\mathbb{Z}D_{\alpha+3}$  liege der Punkt der Ordnung 3 oben). Nehmen wir z.B., die Algebra

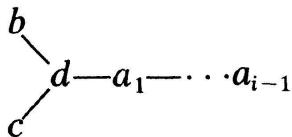


In der folgenden Skizze liefern die dick eingetragenen Punkte den Darstellungsköcher von  $\mathbb{Z}D_{13}$ .



Betrachten wir noch Familie (5). Dort lässt man zuerst  $u_p$  und  $w_1—w_2—\cdots—w_s$  weg. Dann hängt man den Projektiven zum Punkt  $u_p$  an  $\tau u_{p-2}$  an und den linearen Köcher zu  $w_1—w_2—\cdots—w_s$  ähnlich wie eben an der absteigenden Diagonale durch  $v_q$ .

Jede der angeführten Algebren hat offensichtlich extremale Unzerlegbare, und jeder davon ist treu. Wir überlassen dem Leser die lästige Pflicht sicherzustellen, dass bei der induktiven Konstruktion keine weiteren extremalen Algebren mit Baum  $D_{\alpha+3}$  auftreten. Dabei überlegt man sich, dass für einen  $\leq_R$ -maximalen Projektiven  $P = (g(a_i), a_i)$  mit  $i \geq 2$  die zu

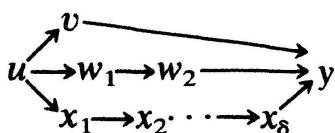
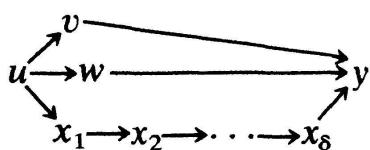


gehörige Algebra extremal ist. Ausserdem benutzt man das Ergebnis am Ende von 3.1.

### 3.3 Der Baum $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$

Die bisher behandelten Fälle sind isofern nicht typisch, als von vorneherein klar ist, dass alle Graduierungen eine darstellungsendliche Algebra liefern. Dies ist von nun an nicht mehr richtig, und wir verwenden das Endlichkeitsskriterium von [8], 6.6. Im vorliegenden Fall ist die Klassifikation einfach. Wir wiederholen nochmals ausführlich die Argumentation von 2.5.

**LEMMA.** *Die einzigen extremalen Algebren  $A = (T, g)$  mit Baum  $T$  der Klasse  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  sind bis auf Isomorphie:*



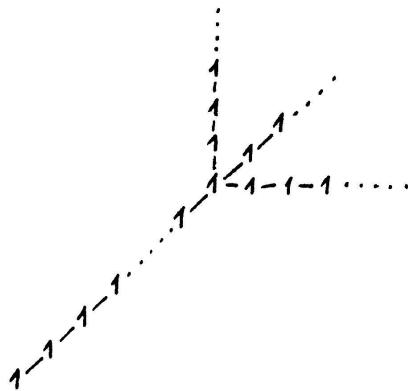
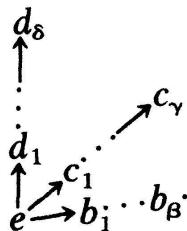


Fig. 3.3

*Beweis.* Nach dem Beweis von Lemma 2.3 können wir annehmen, dass  $P = (g(a_\alpha), a_\alpha)$  ein  $\leq_R$ -maximaler Projektiver ist. Wir setzen  $B = (T^1, g_1)$  und skizzieren in  $R_{T^1}$  den Anfang der startenden Funktion  $s$  von  $\text{rad } P$  (Siehe Fig. 3.3). Wie in 2.2 bemerkt, identifizieren wir  $T^1$  mit einem Schnitt durch  $R_{T^1}$ , so dass  $\text{rad } P$  mit  $a_{\alpha-1}$  zusammenfällt. (Setze  $a_0 = e$ .) Als  $B$ -Modul ist  $e$  injektiv, weil anderenfalls  $s(\tau e) = 2$ , was der Darstellungsendlichkeit von  $A$  widerspricht. Vor  $e$  liegt also ein  $\leq_R$ -minimaler injektiver  $B$ -Modul  $i$ , der einem minimalen Punkt  $q$  im Köcher  $K$  von  $A$  entspricht.

Sei jetzt  $E$  ein extremaler  $A$ -Modul mit Gerippe  $G$  (1.3). Per Definition ist also  $E(q) \neq 0$ . Nach der Dimensionsformel in 1.3 gibt es ein  $x \in G$  mit  $x(q) \neq 0$ . Weil  $B$  einfach zusammenhängend ist, ist  $x$  kleiner als  $i$ , also auch kleiner als  $e$ . Da  $x$  mit allen Punkten im Träger von  $s$  vergleichbar ist, also erst recht mit jedem Element von  $G$ , kann  $G$  nach der Kleinerschen Liste nur ein Element haben:  $G = \{x\}$ . Da jeder Homomorphismus von  $\text{rad } P$  in einen Injektiven durch  $x$  faktorisiert, ist  $x$  ein extremaler  $B$ -Modul. Die extremalen Punkte von  $B$  bestehen nämlich aus den extremalen Punkten von  $A$  ohne  $P$  und eventuell zusätzlich einigen Nachbarn von  $P$ . Im Träger der startenden Funktion von  $x$  liegen also alle extremalen Injektiven.

Für  $\alpha = 1$  ist  $\text{rad } P = x = e$  und der Träger der startenden Funktion besteht aus drei von  $e$  ausgehenden Strahlen. Alle Punkte des Trägers sind daher injektiv, und man findet für  $B$  die Algebren



Da mit  $A$  auch  $B$  darstellungsendlich ist, findet man für  $A$  die angegebenen Algebren.

Für  $\alpha > 1$  ist  $a_1$  oder  $\tau a_1$  injektiv, weil der Injektive in der  $\tau$ -Bahn von  $a_1$  zwischen zwei Injektiven im Träger der startenden Funktion von  $x$  liegt. Im

ersten Fall enthält  $B$  als volle Unterkategorie, im zweiten. Jedenfalls ist  $B$  nicht darstellungsendlich. Dies schliesst den Fall  $\alpha > 1$  aus. *q.e.d.*

Natürlich hätten wir uns einen Teil der Ueberlegungen sparen können, wenn wir das Ergebnis von Bautista-Brenner ([3]) über fast zerfallende Folgen mit vier mittleren Termen benutzt hätten. Im nächsten Absatz leiten wir mit Hilfe ihrer Ergebnisse über Wiederholungszahlen zahmer Schnitte ein wichtiges Endlichkeitskriterium her. Oben haben wir auf eine Anwendung verzichtet um anzudeuten, wie man mindestens einen Teil ihrer Ergebnisse zuerst leicht für einfach zusammenhängende Algebren beweist. Mit der von Gabriel und Riedtmann entwickelten Ueberlagerungstheorie lassen sich die Resultate dann “hinunterdrücken” auf beliebige darstellungsendliche Algebren.

### 3.4 Ein Endlichkeitskriterium

Bevor wir die restlichen Bäume untersuchen, leiten wir unter gewissen Bedingungen eine Schranke für die Länge der Aeste von  $T$  ab, falls  $(T, g)$  eine extreme Algebra ist. Diese Ueberlegung wird durch die nachfolgende Arbeit überflüssig. Sie ist aber “psychische” Grundlage für die Klassifikation, weil sie zeigt, dass es sich dabei um ein endliches Problem handelt.

LEMMA. Sei  $A = (T, g)$  eine extreme Algebra, und sei

$$a_n - a_{n-1} \quad \quad \quad - a_1 - d - b_1 - b_2$$

$c_1$   
 $\vdots$   
 $c_\gamma$

ein Teilbaum von  $T$ . Ferner sei  $P = (g(a_n), a_n)$  ein Projektiver mit maximalem Grad. Dann gilt:

- (a) Für  $\gamma = 1$  ist  $n \leq 62$ .  
 (b) Für  $\gamma \geq 2$  ist  $n \leq 25$ .

*Beweis.* (a) Nach Lemma 2.2 und der Wahl von  $P$  gehören alle Punkte im umrandeten Bereich der Figur 3.4 zu  $R_T$ . Nach [3] darf sich  $\tilde{E}_8$  nur 29-mal wiederholen. Also gilt  $k \leq 28$ , d.h.  $n \leq 62$ .

Der Beweis von (b) ist ähnlich.

q.e.d.

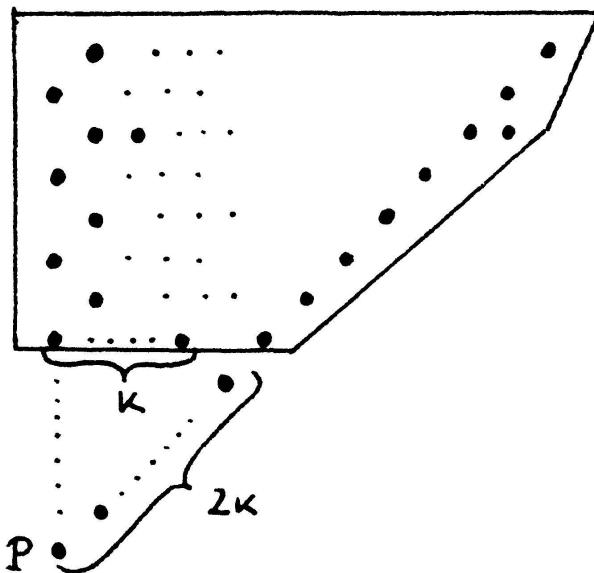


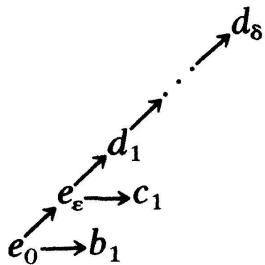
Fig. 3.4

### 3.5 Der Baum ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ )

Sei  $P = (g(m), m)$  ein Projektiver mit maximalem Grad. Nach dem Beweis von Lemma 2.3 können wir  $m = a_\alpha$  annehmen und  $\gamma \leq \delta$ . Wir betrachten zwei Möglichkeiten.

#### 3.5.1 $\delta \geq 2$

Wir überlegen uns, dass dann bei einer extremalen Algebra alle Parameter  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  durch 62 nach oben beschränkt sind. Zunächst ist  $\alpha + \varepsilon \leq 62$  nach 3.4. Setze wie üblich  $B = (T^1, g_1)$  und skizziere die startende Funktion von  $a_{\alpha-1}$  in  $R_{T^1}$  ( $a_0 = e_0$ , siehe Fig. 3.5.1). Weil  $[1, 2, 5]$  nicht vorkommen darf, ist  $\beta \leq 4$ . Aus dem gleichen Grund ist  $\delta \leq 5$ , wenn  $e_0$  oder  $e_\varepsilon$  nicht injektiv sind (bzgl.  $R_{T^1}$  natürlich). Sind schliesslich  $e_0$  und  $e_\varepsilon$  injektiv, so folgert man wie in 3.3, dass das Gerippe eines extremalen Moduls  $E$  nur aus einem Element  $x$  besteht, das kleiner als  $e_0$  ist, und dass  $x$  ein extremer  $B$ -Modul ist. Da  $B$  als volle Unterkategorie



enthält, ist  $\delta$  durch 4 nach oben beschränkt.

#### 3.5.2 $\delta = 1$ ( $\Rightarrow \gamma = 1$ )

In diesem Fall können wir alle möglichen Algebren bestimmen. Für  $\beta \geq 2$  ist  $e_0$  injektiv, weil sonst  $[1, 1, 1, 1,]$  auftritt. Das Gerippe eines extremalen  $A$ -Moduls

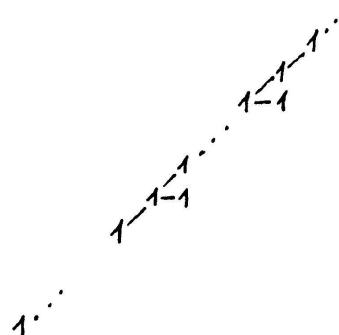


Fig. 3.5.1

$E$  besteht daher aus einem extremalen  $B$ -Modul  $x$ , der kleiner als  $e_0$  ist. Für  $\alpha > 1$  enthält  $B$  als volle Unterkategorie eine der nicht darstellungsendlichen Algebren

$$\begin{array}{c} d_1 \\ \nearrow \quad \searrow \\ e_0 \xrightarrow{c_1} b_1 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c} d_1 \\ \nearrow \quad \searrow \\ e_0 \xrightarrow{c_1} b_1 \\ \searrow \\ \tau a_1 \end{array}$$

Für  $\alpha = 1$  hingegen finden wir die Familie (8) aus der Liste.

Von nun an gilt  $\beta = \gamma = \delta = 1$ . Wir schliessen noch den Fall  $\alpha > 1$  aus. Ist  $e_0$  injektiv, so enthält  $B$  als volle Unterkategorie eine Köcheralgebra vom Typ  $\tilde{D}_4$ . Der dafür soeben gegebene Beweis bleibt gültig. Wenn  $e_0$  nicht injektiv ist, unterscheiden wir zwei Möglichkeiten.

Zunächst existiere  $\tau^j a_{j-1}$  für ein  $\alpha \geq j \geq 2$  nicht. Wir skizzieren die startende Funktion  $s$  von  $a_{\alpha-1}$  in  $R_{T^1}$  (Siehe Fig. 3.5.2.1). In der  $\tau$ -Bahn von  $a_{\alpha-1}$  liegt ein

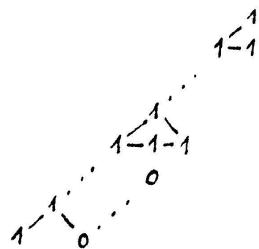


Fig. 3.5.2.1

Injectiver, der einen minimalen Injectiven  $i$  als Vorgänger hat. Ein extremaler  $A$ -Modul  $E$  verschwindet nicht an der Stelle  $i$ , so dass sein Gerippe einen Vorgänger von  $i$  enthält. Nach der Kleinerschen Liste haben wir  $G = \{a_k\}$ ,  $1 \leq k \leq \alpha - 1$ , für einen extremalen  $B$ -Modul  $a_\kappa$ . Zwischen  $e_0$  und  $e_\kappa$  gibt es einen Injectiven, weil sonst  $s(\tau e_\kappa) = 2$  gilt. Wendet man auf die extreme Algebra  $B$  das zu 2.3 duale Lemma an, so findet man, dass schon  $a_{\alpha-1}$  injektiv ist. Daher ist  $G = \{a_{\alpha-1}\}$  und  $a_{\alpha-1}$  ist ein treuer  $B$ -Modul. Existiert  $\tau^2 a_1$ , so ist  $e_1$  injektiv (sonst kommt  $[1, 1, 1, 1]$  vor oder es ist  $s(\tau e_1) = 2$ ) und  $B$  enthält als volle Unterkategorie eine der nicht darstellungsendlichen Algebren

kategorie

$$\begin{array}{ccc}
 & d_1 & \\
 & \nearrow e_1 \rightarrow c_1 & \\
 b_1 \rightarrow \tau e_0 & \nearrow & \\
 & \tau^2 a_1 &
 \end{array}$$

Existiert  $\tau^2 a_1$  nicht, so sei  $e_\kappa$  der Injektive mit kleinstem Index. Dann enthält  $B$

$$\begin{array}{ccc}
 & d_1 & \\
 & \nearrow e_\kappa \rightarrow c_1 & \\
 a_1 & \nearrow \tau e_{\kappa-1} & \\
 & &
 \end{array}$$

als volle Unterkategorie.

Nun mögen alle  $\tau^j a_{j-1}$ ,  $\alpha \geq j \geq 2$ , existieren. Die Existenz von  $\tau^2 a_1$  erzwingt, dass  $e_1$  injektiv ist. Sei  $E$  ein extremaler  $A$ -Modul mit Gerippe  $G$ . Hat  $G$  nur ein Element  $x$ , so ist  $x$  ein extremaler  $B$ -Modul. Andernfalls gilt nach der Kleinerschen Liste  $G = \{e_1, b_1\}$ . Falls  $b_1 \hookrightarrow \tau e_0$  mono, ist  $e_1$  ein extremaler  $B$ -Modul. Für  $b_1 \twoheadrightarrow \tau e_0$  epi hingegen sind auch  $e_0 \twoheadrightarrow e_1$  und  $e_0 \twoheadrightarrow b_1$  epi aus Dimensionsgründen, d.h.  $e_0$  ist ein extremaler  $B$ -Modul. Auf jeden Fall ist  $B$  extremal mit  $\leq_R$ -minimalem Injektiven  $e_1$ , was dem zu 2.3 dualen Lemma widerspricht.

Jetzt bleibt lediglich der Fall  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$  übrig. Wieder skizzieren wir die startende Funktion von  $e_0$  wobei  $e_\kappa$  der Injektive mit kleinstem Index sei (Siehe Fig. 3.5.2.2). Nun bereits vertraute Argumente zeigen, dass als Gerippe extremaler  $A$ -Moduln nur die Mengen  $\{e_j\}$ ,  $0 \leq j \leq \kappa$ , oder  $\{e_i, x\}$ ,  $1 \leq i \leq \kappa$ ,  $x \in \{\tau e_j, b_1\}$ ,  $j < i - 1$ , möglich sind. Im ersten Fall ist  $e_j$  ein extremaler  $B$ -Modul, also treu nach 3.2. Für  $A$  stösst man auf eine Algebra der Familie (9). Im zweiten Fall schneiden wir dual zur üblichen Konstruktion  $B$  am minimalen Injektiven  $e_\kappa$  auf. Im unteren Teil erhalten wir eine Algebra  $B'$  mit Baum  $A_\kappa$ , wobei alle unzerlegbaren injektiven  $B'$ -Moduln in der Vereinigung der Träger der startenden

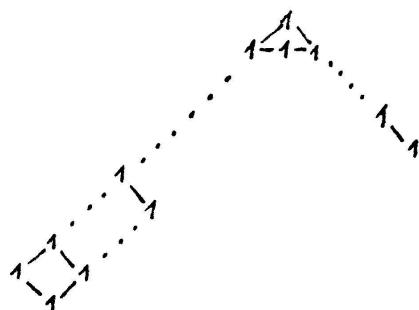


Fig. 3.5.2.2

Funktionen von  $x$  und  $\tau e_{i-1}$  liegen. Nach der Bemerkung am Ende von 3.1 finden wir die Familie (10).

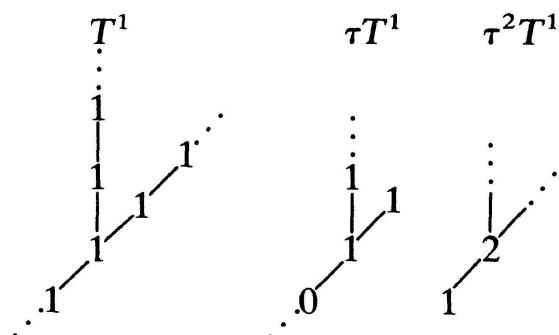
### 3.6 Der Baum $(\alpha, \beta, \gamma)$ , $\beta \geq 2$

Die Analyse dieses Falles ist bei weitem am kompliziertesten, und eine vollständige Klassifikation ohne Computer kaum durchführbar. Wir unterscheiden mehrere Möglichkeiten und setzen dabei von nun an  $\alpha \geq \beta \geq \gamma$  voraus.

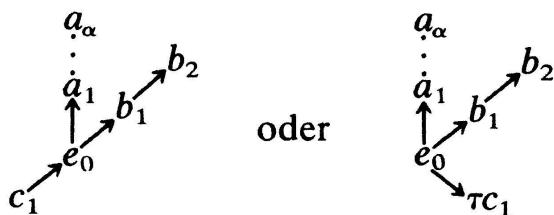
### 3.6.1 $\gamma \geq 2$

Wir zeigen, dass bei jeder extremalen Algebra  $\alpha \leq 27$  ist. Sei  $P = (g(m), m)$  ein Projektiver maximalen Grades. Da  $[2, 2, 2]$  nicht auftreten darf, muss  $m$  Randpunkt oder Nachbar eines Randpunktes sein. Nach 3.4 haben wir  $\alpha \leq 27$  für  $m \in \{a_i\}$ . Ist  $m$  kein Randpunkt, so ergibt sich nun  $\alpha \leq 4$ , weil sonst  $[1, 2, 5]$  auftritt.

Sei jetzt  $m = c_\gamma$ . Wir skizzieren die startende Funktion von  $c_{\gamma-1}$  in  $R_{T^1}$  wobei wieder  $B = (T^1, g_1)$ .

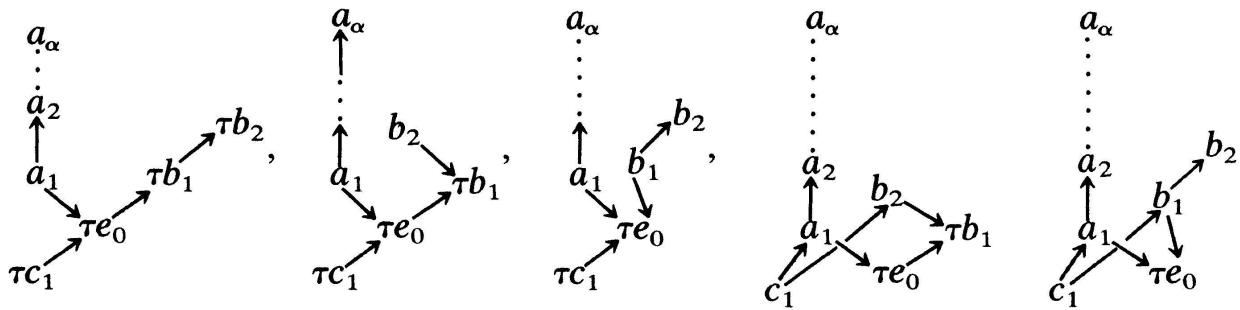


Ist  $e_0$  injektiv, so enthält  $B$  als volle Unterkategorie



Es folgt  $\alpha \leq 4$ . Für  $\beta \geq 3$  ist nun  $\alpha \leq 5$ , sonst käme  $[1, 2, 5]$  vor. Ist  $a_1$  nicht injektiv, so gilt  $\alpha \leq 6$ , weil anderenfalls  $[1, 2, 5]$  auftritt. Analog ist  $\alpha \leq 5$ , wenn  $\tau^2 c_1$  existiert. Man sieht, dass jetzt  $B$  eine der folgenden Algebren als volle

Unterkategorie enthält, weshalb  $\alpha \leq 5$  gilt.



Die gleichen Überlegungen gelten für  $m = b_\beta$ .

### 3.6.2 $\gamma = 1$

Zuerst sei  $P = (g(m), m)$  ein Projektiver maximalen Grades mit  $m \in \{a_i\}$ . Dabei ist nur  $\alpha \geq i \geq \alpha - 4$  zulässig, weil sonst  $[1, 2, 5]$  auftritt. Nach 3.4 ergibt sich  $\alpha \leq 66$ .

Von jetzt an sei  $P = (g(m), m)$  ein  $\leq_R$ -maximaler Projektiver mit  $m \notin \{a_i\}$ . Wir werden für  $\alpha \geq 8$  alle extremalen Algebren klassifizieren.

#### 3.6.2.1 $m = d$

Dann ist  $\alpha \leq 4$ , weil sonst  $[1, 2, 5]$  vorkommt.

#### 3.6.2.2 $m = c_1$

Wie immer sei  $B = (T^1, g_1)$ . Der Baum von  $B$  ist dann vom Typ  $A_n$ , so dass  $B$  stets darstellungsendlich ist. Wir skizzieren den Beginn der startenden Funktion von  $d$  in  $R_{T^1}$  mit Träger  $S$ . (Siehe Fig. 3.6.2.2). Ist  $d$  injektiv, so ist  $S$  für alle Werte von  $\alpha$  und  $\beta$  darstellungsendlich. Wir erhalten so die Familie (11). Sei also  $d$  nicht injektiv. Für  $\beta \geq 3$  ist dann  $\alpha \leq 5$ , weil sonst  $[1, 2, 5]$  in  $S$  liegt. Wir können daher  $\beta = 2$  voraussetzen. Ist  $a_1$  nicht injektiv, so folgt  $\alpha \leq 6$ . Für injektives  $a_1$  stossen wir auf die Familien (13), (14) und (17)<sup>op</sup> mit  $j = 2$ . Dem letzten Fall  $m \in \{b_i\}$  sind die nächsten drei Absätze gewidmet.

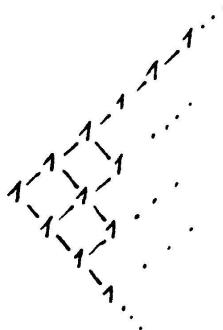


Fig. 3.6.2.2



1

Fig. 3.7.1

### 3.7 Der Baum $(\alpha, 2, 1)$ , $m \in \{b_i\}$ .

Im folgenden ist stets  $\alpha \geq 8$ . Es ist klar, dass  $B$  immer darstellungsendlisch ist.

#### 3.7.1 $m = b_1$

Wir zeichnen die Träger der startenden Funktionen von  $r_1$  und  $r_2$  mit  $\text{rad } P = r_1 \oplus r_2$  (Siehe Fig. 3.7.1). Dabei muss  $d$  injektiv sein, weil sonst  $[1, 2, 5]$  vorkommt. Man erhält Algebren der Familie  $(12)^{\text{op}}$ , wo  $z$  fehlt.

#### 3.7.2 $m = b_2$

Der Träger der startenden Funktion von  $b_1$  (Siehe Fig. 3.7.2) in  $k(\mathbb{Z}T^1)$  zeigt, dass vor der gestrichelten Linie ein Injektiver  $x$  von  $R_{T^1}$  liegt, weil sonst  $[1, 2, 5]$

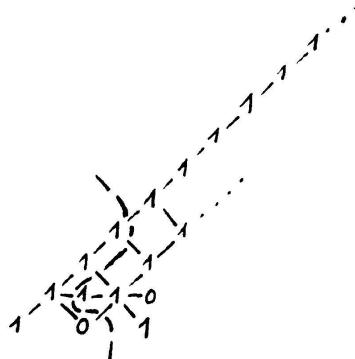


Fig. 3.7.2

auftritt. Wir unterscheiden die einzelnen Fälle, wobei wir immer als erstes den Träger der startenden Funktion von  $b_1$  in  $k(\Delta)$  skizzieren. Dabei ist  $\Delta$  der Unterköcher von  $\mathbb{Z}T^1$ , in dem  $x$  injektiv ist (2.5).

(a)  $b_1$  ist injektiv (Siehe Fig. 3.7.2.a).

Dann ist  $b_1$  extremaler  $B$ -Modul, also treu nach 3.2. Man erhält die Familie

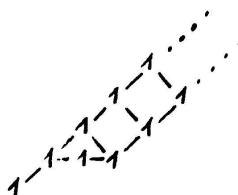


Fig. 3.7.2.a

(16) und Algebren aus den Familien (12) und  $(12)^{\text{op}}$ , bei denen  $z$  fehlt.

(b)  $d$  ist injektiv (aber  $b_1$  nicht) (Siehe Fig. 3.7.2.b).

Jetzt ist  $d$  ein treuer  $B$ -Modul. Die möglichen Algebren gehören zur Familie (12) ohne  $z$ .

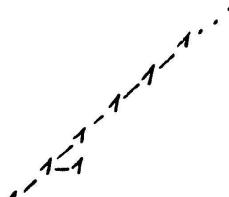


Fig. 3.7.2.b

(c)  $\tau b_1$  ist injektiv (Siehe Fig. 3.7.2.c).

Die startende Funktion von  $b_1$  sieht so aus wie in (a). Nun ist aber  $d$  ein extremaler  $B$ -Modul, also treu nach 3.2. Alle Injektiven von  $R_{T^1}$  liegen also im Träger der startenden Funktion von  $d$  in  $k(\Delta)$ , die wir andeuten. Wir finden die Familien (17), (18), (19) und  $(17)^{\text{op}}$ .

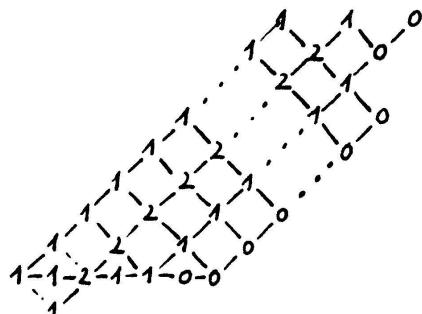


Fig. 3.7.2.c

(d)  $a_1$  ist injektiv (Siehe Fig. 3.7.2.d).

Das Gerippe eines extremalen  $A$ -Moduls ist einelementig oder gleich  $\{a_1, c_1\}$ . Jedenfalls liegen alle Injektiven im eingekreisten Bereich. Wir stossen auf die Familien  $(13)^{\text{op}}$  und  $(14)^{\text{op}}$ .

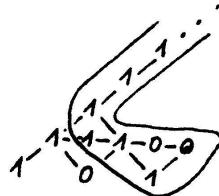


Fig. 3.7.2.d

(e)  $a_2$  ist injektiv (Siehe Fig. 3.7.2.e).

Das Gerippe eines extremalen  $A$ -Moduls besteht aus höchstens zwei Elementen, wovon eines Vorgänger von  $a_2$  ist. Deshalb liegen die Injektiven im unkreisten Gebiet. Wir finden alle fehlenden Algebren der Familien (12) bis (24).

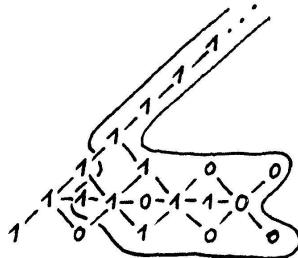


Fig. 3.7.2.e

### 3.8 Der Baum $(\alpha, 3, 1)$ , $m \in \{b_i\}$

Wieder sei  $\alpha \geq 8$ . Dann ist  $m = b_1$  nicht möglich, weil sonst  $[1, 2, 5]$  vorkommt. Analog ist  $d$  injektiv bei  $m = b_2$ , so dass nur Algebren der Familie (12) mit  $z$  erlaubt sind. Nun gelte also  $m = b_3$ . Wir deuten die startende Funktion an (Siehe Fig. 3.8). Ist  $b_2$  injektiv, so auch extremal, also treu nach unserer Liste. Eine Ueberprüfung aller in Frage kommenden Kandidaten anhand der Liste zeigt dann, dass  $A$  nur zur Familie (12) gehören kann. Aehnlich geht man vor, wenn  $b_1$  injektiv ist. Wegen  $\alpha \leq 8$  darf  $d$  kein  $\leq_R$ -minimaler Injektiver sein. Nun unterscheiden wir zwei Fälle. Zuerst sollen  $\tau^2 b_1$  und  $\tau^3 b_2$  existieren. Dann ist  $a_1$  injektiv, weil sonst  $[1, 2, 5]$  vorkommt. Sei  $E$  ein extremaler  $A$ -Modul mit Gerippe  $G$ . Ist  $G = \{x\}$ , so ist  $x$  extremal, also auch  $B$ . Sonst ist nur noch  $G = \{a_1, c_1\}$  möglich. Aus Dimensionsgründen sind dann  $d$  oder  $a_1$  extremal. In jedem Fall ist  $B$  eine extreme Algebra mit  $\leq_R$ -minimalen Injektiven  $a_1$ . Die duale Version von Lemma 2.2 schliesst wegen  $\alpha \geq 8$  diesen Fall aus.

Im verbleibenden Fall besteht das Gerippe eines Extremalen aus einem Vorgänger von  $d$ , sodass  $B$  extremal ist. Existiert  $\tau^2 b_1$ , so sind  $a_1$  oder  $a_2$   $\leq_R$ -minimale Injektive, was wieder wegen der dualen Aussage zu 2.2 unmöglich ist. Daher ist  $\tau b_1$  injektiv. Alle Injektive sind von  $b_1$  oder  $d$  aus erreichbar. Man überzeugt sich, dass  $B$  dann nicht darstellungsendlisch ist. Wir haben also nur Algebren der Familie (12) mit  $z$  gefunden.

### 3.9 Der Baum $(\alpha, \beta, 1)$ , $m \in \{b_i\}$ , $\beta \geq 4$ .

Wir zeigen, dass für  $\alpha \geq 8$  keine extremalen Algebren existieren. Da sonst  $[1, 2, 5]$  auftritt, ist nur  $m \in \{b_{\beta-1}, b_\beta\}$  erlaubt. Für  $m = b_{\beta-1}$  muss  $d$  injektiv sein,

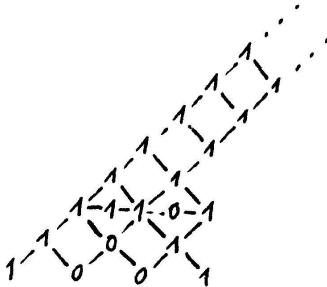


Fig. 3.8

weil anderenfalls [1, 2, 5] vorkommt. Dann enthält aber  $B$  eine Köcheralgebra vom Typ  $\tilde{E}_8$  als volle Unterkategorie. Daher sei  $m = b_\beta$ . Falls  $\tau d, \tau^2 b_1, \dots, \tau^\beta b_{\beta-1}$  existieren, ist  $a_1$  injektiv. Wie vorhin sieht man, dass  $B$  extremal ist. Dies widerspricht der dualen Form von Lemma 2.2 und  $\alpha \geq 8$ . Im anderen Fall ist  $B$  aus trivialen Gründen extremal, so dass es genügt, die Nichtexistenz extremaler Algebren für  $\beta = 4$  nachzuweisen. Dies ergibt sich aus der Struktur der Darstellungsköcher der Algebren aus der Familie (12) mit  $z$ .

#### 4. Eine Schranke für die punktweise Dimension

**SATZ.** *Sei  $A$  eine einfach zusammenhängende Algebra mit Köcher  $K$  und  $U$  ein unzerlegbarer  $A$ -Modul. Dann gilt  $\dim U(x) \leq 6$  für alle  $x \in K_0$ .*

Der Satz ist bisher bekannt für kommutative Köcher ([19], [26]) und Baumalgebren ([7]). Er ist das Analogon zu einem Ergebnis Kleiners über Darstellungen geordneter Mengen ([18]), auf das sich der Beweis des Satzes stützt.

Wir benötigen noch einige Definitionen. Für einen unzerlegbaren  $A$ -Modul  $U$  bezeichnet  $\sup U$  das Supremum der  $\dim U(x)$  genommen über alle  $x \in K_0$ . Ist eine Algebra  $A$  gegeben, so bedeutet  $\sup A$  das Supremum aller  $\sup U$ , wobei  $U$  die unzerlegbaren  $A$ -Moduln durchläuft.

Die startenden Funktionen von  $k(\mathbb{Z}T)$ ,  $T$  Dynkinsch, ([12]), und Lemma 2.5 zeigen, dass

$$\sup A \leq \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 & \text{für } A = (T, g) \text{ mit } T = \begin{cases} A_n, n \in \mathbb{N} \\ D_n, n \in \mathbb{N} \\ E_6 \\ E_7 \\ E_8 \end{cases} \\ 4 \\ 6 \end{cases}$$

Weiter gilt die Behauptung nach Lemma 3.3 für einen extremalen Modul über einer einfach zusammenhängenden Algebra mit Baum vom Typ  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ .

Wir führen den Beweis per Induktion über  $\dim A$  und können offenbar beim Induktionsschritt  $U$  als extremalen  $A$ -Modul voraussetzen. Sei im folgenden also stets  $A = (T, g)$  eine extreme Algebra mit Extremalem  $U$  und  $\leq_R$ -maximalem Projektiven  $P = (g(m), m)$ . Weiter bezeichne  $S = \coprod_{i=1}^n S_{x_i}$  die Vereinigung der Träger der startenden Funktionen  $s_{x_i}$ ,  $B = \prod_{i=1}^r B_i$  die Algebra  $A \setminus \{P\}$  ([8], 6.6) und  $G$  das Gerippe von  $U$ . Nach der Kleinerschen Liste und den Dimensionsformeln in 1.3 gilt bereits  $\dim U(z) \leq 6$  für den Punkt  $z$ , der  $P$  entspricht. An den anderen Punkten weisen wir die Gültigkeit des Satzes ebenfalls mit Hilfe von 1.3 nach. Dabei unterscheiden wir die nach 2.3 möglichen Bäume für  $T$ .

#### 4.1 Der Baum $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$

Nach 2.3 gilt  $m = a_\alpha$ . Wir skizzieren den Beginn von  $S$  (Siehe Fig. 4.1). Für  $\beta \geq 2$  ist  $e_0$  injektiv, weil sonst  $[1, 1, 1, 1]$  in  $S$  vorkommt. Folglich enthält  $G$

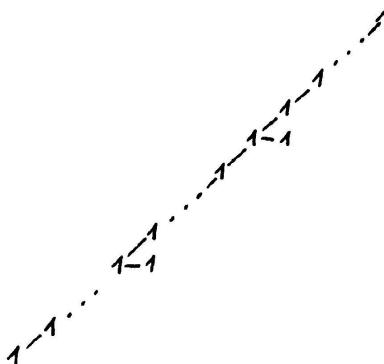


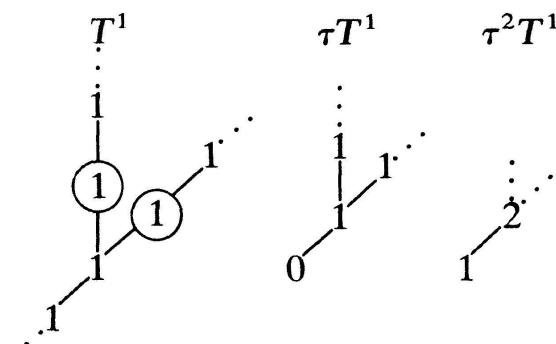
Fig. 4.1

einen Vorgänger von  $e_0$ , also ein maximales Element. Nach 1.2 ist  $G$  ein-elementig, und die Behauptung gilt per Induktion. Sei also  $\beta = 1$  und zuerst  $\alpha > 1$ . Das Gerippe ist auch einelementig, wenn  $\tau^2 a_1$  nicht existiert. Im verbleibenden Fall ist  $e_1$  injektiv, weil sonst für  $\varepsilon > 1$   $[1, 1, 1, 1]$  auftritt oder für  $\varepsilon = 1$   $s_{x_1}$  den Wert 2 annimmt. Da einelementige Gerippe keine Schwierigkeiten verursachen, haben wir nur  $G = \{e_1, b_1\}$  zu betrachten. Da entweder  $b_1$  selbst injektiv ist, oder  $b \hookrightarrow \tau e_0$  und  $e_1 \rightarrowtail \tau e_0$  gilt, erhalten wir  $\sup U \leq 2$ . ( $\hookrightarrow$  bedeutet mono,  $\rightarrowtail$  epi). Jetzt sei  $\alpha = 1$ . Wegen  $s_{x_1}(\tau e_\varepsilon) = 1$  gibt es einen Injektiven  $e_\kappa$  mit kleinstem Index  $\kappa$ . Als Gerippe ist nur  $\{e_j, x\}$  mit  $j \leq \kappa$  und  $x = \tau e_i$ ,  $i < j$ , oder  $x = b_1$  zu untersuchen. Die Dimensionen addieren sich nur bei den Injektiven, die Nachfolger von  $\tau e_{j-1}$  sind, und sind dort kleiner als 2, weil beides Moduln über einer Algebra mit Baum  $A_n$  sind.

#### 4.2 Der Baum $(\alpha, \beta, \gamma)$ , $\alpha \geq \beta \geq \gamma \geq 2$ .

Wie in 3.6.1 muss  $m$  Randpunkt oder Nachbar eines Randpunktes sein. Im zweiten Fall ist  $d$  injektiv. Also besteht das Gerippe aus zwei Unzerlegbaren für die Faktoren von  $B$ , und die Aussage folgt per Induktion.

Nun sei  $m$  ein Randpunkt  $r$ . Wir skizzieren  $S$ :



Einer der Vorgänger von  $\tau^2 d$  ist also injektiv. Ist einer der beiden eingekreisten Punkte injektiv, so besteht das Gerippe aus einem Injektiven und einem Unzerlegbaren ‘‘vom Typ  $A_n$ ’’. Ist einer der Injektiven zu den Punkten zwischen  $r$  und  $d$  in  $T^1$  nicht Nachfolger von  $\tau d$ , so ist das Gerippe einelementig. (Diese Bemerkung benutzen wir oft in ähnlichen Situationen.) Bis auf Umbenennung liegt der Fall  $m = c_2$  vor, weil sonst  $[2, 2, 2]$  auftritt. Für  $\alpha \geq 3$  findet man  $[1, 1, 1, 1]$ . Schliesslich bleiben folgende Möglichkeiten für ein Gerippe:

$$\left\{ \begin{array}{c} \tau^2 c_1 \\ \uparrow \\ \tau d \\ \tau d \end{array}, a_2, b_2 \right\} : \text{ Nach 1.3 ist } \sup U \leq \sup \tau d + \sup \tau^2 c_1 + \sup a_2 + \sup b_2 = 4$$

$\{\tau d, a_2, b_2\}$ : Es gilt  $\sup U \leq 3$ .

$\{a_1, b_1\}$ : Wegen  $a_1 \subset a_2 \oplus \tau d$  und  $b_1 \subset b_2 \oplus \tau d$  ist  $\sup U \leq 4$

$\{a_1, b_2\}$ : Wie eben folgt  $\sup U \leq 3$ .

### 4.3 Der Baum $(\alpha, \beta, 1)$ , $\alpha \geq \beta \geq 2$ .

Dieser Fall erfordert einige Rechnungen. Wir unterscheiden die einzelnen Möglichkeiten für  $m$ .

#### 4.3.1 $m = d$

Nur die Dynkinbäume  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$  treten auf.

#### 4.3.2 $m = c_1$

Wir zeichnen  $S$  (Siehe Fig. 4.3.2). Ist  $b_1$  oder  $a_1$  injektiv, so besteht  $G$  aus zwei Unzerlegbaren mit  $\sup = 1$ . Nun erzwingt  $[1, 1, 1, 1]$ , dass  $\beta = 2$ . Für injektives  $a_2$  hat das Gerippe höchstens vier Elemente, deren Supremum jeweils 1 ist. Es bleibt nur  $\alpha \leq 4$ , weil sonst  $[2, 2, 2]$  in  $S$  liegt.

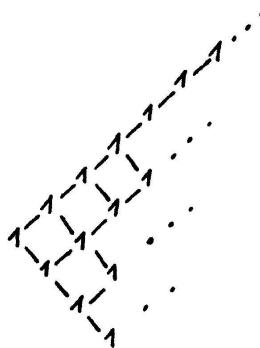


Fig. 4.3.2

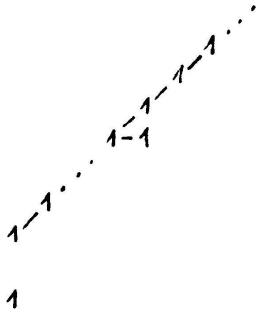


Fig. 4.3.3.1

4.3.3  $m \in \{b_i\}$ 

Wegen des Verbotes von  $[1, 3, 3]$  gilt  $m \in \{b_\beta, b_{\beta-1}, b_{\beta-2}\}$ . Für  $m = b_{\beta-2}$  ist  $d$  injektiv, weil anderenfalls  $[2, 2, 2]$  vorkommt. Die Abschätzung gilt in diesem Fall. Für  $m = b_{\beta-1}$  skizzieren wir  $S$  (Siehe Fig. 4.3.3.1). Ist  $a_1$  injektiv, so kann höchstens

$$\left\{ b_3, c_1, \begin{matrix} x \\ \uparrow \\ a_1 \end{matrix} \right\}$$

als Gerippe auftreten, und es folgt  $\sup U \leq 4$ . Ist  $a_1$  nicht injektiv, so gilt wegen  $[1, 1, 1, 1]$  schon  $\beta = 2$  und wegen  $[1, 3, 3]$  auch  $\alpha \leq 4$ .

Schliesslich sei  $m = b_\beta$  und zuerst  $\beta \geq 3$ . Wir skizzieren  $S$  (Siehe Fig. 4.3.3.2). Vor der gestrichelten Linie muss also ein Injektiver liegen. Die Abschätzung ist einfach, wenn  $a_1, a_2$  oder  $\tau d$  injektiv sind. Da  $[1, 1, 1, 1]$  nicht in  $S$  liegt, gilt also  $\alpha = \beta = 3$ .

(a)  $\tau a_1$  ist injektiv.

Liegt  $\tau a_1$  in  $G$ , so tritt höchstens  $\left\{ \begin{matrix} \tau^3 b_2 \\ \uparrow \\ \tau^2 b_1, \tau a_1, a_3 \end{matrix} \right\}$  auf, und es ergibt sich  $\sup U \leq$

4. Liegt  $\tau a_1$  nicht in  $G$ , so hat  $G$  höchstens zwei Punkte, z.B.  $G = \{a_2, \tau d\}$ . Dann gilt  $\sup U \leq \sup a_2 + \sup \tau d \leq 2 + 4 = 6$ , wie die startenden Funktionen von  $a_2$  und  $\tau d$  in  $k(\mathbb{Z}E_7)$  zeigen. Die übrigen Fälle behandelt man ähnlich.

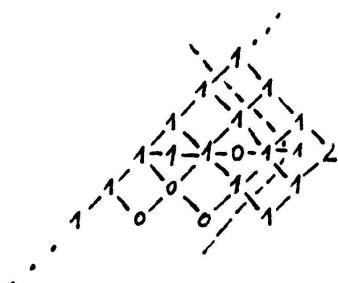


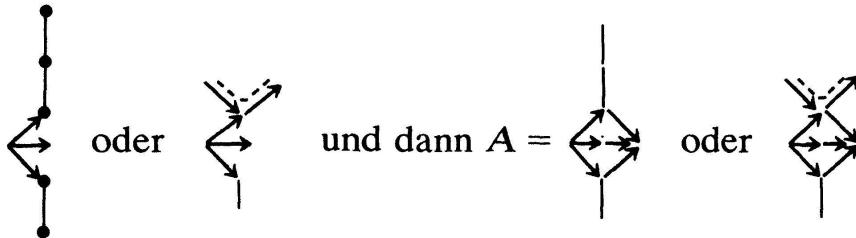
Fig. 4.3.3.2

(b)  $\tau^2 b_1, c_1$  oder  $\tau c_1$  sind injektiv.

Die erste Möglichkeit entspricht (a), bei den beiden anderen treten sogar nur 2-elementige Gerippe auf.

(c)  $\tau d$  ist injektiv.

Nach den bereits behandelten Fällen ist  $B$  eine der Algebren



Die Behauptung gilt. Es bleibt noch der Fall  $\beta = 2, \alpha \geq 5$  übrig. Wir skizzieren  $S$  (Siehe Fig. 4.3.3.3). Vor der gestrichelten Linie muss ein Injektiver liegen. Da  $T^1$

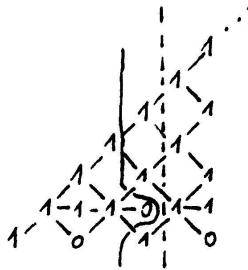


Fig. 4.3.3.3

als Baum  $D_n$  hat, brauchen wir nur Gerippe mit mehr als 3 Elementen zu untersuchen. Daher können wir bis zum durchgezogenen Strich alle Punkte als nicht injektiv annehmen. Ferner ist  $\alpha = 5$ , weil sonst  $[1, 3, 3]$  vorkommt.

(a)  $a_3$  ist injektiv

Nur  $\left\{ \begin{matrix} x \\ a_3, \tau a_1, \tau^2 b_1 \end{matrix} \right\}$  tritt als Gerippe mit mehr als 3 Elementen auf. Es gilt

$\sup U \leq 6$ .

(b)  $\tau a_1$  ist injektiv

Die Möglichkeiten für mehr als 3-elementige Gerippe sind:

$\left\{ \begin{matrix} \tau a_2 & x \\ \tau a_1 & \tau^2 b_1, a_4 \end{matrix} \right\}, \quad x \in \{\tau^2 d, \tau^2 c_1\}, \quad \left\{ \begin{matrix} \tau a_2 & a_5 \\ \tau^2 b_1, \tau a_1 & a_4 \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} \tau a_2 \\ \tau^2 b_1, x, \tau a_1 \end{matrix} \right\}, \quad x \in \{a_4, a_5\}$

$\left\{ \begin{matrix} \tau a_3 \\ \tau^2 b_1, a_5, \tau a_1 \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} y \\ \tau^2 b_1, \tau a_1, x \end{matrix} \right\}, \quad x, y \in \{a_3, a_4, a_5\}.$

Bei allen Punkten ausser  $\tau^2 b_1$  handelt es sich um Unzerlegbare “vom Typ  $A_n$ ”. Die Behauptung ergibt sich aus 1.3.

#### 4.3.4 $m \in \{a_i\}$

Nun ist  $m \in \{a_{\alpha-i} \mid 0 \leq i \leq 4\}$ , weil sonst  $[1, 2, 5]$  auftritt. Für  $m = a_{\alpha-4}$  ist  $d$  injektiv ( $[N, 4]!$ ), und für  $m = a_{\alpha-3}$  ist  $\beta \leq 2$  und  $\alpha \leq 4$ , weil sonst  $[1, 3, 3]$  vorkommt. Im Fall  $m = a_{\alpha-2}$  ist für  $\beta \geq 3$   $d$  injektiv ( $[2, 2, 2]!$ ). Sei also  $\beta = 2$ . Ist  $b_1$  injektiv, so gilt  $\sup U \leq 2$ . Andernfalls ist  $\alpha \leq 4$ . Aehnlich ist für  $m = a_{\alpha-1}$  der Fall einfach, wo  $b_1$  injektiv ist. Da  $[1, 1, 1, 1]$  nicht vorkommt, können wir  $\beta = 2$  annehmen. Wir skizzieren  $S$  für  $\alpha \geq 5$  (Siehe Fig. 4.3.4). Vor der gestrichelten Linie muss ein Injektiver liegen. Die Behauptung lässt sich nun stets leicht nachweisen. Den letzten Fall  $m = a_\alpha$ ,  $\alpha > \beta \geq 2$ , untersuchen wir im nächsten Absatz.

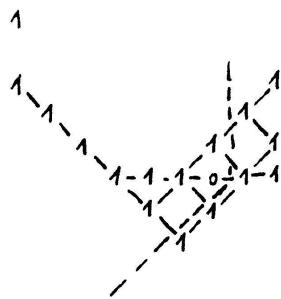


Fig. 4.3.4

#### 4.3.5 $m = a_\alpha$ , $\alpha > \beta \geq 2$

Sei zuerst  $\beta \geq 3$ . Wir deuten  $S$  an (Siehe Fig. 4.3.5.1). Man verifiziert  $\sup U \leq 6$ , wenn  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$ ,  $\tau d$  oder  $\tau c_1$  injektiv sind. Die dabei auftretenden Gerippe haben höchstens zwei Punkte. Nun gilt aber  $\beta = 2$ , weil sonst  $[2, 2, 2]$  vorkommt.

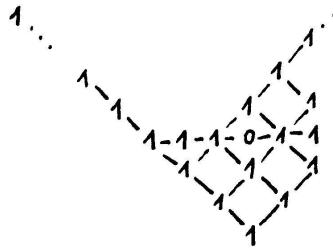


Fig. 4.3.5.1

Wir skizzieren  $S$  für  $\alpha \geq 5$  (Siehe Fig. 4.3.5.2). Vor der gestrichelten Linie muss also ein Injektiver liegen. Wir betrachten zunächst genau einen speziellen Fall. Wir nehmen an,  $\alpha$  sei 5, bis zur durchgezogenen Linie gebe es keine Injektiven und  $\tau^4 a_1$  sei injektiv. Wir berechnen unter diesen Bedingungen alle startenden Funktionen von Punkten, die in Gerippen mit mehr als einem Punkt

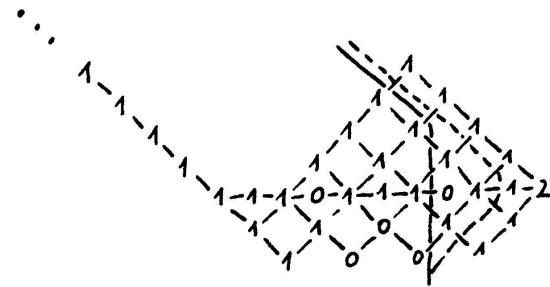
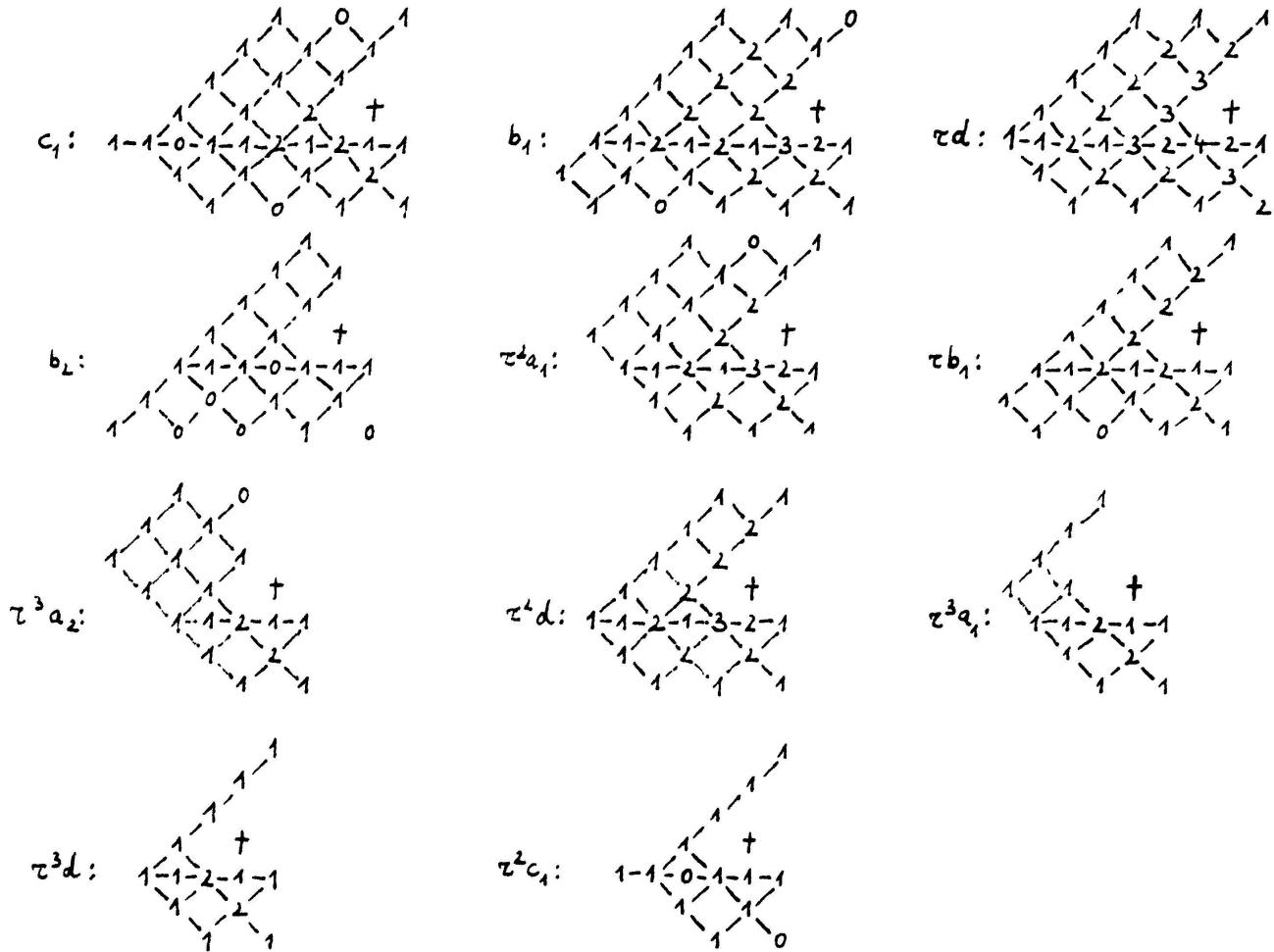


Fig. 4.3.5.2

aufreten. Hier erinnert  $\dagger$  daran, dass  $\tau^4 a_1$  injektiv ist.



Die übrigen startenden Funktionen nehmen höchstens den Wert 1 an, und ihr Verlauf ist klar.

Nun suchen wir Gerippe, in denen  $c_1$  liegt und finden nur  $\{c_1, b_1\}$  oder  $\{c_1, b_2\}$ . Die gerade berechneten Funktionen, Lemma 2.5 und 1.3 liefern die Behauptung. Wir können nun  $c_1$  vergessen und dann auch  $b_1$ . Für  $\tau d$  gibt es nur  $\{\tau d, b_2\}$ . Der Reihe nach vergessen wir  $c_1, b_1, \tau d, b_2, \tau b_1, \tau^2 a_1, \tau^2 d$  und  $\tau^3 a_2$ . Für  $\tau^3 a_1$  gibt es nur die Möglichkeiten

$$\left\{ \begin{array}{c} \tau^5 a_4 \\ \uparrow \\ \tau^2 a_1, \tau^2 c_1, \tau^4 a_3 \end{array} \right\}, \{ \tau^2 a_1, \tau^2 c_1, x \}, x \in \{ \tau^4 a_3, \tau^5 a_4 \}, \left\{ \begin{array}{c} \tau^4 a_2 \\ \uparrow \\ \tau^3 a_1, \tau^2 c_1, \tau^5 a_4 \end{array} \right\}$$

und 2-elementige Gerippe. Immer gilt die Behauptung. Beim Vergessen von  $\tau^4 a_3$  treten nur 2-elementige Gerippe auf. Für  $\tau^2 c_1$  gibt es als grosse Gerippe nur

$$\left\{ \begin{array}{c} x \\ \uparrow \\ \tau^2 c_1, \tau^4 a_2, \tau^5 a_4 \end{array} \right\}, \quad x \in \{\tau^3 d, \tau^3 b_1, \tau^3 b_2\}$$

und die Behauptung ist wahr. Genauso vergisst man  $\tau^3 d$ .

Betrachten wir nun die  $\tau^4 a_2$  enthaltenden Gerippe. Da jetzt alle startenden Funktionen nur noch die Werte 1 und 0 annehmen, interessieren uns nur noch Multiplizitätsfunktionen  $\mu$  mit  $\sum_{V \in S_\mu \setminus \{\omega\}} \mu(V) > 6$  (1.3.). Dieser Fall tritt nicht auf. Schliesslich wollen wir noch  $\tau^4 a_1$  vergessen. Dabei treten zwar eventuell



als Gerippe auf, die Multiplizitätsfunktionen  $\mu$  mit  $\sum_{V \in S_\mu \setminus \{\omega\}} \mu(V) > 6$  erlauben, aber die in 1.3 gegebenen Dimensionsformeln zeigen auch hier  $\sup U \leq 6$ .

Der Beweis setzt sich nun aus lauter Einzelschritten zusammen, die dem soeben behandelten Fall ähnlich sind, aber meist viel einfacher, sodass man den Beweis an einem langweiligen Nachmittag durchführen kann. Wir geben nur die Strategie an. Man erledigt nacheinander die Fälle, wo  $c_1, b_1, \tau d, b_2, \tau^2 a_1, \tau c_1, \tau b_1, \tau^3 a_2, \tau^2 d$  oder  $\tau b_2$  injektiv sind. Da sonst  $[N, 4]$  vorkommt, kann man jetzt  $\alpha \leq 7$  annehmen. Man behandelt die Fälle in denen  $\tau^4 a_3, \tau^3 a_1, \tau^2 c_1$  oder  $\tau^1 b_1$  injektiv sind. Von da an ist  $\alpha = 5$ , weil sonst  $[1, 1, 1, 1]$  auftritt. Schliesslich betrachtet man noch die Fälle, wo  $\tau^4 a_2, \tau^3 d, \tau^2 b_2, \tau^4 a_1, \tau^3 c_1$  oder  $\tau^3 b_1$  injektiv sind. Für  $\tau^4 d$  ist es geschickter, wie in 4.3.3c) vorzugehen.

## 5. Lineares Wachstum der Dimensionen Unzerlegbarer

Wir wollen aus Satz 2.4 folgendes Ergebnis herleiten:

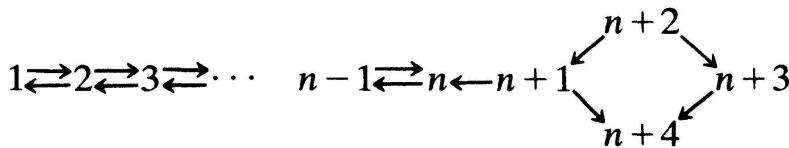
**SATZ.** *Sei  $A$  eine darstellungsendlche saubere Algebra der Dimension  $d$  mit  $e$  Einfachen. Dann gilt für die Dimension jedes Unzerlegbaren  $U$  die Abschätzung:  $\dim U \leq 2d - e + 1000$ .*

Bevor wir den Satz beweisen, möchten wir noch einige Bemerkungen und Folgerungen hinzufügen. Dem Beweisgang wird man entnehmen:

**KOROLLAR 1.** *Eine darstellungsendlche  $d$ -dimensionale Algebra  $A$  mit  $e$  Einfachen besitzt nur Unzerlegbare  $U$  der Dimension  $\leq 2d - e + 1000\sqrt{d}$ .*

Die Existenz einer Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $\dim U \leq f(\dim A)$  hat Gabriel implizit in [11] gezeigt. Jensen und Lenzing haben dies in [16] aufgegriffen. In beiden Fällen geht jedoch der verwickelte Beweis von Nazarova-Roiter über die Brauer-Thrall-Vermutung ein. Ferner ergibt sich die Existenz einer derartigen Funktion aus der Arbeit Roiters über multiplikative Basen von darstellungs-endlichen Algebren. ([25])

Die Konstante 1000 röhrt von den im Klassifikationssatz übergangenen Ausnahmealgebren her. Die bisher durchgeführten Computerrechnungen lassen erwarten, dass der bestmögliche Wert für die Konstante etwa bei 30 liegt. Hingegen lässt sich der variable Teil nur noch unwesentlich vermindern. Wir geben nämlich für jedes  $n \geq 2$  eine darstellungsendlische Algebra der Dimension  $3n + 10$  mit  $n + 4$  Einfachen an, die einen Unzerlegbaren der Dimension  $4n + 3 = 2d - 2e - 9$  besitzt. Betrachte die Algebra mit Köcher



bei der  $2 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ ,  $n+2 \rightarrow n+1 \rightarrow n$  und  $n+2 \rightarrow n+3 \rightarrow n+4$  die einzigen nichtverschwindenden Kompositionen von Wegen sind. Um einzusehen, dass  $A$  darstellungsendlisch ist, und um den gesuchten Unzerlegbaren zu finden, trennt man am einfachsten die Punkte  $2, 3, \dots, n$  auf in Sender und Empfänger ([9]).

Mit unseren Methoden kann man beweisen, dass die Anzahl Unzerlegbarer nur exponentiell wächst. Wir gehen hier nicht darauf ein, und verweisen darauf, dass nach [3] die Anzahl durch  $d \cdot 3^{2^{2d-e+1000}}$  nach oben beschränkt ist.

Schliesslich erwähnen wir noch folgendes Korollar, das wir am Ende der Arbeit beweisen.

**KOROLLAR 2.** *Eine  $d$ -dimensionale Algebra ist genau dann nicht darstellungsendlisch, wenn es einen Unzerlegbaren  $U$  gibt mit  $2d + 1000\sqrt{d} < \dim U \leq (d^2 + 1)(2d + 1000\sqrt{d})$ .*

In der Varietät  $\text{Alg}_d$  ([11]) der  $d$ -dimensionalen Algebrenstrukturen ist offenbar die Menge  $S_n$  der Algebrenstrukturen, die einen Unzerlegbaren der Dimension  $n$  besitzen, konstruierbar. Wäre  $S_n$  sogar abgeschlossen, so ergäbe das Korollar einen einfachen Beweis für die Offenheit der darstellungsendlischen Algebren ([11]).

**5.1** Folgendes Lemma steht in Beziehung zu einem Ergebnis Roiters ([25]).

**LEMMA.** *Sei  $\tilde{A}$  die universelle Ueberlagerung einer darstellungsendlischen*

sauberen Algebra ([13]). Auf  $\tilde{A}$  gebe es punktweise 1-dimensionale Unzerlegbare mit Trägern

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \cdots \quad x_{\kappa-1} \rightarrow x_{\kappa} \leftarrow x_{\kappa+1} \leftarrow \cdots \leftarrow x_{\kappa+r} \quad \text{und} \quad x_{\kappa} \leftarrow x_{\kappa+1} \cdots \leftarrow x_{\kappa+r} \leftarrow x_{\kappa+r+1}$$

Dabei seien die  $x_i$  für  $1 \leq i \leq \kappa+r$  und für  $\kappa \leq i \leq \kappa+r+1$  verschieden. Für  $r=0$  sei noch  $x_{\kappa+1} \neq x_{\kappa-1}$ . Dann gilt:

- (a)  $x_{\kappa+r+1}$  ist von allen  $x_i, i \neq \kappa+r+1$ , verschieden.
- (b) Es gibt einen punktweise 1-dimensionalen Unzerlegbaren mit Träger

$$\{x_i \mid 1 \leq i \leq \kappa+r+1\}.$$

**Beweis.** Angenommen, a) sei falsch. Sei also  $x_{\kappa+r+1} = x_l$  mit  $x_{\kappa+r+1} \neq x_{l+j}$  für  $j \geq 1$ . Nach Voraussetzung ist  $l < \kappa$  und wir unterscheiden zwei Fälle, nämlich  $x_l \rightarrow \cdots \rightarrow x_{\kappa}$  und  $x_l \leftarrow \cdots \rightarrow x_{\kappa}$ . Im ersten Fall konstruieren wir eine 1-parametrische Familie Unzerlegbarer  $U_{\lambda}$ ,  $\lambda \in k$ . Setze  $U_{\lambda}(x_i) = k$  für  $l \leq i \leq \kappa+r$ , und stelle den Pfeil zwischen  $x_l$  und  $x_{\kappa+r}$  durch Multiplikation mit  $\lambda$ , die anderen Pfeile durch die Identität dar. Da alle auftretenden Punkte voneinander verschieden sind, folgt aus  $U_{\lambda} \cong U_{\mu}$  schon  $\lambda = \mu$ . Im zweiten Fall konstruieren wir einen Zyklus nichttrivialer Abbildungen zwischen punktweise 1-dimensionalen Unzerlegbaren von  $\tilde{A}$ , die wir einfach mit ihrem Träger identifizieren. Sei  $q$  die benachbarte Quelle von  $x_{\kappa}$ . Wir finden den Zyklus

$$(x_l) \rightarrow (q \rightarrow \cdots \rightarrow x_{\kappa} \leftarrow \cdots \leftarrow x_l) \rightarrow (q \rightarrow \cdots x_{\kappa}) \rightarrow (x_l \leftarrow \cdots q \rightarrow \cdots x_{\kappa}) \rightarrow (x_l)$$

Dabei existiert  $q \rightarrow \cdots \rightarrow x_{\kappa} \leftarrow \cdots \leftarrow x_l$ , weil alle Punkte verschieden sind. Die gleiche Bemerkung zeigt nun Teil (b).  $\text{q.e.d.}$

**5.2** Wir beweisen den Satz. Sei also  $A$  eine saubere darstellungsendliche Algebra der Dimension  $d$  mit  $e$  Einfachen, und sei  $U$  ein unzerlegbarer  $A$ -Modul. Wie üblich bezeichne  $\Gamma_A$  den Darstellungsköcher von  $A$ ,  $\tilde{\Gamma}_A$  dessen universelle Ueberlagerung und  $\tilde{A}$  die universelle Ueberlagerung von  $A$ . Dann haben wir ein kommutatives Diagramm mit einem Ueberlagerungsfunktor  $F$  ([8])

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \subset k(\tilde{\Gamma}_A) & \ni \tilde{U} \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ A & \subset k(\Gamma_A) & \ni U \end{array}$$

Wähle einen unzerlegbaren  $\tilde{A}$ -Modul  $\tilde{U}$  über  $U$ . Nach [14] liegt jede endliche

volle Unterkategorie von  $\tilde{A}$  – also auch der Träger von  $\tilde{U}$  – in einer einfach zusammenhängenden vollen Unterkategorie  $B$ . Wir können dann sogar annehmen, dass  $\tilde{U}$  ein extremaler  $B$ -Modul ist. Damit gilt  $B = (T, g)$  für einen der Bäume aus 2.3. Wir beweisen  $\dim \tilde{U} = \dim U \leq 2d - e + 1000$  in den einzelnen Fällen.

Nach Satz 2.4 fehlen in unserer Liste extremaler Algebren nur endlich viele. Ein Blick in den Beweis von 2.4 und Satz 4 zeigen, dass für alle extremalen Moduln über diesen Ausnahmealgebren die Dimension  $\leq 1000$  ist. Die Behauptung muss daher nur noch für die Algebren aus der Liste bewiesen werden.

### 5.2.1 Die Familie (1)

Wir markieren alle Quellen und Senken. Bis auf Dualität liegt also der Fall  $s_1 \leftarrow \dots \leftarrow q_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_2 \leftarrow \dots \leftarrow q_r \leftarrow x \dots \leftarrow q_r$  vor, wobei eventuell das letzte Stück von  $x$  bis  $q_r$  fehlt. Tritt einmal die Situation  $s \leftarrow t \dots t' \rightarrow s'$  mit  $F(s) = F(s')$  und  $F(t) \neq F(t')$  auf, so konstruiert man mit 5.1 und seinem dualen beliebig grosse Unzerlegbare für  $\tilde{A}$ , indem man in Punkt  $s'$  den Punkt  $F(t)$  hochhebt usw. Deshalb liegen über jedem Punkt von  $A$  höchstens zwei Senken. Wir schätzen ab:

$$\dim \tilde{U} \leq \sum_{i=1}^r \dim P_{s_i} - r + 1 \leq 2(d - e) + 1.$$

Dabei bezeichnet  $P_s$  den projektiven  $\tilde{A}$ -Modul zum Punkt  $s$ , der die gleiche Dimension hat wie die projektive Decke von  $F(s)$ .

### 5.2.2 Die Familie (2)

Wieder kennzeichnen wir alle Quellen und Senken, sodass ohne Einschränkung der Fall

$$\begin{array}{ccccccc} c & & & & & & \\ & b & \rightarrow & \dots & \rightarrow & s_1 & \leftarrow \dots \leftarrow q_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_r \leftarrow \dots \leftarrow q_r \\ & a & \swarrow & & & & \end{array}$$

vorliegt. Nun ist eine Situation  $s \leftarrow t \dots t' \rightarrow s'$  mit  $F(s) = F(s')$  ausgeschlossen. Denn für  $F(t) \neq F(t')$  argumentiert man wie eben, und für  $F(t) = F(t')$  findet man in  $\tilde{A}$  als volle Unterkategorie

$$\begin{array}{ccccccc} c & & & & & & \\ & b & \rightarrow & \dots & \rightarrow & s & \leftarrow \dots \rightarrow s' \leftarrow \dots b' \swarrow \\ & a & \swarrow & & & & \end{array},$$

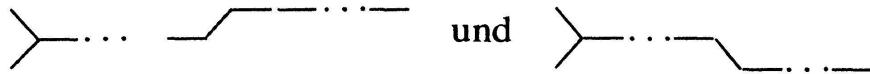
indem man in  $s'$  das Bild des linken Teils unter  $F$  hochhebt. Nach der Liste der

Dimensionsvektoren erhält man:

$$\dim \tilde{U} \leq 2 \sum_{i=1}^r \dim P_{s_i} - 2r + 3 \leq 2(d-e) + 3.$$

### 5.2.3 Die Familie (3)

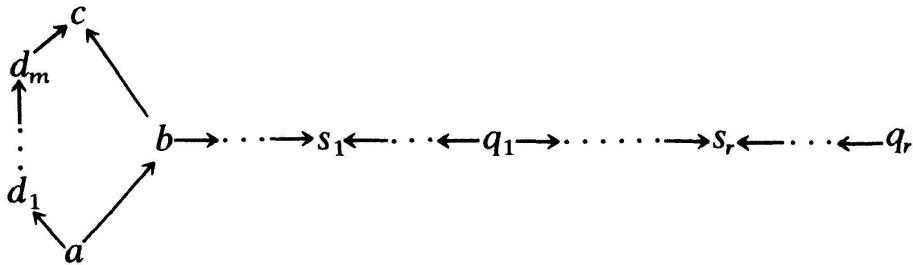
Bei den Unterköchern



liegt wie in 5.2.2 über jedem Punkt nur eine Senke. Für die punktweise 1-dimensionalen Extremalen dieser Köcher gilt also  $\dim E \leq d-e+3$ , d.h.  $\dim \tilde{U} \leq 2(d-e)+6$ .

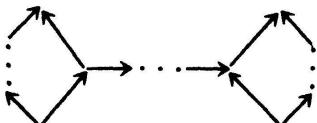
### 5.2.4 Die Familie (4)

Dieser Fall scheint am schwierigsten zu sein. Bis auf Dualität haben wir:



Wie in 5.2.2 ergibt sich  $F(s_i) \neq F(s_j)$  und  $F(t_i) \neq F(t_j)$  für  $i \neq j$ . Ist  $F(c) \neq F(s_i)$  für alle  $i$ , so erhält man:  $\dim \tilde{U} \leq 2(d-e)$ . Gleiches gilt, wenn über  $F(a)$  keine Quelle mehr liegt.

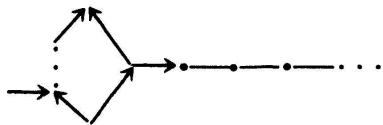
Sei also  $F(s_\kappa) = F(c)$ . Wir zeigen, dass  $B$  dann in der Nähe von  $s_\kappa = c'$  folgendermassen aussieht:  $x \leftarrow b' \rightarrow c' \leftarrow d'_m \leftarrow d'_{m-1} \leftarrow \dots \leftarrow d'_1 \rightarrow y$  mit  $F(b') = F(b)$ ,  $l > 0$  und  $F(d'_p) = F(d_p)$  für  $m \geq p \geq l$ . Zunächst folgt  $F(b') = F(b)$  wie in 5.2.1. Wäre  $b'$  keine Quelle, so fände man in  $\tilde{A}$  eine volle Unterkategorie mit kommutativem Köcher



die nicht darstellungsendlich ist.

Kämen in  $F(c)$  3 Pfeile an, so läge ein  $\tilde{D}_n$  in  $\tilde{A}$ . Also ist  $F(d'_m) = F(d_m)$ . Analog findet man in  $\tilde{A}$  eine Kopie von  $\tilde{D}_n$ , falls  $F(d'_p) \neq F(d_p)$  für  $p \geq 1$ ,  $p \geq l$ . Angenommen,  $l \leq 0$ . Wäre  $F(d'_0) = F(a)$ , so gäbe es in  $B$  noch einen zweiten

nichtverschwindenden Weg  $d'_0 \rightarrow b'' \rightarrow c'$  mit  $F(b'') = F(b)$ . Also ist  $F(d'_0) \neq F(a)$ . Dann enthält aber  $B$  einen nicht darstellungsendlischen kommutativen Unterköcher der Gestalt



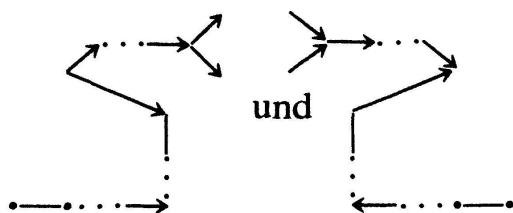
Als nächstes führen wir die Annahme  $F(d'_i) = F(d'_j)$  für  $m \geq i > j \geq l$  zu einem Widerspruch. Nach dem vorangegangenen Absatz gilt auch  $F(d_i) = F(d_j)$ . Es folgt  $F(d_{i+1}) = F(d_{j+1})$ , wobei wir noch  $d_{m+1} = c$  und  $d_0 = a$  vereinbaren. Andernfalls liftet man nämlich in  $d_i$  die Kette  $F(d_{j+1} \rightarrow \dots \rightarrow c \leftarrow \dots \rightarrow c')$  und erhält eine Kette, in der 4 Senken über  $F(c)$  liegen, was in 5.2.1 ausgeschlossen ist. Analog folgert man  $F(d_{i-1}) = F(d_{j-1})$  daraus, dass über  $F(a)$  bereits 2 Quellen liegen. Die Kette  $a \rightarrow d_1 \rightarrow \dots \rightarrow d_m \rightarrow c$  wird also unten auf einen Kreis aufgewickelt. Somit ist  $F(d'_i) = F(a)$  für ein  $i > t \geq j$  und  $F(d'_{t+1}) = F(d_{t+1}) = F(d_1) \neq F(b)$ . Wir finden dann eine Kette mit 3 Senken über  $F(c)$  im Widerspruch zu 5.2.1.

Nach den beiden vorherigen Absätzen gilt  $F(d'_i) \neq F(d'_j)$  für  $i \neq j$ . Dies liefert uns die gewünschte Ungleichung:

$$\dim \tilde{U} \leq 2 \left( \dim P_c + \sum_{i \neq \kappa} \dim P_{s_i} - r \right) + m - l + 1 \leq 2d - e + 1.$$

### 5.2.5 Die Familien (5), (6), (9) und (10).

Bei einer Algebra der Familie (5) betrachtet man zuerst die beiden maximalen Unteralgebren ohne Nullrelation und argumentiert wie in 5.2.4. Daraus erhält man die Abschätzung. Die Familie (6) schneidet man an den Punkten  $u$  und  $v$  auf in zwei  $D'_n$  s. Genauso verfährt man mit Algebren aus (9) und (10). Bei (10) untersucht man z.B. zuerst



### 5.2.6 Die übrigen Familien

Bis auf Dualität findet man für jeden Extremalen einen Untermodul der Kodimension  $\leq 3$ , der von zwei unzerlegbaren Projektiven überdeckt wird.

### 5.2.7 Der Beweis von Korollar 1

Sei also  $A$  eine beliebige darstellungsendlische Algebra der Dimension  $d$  und

$\bar{A}$  die zugehörige saubere Algebra. Ferner sei  $G: \text{mod } A \rightarrow \text{mod } \bar{A}$  die Morita-Aequivalenz. Da jeder einfache  $A$ -Modul höchstens Dimension  $\sqrt{d}$  hat, gilt  $\dim M \leq \sqrt{d} \dim GM$  für jeden  $A$ -Modul  $M$ . Dies wenden wir auf die Unzerlegbaren  $U$  an, wo  $GU$  zu einer Ausnahmealgebra gehört. In den anderen Fällen geht die Abschätzung jeweils aus dem Beweis hervor. Wir deuten dies für Familie (1) an. Dort kommt in der projektiven Decke von  $GU$  jeder Unzerlegbare höchstens mit Vielfachheit 2 vor. Gleiches gilt dann für die projektiven Decken von  $GU$  und  $U$ .

**5.3** Gehen wir noch kurz auf den Beweis von Korollar 2 ein. Eine Richtung folgt direkt aus Satz 5. Umgekehrt haben wir zu zeigen, dass eine  $d$ -dimensionale Algebra darstellungsendlisch ist, wenn die Dimension der Unzerlegbaren entweder  $\leq 2d + 1000\sqrt{d}$  oder  $>(d^2 + 1)(2d + 1000\sqrt{d})$  ist. Nun folgt aus der Definition von  $DTr$  und  $TrD$ , dass alle Einfachen in Komponenten des Darstellungsköchers liegen, deren Moduln Dimension  $\leq 2d + 1000\sqrt{d}$  haben ([1], [27]). Also ist  $A$  darstellungsendlisch.

Aehnliche Ueberlegungen führen zur folgenden numerischen Vermutung über Brauer-Thrall 2: Eine nicht darstellungsendlische Algebra  $A$  der Dimension  $d$  hat unendlich viele Unzerlegbare der Dimension  $\leq 20d(6^{4d+1} + 1000)$ . Leider können wir die Vermutung bisher nur beweisen, wenn  $A$  eine “schöne” Ueberlagerung besitzt.

## Anhang. Wieviele Moduln hat eine darstellungsendlische Algebra?

Für eine endlichdimensionale Algebra  $A$  bezeichne  $u(A)$  die Anzahl der Isomorphieklassen unzerlegbarer  $A$ -Moduln,  $i(A, n)$  die Anzahl der Isomorphieklassen  $n$ -dimensionaler  $A$ -Moduln. Weiter sei  $u(d)$  das Supremum der  $u(A)$ , wobei  $A$  alle  $d$ -dimensionalen darstellungsendlischen Algebren durchläuft. Wir beweisen in diesem Anhang:

**PROPOSITION 1.** *Es gibt eine Konstante  $C$ , so dass für alle  $d \geq 4$  gilt:*

$$2^{\sqrt{d}} \leq u(d) \leq 9d^6 \cdot 2^{2d+7} + Cd.$$

**PROPOSITION 2.** *Eine Algebra  $A$  ist darstellungsendlich genau dann, wenn es ein Polynom  $P \in \mathbb{R}[X]$  gibt, so dass  $i(A, n) \leq P(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Dabei lässt sich  $P$  für alle  $d$ -dimensionalen darstellungsendlischen Algebren zugleich wählen.*

Die Beweise beruhen auf Ueberlagerungstheorie, dem Klassifikationssatz und

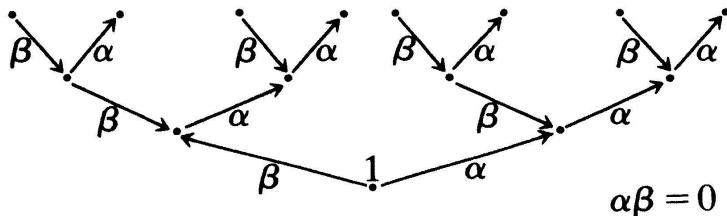
Betrachtungen aus Abschnitt 5, wobei beide Schranken in Proposition 1 noch verbessert werden können. Wir behalten die Bezeichnungen der Arbeit bei.

### A.1 Die untere Schranke in Proposition 1.

Um die untere Schranke zu finden, betrachte man für  $p \geq 1$  folgenden Köcher  

$$1 \xrightarrow[\beta]{} 2 \xrightarrow[\beta]{} 3 \xrightarrow[\beta]{} \cdots (p-1) \xrightarrow[\beta]{} p$$
, dessen Pfeile wir einfach mit  $\alpha$  und  $\beta$  bezeichnen.

Die Algebra  $A(p)$ , die durch  $\alpha\beta = 0 = \beta\alpha$  definiert wird, hat dann  $p^2$  als Dimension. Die universelle Ueberlagerung von  $A(p)$  ist eine Baumalgebra ([13], [28]), und die unzerlegbaren  $A(p)$ -Moduln  $U$  mit  $U(1) \neq 0$  entsprechen nach [10] den Unzerlegbaren des Stammbaumes ([8]) mit  $p$  Generationen (Siehe Skizze für  $p = 4$ ), die an der Stelle 1 nicht verschwinden. Dies ergibt  $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{p-1} = 2^p - 1$  Unzerlegbare, so dass  $A(p)$  per Induktion  $2^{p+1} - (p+2)$  Unzerlegbare besitzt. Daraus ergibt sich die untere Schranke.



Man beachte, dass die Dimensionen der unzerlegbaren  $A(p)$ -Moduln alle durch  $p$  beschränkt sind, und dass es eine Kette von  $2^p - 2$  irreduziblen Abbildungen zwischen unzerlegbaren  $A(p)$ -Moduln gibt, deren Komposition nicht verschwindet. Die Ringelsche Schranke im Lemma von Harada-Sai ([29], [30]) ist also sogar für darstellungsendliche Algebren scharf.

### A.2 Die obere Schranke in Proposition 1

Es genügt, die Abschätzung für saubere Algebren der Dimension  $d$  zu beweisen. Dazu gehen wir vor wie am Anfang von Abschnitt 5.2, betrachten also das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \subset & k(\tilde{\Gamma}_A) \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ A & \subset & \text{ind } A \end{array}$$

mit einem Ueberlagerungsfunktor  $F$ .

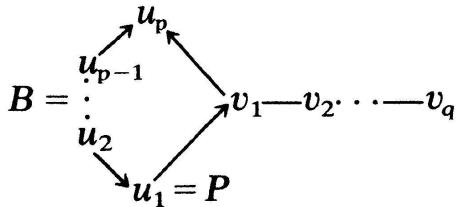
Sei  $P$  ein Punkt in  $\tilde{A}$ . Wir wollen uns überlegen, wieviele Kopien der Algebren  $u_1 - u_2 - u_3 - \cdots - u_{\alpha-1} - u_{\alpha}$  aus Familie (1) des Klassifikationssatzes in  $\tilde{A}$  liegen, so dass  $u_1$  mit  $P$  zusammenfällt. Zunächst sei  $\alpha \geq 5$ . Für den Pfeil  $u_1 - u_2$  haben wir höchstens 6 Möglichkeiten, weil sonst  $\tilde{D}_4$  in  $\tilde{A}$  vorkommt. Sei nun ein

Pfeil  $u_1 \rightarrow u_2$  gewählt. Dann bleiben uns für  $u_2 \rightarrow u_3$  nur jeweils 2 Möglichkeiten übrig, da anderenfalls nach Lemma 5.1 in  $\tilde{A}$  ein  $\tilde{E}_7$  auftritt, weil entweder 2 Pfeile in  $u_2$  beginnen oder 2 enden. Für  $u_3 \rightarrow u_4$  können wir erneut nur unter 2 Pfeilen wählen, weil sonst  $\tilde{E}_6$  vorkommt. Gleiches gilt für die Wahl von  $u_i \rightarrow u_{i+1}$ , solange  $i \leq \alpha - 2$  ist. Der letzte Pfeil  $u_{\alpha-1} \rightarrow u_\alpha$  erlaubt nur 4 Möglichkeiten, weil  $\tilde{A}$  kein  $\tilde{D}_4$  enthält. Insgesamt kann also  $P = u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_\alpha$  auf höchstens  $6 \cdot 2^{\alpha-3} \cdot 4 = 3 \cdot 2^\alpha$  verschiedene Arten in  $\tilde{A}$  liegen. Diese Formel bleibt auch für  $\alpha < 5$  richtig.

Ist  $U$  ein unzerlegbarer  $A$ -Modul, so wählen wir  $\tilde{U}$  und eine einfach zusammenhängende volle Unteralgebra  $B = (T, g)$  von  $\tilde{A}$ , so dass  $\tilde{U}$  ein extremaler  $B$ -Modul ist (Siehe 5.2). Natürlich ist  $B$  eine Invariante von  $U$ . Wir können jetzt alle unzerlegbaren  $A$ -Moduln zählen, wo  $B$  zur Familie (1) gehört. Nach 5.2.1 gilt nämlich  $\alpha \leq 2d$ . Deshalb lässt sich die gesuchte Zahl  $Z_1$  folgendermassen abschätzen:

$$Z_1 \leq (\text{Anzahl Punkte von } A) \left( \sum_{\alpha=1}^{2d} 3 \cdot 2^\alpha \right) \leq 3d2^{2d+1}$$

Für die anderen Familien geht man analog vor. Um den Leser nicht zu langweilen, greifen wir nur noch die Familien (4) und (10) heraus. Zuerst sei also



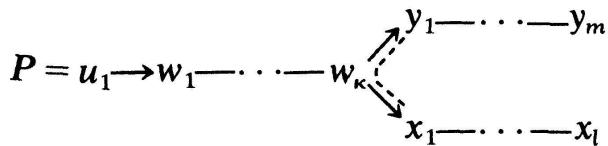
Für den Teil  $u_1 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_q$  gibt es wie eben höchstens  $3 \cdot 2^{q+1}$  Möglichkeiten. Dann liegt aber  $v_1 \rightarrow u_p$  bereits eindeutig fest, weil sonst  $\tilde{D}_4$  auftritt. Nun ist auch  $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_p$  vorgeschrieben. Wir erhalten also höchstens  $3 \cdot 2^{q+1}$  Kopien von  $B$  in  $\tilde{A}$  mit  $u_1 = P$ . Jede davon besitzt  $q$  extremale Moduln. Ferner sind die Parameter  $p$  und  $q$  nach 5.2.4 beide durch  $d$  beschränkt. Die Anzahl  $Z_4$  aller Unzerlegbaren  $U$  mit  $B$  vom Typ (4) kann man daher abschätzen:

$$Z_4 \leq (\text{Anzahl Punkte von } A) \cdot (\text{Anzahl Algebren in Familie (4)}).$$

(Anzahl jeweiliger extremaler Moduln) · (Anzahl der jeweils möglichen Einbettungen einer Algebra)

$$\leq d \cdot d^2 \cdot d \cdot 3 \cdot 2^{d+1} \leq 3d^4 2^{d+1}.$$

Jetzt sei  $B$  aus der Familie (10). Für den Teil



gibt es höchstens  $3 \cdot 2^{\kappa+1} \cdot 2^{l+1} \cdot 2^{m+1}$  Möglichkeiten. Danach liegt alles eindeutig fest. Die Familie wird durch 5 Parameter beschrieben, für die gilt:  $i+j \leq d$ ,  $\kappa+l \leq d$ ,  $\kappa+m \leq d$ . Jede Algebra hat nur einen extremalen Modul. Wir finden so:

$$Z_{10} \leq 3d^6 2^{2d+3}.$$

Für alle anderen Familien gibt es weniger Möglichkeiten. Die Anzahl der Unzerlegbaren  $U$ , wo  $B$  oder  $B^{op}$  zu einer der Familien aus dem Klassifikationsatz gehört, ist also beschränkt durch

$$2 \cdot 24 \cdot 3 \cdot d^6 \cdot 2^{2d+3} = 9d^6 2^{2d+7}.$$

Wir müssen noch diejenigen Unzerlegbaren zählen, wo  $B$  zu einer der Ausnahmealgebren gehört. Es gibt nur endlich viele Ausnahmealgebren. Jede davon hat nur endlich viele extreme Moduln und lässt sich nur auf endlich viele Arten in  $\tilde{A}$  einbetten, wenn man das Bild eines Punktes vorschreibt. Daher existiert eine Konstante  $C$ , so dass die Anzahl der verbleibenden unzerlegbaren  $A$ -Moduln durch  $C \cdot d$  beschränkt ist.

### A.3 Der Beweis von Proposition 2

Zuerst sei  $A$  eine  $d$ -dimensionale darstellungsendliche Algebra mit einem Repräsentantensystem  $\{U_1, U_2, \dots, U_t\}$  unzerlegbarer Moduln. Nach Proposition 1 ist  $t \leq s := 9d^6 2^{2d+7} + Cd$ . Wir rechnen:

$$\begin{aligned} i(A, n) &= \left| \left\{ (m_1, m_2, \dots, m_t) \in \mathbb{N}^t \mid \sum_{i=1}^t m_i \cdot \dim U_i = n \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ (m_1, m_2, \dots, m_t, 0, \dots, 0, n - \sum_{i=1}^t m_i) \in \mathbb{N}^{s+1} \mid \sum_{i=1}^t m_i \dim U_i = n \right\} \right| \\ &\leq \left| \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{s+1}) \in \mathbb{N}^{s+1} \mid \sum_{i=1}^{s+1} x_i = n \right\} \right| = \binom{n+s}{s}. \end{aligned}$$

Die Behauptung gilt für  $P(X) = \binom{X+s}{s}$ .

Umgekehrt sei nun  $A$  nicht darstellungsendlich. Ferner sei  $Q$  ein Polynom vom Grad  $g$ , so das  $i(A, n) \leq Q(n)$ . Wir werden einen Widerspruch herleiten. Setze  $K := (\dim A)^2 + 1$ . Wie in 5.3 bemerkt (Siehe auch [30]) folgt aus der Definition von  $DTr$  und  $TrD$  ([2]), dass es eine Folge unzerlegbarer  $A$ -Moduln  $U_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , gibt mit  $\dim U_i \leq \dim U_{i+1} \leq K \cdot \dim U_i$ . Dabei können wir noch  $\dim U_0 \leq K$ , also  $\dim U_i \leq K^{i+1}$  annehmen. Für beliebiges  $L \geq 1$ ,  $L \in \mathbb{N}$ , betrachte die Menge

$$\left\{ (n_0, n_1, \dots, n_L) \in \mathbb{N}^{L+1} \mid \sum_{i=0}^L n_i = K^L \right\}$$

der Kardinalität  $\binom{K^L + L}{L}$ . Die Moduln der Gestalt  $\bigoplus_{i=0}^L U_i^{n_i}$  liefern uns dann  $\binom{K^L + L}{L}$  Isomorphieklassen der Dimension  $\leq K^{2L+1}$ . Andererseits ist nach Voraussetzung die Anzahl der Isomorphieklassen von Moduln der Dimension  $\leq n$  durch  $R(n)$  beschränkt, wobei  $R$  ein Polynom vom Grad  $g+1$  ist, das wir ohne Einschränkung als  $R(X) = rX^{g+1}$  mit  $r \in \mathbb{R}$  annehmen können. Für grosse  $L$  stossen wir auf den Widerspruch  $\binom{K^L + L}{L} \geq r \cdot K^{(2L+1) \cdot (g+1)}$ .

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] AUSLANDER, M., *Applications of morphisms determined by objects*, Proc. Conf. on Representation Theory (Philadelphia 1976), Marcel Dekker (1978), 245–327.
- [2] AUSLANDER, M. and REITEN, I., *Representation Theory of artin algebras III*, Comm. Algebra 3 (1975), 239–294.
- [3] BAUTISTA, R. and BRENNER, S., *On the number of terms in the middle of an almost split sequence and related results*. Proc. ICRA III, Puebla, México, Springer Lect. not. 903, 1–8.
- [4] BAUTISTA, R. and LARRIÓN, F., *Auslander–Reiten quivers for certain algebras of finite representation type*, to appear in Journal of Lond. Math. Soc.
- [5] BAUSTISTA, R., LARRIÓN, F. and SALMERÓN, L., *On simply connected algebras*, Preprint, 1–21.
- [6] BONGARTZ, K., *Zykellose Algebren sind nicht zügellos*, Proc. ICRA II, Ottawa 1979, Springer Lect. not. 832, 97–102.
- [7] BONGARTZ, K., *Baumalgebren bis Typ (1, 2, 2)*, *Unveröffentlichtes Manuskript*, Zürich 1979, 1–33.
- [8] BONGARTZ, K. and GABRIEL, P., *Covering Spaces in representation Theory*, Invent. math. 65, 331–378 (1982).
- [9] BONGARTZ, K. and RIEDTMANN, C., *Algèbres stablyment héréditaires*, C.R. Acad. Sc. Paris 288 (1979), 703–706.
- [10] BONGARTZ, K. and RINGEL, C. M., *Representation finite tree algebras*, Proc. ICRA III, Puebla, Mexico, Springer Lect. not. 903, 39–54.
- [11] GABRIEL, P., *Finite representation type is open*, Proc. ICRA I 1974, Springer Lecture notes 488 (1975), 132–155.

- [12] GABRIEL, P., *Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras*, Proc. ICRA II, Ottawa 1979, Springer Lect. not. 831, 1–71.
- [13] GABRIEL, P., *The universal cover of a representation-finite algebra*, Proc. ICRA III Puebla, Mexico, Springer Lect. not. 903, 68–105.
- [14] GABRIEL, P., *Schurian algebras (and the fundamental group of a representation-finite algebra)*, Talk at the Oberwolfach-Conference on Repr. of algebras 1981.
- [15] HAPPEL, D. and RINGEL, C. M., *Tilted algebras*, to appear in Trans. Am. Math. Soc.
- [16] JENSEN, C. U. and LENZING, H., *Model Theory and representations of algebras*, Proc. ICRA II, Ottawa 1979, Springer Lect. not. 832, 302–310.
- [17] KLEINER, M. M., *Partially ordered sets of finite type*, Zap. Naučn. Sem. LOMI 28 (1972), 32–41.
- [18] KLEINER, M. M., *On exact representations of partially ordered sets of finite type*, Zap. Naučn. Sem. LOMI 28 (1972), 42–60.
- [19] LOUPIAS, M., *Représentations indécomposables des ensembles ordonnés finis*, Thèse 1975 (Tours).
- [20] NAZAROVA, L. A. and ROITER, A. V., *Representations of partially ordered sets*, Zap. Naucn. Sem. LOMI 28 (1972).
- [21] NAZAROVA, L. A. and ROITER, A. V., *Categorical matrix problems and the Brauer-Thrall conjecture*, Inst. Math. Acad. Sci., Kiev 1973, translated in Mitt. Math. Sem. Giessen 115 (1975).
- [22] RIEDTMANN, C., *Algebren, Darstellungsköcher, Ueberlagerungen und zurück*, Com. Math. Helv. 55 (1980), 199–224.
- [23] RINGEL, C. M., *Tame algebras*, Proc. ICRA II, Ottawa 1979, Springer Lect. not. 831 137–287.
- [24] ROITER, A. V., *The unboundedness of the dimension of the indecomposable representations that have an infinite number of indecomposable representations*, Izv. Acad. Nauk. SSSR Ser. Math. 32, 1275–1282 (1968).
- [25] ROITER, A. V., *ОВОЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ БОНГАРЦА*, Preprint, Kiev 1981, 1–31.
- [26] ŠKABARA, A. S. and ZAVADSKIJ, A. G., *Commutative quivers and matrix algebras of finite type*, Preprint, Kiev 1976.
- [27] SMALØ, S. O., *The inductive step of the second Brauer-Thrall conjecture*, Canad. Jour. Math. 32, 1980, 342–349.

#### ZUSÄTZLICHES LITERATURVERZEICHNIS ZUM ANHANG

- [28] GREEN, E. L., *Group-graded algebras and the zero relation problem*, Proc. ICRA III, Puebla 1980, Springer Lect. Not. 903, 106–115.
- [29] HARADA, M. and SAI, Y., *On categories of indecomposable modules I*, Osaka J. Math. 7 (1970), 323–344.
- [30] RINGEL, C. M., *Report on the Brauer-Thrall conjectures*, Proc. ICRA II, Ottawa 1979, Springer Lect. Not. 831, 104–136.

*Mathematisches Institut  
der Universität  
Rämistr. 74, 8001 Zürich  
Received March 13, 1982*

Eingegangen den 13. März 1982