

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 57 (1982)

Artikel: Courbure totale des feuilletages des surfaces.
Autor: Langevin, Rémi / Levitt, Gilbert
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-43881>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Courbure totale des feuilletages des surfaces

RÉMI LANGEVIN and GILBERT LEVITT

Abstract. The sum of the total curvatures of two orientable orthogonal foliations on the unit sphere $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ is at least 4π . The total curvature of a foliation with saddle singularities on a closed hyperbolic surface M is at least $(12 \log 2 - 6 \log 3) \cdot |\chi(M)|$.

Introduction

Soit V une surface compacte sans bord plongée dans \mathbf{R}^3 . L'intégrale sur V de la courbure de Gauss de V est égale à la caractéristique d'Euler–Poincaré de V et ne dépend pas du plongement $V \subset \mathbf{R}^3$. Par contre, l'intégrale sur V du module de courbure de Gauss dépend du plongement $V \subset \mathbf{R}^3$. Toutefois, la théorie de Morse permet de montrer que cette intégrale vérifie l'inégalité démontrée par Chern et Lashof [CL]:

$$\int_V |K| \geq 2\pi \left(\sum_{i=0}^2 \beta_i(V) \right), \quad \text{où} \quad \beta_i(V) = \text{rg } H_i(V),$$

est le i -ème nombre de Betti de V . Les surfaces tendues, i.e. plongées de façon qu'on ait l'égalité $\int_V |K| = 2\pi (\sum_{i=0}^2 \beta_i(V))$, ont une forme géométrique très particulière étudiée par Kuiper [Ku].

D. Asimov [A], puis Brito, Langevin et Rosenberg [BLR] ont montré que l'étude des feuilletages de codimension 1 transversalement orientables d'une variété de courbure sectionnelle constante conduit à une situation analogue.

THEOREME ([BLR]). *Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1 transversalement orientable d'une variété M fermée orientable de dimension $n+1$ et de courbure sectionnelle constante c . Notons $K(x)$ la courbure géodésique du feuilletage \mathcal{F} , c'est-à-dire le déterminant de la seconde forme fondamentale au point x de la feuille de \mathcal{F} passant par x .*

On a:

$$\int_M K(x) = 0, \text{ si } n \text{ est impair,} \\ = c^{n/2} \cdot \text{vol } M, \text{ si } n \text{ est pair.}$$

Par contre, $\int_M |K(x)|$, que nous appellerons *courbure totale de \mathcal{F}* , dépend du feuilletage \mathcal{F} . Langevin [L] a étudié cette intégrale quand M est la sphère S^3 ou un tore plat T^2 . Sur le tore plat, il existe une infinité de feuilletages totalement géodésiques, donc de courbure totale nulle. On peut en outre déterminer les feuilletages de T^2 minimisant la courbure totale dans leur classe d'homotopie, que nous avons appelés feuilletages tendus (cf. [L]).

Nous étudions ici les feuilletages (singuliers) de la sphère S^2 , munie de sa métrique canonique de courbure +1, et des surfaces hyperboliques, c'est-à-dire munies d'une métrique de courbure constante -1 (comme on le verra par la suite, il est essentiel que la surface soit de courbure constante). L'idée qui se dégage de cette étude est la suivante: *le fait que la surface soit courbée entraîne que les feuilletages que l'on peut tracer dessus possèdent eux aussi de la courbure*, bien que pour un feuilletage orientable la moyenne $\int_M K(x)$ soit toujours nulle.

Sur la sphère S^2 comme sur le tore plat, il existe des feuilletages totalement géodésiques. Il est par contre facile de vérifier, en utilisant le théorème de Gauss-Bonnet, que seule une surface plate peut posséder deux feuilletages totalement géodésiques et orthogonaux, et nous montrerons dans la partie I le résultat quantitatif suivant:

THÉORÈME. *Soient \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 deux feuilletages transversalement orientables orthogonaux de la sphère S^2 . La somme des courbures totales de \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 est au moins égale à 4π .*

Dans la partie II, nous énonçons et démontrons un “théorème d’échange” qui relie la courbure totale d’un feuilletage et la mesure (en un sens que nous préciserons) de l’ensemble de ses tangentes. Ce théorème, déjà utilisé dans la partie I, nous permettra dans la partie III de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Soit M une surface compacte sans bord munie d’une métrique hyperbolique et \mathcal{F} un feuilletage (pas nécessairement orientable) dont les singularités sont des selles. La courbure totale de \mathcal{F} est au moins égale à $(12 \log 2 - 6 \log 3) \cdot |\chi(M)|$.*

Remarque. Si \mathcal{F} n'est pas orientable (i.e. ne peut pas être défini par un flot), la

courbure géodésique de \mathcal{F} en un point x n'est bien définie qu'en valeur absolue, et la courbure totale de \mathcal{F} est par définition l'intégrale sur M de cette quantité $|K|(x)$.

I. Courbure positive

Sur la sphère S^2 munie d'une métrique de courbure constante, il existe des feuilletages (nécessairement singuliers) totalement géodésiques: il suffit de considérer un feuilletage \mathcal{F}_0 défini par les grands cercles passant par un point fixe. Pour discerner sur S^2 l'influence de la courbure gaussienne de la surface sur la courbure totale des feuilletages tracés dessus, il convient de considérer simultanément deux feuilletages.

THÉORÈME. *Soit S la sphère unité de \mathbf{R}^3 et soient \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 deux feuilletages orientables orthogonaux de S possédant un nombre fini de singularités. La somme des courbures totales de \mathcal{F}_1 et de \mathcal{F}_2 est au moins égale à 4π .*

Remarques. (1) La valeur minimale 4π est obtenue par exemple lorsque \mathcal{F}_1 est le feuilletage par méridiens défini ci-dessus et \mathcal{F}_2 le feuilletage par parallèles qui lui est orthogonal; cela se voit facilement en utilisant les techniques employées ci-dessous pour montrer le théorème (théorème de la divergence ou théorème d'échange).

(2) Le théorème reste très probablement vrai si l'on ne suppose pas que les feuilletages sont orientables.

(3) Comme nous l'a fait remarquer Morris Hirsch, on peut généraliser le théorème au cas de deux feuilletages faisant un angle constant θ ($0 < \theta \leq \pi/2$). La somme des courbures totales est alors au moins égale à $4\pi \sin \theta$.

(4) Le théorème est à rapprocher du fait suivant: pour tout $\epsilon > 0$, il existe sur S^2 une métrique g telle que:

- g est de courbure positive ou nulle et l'aire de S^2 pour g est égale à 4π ;
- le feuilletage \mathcal{F}_0 est totalement géodésique pour g ;
- la courbure totale du feuilletage orthogonal à \mathcal{F}_0 dans la métrique g est inférieure à ϵ .

On obtient de telles métriques en recollant deux demi-sphères aux extrémités d'un cylindre long et étroit muni d'une métrique plate.

(5) Contrairement aux surfaces hyperboliques, il existe sur S^2 un feuilletage totalement géodésique, donc de courbure totale nulle. Si G est un groupe fini non cyclique opérant sur S^2 , il serait intéressant de connaître le minimum de la courbure totale d'un feuilletage G -invariant.

Démonstration du théorème.

La démonstration distingue deux cas:

(1) Il existe un grand cercle C de S transverse à la fois à \mathcal{F}_1 et à \mathcal{F}_2 (et ne passant par aucune singularité des feuilletages). On va alors montrer que dans chacun des hémisphères délimités par C la somme des courbures totales de \mathcal{F}_1 et de \mathcal{F}_2 est au moins égale à 2π .

On choisit une orientation pour chacun des feuilletages ainsi que pour C , ce qui permet en tout point de C de définir les angles θ_1 et θ_2 que fait C avec \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 respectivement. Soit $k_1(x)$ (resp. $k_2(x)$) la courbure en x de la feuille de \mathcal{F}_1 (resp. \mathcal{F}_2) passant par x ; les fonctions k_1 et k_2 sont définies en dehors des singularités et à valeurs positives ou négatives; selon les conventions d'orientation, la fonction k_i peut se trouver remplacée par son opposée.

Si l'intégrale $\int_S |k_i(x)| dx$ est infinie, il n'y a rien à démontrer. Supposons maintenant cette intégrale convergente.

Si D est un hémisphère bordé par C , le théorème de la divergence [BLR] fournit la formule $\int_D k_i(x) dx = \pm \int_C \cos \theta_i(c) dc$ ($i = 1, 2$). On remarque d'autre part que, comme C est transverse à \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 , les fonctions $\cos \theta_1$ et $\cos \theta_2$ gardent un signe constant sur C . De plus, on a toujours $|\cos \theta_1| + |\cos \theta_2| \geq 1$ (car $\theta_1 - \theta_2 = \pm \pi/2$).

Tout ceci permet d'écrire:

$$\begin{aligned} \int_D |k_1(x)| dx + \int_D |k_2(x)| dx &\geq \left| \int_D k_1(x) dx \right| + \left| \int_D k_2(x) dx \right| \\ &\geq \left| \int_C \cos \theta_1(c) dc \right| + \left| \int_C \cos \theta_2(c) dc \right| \\ &\geq \int_C |\cos \theta_1(c)| dc + \int_C |\cos \theta_2(c)| dc \\ &\geq \text{longueur}(C) = 2\pi. \end{aligned}$$

(2) Dans le deuxième cas, il faut considérer l'ensemble \mathcal{G} de tous les grands cercles de S . Il s'identifie à l'ensemble des couples de points antipodaux de S , et est donc homéomorphe au plan projectif. Il est de plus muni d'une mesure canonique m de masse totale 2π , invariante par l'action du groupe des isométries de S . En dehors d'un ensemble m -négligeable, les grands cercles de S ne contiennent pas de singularité de \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 , et leurs contacts avec \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont génériques. D'après le théorème d'échange que nous démontrerons dans la partie II, la courbure totale de \mathcal{F}_i est égale à l'intégrale sur \mathcal{G} de la fonction $\mu(\mathcal{F}_i, C)$ qui compte le nombre de points de contact avec \mathcal{F}_i d'un grand cercle C . Puisque par

hypothèse aucun grand cercle n'est transverse à la fois à \mathcal{F}_1 et à \mathcal{F}_2 , la somme $\mu(\mathcal{F}_1, C) + \mu(\mathcal{F}_2, C)$ est pour m -presque tout $C \in \mathcal{G}$ non nulle, donc au moins égale à 2. On en déduit l'inégalité cherchée. \square

II. Le théorème d'échange

Dans toute cette partie, nous désignons par H l'une des trois surfaces suivantes:

- (a) le plan euclidien \mathbf{R}^2 ,
- (b) la sphère S^2 (de courbure constante +1),
- (c) le plan hyperbolique H^2 (de courbure constante -1).

Nous appelons \mathcal{G} l'espace des géodésiques de H . Il est homéomorphe au plan projectif dans le cas (b), à une bande de Möbius ouverte dans les cas (a) et (c). L'espace \mathcal{G} est muni d'une densité m invariante par l'action sur \mathcal{G} du groupe des isométries de H ([S], p. 165 et suivantes), donc aussi d'une mesure invariante également notée m .

La densité m est unique à une constante multiplicative près, et nous la normalisons de façon que la mesure de l'ensemble des géodésiques qui rencontrent un disque de rayon r soit, pour r tendant vers 0, équivalente à $2\pi r$ (on trouvera ci-dessous une formule explicite pour m). Dans le cas (b), il existe un revêtement canonique $\pi: S^2 \rightarrow \mathcal{G}$, et π^*m est simplement la forme volume définie par la métrique de S^2 .

Soit maintenant W un ouvert de H et \mathcal{F} un feuilletage non singulier de W . Même si \mathcal{F} n'est pas orientable, on peut définir en tout point $x \in W$ un nombre positif ou nul $|K|(x)$ mesurant le module de la courbure géodésique en x de la feuille de \mathcal{F} passant par x . Si d'autre part D est une géodésique de H , nous désignons par $|\mu|(\mathcal{F}, D) \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ le nombre de points de $D \cap W$ où D est tangente à \mathcal{F} .

THÉORÈME D'ÉCHANGE.

$$\int_{x \in W} |K|(x) = \int_{D \in \mathcal{G}} |\mu|(\mathcal{F}, D).$$

(les deux termes peuvent être simultanément infinis).

Nous avons besoin pour démontrer ce théorème de mesurer "combien de

géodésiques sont tangentes à \mathcal{F}'' . Pour cela nous introduisons les définitions suivantes:

DÉFINITION 1. Le pinceau de géodésiques \mathcal{P}_L est l'ensemble des géodésiques orthogonales à la géodésique L .

DÉFINITION 2. La courbe polaire Γ_L est l'adhérence de l'ensemble des points où une géodésique du pinceau \mathcal{P}_L est tangente au feuillement \mathcal{F} .

Remarque (cf. [Th]). Pour presque tout pinceau \mathcal{P}_L , Γ_L est presque partout une courbe lisse (éventuellement vide).

DÉFINITION 3. L'application de Gauss $\gamma_{\mathcal{F}}$ fait correspondre à un point $x \in W$ la géodésique tangente à \mathcal{F} en x .

Le théorème d'échange se déduit du lemme:

LEMME. $|K| = |\text{Jac } \gamma_{\mathcal{F}}|$.

Démonstration. Soit L une géodésique, x un point de L . Nous pouvons paramétriser les géodésiques D coupant un disque de rayon r centré en x à l'aide:

(1) de la géodésique Δ perpendiculaire à D passant par x , repérée par son angle θ avec L .

(2) de la distance r entre x et le point d'intersection $p = \Delta \cap D$.

La mesure invariante m de \mathcal{G} s'exprime à l'aide de r et θ par ([S], p. 28 et 307):

$$m = dr d\theta, \text{ si } W \subset \mathbb{R}^2,$$

$$m = \cos r \cdot dr \cdot d\theta, \text{ si } W \subset \mathbb{S}^2,$$

$$m = \cosh r \cdot dr \cdot d\theta, \text{ si } W \subset \mathbb{H}^2.$$

Soit $N(x)$ la géodésique normale en x à \mathcal{F} .

Si la courbure géodésique K n'est pas nulle en x , la courbe polaire $\Gamma_{N(x)}$ est transverse en x à T_x . En effet, si $\Gamma_{N(x)}$ était tangente à T_x , la dérivée du vecteur normal à \mathcal{F} dans la direction de T_x serait nulle par définition de $\Gamma_{N(x)}$. Notons t (resp a) la paramétrisation de T_x (resp de la feuille passant par x “par la longueur de l'arc”). On a:

$$0 = \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial a} = K(x).$$

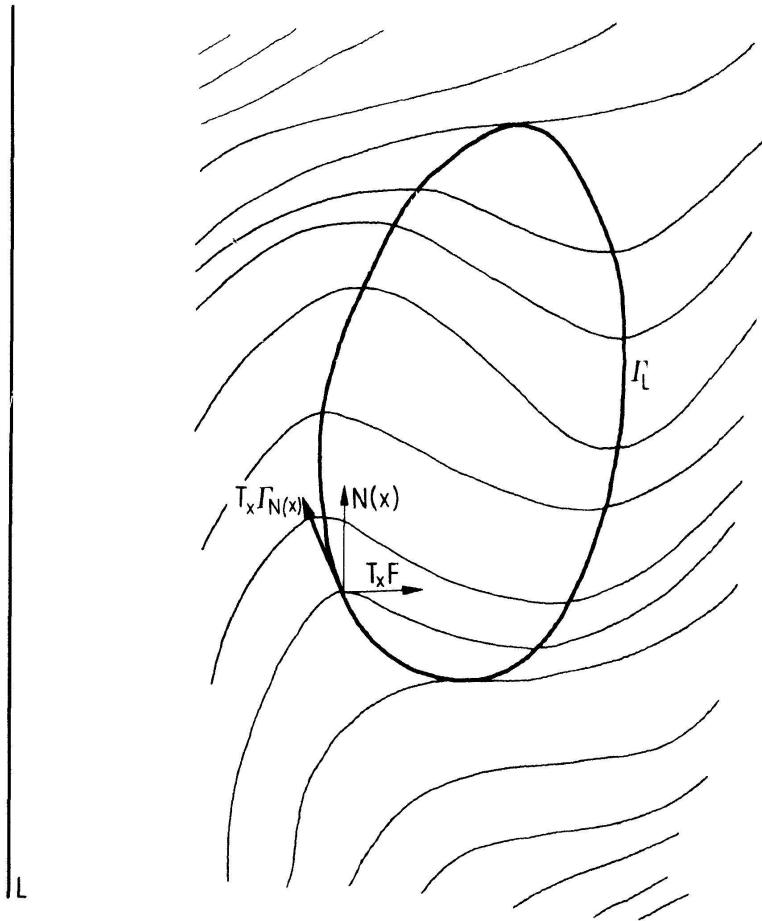


Figure 1

Calculons le module du jacobien de γ_F à l'aide du repère oblique $(T_x F, T_x \Gamma_{N(x)})$ de W , et d'un repère (e_1, e_2) de $T_{\gamma_F(x)} \mathcal{G}$ formé d'un vecteur unitaire e_1 tangent à l'ensemble des géodésiques passant par le point x , et d'un vecteur unitaire e_2 tangent à l'ensemble des géodésiques normales à la géodésique passant par x et tangente à $N(x)$; voir fig. 1.

Soit $0 \leq \varphi < \pi/2$ l'angle $(N(x), T_x \Gamma_{N(x)})$. La différentielle de γ_F vaut:

$$D\gamma_F = \begin{pmatrix} \pm |K| & 0 \\ * & |\cos \varphi| \end{pmatrix}.$$

On a donc:

$$|\text{Jac } \gamma_F| = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} \pm |K| & 0 \\ * & |\cos \varphi| \end{pmatrix} \right|}{|\cos \varphi|} = |K|.$$

Comme, en outre, les points critiques de γ_F sont précisément les points où $|K| = 0$, le lemme est démontré. \square

Démonstration du théorème (voir aussi L).

Nous pouvons appliquer le théorème de changement de variable aux points où $|K| \neq 0$ qui n'ont pas pour image une valeur critique de $\gamma_{\mathcal{F}}$.

Par le théorème de Sard, l'ensemble des valeurs critiques de $\gamma_{\mathcal{F}}$ est de mesure nulle, et donc aussi l'ensemble des points non critiques de $\gamma_{\mathcal{F}}$ d'image une valeur critique. On a donc, puisqu'en un point critique $|K| = 0$:

$$\int_W |K| = \int_{W - \text{crit} - \gamma_{\mathcal{F}}^{-1}(\gamma_{\mathcal{F}}(\text{crit}))} |K| = \int_{\mathcal{G} - \gamma_{\mathcal{F}}(\text{crit})} |\mu|(\mathcal{F}, L) = \int_{\mathcal{G}} |\mu|(\mathcal{F}, L)$$

où crit désigne l'ensemble des points critiques de $\gamma_{\mathcal{F}}$. \square

III. Courbure négative

Sur une surface compacte sans bord munie d'une métrique hyperbolique (i.e. de courbure constante -1), il n'existe pas de feuilletage totalement géodésique. Thurston a d'ailleurs remarqué qu'une lamination géodésique (c'est-à-dire un compact réunion de géodésiques simples disjointes) est nécessairement de mesure nulle ([T₂], p. 8.27).

THÉORÈME. *Soit M une surface compacte sans bord munie d'une métrique hyperbolique, et \mathcal{F} un feuilletage de M dont les singularités sont des selles. La courbure totale de \mathcal{F} est au moins égale à $(12 \log 2 - 6 \log 3) \cdot |\chi(M)|$.*

Remarques. (1) En d'autres termes, la courbure de \mathcal{F} a une valeur moyenne au moins égale à $(6 \log 2 - 3 \log 3)/\pi = 0,2747 \dots$.

(2) On trouvera ci-dessous des exemples de feuilletages pour lesquels la courbure totale atteint la valeur minimale.

(3) Si toutes les selles de \mathcal{F} ont un nombre pair de séparatrices (en particulier si \mathcal{F} est orientable), on peut montrer que la courbure totale de \mathcal{F} est au moins égale à $4 \log 2 \cdot |\chi(M)|$.

(4) Le théorème est probablement encore vrai si l'on suppose seulement que \mathcal{F} est à singularités isolées (pas nécessairement de type selle).

(5) Le théorème ne se généralise pas aux métriques non hyperboliques. Considérons, sur une surface M compacte sans bord avec $\chi(M) < 0$, deux feuilletages mesurés transverses \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 (au sens de [T₁] ou [FLP]), ou de façon équivalente une différentielle quadratique holomorphe (voir [HM] ou [Ke] par

exemple). Ces données définissent sur M une métrique plate, singulière en un nombre fini de points, pour laquelle \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont totalement géodésiques (et orthogonaux). En désingularisant cette métrique dans des voisinages de plus en plus petits des singularités, on obtient une famille de métriques de courbure négative ou nulle, d'aire constante, pour lesquelles la courbure totale de \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 peut être arbitrairement petite.

Notations et examples

Soit M comme dans l'énoncé du théorème, et $p: H \rightarrow M$ l'application de revêtement universel. Nous identifierons le plan hyperbolique H à l'intérieur d'un disque dans le modèle de Poincaré (voir par exemple [T₂], chapitres 2 et 3). Le bord S_∞ de ce disque est le *cercle à l'infini* de H . Les *géodésiques* de H sont les arcs de cercle orthogonaux à S_∞ . Etant donnés deux points distincts m et m' de S_∞ , il existe une unique géodésique de H "joignant" m et m' , i.e. admettant m et m' comme points à l'infini. Trois points distincts de S_∞ définissent ainsi un *triangle asymptotique*, et deux triangles asymptotiques quelconques sont conjugués par une isométrie de H . Si la restriction de p à l'intérieur d'un triangle asymptotique est injective, l'image dans M sera également appelée triangle asymptotique. Un triangle asymptotique, dans H ou dans M , est d'aire π .

Pour pouvoir construire des exemples de feuilletages minimisant la courbure totale, nous devons commencer par construire un feuilletage \mathcal{F}_a sur un triangle asymptotique $\Delta \subset H$ (voir figure 2). Soit b le centre de symétrie de Δ . Le

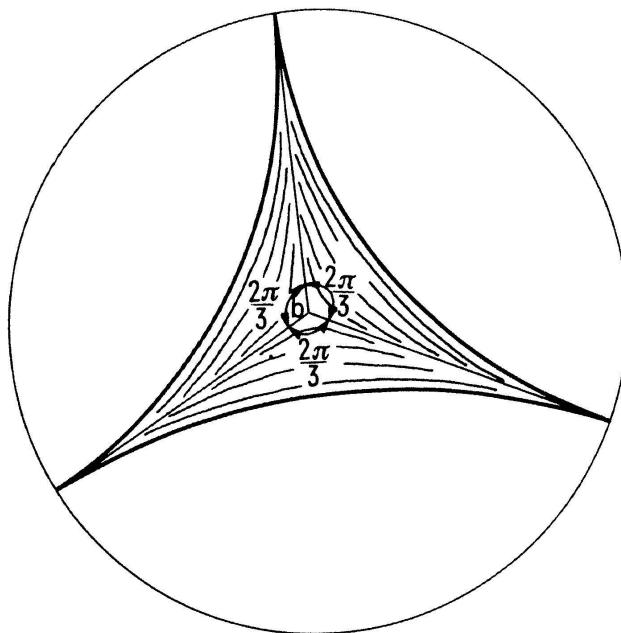


Figure 2

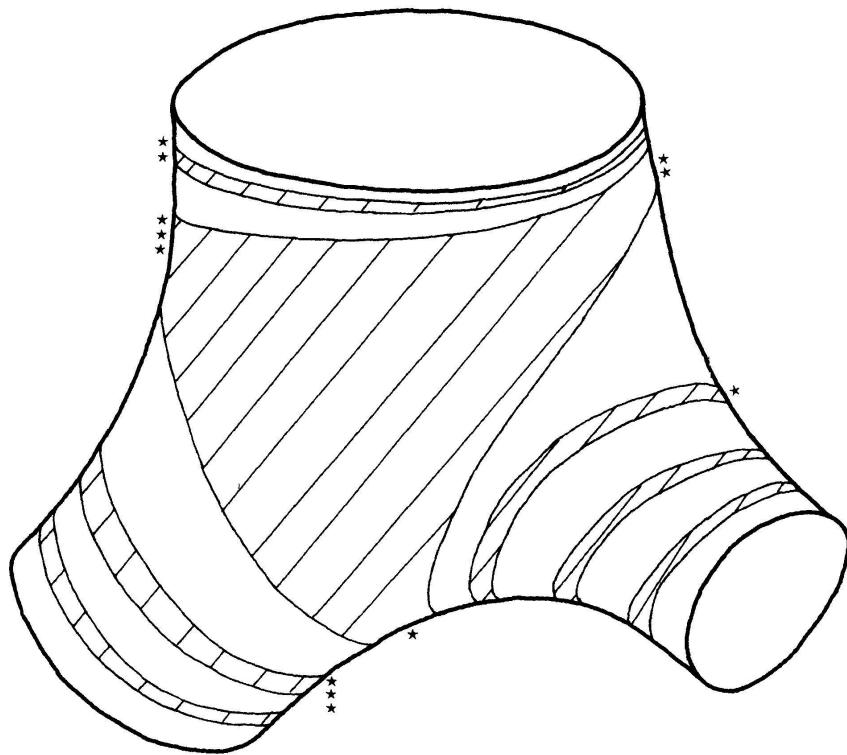


Figure 3

feuilletage \mathcal{F}_a possède une seule singularité, une selle à trois branches située en b . Les séparatrices issues de b sont les géodésiques joignant b aux points à l'infini de Δ ; elles se coupent en b selon des angles égaux à $2\pi/3$. Pour obtenir \mathcal{F}_a , nous remplissons chaque secteur par une famille de courbes convexes, de façon que le bord de Δ se compose de feuilles. En projetant \mathcal{F}_a par p , on obtient un feuilletage (encore noté \mathcal{F}_a) sur tout triangle asymptotique de M .

Soit maintenant M une surface fermée orientable de genre g munie d'une métrique hyperbolique. Choisissons sur M une famille de $3g-3$ géodésiques compactes disjointes découpant M en pantalons (disques à deux trous). Dans chaque pantalon on choisit de plus trois géodésiques disjointes spiralant vers les composantes du bord (voir figure 3). Le complémentaire de l'union de toutes ces géodésiques se compose de $4g-4$ triangles asymptotiques disjoints. En les feuilletant par \mathcal{F}_a et en rajoutant comme feuilles les bords des pantalons, on obtient un feuilletage de M ; de la démonstration ci-dessous il résultera que la courbure totale de ce feuilletage atteint la valeur minimale $(12 \log 2 - 6 \log 3) \cdot |\chi(M)|$. En fait les feuilletages de M minimisant la courbure totale s'obtiennent en feuilletant comme ci-dessus chaque triangle asymptotique du complémentaire d'une lamination géodésique complète (au sens de [T₂] p. 8.40).

Démonstration du théorème

Sans perte de généralité, on peut supposer M orientable. Pour simplifier la démonstration, nous supposerons que toutes les selles de \mathcal{F} ont trois séparatrices et qu'il n'y a pas de liaisons entre selles. Considérons l'application de revêtement universel $p: H \rightarrow M$, et le feuilletage \mathcal{H} induit par \mathcal{F} sur H . Parce que les singularités de \mathcal{H} sont des selles (donc d'indice négatif), il n'existe pas dans H de disque que nous appellerons “de Whitehead”, à savoir de disque dont le bord est ou bien une feuille de \mathcal{H} ou bien la réunion d'un morceau de feuille de \mathcal{H} et d'un arc transverse à \mathcal{H} ; en effet un tel disque contient nécessairement une singularité d'indice positif.

Considérons l'ensemble \mathcal{G} des géodésiques de H , muni de sa mesure canonique m (voir partie II). Le principe de la démonstration du théorème peut se résumer par l'affirmation suivante:

AFFIRMATION. A toute selle s de \mathcal{H} , on peut associer un ensemble de géodésiques $G_s \subset \mathcal{G}$ de mesure supérieure ou égale à $6 \log 2 - 3 \log 3$, et une injection (peut être non mesurable) i_s de G_s dans H envoyant toute géodésique sur un point où elle est tangente à \mathcal{H} . De plus, si s et s' sont deux selles distinctes de \mathcal{H} , les images respectives A_s et $A_{s'}$ de G_s et $G_{s'}$ sont disjointes dans H .

Compte tenu de cette affirmation, le théorème résultera d'une application soigneuse du théorème d'échange et du fait que \mathcal{F} possède $2|\chi(M)|$ selles.

Nous commençons la démonstration par un lemme “bien connu des spécialistes”.

LEMME 1. *Toute demi-feuille l de \mathcal{H} qui n'aboutit pas à une selle converge vers un point du cercle à l'infini S_∞ .*

Démonstration. Remarquons d'abord que le comportement à l'infini des demi-feuilles de \mathcal{H} ne change pas si on modifie \mathcal{F} par une isotopie (car si $\tilde{\varphi}$ est un homéomorphisme de H relevant un homéomorphisme de M isotope à l'identité, alors $\sup_{x \in H} d(x, \tilde{\varphi}x)$ est fini). Le lemme est ainsi clair si la demi-feuille $p(l)$ de \mathcal{F} est compacte ou spirale vers une feuille compacte: en effet une feuille compacte de \mathcal{F} n'est pas homotope à 0 dans M , et donc est isotope à une géodésique. Si par contre l'adhérence $\overline{p(l)}$ ne contient pas de feuille compacte, soit $l_1 \subset \overline{p(l)}$ une feuille de \mathcal{F} disjointe de $p(l)$, et C une courbe fermée simple transverse à \mathcal{F} et coupant l_1 . La courbe C rencontre $p(l)$ une infinité de fois; comme elle n'est pas homotope à 0, on peut supposer que c'est une géodésique.

Puisqu'il n'existe pas dans H de disque de Whitehead, la demi-feuille l rencontre une composante connexe de $p^{-1}(C)$ en au plus un point, et on peut

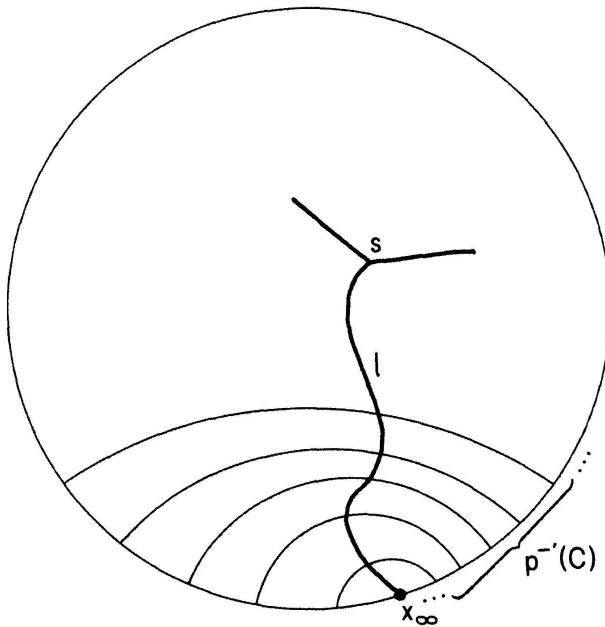


Figure 4

considérer dans $H \cap S_\infty$ l'intersection de tous les demi-espaces fermés bordés par une composante de $p^{-1}(C)$, dans lesquels l entre successivement (voir figure 4). Parce qu'il y a une infinité de tels demi-espaces et que la distance entre deux composantes distinctes de $p^{-1}(C)$ est minorée par un nombre strictement positif indépendant du choix de ces composantes, l'intersection considérée ne contient pas de point de H . Elle ne peut contenir qu'un seul point de S_∞ , car si elle en contenait deux alors elle contiendrait aussi la géodésique de H qui les joint. \square

Remarquons de plus que *deux séparatrices l et l' issues d'une même selle s de \mathcal{H} convergent vers des points distincts de S_∞* . C'est clair s'il existe dans M une courbe fermée simple transverse C coupant $p(l) \cup p(l')$ au moins deux fois, car alors toute composante de $p^{-1}(C)$ qui rencontre l ou l' sépare les points à l'infini de l et l' (une composante de $p^{-1}(C)$ rencontre $l \cup l'$ au plus une fois car il n'y a pas de disque de Whitehead). Sinon, les séparatrices $p(l)$ et $p(l')$ spiralent vers des feuilles compactes l_0 et l'_0 de \mathcal{F} . Si l et l' ont le même point à l'infini, ces feuilles l_0 et l'_0 sont isotopes (deux géodésiques de H dont les projections dans M sont compactes ne peuvent pas avoir de point en commun à l'infini, à moins d'être égales). Si $l_0 = l'_0$, l'union de $p(l)$ et $p(l')$ avec une courbe transverse proche de l_0 découpe un disque de Whitehead, ce qui est impossible. Si l_0 et l'_0 sont distinctes, elles bordent dans M un anneau; cet anneau ne contient pas de singularité de \mathcal{F} (car \mathcal{F} ne possède que des selles), et en considérant \mathcal{H} on voit que $p(l)$ et $p(l')$ spiralent en fait vers la même feuille (de \mathcal{F}) du même côté, ce qui est exclu.

On peut ainsi associer à toute selle s de H trois points de S_∞ qui définissent un *triangle asymptotique Δ_s* (voir figure 5); les trois géodésiques joignant ces

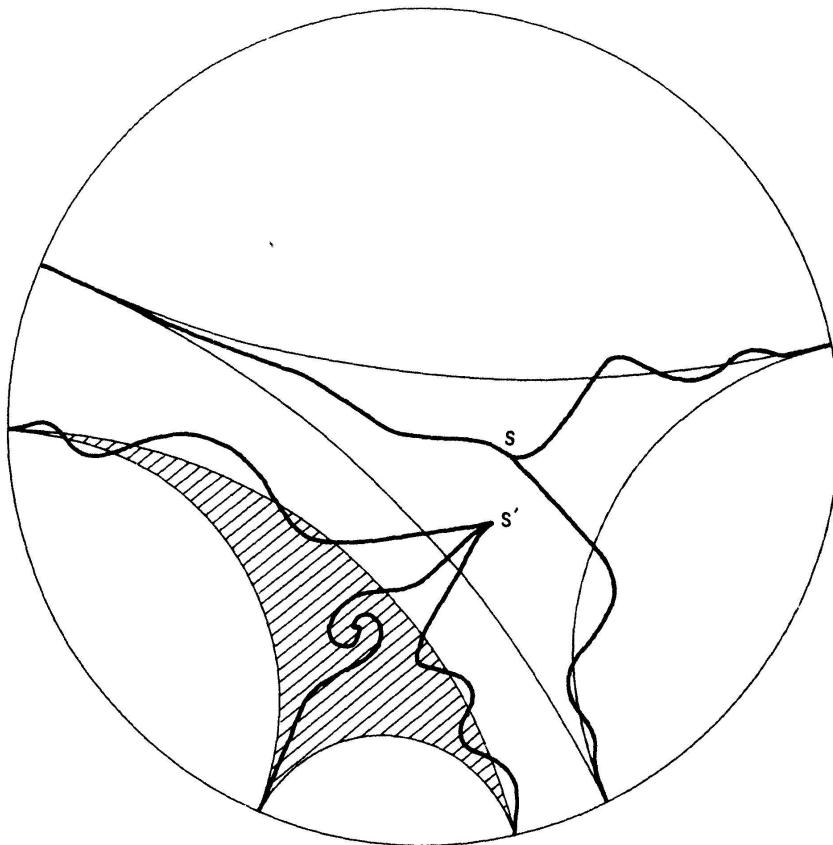


Figure 5

points seront dites *asymptotes* de s . Deux asymptotes associées à des selles distinctes de \mathcal{H} ne peuvent pas se couper transversalement dans H , et donc les triangles asymptotiques associés à deux selles distinctes de \mathcal{H} sont d'intérieurs disjoints.

Fixons une géodésique L de H qui ne contient aucune selle de \mathcal{H} , n'est asymptotique à aucune séparatrice de \mathcal{H} et n'est tangente à aucune séparatrice de \mathcal{H} (m -presque toute géodésique satisfait à ces conditions). Si s est une selle de \mathcal{H} et D l'une de ses trois asymptotes, nous dirons que le couple (s, D) est L -admissible s'il vérifie les conditions suivantes:

- $s \notin D$;
- s et Δ_s sont situés du même côté de D ;
- L ne coupe pas D et sépare s de D .

A tout couple L -admissible (s, D) , nous allons associer un domaine compact $T_{s,D}$ (voir figure ci-dessous). Les deux séparatrices issues de s et asymptotiques à D séparent H en deux domaines. Nous appelons $\mathcal{D}_{s,D}$ l'adhérence de celui qui ne contient pas les points à l'infini de L . Nous désignons d'autre part par \mathcal{P}_s^L le demi-plan fermé de bord L qui contient s , et nous définissons $T_{s,D}$ comme la composante connexe de $\mathcal{P}_s^L \cap \mathcal{D}_{s,D}$ qui contient s . Le domaine $T_{s,D}$ est compact et homéomorphe à un disque (voir figure 6).

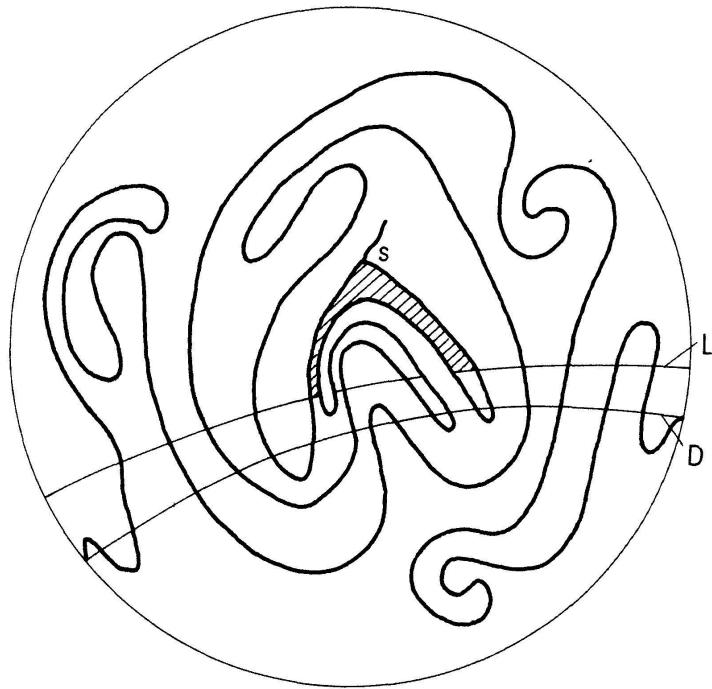


Figure 6

Si (s, D) et (s', D') sont deux couples L -admissibles, on a exactement l'une des quatre possibilités suivantes:

- $T_{s,D}$ est contenu dans $T_{s',D'}$
- $T_{s',D'}$ est contenu dans $T_{s,D}$
- $T_{s,D}$ et $T_{s',D'}$ sont disjoints
- $T_{s,D}$ et $T_{s',D'}$ sont d'intérieurs disjoints, et $s = s'$.

En particulier, la situation de la figure 7 n'est pas possible.

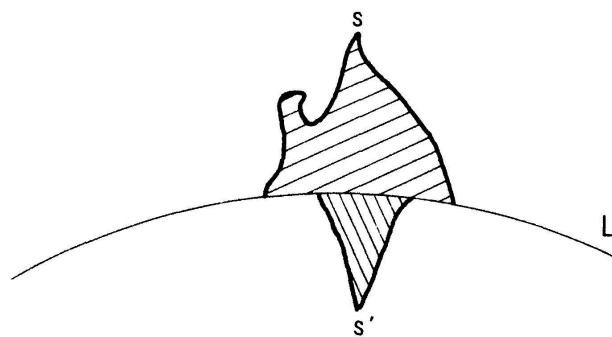


Figure 7

LEMME 2. *Pour tout couple L -admissible (s, D) , la collection d'arcs $L \cap T_{s,D}$ est tangente à \mathcal{H} en au moins un point.*

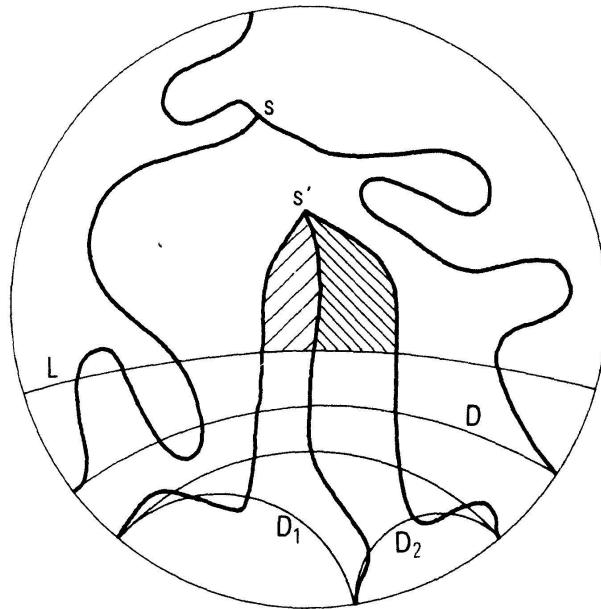


Figure 8

Démonstration. Il ne peut exister qu'un nombre fini de domaines $T_{s',D'}$ contenus dans $T_{s,D}$. Il suffit donc de montrer le lemme pour un domaine $T_{s,D}$ minimal (pour l'inclusion). Un tel domaine ne contient pas de selle dans son intérieur (voir figure 8).

Si le lemme est faux, $T_{s,D}$ est un disque ne contenant pas de singularité de \mathcal{H} dans son intérieur et dont le bord se compose alternativement de morceaux de feuilles de \mathcal{H} et de morceaux transverses à \mathcal{H} . En outre, la définition d'un couple L -admissible entraîne qu'au voisinage de s la troisième séparatrice issue de s (celle qui n'est pas asymptotique à D) n'est pas contenue dans $T_{s,D}$. La seule possibilité est que $T_{s,D}$ soit un "rectangle" (voir figure 9).

Le morceau de feuille compris entre les points 2 et 3 appartient à l'une des séparatrices issues de s et asymptotiques à D , par exemple à celle qui contient 1.

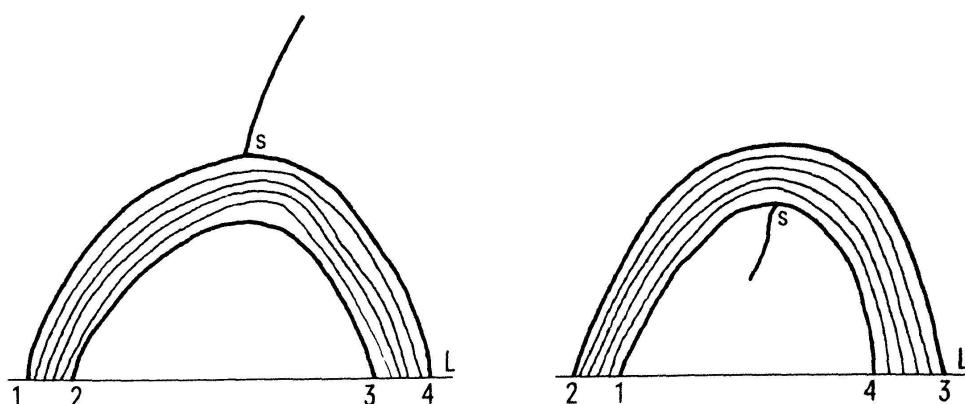


Figure 9

On peut alors considérer le morceau de séparatrice joignant 1 à 2. Ce morceau ne rencontre pas le segment de L compris entre 1 et 2 et il borde avec ce segment un disque de Whitehead, ce qui est une contradiction. \square

Nous dirons maintenant qu'un couple (s, D) est *fortement L -admissible* s'il est L -admissible et si de plus L rencontre Δ_s (donc les deux côtés de Δ_s autres que D). Une selle s ne peut ainsi appartenir qu'à un seul couple fortement L -admissible, et les domaines $T_{s,D}$ correspondant à deux couples fortement L -admissibles sont nécessairement *disjoints*.

Si s est une selle de \mathcal{H} , nous appelons G_s l'ensemble des géodésiques L pour lesquelles il existe une asymptote D de s telle que le couple (s, D) soit fortement L -admissible. L'injection cherchée i_s de G_s dans H est obtenue en associant à une géodésique L l'un des points de $L \cap T_{s,D}$ où L est tangente à \mathcal{H} (voir le lemma 2); nous choisissons les i_s de façon équivariante, i.e. si σ est une transformation du revêtement et σ_* la transformation induite sur \mathcal{G} on a $i_{\sigma s} \circ \sigma_* = \sigma \circ i_s$ pour toute selle s de \mathcal{H} . Désignons par A_s l'image $i_s(G_s) \subset H$. Pour L fixée, les domaines $T_{s,D}$ correspondant à deux couples fortement L -admissibles distincts ne se rencontrent pas; on a donc $A_s \cap A_{s'} = \emptyset$ si $s \neq s'$.

Pour prouver l'affirmation énoncée plus haut, il reste à vérifier que l'on a toujours $m(G_s) \geq 6 \log 2 - 3 \log 3$.

Pour cela, considérons pour tout angle α ($0 < \alpha \leq \pi$) la mesure $f(\alpha)$ de l'ensemble des géodésiques qui ne coupent pas D et séparent s et D (voir figure 10).

LEMME 3. (a) $f(\alpha) = -2 \log \sin(\alpha/2)$;
 (b) pour α, β, γ entre 0 et π , avec $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, on a:

$$f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) \geq 3f(2\pi/3) = 6 \log 2 - 3 \log 3.$$

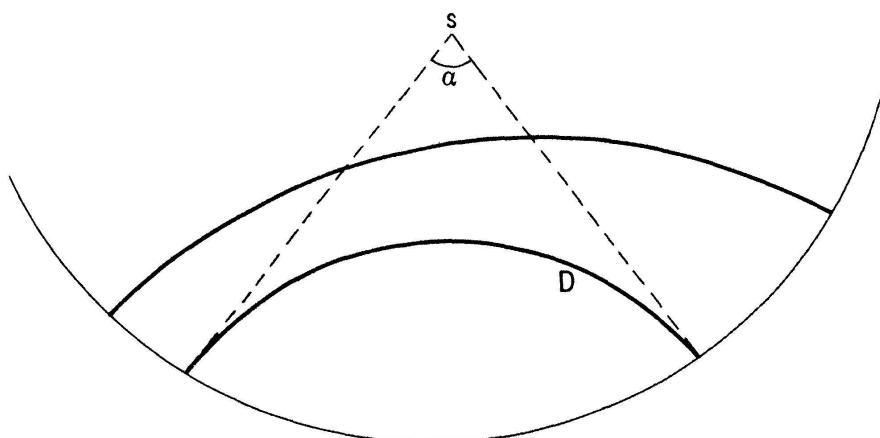


Figure 10

Démonstration du lemme 3.

(a) On peut donner plusieurs démonstrations. La première consiste à remarquer, en utilisant le théorème d'échange, que $f(\alpha)$ est la courbure totale du feuilletage dessiné sur la figure 11.

Le théorème de la divergence ([BLR]) permet alors de calculer $f(\alpha)$ par la formule $f(\alpha) = 2l - l'$, à condition d'interpréter convenablement cette différence de deux quantités infinies.

Nous donnons maintenant une démonstration directe. Compte tenu de l'égalité $f(\pi) = 0$, il suffit de vérifier que $f'(\alpha) = -\cotg(\alpha/2)$. Si on désigne par $h(\alpha)$ la distance de s à D , la quantité $f'(\alpha) \cdot d\alpha$ est égale à la mesure de l'ensemble des géodésiques coupant un segment (géodésique) de longueur infiniment petite $dh = h'(\alpha) \cdot d\alpha$ sous un angle d'au moins $\alpha/2$. Cette mesure est proportionnelle à dh et le coefficient de proportionnalité peut se calculer en utilisant la formule "euclidienne" $m = dr \cdot d\theta$ (voir partie II). Un calcul simple donne $2 \cos(\alpha/2)$, et par conséquent $f'(\alpha) = 2 \cos(\alpha/2) \cdot h'(\alpha)$. La trigonométrie hyperbolique fournit ensuite la formule $\cosh(h(\alpha)) = 1/\sin(\alpha/2)$ (voir par exemple [T₂], formule 2.6.12), d'où l'on déduit facilement $h'(\alpha) = -1/2 \sin(\alpha/2)$. Finalement, on obtient bien $f'(\alpha) = -\cotg(\alpha/2)$.

(b) Les triplets (α, β, γ) d'angles compris entre 0 et π , avec $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, paramètrent les points d'un triangle asymptotique. Si le point correspondant est sur le bord du triangle, on a par exemple $\gamma = \pi$, et $f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = -2 \operatorname{Log} [\sin(\alpha/2) \cdot \sin((\pi - \alpha)/2)] = 2 \operatorname{Log}(2/\sin \alpha) \geq 2 \operatorname{Log} 2 > 6 \operatorname{Log} 2 - 3 \operatorname{Log} 3$. Si le point tend vers un coin du triangle, l'un des angles tend vers 0 et $f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)$ tend vers $+\infty$. Il suffit donc pour montrer l'assertion (b) de vérifier que le seul extremum possible de $f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)$ dans le triangle est $(2\pi/3, 2\pi/3, 2\pi/3)$. Or la différentielle de $f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)$ est $-\cotg(\alpha/2) \cdot d\alpha - \cotg(\beta/2) \cdot d\beta - \cotg(\gamma/2) \cdot d\gamma$ et ne s'annule que pour $\cotg(\alpha/2) = \cotg(\beta/2) = \cotg(\gamma/2)$, c'est-à-dire pour $\alpha = \beta = \gamma = 2\pi/3$. \square

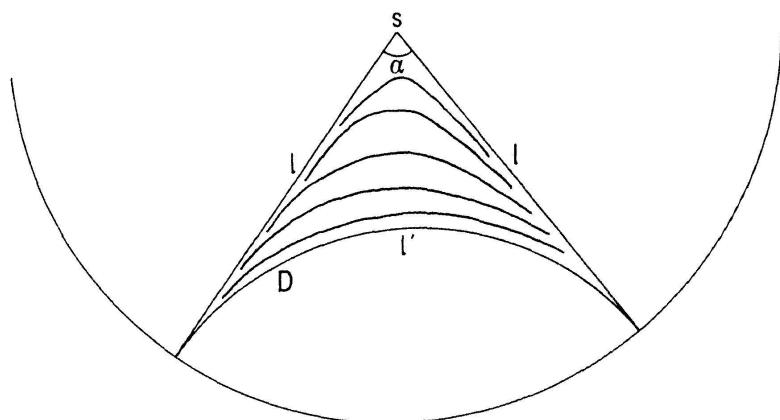


Figure 11

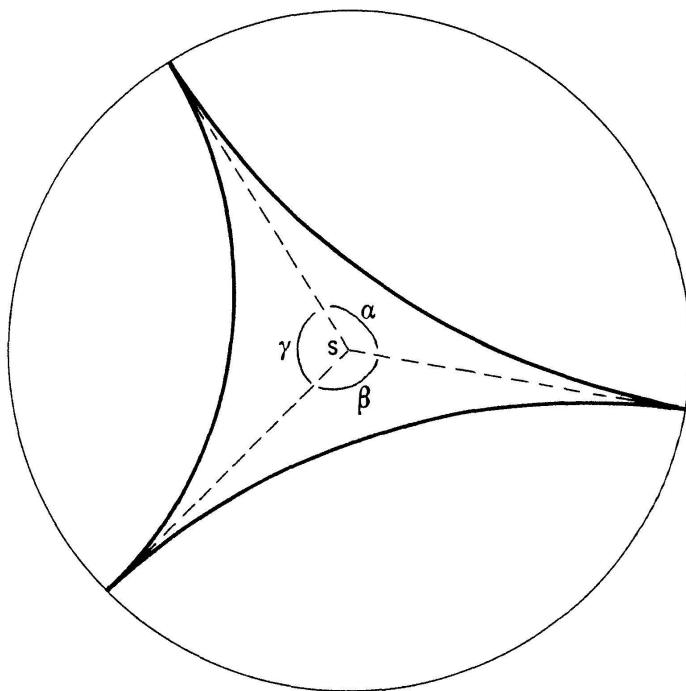


Figure 12

Cela étant, deux cas sont possibles pour une selle s de \mathcal{H} :

- s est située dans son triangle asymptotique Δ_s (ou sur le bord); on a alors (voir figure 12):

$$m(G_s) = f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) \geq 6 \log 2 - 3 \log 3.$$

- s est extérieure à Δ_s (voir figure 13); alors le couple (s, D_i) ($i = 1, 2$) est

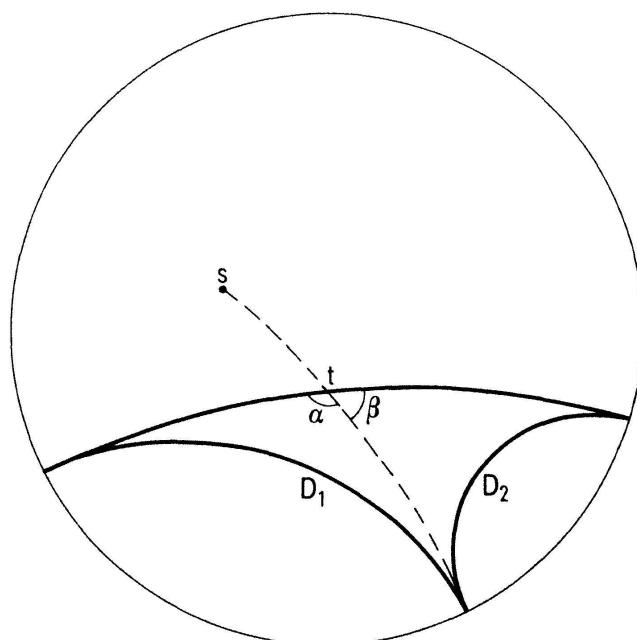


Figure 13

fortement L -admissible pour m -presque toute géodésique L ne coupant pas D_i et séparant t de D_i (voir figure 13). Donc:

$$m(G_s) > f(\alpha) + f(\beta) = f(\alpha) + f(\beta) + f(\pi) \geq 6 \log 2 - 3 \log 3.$$

Nous avons maintenant prouvé l'affirmation. Montrons que l'affirmation implique le théorème. Choisissons pour chaque selle \bar{s}_i de \mathcal{F} un relevé s_i dans H ($1 \leq i \leq h = 2|\chi(M)|$), et appelons A l'union (disjointe) des A_{s_i} . Puisque pour toute transformation σ du revêtement on a $\sigma A = \bigcup_{i=1}^h A_{\sigma s_i}$, les ensembles A et σA sont disjoints si $\sigma \neq id$, et donc la restriction de p à A est *injective*.

Supposons qu'il existe un voisinage ouvert U de A sur lequel p soit encore injective. Alors la courbure totale de \mathcal{F} est supérieure ou égale à la courbure totale de $\mathcal{H}|_U$, laquelle d'après le théorème d'échange est au moins égale à $\sum_{i=1}^h m(G_{s_i}) \geq 2 \cdot |\chi(M)| \cdot (6 \log 2 - 3 \log 3)$. Le théorème serait donc démontré si U existait.

En fait, U n'existe en général pas, mais nous allons construire pour tout $\varepsilon > 0$ petit, des ensembles $G_{s_i}^\varepsilon \subset G_{s_i}$ tels que $m(G_{s_i} - G_{s_i}^\varepsilon)$ tende vers 0 quand ε tend vers 0 et qu'il existe un voisinage ouvert U^ε de l'ensemble correspondant A^ε sur lequel p est injective. On déduit le théorème de l'existence de ces $G_{s_i}^\varepsilon$ en appliquant comme précédemment le théorème d'échange.

Fixons $\varepsilon > 0$ et soit L une géodésique appartenant à G_{s_i} . Il existe donc une asymptote D de s_i telle que le couple (s_i, D) soit fortement L -admissible. Considérons la géodésique D' située à une distance ε de D du côté de s_i et telle que la perpendiculaire commune à D et D' passe par s_i (voir figure 14).

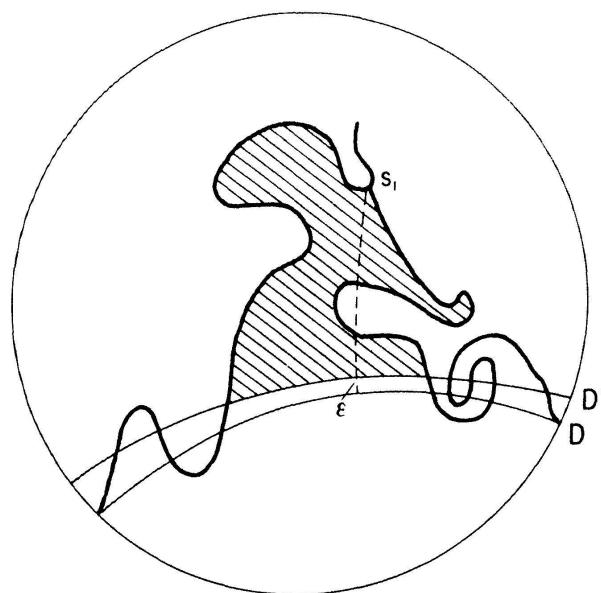


Figure 14

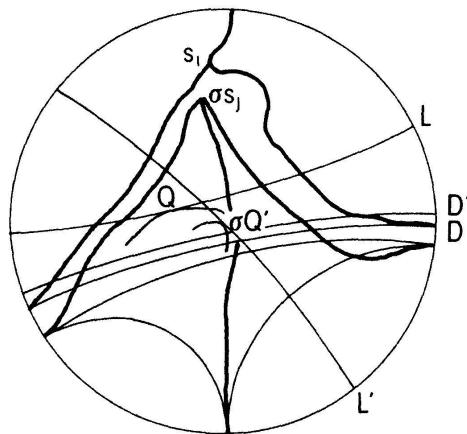


Figure 15

On peut supposer que D' est transverse aux deux séparatrices issues de s_i et asymptotiques à D , et définir comme plus haut un domaine compact $T_{s_i, D'}^\epsilon = \mathcal{P}_{s_i}^{D'} \cap \mathcal{D}_{s_i, D}$ (hachuré sur la figure 14). Soit n le nombre de selles contenues dans $T_{s_i, D'}^\epsilon$ et $a_\epsilon > 0$ tel que la courbure totale de \mathcal{H} dans le a_ϵ -voisinage de $\delta T_{s_i, D'}^\epsilon$ soit inférieure à ϵ .

Par définition, la géodésique $L \in G_{s_i}$ sera dans $G_{s_i}^\epsilon$ si et seulement si:

- (i) L ne coupe pas D' et sépare s_i de D' ;
- (ii) pour toute selle s de $T_{s_i, D'}^\epsilon$, la distance de L à s est au moins égale à ϵ/n ;
- (iii) L est transverse à \mathcal{H} dans le a_ϵ -voisinage de $\delta T_{s_i, D'}^\epsilon$.

Il est facile de voir que $m(G_{s_i} - G_{s_i}^\epsilon)$ tend vers 0 quand ϵ tend vers 0. Nous notons $A_{s_i}^\epsilon \subset A_{s_i}$ l'image de $G_{s_i}^\epsilon$ dans H et $A^\epsilon = \bigcup_{i=1}^h A_{s_i}^\epsilon$.

Nous allons terminer la démonstration en prouvant que, pour ϵ, i et j fixés, la distance de $A_{s_i}^\epsilon$ à l'union des conjugués de $A_{s_j}^\epsilon$ est strictement positive (si $i = j$, nous ne conjuguons $A_{s_i}^\epsilon$ que par les transformations du revêtement différentes de l'identité). Soient donc $Q \in A_{s_i}^\epsilon$, $Q' \in A_{s_j}^\epsilon$, avec Q et $\sigma Q'$ très proches (σ est une transformation du revêtement, non triviale si $i = j$). La condition (iii) ci-dessus entraîne que $\sigma Q'$ appartient à $T_{s_i, D}^\epsilon$ (voir figure 15) et donc que le triangle asymptotique associé à la selle σs_j se trouve du côté de D qui ne contient pas s_i (ou une situation analogue en intervertissant les rôles de s_i et s_j). La géodésique L' tangente à \mathcal{H} en $\sigma Q'$ rencontre par conséquent D et D' .

Définissons une distance sur l'ensemble des géodésiques qui coupent un compact $K \subset H$ par:

$$d_K(L, L') = \sup \left(\inf_{x \in L \cap K, y \in L' \cap K} d(x, y); \text{angle } (L, L') \right) \text{ si } L \cap L' \cap K = \emptyset$$

(oublier le terme angle (L, L') si $L \cap L' = \emptyset$)

$$= \text{angle } (L, L') \text{ si } L \cap L' = x \in K.$$

Les géodésiques L et L' construites plus haut vérifient $d_K(L, L') \geq \eta > 0$, où $K = T_{s_i, D'}^e$, et où η ne dépend pas de Q, Q' et σ . Si L et L' ne se coupent pas ou se coupent loin de K , elles ne peuvent être proches dans K et satisfaire les conditions imposées. Sinon, puisque L ne passe trop près des selles de $T_{s_i, D'}^e$ (condition (ii) ci-dessus), cela entraîne le résultat cherché, à savoir que la distance entre les points de tangence Q et $\sigma Q'$ sont minorés par une constante indépendante de Q, Q' et σ (nous utilisons ici le fait suivant: étant donnés un nombre $\theta > 0$ et un compact $K \subset M$ ne contenant aucune selle de \mathcal{F} , il existe $\alpha > 0$ tel que, si deux géodésiques L_1 et L_2 tangentes à \mathcal{H} en des points a_1 et a_2 appartenant à $p^{-1}(K)$ se coupent avec un angle d'au moins θ , alors la distance entre a_1 et a_2 est au moins α). \square

BIBLIOGRAPHIE

- [A] D. ASIMOV, *On the average curvature of leaves of foliations*, Bull. Amer. Math. Soc., 84 (1978), 131–133.
- [BLR] F. BRITO, R. LANGEVIN and H. ROSENBERG, *Note aux CRAS*, Paris, tome 285, série A, p. 533–536 (10 Octobre 1977).
- [CL] S. S. CHERN and R. K. LASHOFF, *On the total curvature of immersed manifolds II*, Michigan Math. Jour. (1958), p. 5–12.
- [FLP] A. FATHI, F. LAUDENBACH and V. POENARU, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque 66–67 (1979), SMF Paris.
- [HM] J. HUBBARD and H. MASUR, *Quadratic differentials and foliations*, Acta Math. 142 (1979), p. 221–274.
- [Ke] S. P. KERCKHOFF, *The asymptotic geometry of Teichmüller space*, Topology 19 (1980), p. 23–41.
- [Ku] N. H. KUIPER, *On surfaces in euclidean three space*, Bull. Soc. Math. Belique 12 (1960), p. 5–22.
- [L] R. LANGEVIN, *Feuilletages tendus*, Bull. Soc. Math. France 107 (1979), p. 271–281.
- [S] L. A. SANTALO, *Integral geometry and geometric probability*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Addison-Wesley.
- [Th] R. THOM, *Les singularités des applications différentielles*, Annales Institut Fourier 1955–56, tome XI, p. 43–88.
- [T₁] W. THURSTON, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Publications de l'Université de Princeton, Fine Hall.
- [T₂] —, *The geometry and topology of 3-manifolds*, notes d'un cours à l'Université de Princeton, à paraître.

Université de Dijon
Université Paris VII

Reçu en mai 81/septembre 81