Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 57 (1982)

Artikel: Nichteuklidische Gitterpunktprobleme und Gleichverteilung in linearen algebraischen Gruppen.

Autor: Bartels, Hans-Jochen

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43880

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici **57** (1982) 158–172 0010–2571/82/001158–15$01.50+0.20/0
© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

Nichteuklidische Gitterpunktprobleme und Gleichverteilung in linearen algebraischen Gruppen

HANS-JOCHEN BARTELS

Einleitung

Es sei G eine zusammenhängende halbeinfache reelle Liegruppe mit endlichem Zentrum, $\mathfrak{g}$ bezeichne die Liealgebra von G; es wird vorausgesetzt, daß $\mathfrak{g}$ einfache Liealgebra ist; dann besitzt G keine abgeschlossenen Normalteiler positiver Dimension. G sei ferner nicht kompakt und $K \leq G$ sei maximale kompakte Untergruppe, $\Gamma \leq G$ sei diskrete Untergruppe und kokompakt, d.h. $\Gamma \backslash G$ ist kompakt. Der Raum $X = G/K$ der maximal-kompakten Untergruppen in G ist ein Riemannscher symmetrischer Raum. Es bezeichne $\pi : G \to G/K$ die kanonische Projektion. Die Killingform auf der Liealgebra von G induziert auf X eine G-linksinvariante Riemannsche Metrik, für zwei Punkte $\pi(g)$, $\pi(g_0) \in X$ sei mit $d(g, g_0)$ der zugehörige geodätische Abstand in X bezeichnet und mit $B_t(g)$ die geodätische Kugel um $\pi(g)$ mit dem Radius $t \geq 0$. Ist nun $N_t(g, g_0; \Gamma) = N_t(g, g_0)$ die Anzahl der $s \in \Gamma$ mit $d(sg, g_0) \leq t$, so gilt für $t \to \infty$ das folgende asymptotische Verhalten:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\mathrm{vol}\,(B_t(1))}{N_t(g, g_0)} = \mathrm{vol}\,(\mathfrak{F}), \tag{1}$$

wenn vol (.) das Volumen bezüglich der Riemannschen Metrik d auf X und $\mathfrak{F} \subseteq X$ einen Fundamentalbereich von Γ in X bezeichnen. Für $G = SL_2(\mathbb{R})$ ist (1) zuerst in der Habilitationsschrift von H. Huber [15] mit Hilfe von Reihenentwicklungen nach Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf der oberen Halbebene $H = Sl_2(\mathbb{R})/SO(2)$ bewiesen worden. Für höherdimensionale hyperbolische Räume sind entsprechende Resultate in [5], [10] und [16] bewiesen worden. Man vergleiche hierzu auch den Übersichtsartikel [4] von Elstrodt sowie die dort angegebene Literatur. Für keinen der in [5] und [10] behandelten Spezialfälle von (1) ist ein geometrischer Beweis bekannt. Für $G = SL_2(\mathbb{R})$ kann man sogar zeigen, daß sich (1) mit genauer Fehlerabschätzung jedenfalls nicht "gleichmäßig in Γ" geometrisch beweisen läßt (vgl. [4] S. 66). Der in dieser Arbeit gegebene Beweis

von (1) für den Fall einer halbeinfachen Liegruppe G mit den am Anfang genannten Voraussetzungen benutzt Darstellungstheorie von G und stellt eine Kombination der in [5], [15] und [17] verwendeten Ansätze dar. In der letztgenannten Arbeit [17] von Murase wird unter bestimmten einschränkenden Voraussetzungen für lineare algebraische Gruppen $\mathfrak{G}$ über Zahlkörpern k eine Art Gleichverteilung von $\mathfrak{G}(k)$ in $\mathfrak{G}(A)$ bewiesen ($\mathfrak{G}(A)$ bezeichnet dabei die zugehörige Adele-Gruppe und $\mathfrak{G}(k)$ sind die k-rationalen Punkte von $\mathfrak{G}$). Allerdings werden in [17] nur die leichter zugänglichen endlichen Primstellen von k betrachtet, während der technisch mühsamere (vgl. unten die Lemmata 1, 3 und 4) Fall der archimedischen Primstellen offenbleibt. Wie bei [17] gehen auch in unserem Beweis wesentlich Resultate von Howe und Moore über das Verhalten im Unendlichen von Matrixkoeffizienten irreduzibler Darstellungen ein [14].

Das in (1) festgestellte asymptotische Verhalten hängt eng zusammen mit der Frage nach dem Wachstumsgesetz in der Gruppe Γ: Da man zeigen kann, daß unter den gemachten Voraussetzungen über G $\mathrm{vol}\,(B_t(1))$ von exponentiellem Wachstum für $t \to \infty$ ist, ergibt sich unmittelbar: Γ ist von exponentiellem Wachstum[1] (vgl. die Bemerkung zu Lemma 2). Wenn man will, kann man die Gleichung (1) als quantitative Präzisierung dieser qualitativen Aussage verstehen.

Das aymptotische Verhalten (1) gestattet einige Anwendungen: Speziell für arithmetisch definierte Untergruppen Γ von G ergeben sich aus (1) asymptotische Formeln für die Anzahl der Lösungen gewisser diophantischer Gleichungen bzw. Gleichungssysteme. Sind z.B. $G = SL_2(\mathbb{R})$ und Γ die Gruppe der Elemente der reduzierten Norm eins in einer Ordnung einer indefiniten nichtzerfallenden Quaternionenalgebra über $\mathbb{Q}$, so erhält man mit (1) asymptotisch die Anzahl der Gitterpunkte auf einem dreidimensionalen Hyperboloid im $\mathbb{R}^4$, die innerhalb eines durch die Metrik $d(.,.)$ definierten affinen Ellipsoids liegen. Man vergleiche auch die verwandten Resultate in [6], [11] und [18]. Die in [11] angegebenen asymptotischen Anzahlformeln für Lösungen von Normformgleichungen gaben übrigens den Anstoß für die hier durchgeführten Untersuchungen. Allerdings gestaltet sich die "Geometrie der Zahlen" in anisotropen algebraischen Tori – das entspricht gerade dem in [11] betrachteten Fall – erheblich einfacher als in halbeinfachen Gruppen und erfordert keine Rückgriffe auf tiefer liegende analytische Theorien. In einer späteren Arbeit werde ich auf die zuletzt genannten arithmetischen Fragen sowie die Übertragung des Ergebnisses (1) auf den adelischen Fall, d.h. die Verallgemeinerung der Resultate von Murase unter Einschluß der unendlichen Primstellen zurückkommen.

Diese Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: Im ersten Abschnitt werden

---

[1] Zur Definition dieses Begriffs vgl. etwa [9] Seite 53.

einige Volumenabschätzungen zusammengestellt, die im zweiten Abschnitt beim Beweis der asymptotischen Formel (1) benötigt werden.

An dieser Stelle danke ich Herrn Professor S. J. Patterson für eine Reihe nützlicher Gespräche und einige Literaturhinweise und ebenso dem Referenten für Kritik und einige Ratschläge sehr herzlich.

1. $G, K, \Gamma, X = G/K, d(.,.)$ und $B_t(g)$ seien wie in der Einleitung. Da G und K unimodular sind, trägt X ein G-linksinvariantes Maß μ. μ läßt sich so normieren, daß es mit dem von der Killingform induzierten G-linksinvarianten Maß auf X übereinstimmt. dk bezeichne das Haar-Maß auf K mit $\int_K dk = 1$. Bei geeigneter Normierung des Haar-Maßes dg auf G gilt dann für stetiges f auf G mit kompaktem Träger

$$\int_G f(g)\, dg = \int_X \int_K f(gk)\, dk\, d\mu. \tag{2}$$

Das Maß μ kann nach [7], [12] noch genauer berechnet werden. Dies sei dem besseren Verständnis wegen hier kurz zusammengestellt. $\mathfrak{g}$ bezeichne die Liealgebra von G und $\mathfrak{g} = k \oplus \mathfrak{p}$ sei Cartan-Zerlegung von $\mathfrak{g}$ derart, daß k die zu K gehörige Liealgebra ist; dann kann man $\mathfrak{p}$ mit dem Tangentialraum von $G/K = X$ im Punkte $\pi(1)$ identifizieren. Bezeichnet Exp die Exponentialabbildung von $\mathfrak{p}$ in die Riemannsche Mannigfaltigkeit X, so weiß man, daß $\operatorname{Exp}: \mathfrak{p} \to G/K = X$ ein Isomorphismus ist (vgl. [12], S. 251, [13] S. 379). Ferner berechnet sich das Maß μ auf X folgendermaßen:

$$\int_X f(x)\, d\mu = \int_{\mathfrak{p}} f(\operatorname{Exp} \mathfrak{x}) \det A_{\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x}, \tag{3}$$

wenn $x = \operatorname{Exp} \mathfrak{x}$, $d\mathfrak{x}$ das Volumenelement auf $\mathfrak{p}$ bezüglich der Killingform bezeichnen und $A_{\mathfrak{x}}: \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ der folgende Endomorphismus ist:

$$A_{\mathfrak{x}} = \sum_{j=0}^{\infty} (T_{\mathfrak{x}})^j/(2j+1)!\,,$$

$T_{\mathfrak{x}}$ die Restriktion von $(\operatorname{ad} \mathfrak{x})^2$ auf $\mathfrak{p}$ (vgl. [7], [12], [13]). Für die folgenden Volumenabschätzungen ist es zweckmäßig, das Maß μ weiter umzuformen und bezüglich geodätischer Polarkoordinaten zu berechnen: $r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ seien Polarkoordinaten um 0 in dem euklidischen Raum $\mathfrak{p}$ (euklidisch bezüglich der Killingform), so daß sich jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$ eindeutig in der Form $\mathfrak{x} = r \cdot \tilde{\mathfrak{x}}$ darstellen läßt, wobei $\tilde{\mathfrak{x}} \in \mathfrak{p}$ die Länge 1 hat und nur von $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ abhängt. Betrachtet

man vermöge der Abbildung $\mathrm{Exp}:\mathfrak{p}\to X$ diese Polarkoordinaten als Koordinatensystem in X, so erhält man gerade die geodätischen Polarkoordinaten mit Pol $\pi(1)\in X$ (vgl. [7] S. 166).

Bezüglich dieser Polarkoordinaten berechnet sich $\det A_x\cdot dx$ folgendermaßen ([7] S. 166, [12] S. 251):

$$\det A_x\,dx = r^{n-1}\prod_{i=1}^{n}\frac{\sinh(rt_i)}{rt_i}\,dr\,d\theta_1\cdots d\theta_{n-1}, \tag{4}$$

dabei sind $t_1^2,\ldots,t_n^2$ die Eigenwerte von $T_{\bar{x}}$, $t_i\geq 0$. Die t_i sind stetige Funktionen von $\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}$ $i=1,\ldots,n$. Für $t_i=0$ ersetze man in (4) $\sinh(rt_i)/rt_i$ durch 1. Damit ergibt sich für das Volumen $v(r):=\mu(B_r(1))$ die Formel:

$$v(r)=\int_0^r\left(\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\rho^{n-1}\prod_{i=1}^{n}\frac{\sinh(\rho t_i)}{\rho t_i}\,d\theta_1\cdots d\theta_{n-1}\right)d\rho \tag{5}$$

und man hat das

LEMMA 1. *Bezeichnet $v(r)=\mu(B_r(1))$ das Volumen der geodätischen Kugel vom Radius r um $\pi(1)$ in X, so ist für r, $c\geq 0$*

$$v(r+c)\leq v(c)+\alpha(c)(v(r)-v(1))+\psi(c)$$

mit von r unabhängigen Funktionen ψ, α, so daß

$$\lim_{c\to 0}\alpha(c)=1,\qquad \lim_{c\to 0}\psi(c)=v(1).$$

Beweis. Nach (5) ist

$$\begin{aligned}v(r+c)&=\int_0^{r+c}\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\rho^{n-1}\prod_{i=1}^{n}\frac{\sinh(\rho t_i)}{\rho t_i}\,d\theta_1\cdots d\theta_{n-1}\,d\rho\\&=v(c)+\int_0^r\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(\rho+c)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}\frac{\sinh((\rho+c)t_i)}{(\rho+c)t_i}\,d\theta_1\cdots d\theta_{n-1}\,d\rho\end{aligned}$$

Mit

$$\psi(c):=\int_0^1\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(\rho+c)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}\frac{\sinh((\rho+c)t_i)}{(\rho+c)t_i}\,d\theta_1\cdots d\theta_{n-1}\,d\rho$$

hat man daher:

$$v(r+c)=v(c)+\psi(c)+\int_1^r\int_0^\pi\cdots\int_0^{2\pi}(\rho+c)^{n-1}\prod_{i=1}^n\frac{\sinh((\rho+c)t_i)}{(\rho+c)t_i}\,d\theta_1\cdots d\theta_{n-1}\,d\rho.$$

Zum Beweis des Lemmas genügt es, in dem rechts stehenden Integral den Integranden geeignet abzuschätzen. Dazu ist:

$$(\rho+c)^{n-1}\leq\rho^{n-1}\cdot(1+c)^{n-1}\quad\text{für}\quad\rho\geq1,\,c\geq0$$

und

$$\frac{1}{(\rho+c)t_i}\leq\frac{1}{\rho t_i}\quad\text{für}\quad\rho>0,\,t_i\neq0,\,c\geq0.$$

Beachtet man nun, daß die $t_i=t_i(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})$ als stetige Funktionen von $\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}$ nach oben beschränkt sind, etwa durch τ_0, so ergibt sich die Behauptung des Lemmas unmittelbar aus dem folgenden

HILFSSATZ 1. *Für* $c\geq0$, $0<t<\tau_0$ *und* $\rho\geq1$ *ist*

$$\sinh((\rho+c)t)\leq\varphi(c;\tau_0)\cdot\sinh(\rho t)$$

mit einer von t *unabhängigen Funktion* $\varphi(c;\tau_0)$, *für die* $\lim_{c\to0}\varphi(c;\tau_0)=1$ *gilt.*

Beweis des Hilfssatzes. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\sinh((\rho+c)t)}{\sinh(\rho t)}&=\cosh(ct)+\cosh(\rho t)\cdot\frac{\sinh(ct)}{\sinh(\rho t)}\\&\leq\cosh(c\tau_0)+\cosh(\rho t)\frac{\sinh(ct)}{\sinh(\rho t)}.\end{aligned}\tag{6}$$

Für $(\rho t)\geq1$ liegt der Quotient $\cosh(\rho t)/\sinh(\rho t)\geq1$ unterhalb einer von ρt unabhängigen festen Schranke M, so daß man $\sinh((\rho+c)t)/\sinh(\rho t)$ durch $\cosh(c\tau_0)+M\sinh(c\tau_0)$ abschätzen kann.

Ist $\rho t\leq1$, so auch $t\leq1$ und daher

$$\frac{\sinh(ct)}{\sinh(t)}\leq\varphi(c)$$

mit einer von t unabhängigen Funktion φ, für die $\lim_{c\to0}\varphi(c)=0$ gilt.

Wegen $\cosh(\rho t) < 2$ für $\rho t \leq 1$ folgt daher wegen der Ungleichung (6) auch in diesem Fall die Behauptung ■

Die Formel (5) gestattet eine weitere Folgerung:

LEMMA 2. *$v(r)$ wächst exponentiell, d.h. es existieren Konstanten $c_1 > 1$, $c_2 > 0$ mit $v(r) > c_2 \cdot c_1^r$.*

Bemerkung. In der Sprechweise von [9] S. 57 besagt Lemma 2, daß das Wachstum von X exponentiell ist. Zum Beweis des Lemmas benötigen wir einen

HILFSSATZ 2. *Für wenigstens ein $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{p}$ ist $T_{\mathfrak{x}} \neq 0$.*

Beweis des Hilfssatzes. Für die Killingform $B(.,.)$ auf $\mathfrak{g}$ gilt

$$B((\operatorname{ad}\mathfrak{x})^2\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) = -B([\mathfrak{x}, \mathfrak{y}], [\mathfrak{x}, \mathfrak{y}]) \qquad \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{g} \tag{7}$$

$B(.,.)$ ist auf $\mathfrak{k}$ negativ definit. Da $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$ ist, würde daher aus $T_{\mathfrak{x}} \equiv 0$ mit (7) folgen: $[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] = 0$ für alle $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{p}$. Wegen $[\mathfrak{p}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{p}$ hätte man ferner für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{k}$, $\mathfrak{y} \in \mathfrak{k}$:

$$(\operatorname{ad}\mathfrak{x})^2(\mathfrak{y}) = [\mathfrak{x}, [\mathfrak{x}, \mathfrak{y}]] = 0,$$

d.h. $(\operatorname{ad}\mathfrak{x})^2$ ist auf ganz $\mathfrak{g}$ trivial für beliebige $\mathfrak{x} \in \mathfrak{p}$. Andererseits ist aber die Killingform B auf der halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ nicht ausgeartetet, das ergibt den gewünschten Widerspruch ■

Bemerkung. Wie der Referent bemerkte, läßt sich Hilfssatz 2 sogar zu "$T_{\mathfrak{x}} \neq 0$ für alle $\mathfrak{x} \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$" verschärfen. Zum Nachweis von Lemma 2 genügt allerdings die schwächere Aussage.

Nun zum Beweis von Lemma 2. Nach dem Hilfssatz verschwinden nicht alle Eigenwerte $\rho \cdot t_i = \rho t_i(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ von $T_{\mathfrak{x}}$ für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$ identisch in den Variablen $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$.

Es sei etwa $t_i(\theta_{1,0}, \ldots, \theta_{n-1,0}) > 0$ und $t_i(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) \geq c > 0$ in einer offenen Umgebung $U = U(\theta_{1,0}, \ldots, \theta_{n-1,0})$ von $\theta_0 = (\theta_{1,0}, \ldots, \theta_{n-1,0})$ im $\mathbb{R}^{n-1}$. Dann ist wegen (5) offenbar

$$v(r) \geq \int_0^r \rho^{n-1} \frac{\sinh(\rho c)}{\rho c}\, d\rho \cdot \operatorname{vol}_{n-1}(U), \tag{8}$$

wenn $\operatorname{vol}_{n-1}(U)$ das gewöhnliche Lebesguemaß von $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ bezeichnet. Aus (8) ergibt sich die Behauptung des Lemmas unmittelbar ■

Bemerkung. Nach einem bekannten Satz von A. Selberg enthält Γ eine torsionsfreie Untergruppe Γ_1 von endlichem Index. $\Gamma_1\backslash X$ ist dann Mannigfaltigkeit mit Fundamentalgruppe Γ_1. Als kokompakte Untergruppen von G sind sowohl Γ als auch Γ_1 endlich erzeugt [20]. Lemma 2 besagt dann: X ist von exponentiellem Wachstum, nach [9] S. 57 ist daher Γ_1 und damit auch Γ von exponentiellem Wachstum.[1] Zieht man die tiefer liegenden Resultate von A. Borel [2] über die Zariski-Dichtheit von Γ in G (für linear algebraisches G) und einen Satz von Tits [19] heran, so läßt sich – wie der Referent bemerkte – unabhängig von Volumenbetrachtungen allgemeiner zeigen, daß diskrete Untergruppen von endlichem Kovolumen in halbeinfachen zusammenhängenden Liegruppen mit endlichem Zentrum und ohne kompakte Faktoren von exponentiellem Wachstum sind.

2. Es bezeichne im folgenden $\delta:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ eine beliebige stetige, streng monoton fallende Funktion mit $\delta(t)>0$ für alle $t>0$ und $\lim_{t\to\infty}\delta(t)=0$. Es seien ferner $F_t:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ bzw. $G_t:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ stetige Funktionen mit

$$F_t(x)=\begin{cases} 1 & x\le t \\ \le 1 \quad \text{falls} & t<x<t+\delta(t) \\ 0 & x\ge t+\delta(t)\end{cases}$$

bzw.

$$G_t(x)=\begin{cases} 1 & x\le t-\delta(t) \\ \le 1 \quad \text{falls} & t-\delta(t)<x<t \\ 0 & x\ge t\end{cases}$$

$g_0\in G$ sei beliebig gewählt aber im folgenden fest. Für $g\in G$ setze man

$$f_t(g):=\sum_{s\in\Gamma} F_t(d(sg,g_0)) \tag{9}$$

$$g_t(g):=\sum_{s\in\Gamma} G_t(d(sg,g_0)). \tag{10}$$

Dann sind f_t und g_t stetige Funktionen auf G, die offensichtlich Γ-links und K-rechtsinvariant sind, und die daher wegen der Kompaktheit von $\Gamma\backslash G$ in dem Hilbertraum $L_2(\Gamma\backslash G/K)$ der quadratintegrierbaren komplexen Funktionen auf $\Gamma\backslash G/K$ liegen. Nach [8] S. 23 ff. zerlegt sich die rechtsreguläre Darstellung von

---

[1] Zur Definition dieses Begriffs vgl. etwa [9] S. 53.

G auf $L_2(\Gamma\backslash G)$ in eine höchstens abzählbarunendliche direkte Summe irreduzibler Darstellungen π_v von G:

$$L_2(\Gamma\backslash G)=\sum_{v=1}^{\infty} H_v,$$

wobei jede Darstellung π_v von G auf H_v endliche Multiplizität in $L_2(\Gamma\backslash G)$ besitzt. $L_2(\Gamma\backslash G/K)$ läßt sich dann in der Form

$$L_2(\Gamma\backslash G/K)=\sum_{v=1}^{\infty} L_2(\Gamma\backslash G/K)\cap H_v=\sum_{v=1}^{\infty} H_v^K$$

zerlegen (vgl. auch [17] S. 172). Nach [13] S. 146 ist $\dim H_v^K\leq 1$. Die Wahl von Vektoren der Länge 1 in den von Null verschiedenen H_v^K liefert dann insgesamt ein Orthonormalsystem $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ des Hilbertraums $L_2(\Gamma\backslash G/K)$. Dabei kann man noch $H_1=\mathbb{C}\varphi_1$ annehmen, wobei φ_1 die konstante Funktion $\varphi(x)\equiv 1/\sqrt{\mu(\mathfrak{F})}$ ist, $\mathfrak{F}\subseteq X$ ein Fundamentalbereich von X modulo Γ.

Dann hat man Reihenentwicklungen

$$f_t(g)=\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{i,t}\varphi_i(g)$$

bzw.

$$g_t(g)=\sum_{i=1}^{\infty} \mu_{i,t}\varphi_i(g)$$

mit

$$\lambda_{i,t}=\int_{\mathfrak{F}} \overline{f_t(g)}\cdot\varphi_i(g)\,d\mu=\int_{\pi^{-1}(\mathfrak{F})} f_t(g)\cdot\varphi_i(g)\,dg$$

bzw.

$$\mu_{i,t}=\int_{\mathfrak{F}} \overline{g_t(g)}\cdot\varphi_i(g)\,d\mu.$$

LEMMA 3. *Für alle $i\in\mathbb{N}$ $i\neq 1$ gilt*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda_{i,t}}{\mu(B_t(1))}=0,\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{\mu_{i,t}}{\mu(B_t(1))}=0.$$

Beweis. Es ist wegen der Γ-Linksinvarianz von φ_i

$$\begin{aligned}\lambda_{i,t} &= \int_{\pi^{-1}(\mathfrak{F})} \sum_{s\in\Gamma} F_t(d(sg, g_0))\varphi_i(g)\,dg \\ &= \int_G F_t(d(g, g_0))\varphi_i(g)\,dg.\end{aligned} \tag{11}$$

Die Funktion

$$\psi_{i,t}(x) := \frac{\int_G F_t(d(g, x))\varphi_i(g)\,dg}{\mu(B_t(1))}$$

ist stetig in x und Γ-links- und K-rechtsinvariant, liegt also in $L_2(\Gamma\backslash G/K)$. Ist φ_i Element des Hilbertraums H_v mit $v = v(i)$, so ist wegen

$$\begin{aligned}\psi_{i,t}(x) &= \frac{\int_G F_t(d(g, x))\varphi_i(g)\,dg}{\mu(B_t(1))} = \frac{\int_G F_t(d(x^{-1}g, 1))\varphi_i(g)\,dg}{\mu(B_t(1))} \\ &= \frac{\int_G F_t(d(g, 1))\varphi_i(xg)\,dg}{\mu(B_t(1))} = \frac{\int_G F_t(d(g, 1))(\pi_v(g)\varphi_i)(x)\,dg}{\mu(B_t(1))}\end{aligned}$$

auch $\psi_{i,t}$ Element des Hilbertraums $H_v \subseteq L_2(\Gamma\backslash G)$. $\psi_{i,t}$ ist also ein K-invarianter Vektor des Darstellungsraums H_v. Wegen $\dim H_v^K = H_{v(i)}^K = 1$ läßt sich $\psi_{i,t}$ in der Form

$$\psi_{i,t} = \tilde{\lambda}_{i,t} \cdot \varphi_i \tag{12}$$

darstellen, wobei sich der reelle Koeffizient $\tilde{\lambda}_{i,t}$ folgendermaßen berechnet:

$$\tilde{\lambda}_{i,t} = \frac{\int_G F_t(d(g, 1))(\pi_v(g)\varphi_i, \varphi_i)\,dg}{\mu(B_t(1))}$$

dabei ist mit $(.,.)$ das Skalarprodukt des Hilbertraums H_v bezeichnet.

(π_v, H_v) ist nichttrivial, da H_1 die Multiplizität 1 in $L_2(\Gamma\backslash G/K)$ besitzt. G ist halbeinfach, daher kann die Darstellung π_v von G auch nicht eindimensional sein; und da die einzigen abgeschlossenen von G verschiedenen Normalteiler in G

endlich sind, verschwindet nach [14] $(\pi_v(g)\varphi_i, \varphi_i)$ als Funktion von g im Unendlichen, d.h. zu $\varepsilon > 0$ existiert ein Kompaktum $C_\varepsilon \subseteq G$ mit $|(\pi_v(g)\varphi_i, \varphi_i)| < \varepsilon$ für alle $g \in G \setminus G_\varepsilon$. Andererseits wächst $\mu(B_t(1))$ monoton mit t gegen Unendlich, wie in [17] Lemma 5 folgt dann $\lim_{t\to\infty} \tilde{\lambda}_{i,t} = 0$, d.h. $\lim_{t\to\infty} \psi_{i,t} = 0$ in dem Hilbertraum H_v. Als Repräsentanten für den Vektor $\varphi_i \in L_2(\Gamma \setminus G/K)$ läßt sich eine stetige Funktion wählen (vgl. Gleichung (12)), dann gilt $\psi_{i,t} = \tilde{\lambda}_{i,t} \cdot \varphi_i$ nicht nur als Identität zwischen Vektoren in dem Hilbertraum $H_v \subset L_2(\Gamma \setminus G/K)$, sondern punktweise, und es folgt sogar $\lim_{t\to\infty} \psi_{i,t}(g_0) = 0$ und damit nach (11) auch

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\lambda_{i,t}}{\mu(B_t(1))} = 0.$$

Die Identität

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mu_{i,t}}{\mu(B_t(1))} = 0$$

folgt analog ■

Es bezeichnen $(.,.)$ bzw. $\|\cdot\|$ das Skalarprodukt bzw. die Norm in dem Hilbertraum $L_2(\Gamma \setminus G/K)$ und

$$\begin{aligned} \tilde{f}_t(g) &:= \frac{f_t(g) - \lambda_{1,t}\varphi_1(g)}{\mu(B_t(1))} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda_{i,t}}{\mu(B_t(1))} \cdot \varphi_i(g) \\ \tilde{g}_t(g) &:= \frac{g_t(g) - \mu_{1,t}\varphi_1(g)}{\mu(B_t(1))} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\mu_{i,t}}{\mu(B_t(1))} \cdot \varphi_i(g). \end{aligned} \tag{13}$$

Mit Lemma 1 schließt man, daß $\tilde{f}_t(g)$ und $\tilde{g}_t(g)$ gleichmäßig bezüglich t in $\mathfrak{F}$ beschränkt sind: Denn die Anzahl der "Gitterpunkte" $\Gamma \cdot \pi(g)$ in der Kugel $B_{t+\delta(t)}(g_0)$ ist offenbar beschränkt durch

$$\frac{\mu(B_{t+\delta(t)+d(\mathfrak{F})}(g_0)}{\mu(\mathfrak{F})},$$

wenn $d(\mathfrak{F})$ den maximalen Durchmesser von $\mathfrak{F}$ bezüglich der Riemannschen Metrik auf X bezeichnet. Wegen $\mu(B_{t+\delta(t)+d(\mathfrak{F})}(g_0) = \mu(B_{t+\delta(t)+d(\mathfrak{F})}(1))$ ist daher nach Lemma 1 für alle $t > 0$ und $g \in G$:

$$\left| \frac{f_t(g)}{\mu(B_t(1))} \right| \leq \frac{\mu(B_{t+\delta(t)+d(\mathfrak{F})}(1))}{\mu(\mathfrak{F})\mu(B_t(1))} \leq \text{constans}.$$

Wegen

$$\lambda_{1,t} = \frac{1}{\sqrt{\mu(\mathfrak{F})}} \int_G F_t(d(g, g_0))\, dg \leq (\mu(\mathfrak{F}))^{-1/2} \mu(B_{t+\delta(t)}(1)) \leq \text{constans. } \mu(B_t(1))$$

ist damit $|\tilde{f}_t(g)|$ gleichmäßig bezüglich t in $\mathfrak{F}$ abgeschätzt. Die Abschätzung für $|\tilde{g}_t(g)|$ ist ähnlich einfach. Insbesondere sind $\|\tilde{f}_t\|$ und $\|\tilde{g}_t\|$ gleichmäßig in t beschränkt, daher folgt aus Lemma 3 unmittelbar das

KOROLLAR. *Für alle* $\varphi \in L_2(\Gamma \backslash G/K)$ *gilt:*

$$\lim_{t\to\infty} (\tilde{f}_t, \varphi) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} (\tilde{g}_t, \varphi) = 0.$$

Darüber hinaus gilt sogar:

LEMMA 4. $\lim_{t\to\infty} \tilde{f}_t(g) = \lim_{t\to\infty} \tilde{g}_t(g) = 0$ für beliebiges $g \in G$.

Beweis. Wie oben gezeigt wurde, ist $\{\tilde{f}_t(g) \mid t \geq 0\}$ beschränkt, und damit hat jede Folge $\{\tilde{f}_{t_v}(g)\}$ mit $t_v \to \infty$ für $v \to \infty$ mindestens einen Häufungspunkt. Falls die Aussage "$\lim_{t\to\infty} \tilde{f}_t(g) = 0$" nicht richtig ist, gibt es daher eine Folge positiver reeller Zahlen t_v mit $\lim_{v\to\infty} t_v = \infty$ und

$$\lim_{v\to\infty} \tilde{f}_{t_v}(g) = \eta \quad \text{mit} \quad \eta > 0. \tag{14}$$

Wegen

$$1 \leq \frac{\int_G F_t(d(g, g_0))\, dg}{\mu(B_t(1))} \leqq \frac{\mu(B_{t+\delta(t)}(1))}{\mu(B_t(1))}$$

ist nach Lemma 1:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_G F_t(d(g, g_0))\, dg}{\mu(B_t(1))} = 1, \tag{15}$$

und daher folgt aus (14) und (13);

$$\lim_{v\to\infty} \frac{f_{t_v}(g)}{\mu(B_{t_v}(1))} = \eta + \frac{1}{\mu(\mathfrak{F})}. \tag{16}$$

Nun ist offenbar für $g, g' \in G$ nach Definition von $f_t(g)$:

$$f_t(g) \leq f_{t+\delta(t)+d(g',g)}(g').$$

Setzt man wie in Lemma 1 abkürzend $v(t) := \mu(B_t(1))$, so ist für $c > 0$ und alle $g' \in G$ mit $d(g', g) \leq c - \delta(t_v)$.

$$\frac{f_{t_v+c}(g')}{v(t_v+c)} \geq \frac{f_{t_v}(g)}{v(t_v)} \cdot \frac{v(t_v)}{v(t_v+c)}. \tag{17}$$

Nach Lemma 1 ist

$$\frac{v(t_v)}{v(t_v+c)} \geq \frac{v(1)}{v(t_v+c)} - \frac{v(c)+\psi(c)}{\alpha(c)v(t_v+c)} + \frac{1}{\alpha(c)}.$$

Man kann daher zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ positive t_ε und c_ε finden, so daß

$$1 \geq \frac{v(t_v)}{v(t_v+c)} \geq 1 - \varepsilon$$

für $0 \leq c \leq c_\varepsilon$ und $t \geq t_\varepsilon$ gilt.

Mit (17) besagt dies, daß zu gegebenem $\varepsilon > 0$ $\tilde{f}_{t_v+c}(g') \geq \eta - \varepsilon$ gilt für alle genügend großen v und alle g' aus einer nur von ε abhängigen offenen Umgebung U von g in G. Dabei kann man – bei geeigneter Wahl des Fundamentalbereichs $\mathfrak{F}$ – noch ohne Einschränkung den Abschluß $\bar{U}$ von U als kompakt und in $\pi^{-1}(\mathfrak{F})$ gelegen voraussetzen. Wählt man $0 < \varepsilon < \eta$, so folgt für die charakteristische Funktion $\chi_{U \cdot K}$ von $U \cdot K$

$$\int_{\pi^{-1}(\mathfrak{F})} \tilde{f}_{t_v+c}(g') \cdot \chi_{U \cdot K}(g')\, dg' \geq \mu(\pi(U)) \cdot (\eta - \varepsilon) > 0 \tag{18}$$

für alle $v \geq v_\varepsilon$. Andererseits muß nach dem Korollar zu Lemma 3 die linke Seite der Ungleichung (18) für wachsendes v gegen Null konvergieren. Damit kann (14) nicht mit $\eta > 0$ gelten, und das beweist $\lim_{t\to\infty} \tilde{f}_t(g) = 0$. Entsprechend beweist man $\lim_{t\to\infty} \tilde{g}_t(g) = 0$. ■

KOROLLAR.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f_t(g) - g_t(g)}{\mu(B_t(1))} = 0 \quad \text{für alle } g \in G.$$

Der Beweis ergibt sich aus dem Lemma 4 zusammen mit Gleichung (15) bzw. der (15) entsprechenden Gleichung für g_t anstelle von f_t. ■

Ist wie in der Einleitung $N_t(g, g_0)$ die Anzahl der $s \in \Gamma$ mit $d(sg, g_0) \leq t$, so gilt nach (9) und (10) offenbar

$$g_t(g) \leq N_t(g, g_0) \leq f_t(g),$$

so daß man insgesamt folgendes Resultat erhalten hat:

SATZ. *G sei eine zusammenhängende, halbeinfache, reelle Liegruppe mit endlichem Zentrum und mit einfacher Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. $\Gamma \leq G$ sei diskrete, kokompakte Untergruppe. Dann ist für beliebige $g, g_0 \in G$:*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{N_t(g, g_0)}{\mu(B_t(1))} = \frac{1}{\mu(\mathfrak{F})},$$

$\mathfrak{F} \subseteq G/K$ ein Fundamentalbereich modulo Γ.

Bemerkung 1. Der hier benutzte Ansatz liefert dann mehr, d.h. genauere Fehlerabschätzungen für die asymptotische Beziehung

$$\frac{N_t(g, g_0)}{\mu(B_t(1))} \sim \frac{1}{\mu(\mathfrak{F})}.$$

wenn man genauere Abschätzungen für die Matrixkoeffizienten irreduzibler unitärer Darstellungen von G kennt. Das ist zumindest für spezielle Beispiele wie etwa $SL_2(\mathbb{R})$ der Fall (vgl. [1] §10, 11 und [3] S. 115); allgemeine Ergebnisse scheinen aber zumindest nicht in veröffentlichter Form zu existieren (vgl. in [3] den Literaturhinweis [50]). Einen Schönheitsfehler haben allerdings auch die Abschätzungen des Restgliedes in [15], [5] und [18]: man kennt i.a. das Spektrum $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$ des Laplace-Operators nicht; man kann meines Wissens nur Abschätzungen für λ_1 angeben.

Bemerkung 2. Möglicherweise gilt die asymptotische Beziehung

$$\frac{N_t(g, g_0)}{\mu(B_t(1))} \sim \frac{1}{\mu(\mathfrak{F})}$$

auch für beliebiges diskretes Γ in G von endlichem Kovolumen in G. Für $G = SL_2(\mathbb{R})$ ist dies in [18] gezeigt worden. Allerdings benötigt man schon für die

Behandlung dieses speziellen Falles bei nicht kompaktem Quotienten $\Gamma\backslash X$ Eisensteinreihen, die dem kontinuierlichem Spektrum in $L_2(\Gamma\backslash G/K)$ entsprechen (vgl. [18]).

Bemerkung 3. Inwieweit die asymptotische Beziehung (1) auch für nicht einfaches $\mathfrak{g}$ gilt, bleibt zu untersuchen. Sind etwa G_i, Γ_i $(i=1,2)$ wie im Satz, so bleibt die Gleichung (1) selbstverständlich richtig für $G_1 \times G_2$ und $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, wenn man anstelle einer geodätischen Kugel in $G_1/K_1 \times G_2/K_2$ das Produkt von zwei geodätischen Kugeln in G_1/K_1 bzw. G_2/K_2 betrachtet. Aber das entspricht nicht der Aussage des Satzes. Immerhin – und das wurde unabhängig von mir auch vom Referenten bemerkt – kann man den Satz von Howe und Moore auch für Produkte von Liegruppen verwenden, sofern man sich auf *irreduzible* kokompakte Gitter Γ beschränkt, und das liefert die Aussage des Satzes auch für nichteinfaches $\mathfrak{g}$ unter der obigen Einschränkung an Γ. Letzteres spielt für die Behandlung des adelischen Falles eine Rolle (vgl. auch das Lemma 3 in [17], dessen Voraussetzungen sich allerdings noch abschwächen lassen) und wird an anderer Stelle genauer ausgeführt.

LITERATUR

[1] V. Bargmann, *Irreducible unitary representations of the Lorentz group.* Ann. of Math. *48* (1947), 568–640.

[2] A. Borel, *Density properties for certain subgroups of semi-simple groups without compact components.* Ann. of Math. *72* (1960), 179–188.

[3] A. Borel und N. Wallach, *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups.* Ann. of Mathematics Studies 94, Princeton 1980.

[4] J. Elstrodt, *Die Selbergsche Spurformel für kompakte Riemannsche Flächen.* Jber. d. Dt. Math.-Verein. *83* (1981), 45–77.

[5] F. Fricker, *Ein Gitterpunktproblem im dreidimensionalen hyperbolischen Raum.* Comment. Math. Helv. *43* (1968), 402–416.

[6] F. Fricker, *Eine Beziehung zwischen der hyperbolischen Geometrie und der Zahlentheorie.* Math. Ann. *191* (1971), 293–312.

[7] R. Gangolli, *Asymptotic behaviour of spectra of compact quotients of certain symmetric spaces.* Acta math. *121* (1968), 151–192.

[8] I. M. Gelfand, M. I. Graev und I. I. Pyatetskii-Shapiro, *Representation theory and automorphic functions.* W. B. Saunders Co., Philadelphia 1969.

[9] M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps.* Publ. Math. IHES *53* (1981), 53–73.

[10] P. Günther, *Problème de reseaux dans les espaces hyperboliques.* C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A *288* (1979), 49–52.

[11] K. Győry und A. Pethö, *Über die Verteilung der Lösungen von Normformen Gleichungen III.* Acta Arith. *37* (1980), 143–165.

[12] S. Helgason, *Differential operators on homogeneous spaces,* Acta Math. *102* (1959), 239–299.

[13] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces.* Academic Press, New York 1962.

[14] R. HOWE und C. C. MOORE, *Asymptotic properties of unitary representations*. J. Functional Analysis *32* (1979), 72–96.
[15] H. HUBER, *Über eine neue Klasse automorpher Funktionen und ein Gitterpunktproblem in der hyperbolischen Ebene*. Comment. Math. Helv. *30* (1956), 20–62.
[16] G. A. MARGULIS, *Applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature*, Functional Analysis and its Applications *3* (1969), 335–336.
[17] A. MURASE, *On the uniform distribution property of certain linear algebraic groups*. Pac. J. Math. *88* (1980), 163–187.
[18] S. J. PATTERSON, *A lattice-point problem in hyperbolic space*. Mathematika London *22* (1975), 81–88; Corrigendum ibid. *23* (1976), 227.
[19] J. TITS, *Algebraic and abstract simple groups*. Ann. of Math. *80* (1964), 313–329.
[20] A. WEIL, *On discrete subgroups of Lie groups*. Ann. of Math. *72* (1960), 369–384.

Mathematisches Institut der Universität
Bunsenstr. 3/5
D-3400 Göttingen

Eingegangen den 5. Oktober 1981/29. März 1982

Comment. Math. Helvetici 57 (1982) 173–174 0010–2571/82/001173–02$01.50+0.20/0
© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

Buchanzeigen

E. B. CHRISTOFFEL, **The Influence of His Work on Mathematics and the Physical Sciences,** Edited by P. L. Butzer and F. Fehér. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston and Stuttgart 1981. 762 S. Fr. 92.-.

Preface – I. Christoffel and His Time – II. Gauss-Christoffel Quadrature Formulae – III. Orthogonal Polynomials, Continued Fractions and Padé Approximation – IV. Christoffel–Schwarz Transformation and Conformal Representation – V. Theta Functions, Automorphic Functions and Riemann Surfaces – VI. Differential Equations, Potential Theory – VII. Shock Waves, Continuum Mechanics – VIII. Riemannian Geometry, Submanifolds – IX. Invariant Theory, Differential Operators and Field Physics – X. Affine and Projective Structure, Nonlinear Differential Geometry – XI. *G*-Spaces, Convex Bodies and Foundations – XII. Dispersion of Light, Dynamical Systems – XIII. Short Communications. Index

P. J. GIBLIN, **Graphs, Surfaces and Homology, an Introduction to Algebraic Topology.** Second edition. London and New York – Chapman and Hall, 1981, 330 p. £6.95.

Introduction – 1. Graphs – 2. Closed surfaces – 3. Simplicial complexes – 4. Homology groups – 5. The question of invariance – 6. Some general theorems – 7. Two more general theorems – 8. Homology modulo 2 – 9. Graphs in surfaces – Appendix, References, Index

DANIEL H. GREENE and DONALD E. KNUTH, **Mathematics for the Analysis of Algorithms.** Progress in Computer Science Vol. 1. Birkhäuser Boston – Basel – Stuttgart 1981, 108 S.

1. Binomial Identities – 2. Recurrence Relations – 3. Operator Methods – 4. Asymptotic Analysis – 5. Bibliography – 6. Appendices – 7. Index.

PHILLIP A. GRIFFITHS and JOHN W. MORGAN, **Rational Homotopy Theory and Differential Forms.** Progress in Mathematics Vol. 16. Birkhäuser Boston - Basel – Stuttgart 1981, 242 S.

0. Introduction – 1. Basic Concepts – 2. The CW Homology Theorem – 3. The Whitehead and Hurewicz Theorems – 4. The Serre Spectral sequence – 5. Obstruction Theory – 6. Cohomology, Eilenberg-MacLane Spaces, and Principal Fibrations – 7. Postnikov Towers and Rational Homotopy Theory – 8. de Rham's Theorem for Simplicial Complexes – 9. Differential Graded Algebras – 10. Homotopy Theory of D.G.A.'s – 11. The Connection Between the Homotopy Theory of D.G.A.'s and Rational Homotopy Theory – 12. The Fundamental Group – 13. Examples – 14. Functorality. Appendices, Exercises.

H. S. M. COXETER, **Unvergängliche Geometrie.** Ins Deutsche übersetzt von J. J. Burckhardt. Zweite, erweiterte und überarbeitete Auflage. Wissenschaft und Kultur Band 17. Birkhäuser Verlag, Basel – Boston – Stuttgart 1981, 558 S.

I. Ebene Geometrie – II. Koordinatengeometrie – III. Projektive Geometrie – IV. Differentialgeometrie.

PAUL ALEXANDROFF, **Elementary Concepts of Topology.** With a preface by David Hilbert, translated by Alan E. Farley. Dover Publications, Inc. New York 1982, 58 pp. $1.75.

Introduction – I. Polyhedra, Manifolds, Topological Spaces – II. Algebraic Complexes – III. Simplicial Mappings and Invariance Theorems. Index.

A. I. KHINCHIN, **Mathematical Foundations of Information Theory.** Translated by R. A. Silverman and M. D. Friedman. Dover Publications, Inc., New York 1982, 120 p. $2.50.

The Entropy Concept in Probability Theory – On the Fundamental Theorems of Information Theory.

N. N. LEBEDEV, I. P. SKALSKAYA and Y. S. UFLYAND, **Worked Problems in Applied Mathematics.** Translated and Edited by R. A. Silverman, with a Supplement by E. L. Reiss. Dover Publications, Inc., New York 1982, 430 p. $6.00.

1. Derivation of equations and formulation of problems – 2. Some special methods for solving hyperbolic and elliptic equations – 3. Steady-state harmonic oscillations – 4. The Fourier method – 5. The eigenfunctions method for solving inhomogeneous problems – 6. Integral transforms – 7. Curvilinear coordinates – 8. Integral equations. Mathematical Appendix – Variational and related methods. Bibliography, Index.

Handbook of Mathematical Functions, with formulas, graphs, and mathematical tables, Edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. Dover Publications, Inc., New York 1982, 1046 p. $14.95.

DAVID A. VOGAN, Jr. **Representations of Real Reductive Lie Groups Progress in Mathematics. Vol. 15.** Birkhäuser Boston–Basel–Stuttgart 1981. 758 p. Fr. 78.–

0. Preliminaries – 1. $SL(2, R)$ – 2. Geometry of the Kazhdan-Lusztig Conjecture – 3. Konstant's Borel–Weil Theorem – 4. Principal Series Representations and Quasisplit Groups – 5. Cohomology of $(\mathfrak{G}, K)$ Modules – 6. Zuckerman's Construction and the Classification of Irreducible $(\mathfrak{G}, K)$ Modules – 7. Coherent Continuation of Characters – 8. Reducibility of the Standard Representations – 9. The Kazhdan–Lusztig Conjecture. Index

Functional Analysis and Approximation. Proceedings of the Conference held at the Mathematical Research Institute at Oberwolfach, Black Forest, August 9–16, 1980. ISNM 60. Birkhäuser Verlag Basel–Boston–Stuttgart 1981, 482 p. Fr. 94.– Edited by P. L. Butzer, B. Sz.–Nagy, E. Görlich

I. Operator Theory – II. Functional Analysis – III. Abstract Harmonic Analysis – IV. Fourier Analysis and Integral Transforms – V. Best Approximations – VI. Approximations by Linear Operators – VII. Strong and Müntz Approximations – VIII. Number Theory and Probability – IX. Splines and Numerical Integration

HERBERT MEHRTENS, HENK BOS, IVO SCHNEIDER editors: **Social History of Nineteenth Century Mathematics.** 302 p. Birkhäuser Boston–Basel–Stuttgart Fr. 44.–

I. Aspects of a Fundamental Change – The Early Nineteenth Century – II. The Professionalization of Mathematics and Its Educational Context – III. Individual Achievements in Social Context – Appendix

GEORGES DE RHAM, **Oeuvres Mathématiques.** L'Enseignement Mathématique, Université de Genève 1981, 750 p.

Avant-propos – Portrait de Georges de Rham – Curriculum vitae de Georges de Rham – Liste des publications scientifiques de Georges de Rham – Première partie: Topologie et Analyse – Seconde partie: Courbes et fonctions définies par des équations fonctionelles.

B. D. CRAVEN, **Functions of several variables.** Chapman and Hall, London and New York 1981, 138 p. £4.95.

Preface – 1. Differentiable functions – 2. Chain rule and inverse function theorem – 3. Maxima and Minima – 4. Integrating functions of several variables – Appendices, Index.