

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 57 (1982)

Artikel: Formes différentielles fermées non singulières sur le n -tore.
Autor: Sikorav, Jean-Claude
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-43875>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Formes différentielles fermées non singulières sur le n -tore

JEAN-CLAUDE SIKORAV

Introduction

On désigne par Ω_n l'ensemble des 1-formes fermées non singulières sur le n -tore T^n ; on le munit de la topologie C^∞ (en fait C^k , $0 \leq k \leq \infty$, donnerait les mêmes résultats). Dans Ω_n opère naturellement par conjugaison le groupe $\text{Diff } T^n$ (resp. la composante connexe de l'élément neutre dans $\text{Diff } T^n$); deux formes équivalentes pour cette relation sont dites *conjuguées* (resp. *isotopes*).

On dit qu'une forme $\omega \in \Omega_n$ est *linéarisable* (resp. *linéarisable par isotopie*), si ω est conjugué (resp. isotope) à une forme linéaire $\sum a_i dx_i$ (puisque ω est non singulière, nécessairement $(a_i) \in \mathbf{R}^n - \{0\}$); on note Ω_n^l (resp. Ω_n^{li}) le sous-espace de Ω_n correspondant.

On note \approx la relation d'isotopie, $[\omega]$ la classe d'isotopie de $\omega \in \Omega_n$, et $\Omega_{n/\approx}$ l'espace topologique quotient: c'est cet espace que nous allons étudier.

Par un lemme de Moser (cf. [Mo], [LB] appendice 1), $\omega_0 \approx \omega_1$ équivaut à l'existence d'un chemin de formes de Ω_n cohomologues joignant ω_0 à ω_1 . L'application naturelle de Ω_n sur $H^1(T^n, \mathbf{R}) - \{0\} \approx \mathbf{R}^n - \{0\}$ définit par passage au quotient une application notée cl de $\Omega_{n/\approx}$ sur $\mathbf{R}^n - \{0\}$; en utilisant le lemme de Moser, le fait que la relation \approx est ouverte et l'existence de sections locales, on voit que c'est un homéomorphisme local.

Notons une autre conséquence du lemme de Moser: si $\omega_1 = f^* \omega_0$, avec $f \in \text{Diff } T^n$ homotope à l'identité, et si ω'_0 et ω'_1 sont cohomologues et assez proches respectivement de ω_0 et de ω_1 , alors $\omega'_1 \approx f^* \omega'_0$. On en déduit que Ω_n^{li} et Ω_n^l sont ouverts dans Ω_n (pour Ω_n^l , on remarque que toute forme linéarisable l'est par un difféomorphisme homotope à l'identité: si $\omega = f^*(\sum_1^n a_i dx_i)$ et si $v \in \text{Gl}_n \mathbf{Z} \subset \text{Diff } T^n$, v homotope à f , alors $\omega = (v^{-1}f)^*(v^*(\sum_1^n a_i dx_i))$).

D'autre part, si une forme ω de Ω_n a une classe de cohomologie rationnelle, il existe une submersion $p: T^n \rightarrow S^1$, $p(0, \dots, 0) = 0$, à fibre connexe, et un rationnel $\lambda > 0$ uniques telles que $\omega = \lambda p^* d\theta$, où $d\theta$ est la forme de Lebesgue de cercle (cf. [T], [L₁]); deux formes $\omega_0 = p_0^* d\theta$ et $\omega_1 = p_1^* d\theta$ sont cohomologues si et seulement si p_0 et p_1 sont homotopes et leur conjugaison (resp. leur isotopie) équivaut à celle de p_0 et de p_1 . Cette remarque permet à F. Laudenbach d'étudier dans [L₁] la fibre de cl au-dessus d'un point rationnel, sous l'hypothèse

supplémentaire $n \geq 6$; en particulier, une telle fibre contient une infinité de classes d'isotopie non conjuguées.

Par contraste, pour $n \leq 3$, l'application cl est un homéomorphisme (cf. [RR]).

A partir de maintenant on supposera n assez grand ($n \geq 6$ ou 7). F. Laudendbach m'a proposé le problème de l'existence d'une forme irrationnelle non linéarisable. Pour l'aborder il m'a conseillé d'étudier l'invariant d'isotopie des formes rationnelles (cf. [L₁]); cet invariant se compose de deux parties, et il pensait que la seconde (pseudo-isotopie de la fibre) n'était pas stable par approximation: c'est effectivement le cas et l'on peut en déduire le résultat suivant (cf. IV.1).

THEOREME 1. *Pour $n \geq 6$, il existe des formes non linéarisables qui sont limites de formes linéarisables par isotopie; donc $\Omega_{n \approx}$ n'est pas séparée.*

Ceci est un résultat "négatif," mais il reste la première partie de l'invariant (pseudo-isotopie de l'espace total); en utilisant une construction de Farrell que m'a indiquée Laudendbach, j'ai pu en compléter la description (propositions I.9 et I.10) et en déduire l'existence de formes irrationnelles linéarisables mais pas par isotopie. Plus généralement on a le théorème suivant (cf. II.5).

THEOREME 2. *Munissant $\pi_0(\text{Diff}_{PI} T^n)$ de la topologie discrète, l'application de $\pi_0(\text{Diff}_{PI} T^n) \times (\mathbf{R}^n - \{0\})$ dans $\Omega_{n \approx}^1$ définie par $([f], (a_i)) \rightarrow f^*(\sum_1^n a_i dx_i)$ est un homéomorphisme pour $n \geq 7$.*

Remarque. D'après [HsS] et [Ha], $\pi_0(\text{Diff}_{PI} T^n)$ est une somme dénombrable de groupes cycliques d'ordre 2.

Enfin j'ai pu prouver les résultats suivants:

THEOREME 3 (cf. IV.1). *Les formes linéarisables sont denses dans Ω_n .*

THEOREME 4 (cf. IV.3). *L'espace Ω_n est connexe par arcs.*

Remarque. Le théorème 4 détruit l'espoir qu'il existe un invariant d'isotopie stable par approximation (cf. [L₂], p. 447).

THEOREME 5 (cf. IV.2). *Toute classe de cohomologie ayant un groupe de périodes de rang $\leq n - 1$ contient une forme non linéarisable.*

THEOREME 6 (cf. IV.4). *L'ensemble des classes de cohomologie contenant*

une forme non linéarisable est une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide dans $\mathbf{R}^n - \{0\}$.

Le plan de ce travail est le suivant.

Dans le chapitre I, on précise certains détails de la classification isotopique des submersions sur le cercle et l'on énonce une proposition (I.9) qui la complète dans le cas du tore T^n . La démonstration de cette proposition a été placée à la fin de ce travail dont elle constitue les chapitres V et VI.

Dans le chapitre II, on utilise ces résultats et la détermination de $\pi_0(\text{Diff } T^n)$ faite par [HsS] et [Ha] pour prouver le théorème 2.

Dans le chapitre III, on démontre une proposition (III.4) décrivant un voisinage dans $\Omega_{n/\approx}$ d'une forme rationnelle: pour cela, on utilise tous les résultats précédents.

Enfin dans le chapitre IV on démontre les théorèmes 1, 3, 4, 5 et 6 comme conséquences de cette proposition III.4.

Outre F. Laudenbach, qui m'a proposé le sujet et fourni les méthodes pour l'aborder, je tiens à remercier J. Barge et P. Vogel, dont les suggestions m'ont mis sur la voie des théorèmes 3 et 4, et aussi le rapporteur de cet article, pour les améliorations qu'il y a apportées.

Préliminaires

Par "variété" on entendra une variété différentielle de classe C^∞ , compacte sauf mention contraire.

Si M est une variété, une *pseudo-isotopie* de $(M, \partial M)$ est un difféomorphisme de $M \times I$ rel $M \times \{0\}$ dont la restriction à $\partial M \times I$ est une isotopie. Les pseudo-isotopies de $(M, \partial M)$ forment un groupe que l'on note $\mathcal{P}(M, \partial M)$ et que l'on munit de la topologie C^∞ ; on note $P(M, \partial M)$ le groupe de ses composantes connexes, ou classes d'isotopie, et $[\Phi]$ la classe d'isotopie d'une pseudo-isotopie Φ .

On note μ_M (ou μ_n si $M = T^n$, ou μ s'il n'y a pas de risque de confusion) l'automorphisme "miroir" de $\mathcal{P}(M, \partial M)$ (cf. [L₁]), on notera de même l'automorphisme induit de $P(M, \partial M)$.

On note $\text{Diff}(M, \partial M)$ (resp. $\text{Diff}_H(M, \partial M)$, $\text{Diff}_{PI}(M, \partial M)$) le groupe des difféomorphismes de M dont la restriction au bord est isotope à l'identité (resp. le sous-groupe de ceux qui sont homotopes ou pseudo-isotopes à l'identité), et ρ_M (ou ρ_n , ρ) la surjection canonique de $\mathcal{P}(M, \partial M)$ sur $\text{Diff}_{PI}(M, \partial M)$; on notera de même ρ_M la surjection induite de $P(M, \partial M)$ sur $\pi_0(\text{Diff}_{PI}(M, \partial M))$. Il est clair que l'on a toujours $\text{im}(\text{id} + \mu_M) \subset \ker \rho_M$.

I. Pseudo-isotopies de Wall

Dans ce chapitre, on considère une variété E munie d'une submersion p_0 sur S^1 , de fibre-base F_0 connexe. Pour simplifier, on supposera que le bord de E est vide, mais les résultats se généralisent facilement au cas où il ne l'est pas: on doit alors supposer que $p_0|_{\partial E}$ est la projection d'une structure produit.

I.1. Définitions

a) Un anneau (issu de F_0) est une sous-variété W de $E \times I$, image de $F_0 \times I$ par un plongement propre i tel que $i|_{F_0 \times \{0\}} = \text{id}$ et $i(F_0 \times \{1\}) \subset E \times \{1\}$ (rappelons que la propriété de i signifie $i^{-1}(E \times \partial I) = F_0 \times \partial I$ et i transverse au bord). On notera $\partial_+ W$ la projection sur E du bord supérieur $W \cap (E \times \{1\})$.

b) Un anneau W (issu de F_0) est dit "de Wall au sens strict" si la restriction à W de la projection $q: E \times I \rightarrow E$ est une immersion de W dans E qui envoie du côté positif de F_0 un voisinage de $F_0 \times \{0\}$.

Plus généralement, un anneau est dit de Wall s'il est isotope à un anneau de Wall au sens strict.

c) Une pseudo-isotopie Φ de E est dite de Wall (resp. au sens strict) pour F_0 si $\Phi(F_0 \times I)$ est un anneau de Wall (resp. au sens strict). Nous noterons $\text{Wa}(F_0)$ l'ensemble des classes dans $P(E)$ des pseudo-isotopies de Wall pour F_0 ; remarquons que $\text{Wa}(F_0)$ dépend de l'orientation transversale de F_0 .

I.2. Premières propriétés

(1) L'anneau "vertical" $F_0 \times I$ est de Wall; donc $\text{Wa}(F_0)$ contient l'image de la suspension $\Sigma: P(F_0) \rightarrow P(E)$ définie à l'aide d'un voisinage tubulaire de F_0 dans E (cf. [L₁], p. 422).

(2) Si f est un élément de $\text{Diff}_H E$ et en particulier si f est dans $\text{Diff}_{PI} E$, alors $\text{Wa}(f(F_0)) = \text{Wa}(F_0)$: cela vient de ce que la conjugaison par f induit l'identité de $P(E)$.

I.3. La proposition suivante montre que les notions ainsi définies sont substantiellement équivalentes à celles de [L₁] (cf. remarque p. 419).

PROPOSITION. *Si W et W' sont deux anneaux de Wall issus de F_0 tels que $\partial_+ W$ et $\partial_+ W'$ sont isotopes, alors W et W' sont isotopes parmi les anneaux issus de F_0 .*

Avant de démontrer cette proposition, nous aurons besoin de quelques notations.

a) $\pi: \tilde{E} \rightarrow E$ le revêtement infini cyclique induit par p_0 ; on identifiera \tilde{E} à $F_0 \times \mathbf{R}$ en sorte que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} = F_0 \times \mathbf{R} & \xrightarrow{\pi} & E \\ \downarrow \tilde{p}_0 = p r_2 & & \downarrow p_0 \\ \mathbf{R} & \longrightarrow & S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}. \end{array}$$

b) $\tilde{F}_0 = F_0 \times \{0\}$ le relèvement privilégié de F_0 dans \tilde{E} ;

c) $\tau: \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}$ le générateur canonique du groupe des transformations du revêtement;

d) \tilde{q} la projection de $\tilde{E} \times I$ sur \tilde{E} ;

e) Si W est un anneau issu de F_0 , il se relève isomorphiquement dans $\tilde{E} \times I$ en $\tilde{W} \supset \tilde{F}_0 \times \{0\}$; nous noterons $\partial_+ \tilde{W} \times \{1\} = \tilde{W} \cap (\tilde{E} \times \{1\})$.

La proposition est une conséquence immédiate des lemmes I.5 et I.6 ci-dessous. Le corollaire du lemme I.4 sert à prouver I.5.

I.4. LEMME. *Soit W un anneau de Wall au sens strict issu de F_0 . Alors \tilde{F}_0 et $\partial_+ \tilde{W}$ sont disjoints et la restriction de \tilde{q} à \tilde{W} est un plongement dont l'image est la partie de \tilde{E} comprise entre \tilde{F}_0 et $\partial_+ \tilde{W}$.*

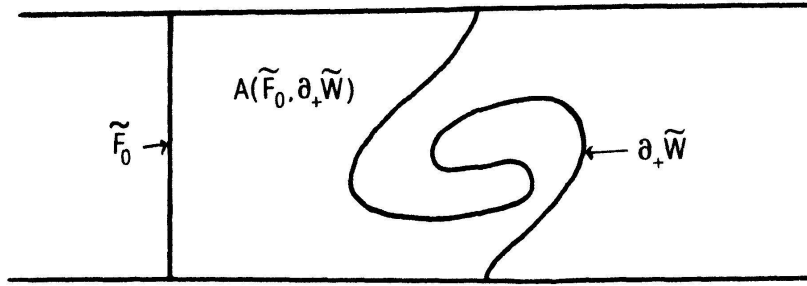
Démonstration. On voit facilement que $\tilde{E} \times I - \tilde{W}$ a deux composantes connexes et qu'il en est de même pour $\tilde{E} - \partial_+ \tilde{W}$ (ceci est vrai pour tout anneau). Soit D la composante de $\tilde{E} - \partial_+ \tilde{W}$ qui ne contient pas le germe de $\tilde{q} | \tilde{W}$ le long de $\partial_+ \tilde{W}$ et soit X l'espace topologique:

$$X = F_0 \times]-\infty, 0[\cup_{\tilde{F}_0} \tilde{W} \cup_{\partial_+ \tilde{W}} \tilde{D}.$$

C'est une variété topologique de même dimension que E ; l'immersion $\tilde{q} | \tilde{W}$, qui induit l'identité de \tilde{F}_0 et de $\partial_+ \tilde{W}$, se prolonge par l'identité de $F_0 \times]-\infty, 0[$ et de D en une immersion α de X dans E . Cette immersion est propre (l'image réciproque d'un compact est compacte), donc c'est un revêtement; de plus, l'application induite entre les groupes fondamentaux est surjective, donc α est un homéomorphisme, ce qui prouve que:

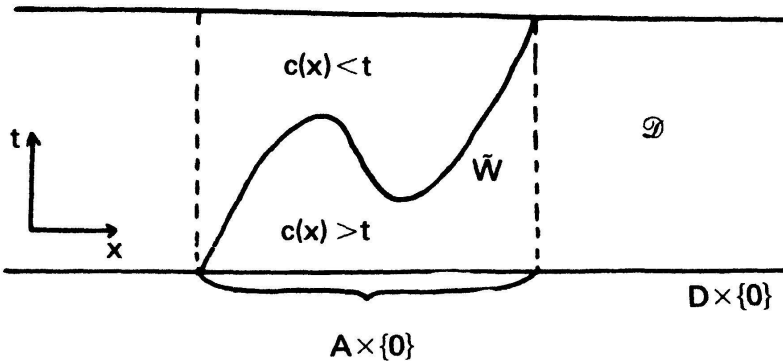
a) $\alpha | \tilde{W} = \tilde{q} | \tilde{W}$ est un plongement, donc \tilde{F}_0 et $\partial_+ \tilde{W}$ sont disjoints;

b) \tilde{E} admet une partition $\tilde{E} = F_0 \times]-\infty, 0[\cup \tilde{q}(\tilde{W}) \cup D$: donc $\tilde{q}(\tilde{W}) = A(\tilde{F}_0, \partial_+ \tilde{W})$, partie de \tilde{E} comprise entre \tilde{F}_0 et $\partial_+ \tilde{W}$. \square



Donc \tilde{W} est le graphe d'une fonction $c : A(\tilde{F}_0, \partial_+ \tilde{W}) \rightarrow I$ vérifiant $c^{-1}(0) = \tilde{F}_0$, $c^{-1}(1) = \partial_+ \tilde{W}$ (et transverse au bord); il est alors clair que la composante "droite" de $E \times I - \tilde{W}$ (celle qui contient $(\tau \times \text{id})(\tilde{W})$) est:

$$\mathcal{D} = \{(x, t) \in \tilde{E} \times I \mid x \in D \text{ ou } x \in A(\tilde{F}_0, \partial_+ \tilde{W}), t < c(x)\}.$$



COROLLAIRE. Si $x \in A(\tilde{F}_0, \partial_+ \tilde{W})$, $\tau^k x \in A(\tilde{F}_0, \partial_+ \tilde{W})$ avec $k \in \mathbf{N}^*$, alors $c(\tau^k x) > c(x)$. [En effet, on a $(\tau^k x, c(x)) \in (\tau^k \times \text{id})(\tilde{W}) \subset \mathcal{D}$.]

I.5. LEMME. Si W et W' sont deux anneaux de Wall au sens strict issus de F_0 , tels que $\partial_+ \tilde{W} = \partial_+ \tilde{W}'$, alors W et W' sont isotopes rel le bord.

Démonstration. \tilde{W} et \tilde{W}' sont les graphes de deux fonctions c et c' de $A(\tilde{F}_0, \partial_+ \tilde{W})$ dans I ; d'après le corollaire ci-dessus, le graphe $\tilde{W}(\lambda)$ de $(1-\lambda)c + \lambda c'$ est, pour $0 \leq \lambda \leq 1$, projeté injectivement par $\pi \times \text{id}$. Le projeté $W(\lambda) = (\pi \times \text{id})(\tilde{W}(\lambda))$ donne l'isotopie cherchée. \square

I.6. LEMME. Si W et W' sont deux anneaux de Wall au sens strict issus de F_0 tels que $\partial_+ W$ et $\partial_+ W'$ sont isotopes, il existe une isotopie $W(\lambda)$ d'anneaux de Wall au sens strict issus de F_0 , telle que $\partial_+ \tilde{W}(0) = \partial_+ \tilde{W}$ et $\partial_+ \tilde{W}(1) = \partial_+ \tilde{W}'$.

Démonstration. a) Il existe une pseudo-isotopie Φ telle que $\Phi(F_0 \times I) = W$ (cf. [L₁], p. 419). Posons $p_1 = p_0 \circ \Phi_1^{-1}$, $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_0 \circ \tilde{\Phi}_1^{-1}$ et soit $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f \circ \pi = \tilde{p}_1 - \tilde{p}_0$.

b) Construction de Tischler (cf. [LB], p. 175): définissons $P = p_0 + tf : E \times I \rightarrow S^1$ (t coordonnée sur I) et $W(0) = P^{-1}(0)$, que l'on relève en $\tilde{W}(0)$.

Le fait que $f < 0$ sur $W(0)$ entraîne que:

i) P est transverse à 0 sur $W(0)$.

ii) $\widetilde{W}(0)$ est un graphe au-dessus de $q(\widetilde{W}(0)) = A(\widetilde{F}_0, \partial_+ \widetilde{W}) = q(\widetilde{W})$. Donc $W(0)$ est un anneau de Wall au sens strict, et son bord coïncide avec celui de W .

Par hypothèse, il existe une isotopie $p^\lambda : E \rightarrow S^1$ telle que $p^0 = p_1$, $(p_1)^{-1}(0) = \partial_+ W'$; en la modifiant convenablement on peut supposer que le relèvement $\tilde{p}^\lambda : \tilde{E} \rightarrow \mathbf{R}$ issu de \tilde{p}_1 a les propriétés suivantes:

- . $\tilde{p}_1 = \tilde{p}'_1$.
- . $(\tilde{p}^\lambda)^{-1}(0) \subset F_0 \times]0, +\infty[$ pour tout λ .

On peut alors faire la construction de b) pour tout λ :

- . On définit f^λ telle que $f^\lambda \circ \pi = \tilde{p}^\lambda - \tilde{p}_0$, et l'on pose $P^\lambda = p_0 + tf^\lambda$;
- . On pose $W(\lambda) = (P^\lambda)^{-1}(0)$, que l'on relève en $\widetilde{W}(\lambda)$.

Le fait que $f^\lambda < 0$ sur $W(\lambda)$ entraîne que $\widetilde{W}(\lambda)$ est un graphe et que P^λ est transverse à 0 sur $W(\lambda)$; comme de plus $W(0)$ est un anneau, $(W(\lambda))$ est une isotopie d'anneaux de Wall au sens strict (issus de F_0). Comme $\partial_+ W(1) = (p^1)^{-1}(0) = \partial_+ W'$, ceci achève la preuve du lemme. \square

I.7. COROLLAIRE. Si Φ et Ψ sont deux pseudo-isotopies de Wall pour F_0 telles que $\Phi_1(F_0)$ est isotope à $\Psi_1(F_0)$, alors leurs classes $[\Phi]$ et $[\Psi]$ sont congrues modulo l'image de $\Sigma : P(F_0) \rightarrow P(E)$.

Démonstration. D'après la proposition I.3, on a $\Phi(F_0 \times I) \approx \Psi(F_0 \times I)$, et d'après [L₁], p. 421–22, les pseudo-isotopies de E laissant $F_0 \times I$ invariant à isotopie près sont celles dont la classe est dans $\text{im } \Sigma$. \square

I.8. PROPOSITION. $\text{Wa}(F_0)$ est stable pour la loi de groupe de $P(E)$.

Démonstration. Soient $[\Phi]$ et $[\Psi]$ deux éléments de $\text{Wa}(F_0)$; notons $F_1 = \Phi_1(F_0)$. Puisque $\text{Wa}(F_1) = \text{Wa}(F_0)$ (cf. I.2), on peut supposer Φ strictement de Wall pour F_0 et Ψ strictement de Wall pour F_1 ; alors, $q \circ \Phi$ envoie du côté négatif de F_1 un voisinage de $F_0 \times \{1\}$ dans $F_0 \times I$ (cf. I.4, lemme 1), et $q \circ \Psi \circ (\Phi_1 \times \text{id})$ envoie du côté positif de F_1 un voisinage de $F_0 \times \{0\}$ dans $F_0 \times I$. On peut donc, en gardant les propriétés de Φ et de Ψ , modifier Φ près de $E_0 \times \{1\}$ et Ψ près de $E \times \{0\}$ pour que la pseudo-isotopie topologique H , définie par:

$$\begin{cases} H(x, t) = \Phi(x, 2t), & \text{pour } t \leq \frac{1}{2} \\ H(x, t) = \Psi(\Phi_1(x), 2t - 1), & \text{pour } t > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

soit un difféomorphisme; alors H est isotope à $\Psi \circ \Phi$ et est strictement de Wall pour F_0 .

I.9. Cas où $E = D^{n-1} \times S^1$: Proposition fondamentale

Rappelons que d'après [HaW] le groupe de pseudo-isotopie $P(D^{n-1} \times S^1, \partial)$ est, pour $n \geq 6$, canoniquement isomorphe au groupe $\mathbf{Z}_2^0[T, T^{-1}]$ des polynômes de Laurent à coefficients dans \mathbf{Z}_2 sans terme constant. Le principal résultat sur les pseudo-isotopies de Wall est alors le suivant.

PROPOSITION. *Pour $n \geq 7$, il existe une pseudo-isotopie de $(D^{n-1} \times S^1, \partial)$ qui est de Wall pour $D^{n-1} \times \{0\}$ (avec l'orientation transverse naturelle) et dont l'invariant est T .*

La démonstration de cette proposition fait l'objet des chapitres V et VI; elle repose sur un lemme facile concernant les cobordismes élémentaires de paires (V.6) et sur la comparaison de deux chemins élémentaires d'élimination pour une paire de points critiques d'une fonction de Morse.

I.10. Cas où $E = T^n$: Détermination des pseudo-isotopies de Wall

D'après [HaW] on a, pour $n \geq 6$, un isomorphisme canonique:

$$P(T^n) \approx \mathbf{Z}_2^0[T_1, T_1^{-1}, \dots, T_n, T_n^{-1}].$$

Si p_0 est une submersion de T^n sur S^1 homotope à la coordonnée x_n , on a des isomorphismes canoniques:

$$P(F_0) \approx P(T^{n-1} \times \{0\}) \approx \mathbf{Z}_2^0[T_1, \dots, T_{n-1}^{-1}],$$

la suspension $\Sigma: P(F_0) \rightarrow P(T^n)$ correspondant à l'inclusion. L'application miroir $\mu_n: P(T^n) \rightarrow P(T^n)$ (resp. $\mu_{n-1}: P(F_0) \rightarrow P(F_0)$) est le morphisme d'anneaux induit par $T_i \mapsto T_i^{-1}$, $1 \leq i \leq n$ (resp. $1 \leq i \leq n-1$).

On a alors le résultat suivant.

PROPOSITION. *Pour $n \geq 7$, $\text{Wa}(F_0)$ est le sous-groupe de $\mathbf{Z}_2^0[T_1, \dots, T_n^{-1}]$ engendré par les monômes $T_1^{k_1} \cdots T_n^{k_n}$, avec $k_n \geq 0$.*

Démonstration. D'après [L₁] p. 419, il existe une pseudo-isotopie Φ de T^n telle que: $F_0 = \Phi_1(T^{n-1} \times \{0\})$, donc (cf. I.2), $\text{Wa}(F_0) = \text{Wa}(T^{n-1} \times \{0\})$.

a) Considérons un monôme $T_1^{k_1} \cdots T_n^{k_n}$, $k_n > 0$; soit i un plongement de $D^{n-1} \times S^1$ dans T^n tel que $x_n \circ i = k_n p r_2$ et qui envoie le générateur canonique de $\pi_1(D^{n-1} \times S^1)$ sur $T_1^{k_1} \cdots T_n^{k_n} \in \pi_1(T^n)$.

Prenons une pseudo-isotopie Φ de $(D^{n-1} \times S^1, \partial)$ ayant les propriétés de I.9, transportons-la sur $i(D^{n-1} \times S^1)$ et étendons-la par une isotopie de $T^n -$

$i(D^{n-1} \times S^1)$: on obtient une pseudo-isotopie de T^n qui est de Wall pour $T^{n-1} \times \{0\}$ (la condition d'immersion positive est préservée car $k_n > 0$) et qui a pour invariant $T_1^{k_1} \cdots T_n^{k_n}$.

Comme $Wa(T^{n-1} \times \{0\})$ est stable pour l'addition et contient $\Sigma(P(T^{n-1})) = \mathbf{Z}_2^0[T_1, \dots, T_{n-1}]$, il contient le sous-groupe de l'énoncé.

b) Réciproquement, soit $P \in Wa(F_0)$; écrivons-le $P = Q + R$, où Q (resp. R) ne contient T_n qu'avec des exposants ≥ 0 (resp. < 0). D'après le a), $P' = Q + \mu_n R$ est aussi dans $Wa(F_0)$; de plus P et P' ont même image dans $\pi_0(\text{Diff}_{PI} T^n)$, donc I.7 entraîne $P' - P \in \text{im } \Sigma$. Comme $P' - P = R + \mu_n R$, cela signifie que T_n n'apparaît pas dans R . \square

I.11. *Remarque.* Le résultat de I.10 complète la classification isotopique des submersions de T^n sur S^1 . En effet, à une paire de submersions homotopes p_0, p_1 , $[L_1]$ associe un élément de $Wa(F_0) \times P(F_0)$, défini modulo l'image de $(-\Sigma, \text{id} + \mu) : P(F_0) \rightarrow Wa(F_0) \times P(F_0)$, qui classe à isotopie près les submersions homotopes à p_0 . Cet invariant sera appelé *invariant d'isotopie de p_1 par rapport à p_0* .

I.12. *Remarque.* On déduit immédiatement de I.10 que $Wa(F_0) + \text{im}(\text{id} + \mu_n) = P(T^n)$, quelle que soit la submersion p_0 de T^n sur S^1 .

II. Formes linéarisables: classification isotopique en grande dimension

II.1.* PROPOSITION. Soit Φ une pseudo-isotopie de T^n , $n \geq 7$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- a) la classe de Φ est dans $\text{im}(\text{id} + \mu_n) \subset P(T^n)$;
- b) Φ_1 est isotope à l'identité, autrement dit $[\Phi] \in \ker(\rho_n : P(T^n) \rightarrow \pi_0(\text{Diff}_{PI} T^n))$;
- c) Il existe une forme ω dans Ω_n telle que $\Phi_1^* \omega$ soit isotope à ω .

Démonstration. Il suffit de prouver que c) entraîne a): or, si c est vérifiée, le lemme de Moser permet de supposer ω rationnelle.

Soit alors p la submersion associée à ω ; on a $p \circ \Phi_1 \approx p$. De plus, d'après I.12, on peut écrire $[\Phi] = Q + R$, avec $Q \in Wa(F)$ [$F = p^{-1}(0)$] et $R \in \text{im}(\text{id} + \mu_n)$. Soit Ψ une pseudo-isotopie de classe Q : on a $p \circ \Psi_1 \approx p$, et comme Ψ est de Wall pour F , l'invariant de p par rapport à p est représenté par $(Q, 0)$. On a donc $(Q, 0) \in \text{im}(\Sigma, \text{id} + \mu_{n-1})$, soit $Q \in \Sigma(\ker(\text{id} + \mu_{n-1})) \subset \ker(\text{id} + \mu_n) = \text{im}(\text{id} + \mu_n)$; finalement, $[\Phi] = Q + R$ est bien dans $\text{im}(\text{id} + \mu_n)$. \square

* Voir remarque à la fin.

II.2. Le groupe $\pi_0(\text{Diff } T^n)$

L'équivalence de a) et b) dans la proposition précédente était déjà connue de [HsS] (p. 410), [Ha] (p. 9), qui calculent pour $n \geq 6$:

$$\pi_0(\text{Diff}_H T^n) \approx \pi_0(\text{Diff}_{PI} T^n) \oplus \mathcal{H}_n,$$

avec $\pi_0(\text{Diff}_{PI} T^n) \approx P(T^n)/\text{im}(\text{id} + \mu_n)$ et $\mathcal{H}_n = \bigoplus_{i=2}^n H^i(T^n, \pi_{i+1}(\text{TOP}/O))$ (remarque: $\mathcal{H}_n = \ker(\pi_0(\text{Diff } T^n) \rightarrow \pi_0(\text{Homéo } T^n))$). Notons que \mathcal{H}_n est un groupe fini.

La suite exacte $0 \rightarrow \pi_0(\text{Diff}_H T^n) \rightarrow \pi_0(\text{Diff } T^n) \rightarrow \text{Gl}_n(\mathbf{Z}) \rightarrow 1$ est une décomposition de $\pi_0(\text{Diff } T^n)$ en produit semi-direct, l'action de $\text{Gl}_n \mathbf{Z}$ par conjugaison étant l'action canonique sur:

$$\mathbf{Z}_2^0[T_1, \dots, T_n^{-1}]/\text{im}(\text{id} + \mu_n) \bigoplus_{i=2}^n H^i(T^n; \pi_{i+1}(\text{TOP}/O)).$$

II.3. LEMME. *Pour $n \geq 7$, une forme rationnelle linéarisable l'est par un difféomorphisme pseudo-isotope à l'identité.*

Démonstration. On peut supposer que la submersion p_1 associée est homotope à x_n . Soit $([\Psi], [\varphi])$ un représentant de l'invariant de p_1 par rapport à x_n : le fait que p_1 est conjuguée à x_n s'exprime par $\rho_{n-1}([\varphi]) = 0$ (cf. [L₁] p. 424), soit $[\varphi] \in \text{im}(\text{id} + \mu_{n-1})$ puisque $n-1 \geq 6$ (cf. IV.2). On a donc $[\varphi] = [\psi] + \mu_{n-1}[\psi]$, d'où $([\Phi]; [\varphi]) \sim ([\Phi] + \Sigma[\psi], 0)$: donc il existe une pseudo-isotopie Ψ de T^n , de classe $[\Phi] + \Sigma[\psi]$, telle que $p_1 \circ \Psi_1 = x_n$. \square

II.4. PROPOSITION. *Pour $n \geq 7$, l'action de \mathcal{H}_n sur $\Omega_{n/\approx}^1$, donnée par $[f] \cdot [\omega] = [f^* \omega]$, est triviale.*

Démonstration. Comme $\pi_0(\text{Diff}_H T^n)$ est abélien, il suffit de prouver $f^* \sum_1^n a_i dx_i \approx \sum_1^n a_i dx_i$ pour $[f] \in \mathcal{H}_n$ et $(a_i) \in \mathbf{R}^n - \{0\}$.

a) Traitons d'abord le cas rationnel. Il suffit de prouver que $[f] \in \mathcal{H}_n$ entraîne $f^* dx_n \approx dx_n$; or, d'après II.1 et II.3, on peut écrire $f^* dx_n = g^* dx_n$, avec $g \in \text{Diff}_{PI} T^n$, la classe $[g] \in \pi_0(\text{Diff}_{PI} T^n)$ étant bien définie. L'application α ainsi définie de \mathcal{H}_n vers $\pi_0(\text{Diff}_{PI} T^n)$ est un morphisme de groupes d'après la commutativité de $\pi_0(\text{Diff}_H T^n)$; de plus elle est compatible avec les actions par conjugaison de $G = \{\nu \in \text{Gl}_n \mathbf{Z} \mid \nu^* x_n = x_n\}$.

Soit alors $[f]$ un générateur de \mathcal{H}_n , d'invariant $(x_{k_1} \wedge \dots \wedge x_{k_i}) \otimes \gamma$ ($i \geq 2$,

$\gamma \in \pi_{i+1}(\text{TOP}/\text{O})$) et soit $b \in \mathbf{Z}_2^0[T_1, \dots, T_n^{-1}]$ tel que $\rho_n(b) = \alpha([f]) \in \pi_0(\text{Diff}_{\text{PI}} T^n)$.
On a :

$$b + \mu_n b = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in K} T_1^{k_1} \cdots T_n^{k_n},$$

où K est une partie finie de $\mathbf{Z}^n - \{0\}$, invariante par le sous-groupe

$$G' = \{\nu \in G \mid \nu^*(x_{k_1} \wedge \cdots \wedge x_{k_i}) \equiv x_{k_1} \wedge \cdots \wedge x_{k_i} \pmod{\# \pi_{i+1}(\text{TOP}/\text{O})}\}.$$

Comme les orbites de G' sont infinies (exercice), K est vide: donc $\alpha([f]) = 0$, et α est l'application nulle. \square

b) Définissons $A = \{(a_i) \in \mathbf{R}^n - \{0\} \mid f^* \sum_1^n a_i dx_i \approx \sum_1^n a_i dx_i, \text{ pour tout } [f] \in \mathcal{H}_n\}$.

On a les propriétés suivantes:

- . A est un cône contenant $\mathbf{Q}^n - \{0\}$, donc non vide;
- . A est invariant par $\text{Gl}_n \mathbf{Z}$: cela vient du fait que \mathcal{H}_n est distingué dans $\pi_0(\text{Diff } T^n)$;
- . A est ouvert: cela résulte de lemme de Moser et du fait que \mathcal{H}_n est fini.

Comme toute orbite de l'action de $\text{Gl}_n \mathbf{Z}$ sur $\mathbf{P}^{n-1} \mathbf{R}$ est dense, on en déduit $A = \mathbf{R}^n - \{0\}$. \square

Conséquence. Toutes les formes linéarisables le sont par pseudo-isotopie (généralisation de II.3).

II.5. THEOREME. On munit $\pi_0(\text{Diff}_{\text{PI}} T^n)$ de la topologie discrète; alors, pour $n \geq 7$, l'application $\alpha_n : \pi_0(\text{Diff}_{\text{PI}} T^n) \times (\mathbf{R}^n - \{0\}) \rightarrow \Omega_{n/\approx}^1$

$$([f], (a_i)) \mapsto \left[f^* \sum_1^n a_i dx_i \right]$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. On sait déjà que c'est un homéomorphisme local (pour tout n)
De plus, la proposition II.1 entraîne l'injectivité et la remarque à la fin de II.4 la surjectivité. \square

En particulier, à une forme linéarisable est associée un unique élément de $\pi_0(\text{Diff}_{\text{PI}} T^n)$, qui précise sa composante connexe dans Ω_n^1 .

III. Voisinage dans $\Omega_{n/\approx}$ d'une forme rationnelle

Dans ce chapitre, on suppose $n \geq 7$. Si $n = 6$, une partie des résultats subsiste (voir III.5).

III.1. LEMME. *Dans toute classe de Wall $(D^{n-1} \times \{0\})[\subset P(D^{n-1} \times S^1, \partial)]$, il y a un représentant Φ tel que tous les anneaux $\Phi(D^{n-1} \times \{u\} \times I)$ ($u \in S^1$) sont de Wall au sens strict.*

Démonstration. Soit Ψ une pseudo-isotopie de Wall pour $D^{n-1} \times \{0\}$. Désignant par $p_0: D^{n-1} \times S^1 \rightarrow S^1$ la deuxième projection, choisissons un relèvement $f: D^{n-1} \times S^1 \rightarrow \mathbf{R}$ de $p_0 \circ \Psi_1^{-1} - p_0$ tel que $f < 0$, et posons

$$W(u) = \{(x, t) \in D^{n-1} \times S^1 \times I \mid p_0(x) + tf(x) = u\} \quad (u \in S^1).$$

Le raisonnement de I.6.b) prouve que tous les $W(u)$ sont des anneaux de Wall au sens strict; en utilisant la nullité de $P(D^{n-1}, \partial)$ on trouve facilement une pseudo-isotopie Φ de $D^{n-1} \times S^1$ telle que $\Phi(D^{n-1} \times \{u\} \times I) = W(u)$ pour tout u . Comme $\Phi_1(D^{n-1} \times \{0\}) = \Psi_1(D^{n-1} \times \{0\})$, 1.7 entraîne que Φ est isotope à Ψ . \square

III.2. *Remarque.* La propriété géométrique du lemme précédent se traduit analytiquement par $(\partial/\partial t)(p_0 \circ \Phi^{-1}) < 0$. En particulier, les formes dt et $(p_0 \circ \Phi^{-1})^* d\theta$ sur $D^{n-1} \times S^1 \times I$ n'ont pas de contact positif et il en est de même pour les formes $d(t \circ \Phi)$ et $p_0^* d\theta$: donc $d(t \circ \Phi) + rp_0^* d\theta$ est une forme non singulière pour tout $r \leq 0$.

III.3. LEMME. *Soient p_0 et $p'_0: T^n \rightarrow S^1$ deux submersions homotopes à x_n , l'invariant de p'_0 par rapport à p_0 étant représenté par $(0, Q)$, $Q = \sum_{i>0} a_i T_1^i$; on pose $\omega_0 = p_0^* d\theta$ et $\omega'_0 = p'^*_0 d\theta$. Soit $r = (r_1, \dots, r_{n-1})$ un élément de \mathbf{R}^{n-1} assez proche de (0) et soient ω_r et ω'_r des formes (de Ω_n) cohomologues à $dx_n + \sum_1^{n-1} r_i dx_i$ et proches respectivement de ω_0 et de ω'_0 . Alors*

a) Si $r_1 < 0$, ω_r et ω'_r sont isotopes.

b) Si $r_1 > 0$, ω'_r est conjuguée à ω_r par un difféomorphisme pseudo-isotope à l'identité de classe $\rho_n(Q)$.

Démonstration. On peut supposer que p_0 et p'_0 coïncident hors d'une boîte $B = S^1_{x_1} \times D^{n-2}_{x_2, \dots, x_{n-1}} \times I_{x_n}$, et que de plus:

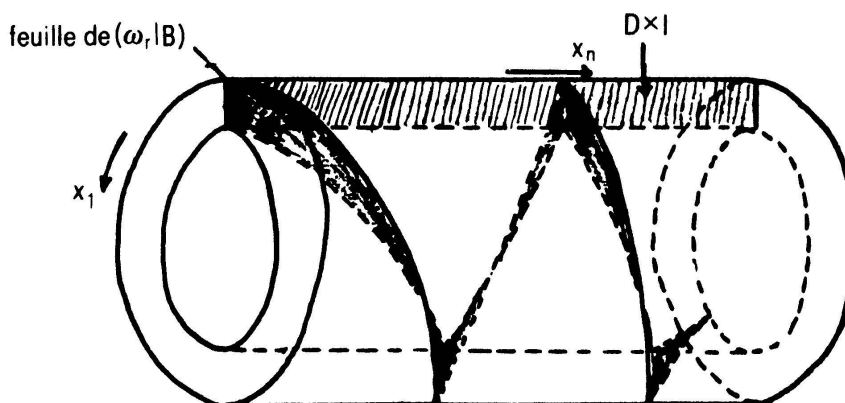
$$p_0|_B = x_n$$

$$p'_0|_B = x_n \circ \varphi, \varphi \text{ pseudo-isotopie de } S^1 \times D^{n-2} \text{ de classe } Q.$$

D'après la remarque précédente, on peut de plus choisir φ de sorte que $(\omega'_0 + r_1 dx_1 | B)$ soit non singulière pour $r_1 \geq 0$.

On peut (d'après Moser) supposer que $\omega_r = \omega_0 + \sum_{i=1}^{n-1} r_i dx_i$ (voir la figure) $\omega'_r = \omega'_0 + \sum_{i=1}^{n-1} r_i dx_i$. Alors pour $r_i \neq 0$ la restriction à B de ω'_r/r_1 est une forme cohomologue dans $H^1(B; \mathbf{R})$ à dx_1 , et dont la restriction au bord est linéaire; de plus, elle est non singulière dans les deux cas suivants:

- r assez proche de (0) ;
- $r = (r_1, 0, \dots, 0)$ avec $r_1 < 0$ quelconque.



a) On a $\lim_{r_1 \rightarrow -\infty} (dx_1 + \omega'_0/r_1) = dx_1$; donc, par Moser, il existe $f \in \text{Diff } B$ isotope à l'identité parmi les difféomorphismes dont la restriction au bord est linéaire, et tel que $((\omega'_r/r_1) | B) = f^*(dx_1 | B)$. Notons ψ le difféomorphisme linéaire de B coïncidant avec f sur le bord, il vient $((\omega'_r/r_1) | B) = (\psi^{-1} \circ f)^*((\omega_r/r_1) | B)$; comme $\psi^{-1} \circ f$ est isotope à l'identité rel le bord et que ω'_1 coïncide avec ω_r hors de B , on en déduit que ω'_1 est isotope à ω_r .

b) Notons ν l'élément de $\text{Gl}_n \mathbf{Z} \subset \text{Diff } T^n$ défini par $\nu(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$. Comme $x_n \circ \nu = x_n$ et que $\nu \circ \varphi \circ \nu$ est isotope au miroir $\mu(\varphi)$, on a:

$$x_n \circ \varphi \circ \nu = x_n \circ \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ \nu \circ \varphi \circ \nu)$$

$$x_n \circ \varphi \circ \nu = x_n \circ \varphi \circ g,$$

où g est un élément de $\mathcal{P}(S^1 \times D^{n-2})$ de classe $Q + \mu(Q)$; à priori $g | S^1 \times D \times \{1\}$ est seulement isotope à l'identité, mais il est clair que l'on peut isotoper g de façon à avoir $g | \partial B = \text{id}$ tout en conservant $x_n \circ \varphi \circ \nu = x_n \circ \varphi \circ g$. alors g est un élément de $\text{Diff}_{\text{PI}}(B, \partial B)$ égal à id sur ∂B , et de classe $[g] = \rho_B(Q) \in \pi_0(\text{Diff}_{\text{PI}}(B, \partial B))$: en effet, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} P(B, \partial B) & \xrightarrow{\text{id} + \mu} & P(B, \partial B) = \pi_0(\text{Diff } B \times I \text{ rel } \square) \\ \Sigma \downarrow & & \uparrow \\ P(B \times 1, \partial) & \xrightarrow{\rho} & \pi_0(\text{Diff}(B \times I \text{ rel } \partial)) \end{array}$$

(cf. [HaW] p. 270). On a alors:

$$\nu^*(\omega'_0 | B) = g^*(\omega'_0 | B),$$

donc le lemme de Moser entraîne $\nu^*(\omega'_r | B) \underset{\text{rel } \partial B}{\approx} g^*(\omega'_{-r} | B)$, et si $r_1 > 0$, il vient

$$\nu^*(\omega'_r | B) \underset{\text{rel } \partial B}{\approx} g^*(\omega_{-r} | B) = g^* \nu^*(\omega_r | B)$$

$$(\omega'_r | B) = f^*(\omega_r | B), \quad f \underset{\text{rel } \partial B}{\approx} \nu \circ g \circ \nu \underset{\text{rel } \partial B}{\approx} g.$$

Comme ω'_r coïncide avec ω_r hors de B , ceci achève la démonstration du lemme. \square

III.4. PROPOSITION. Soit $\omega_0 = p_0^* d\theta$, où $p_0: T^n \rightarrow S^1$ est une submersion homotope à x_n d'invariant relatif représenté par (P, Q) ; on suppose (ce qui est toujours possible) Q "réduit" dans le sens suivant: $Q = \sum_{j=1}^k P_j(M_j)$, où les M_j sont des monômes primitifs non conjugués (soit $M_j \neq M_l^{\pm 1}$) de la forme $T_1^{k_1} \cdots T_{n-1}^{k_{n-1}}$ ($k_1, \dots, k_{n-1} \in \mathbf{Z}$) et les P_j des polynômes non nuls de $\mathbf{Z}_2^0[T]$.

Notons H_j, E_j^+ et E_j^- l'hyperplan de \mathbf{R}^{n-1} et les demi-espaces positif et négatif définis par M_j (c'est-à-dire $\sum_1^{n-1} k_i x_i$ respectivement nul, positif, négatif).

Soit alors ω une forme voisine de ω_0 , cohomologue à $dx_n + \sum_1^{n-1} r_i dx_i$; notons $r = (r_1, \dots, r_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}$.

a) Si $r \notin \bigcup_j H_j$, ω est linéarisable et l'élément de $\pi_0(\text{Diff}_{\text{PI}} T^n)$ associé est

$$[f] = \rho_n \left(P + \sum_{r \in E_j^+} P_j(M_j) \right)$$

b) Si $r \in \bigcup_j H_j$, ω est non linéarisable.

Démonstration. On peut supposer $P=0$. Pour $j=1, \dots, k$, soit p_0^j une submersion homotope à x_n , d'invariant relatif $(0, P_1(M_1) + \cdots + P_j(M_j))$, avec $p_0^0 = x_n$, $p_0^k = p_0$; notons $\omega_0^j = (p_0^j)^* d\theta$, et soit ω^j une forme proche de ω_0^j et cohomologue à ω : on prend de plus ω^0 linéaire et $\omega^k = \omega$. Comme l'invariant de p_0^j par rapport à p_0^{j-1} est représenté par $(0, P_j(M_j))$, le lemme précédent implique (en changeant de coordonnées pour avoir $M_j = T_1$):

- 1) si $r \in E_j^-$, ω^j est isotope à ω^{j-1} ;
- 2) si $r \in E_j^+$, ω^j est conjuguée à ω^{j-1} par un élément de $\text{Diff}_{\text{PI}} T_n$ de classe $\rho_n(P_j(M_j))$.

Ceci prouve immédiatement le a). De plus, la différence entre deux éléments

de $\pi_0(\text{Diff}_{\text{PI}} T^n)$ associés à deux composantes distinctes de $\mathbf{R}^{n-1} - \bigcup_j H_j$ est de la forme: $\Delta = \rho_n(\sum_{j \in \mathcal{J}} P_j(M_j))$, avec $\mathcal{J} \subset \{1, \dots, k\}$, $\mathcal{J} \neq \emptyset$.

Comme Q est réduit, elle n'est jamais nulle; donc, si $r \in \bigcup_j H_j$, tout voisinage de ω rencontre au moins deux composantes de Ω_n^l et ω ne peut être linéarisable. \square

III.5. *Remarque.* Si $n = 6$, on a les résultats plus faibles suivants.

a) Avec les hypothèses de III.3: si $r \neq 0$, ω'_r est conjuguée à ω_r par un élément de $\text{Diff}_{\text{PI}} T^n$ de classe ne dépendant que de T_1 . Pour cela, on utilise le fait que deux submersions homotopes de $D^{n-1} \times S^1$ and S^1 sont conjuguées par pseudo-isotopie.

b) Avec les hypothèses de III.4: si $r \notin \bigcup_j H_j$, ω est linéarisable par pseudo-isotopie.

IV. Densité des formes linéarisables. Formes irrationnelles non linéarisables

IV.1. PROPOSITION. On suppose $n \geq 6$. L'ensemble Ω_n^l des formes linéarisables est dense dans Ω_n (pour la topologie C^∞ ou, ce qui revient au même, C^k , $0 \leq k \leq \infty$). Plus précisément, pour toute forme $\omega \in \Omega_n$ rationnelle, il existe $f \in \text{Diff}_{\text{PI}} T^n$ tel que $f^*\omega$ est limite de formes linéarisables par isotopie.

Démonstration. C'est un corollaire immédiat de III.4 (ou de III.5, si $n = 6$).

Remarque. Soit α la forme linéaire cohomologue à ω , alors, tout voisinage de $[\alpha]$ dans $\Omega_{n/\approx}$ rencontre tout voisinage de $[f^*\omega]$; prenant ω non linéarisable, cela prouve que $\Omega_{n/\approx}$ n'est pas séparée.

IV.2. PROPOSITION. On suppose $n \geq 7$. Toute classe de cohomologie ayant un groupe de périodes de rang $\leq n - 1$ contient une forme non linéarisable.

Démonstration. L'action de $\text{Gl}_n \mathbf{Z}$ permet de supposer la classe égale à $(0, \nu_2, \dots, \nu_n)$, $|\nu_i| \ll |\nu_n|$ pour $2 \leq i \leq n - 1$; par homothétie, on obtient $(0, r_2, \dots, r_{n-1}, 1)$ avec (r_2, \dots, r_{n-1}) aussi petit qu'on veut. La proposition V.4 appliquée avec $Q = T_1$ par exemple, montre que le résultat est vrai dans ce dernier cas. \square

IV.3. PROPOSITION. On suppose $n \geq 7$. L'espace Ω_n , muni de la topologie C^∞ , est connexe par arcs. En d'autres termes, deux 1-formes différentielles fermées non singulières sur T^n peuvent toujours être jointes par un chemin de telles formes.

Démonstration. D'après la densité de $\Omega_n^l = \bigcup_{f \in \text{Diff}_{\text{PI}} T^n} f^*\Omega_n^l$ et la connexité de

Ω_n^{li} , il suffit de joindre Ω_n^{li} à $f^*\Omega_n^{li}$ pour tout $f \in \text{Diff}_{PI} T^n$. Or la proposition III.4 montre que c'est possible pour $[f] = \rho(T_1^k)$, donc par naturalité pour $[f] = \rho(T_1^{k_1} \cdots T_n^{k_n})$. Il en résulte que l'on peut joindre $g^*\Omega_n^{li}$ à $g^*f^*\Omega_n^{li}$ pour $f, g \in \text{Diff}_{PI} T^n$, $[f] = \rho(T_1^{k_1} \cdots T_n^{k_n})$; ceci achève la démonstration. \square

IV.4. La proposition IV.2 laisse ouverte la question de l'existence d'une forme non linéarisable "totalement irrationnelle." Dans cet ordre d'idées, on a la proposition suivante.

PROPOSITION. *Pour $n \geq 6$, l'ensemble $N = \{(a_i) \in \mathbf{R}^n - \{0\} \mid \exists \omega \approx \sum_1^n a_i dx_i, \omega \text{ non linéarisable}\}$ est une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.*

Démonstration. Posons d'abord quelques notations: choisissant une norme $|| \cdot ||$ sur \mathbf{R}^n , définissons, pour une 1-forme ω sur T^n , considérée comme une application de T^n dans \mathbf{R}^n : $||\omega|| = \sup_{x \in T^n} |\omega(x)|$

$$m(\omega) = \inf_{x \in T^n} |\omega(x)|.$$

La norme $|| \cdot ||$ donne une distance définissant la topologie C^0 sur Ω_n ; d'autre part, le lemme de Moser entraîne que, pour $\omega \in \Omega_n$, la restriction de

$$\text{cl} : B(\omega, m(\omega)) / \approx \rightarrow B(\text{cl } \omega, m(\omega))$$

est un homéomorphisme (quelle que soit la topologie C^k sur Ω_n).

LEMME 1. *L'espace Ω_n contient une suite dense $(\omega_i)_{i \in \mathbf{N}}$.*

Démonstration. Il suffit de considérer les formes dont les coefficients sont des polynômes trigonométriques à coefficients rationnels.

LEMME 2. *Si $(\omega)_{i \in \mathbf{N}}$ est dense dans Ω_n , on a $\bigcup_{i \in \mathbf{N}} B(\omega_i, m(\omega_i)/2) = \Omega_n$.*

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega_n$, il existe $i \in \mathbf{N}$ tel que $||\omega - \omega_i|| < m(\omega)/3$; on en déduit $m(\omega_i) > m(\omega) - m(\omega)/3 = \frac{2}{3}m(\omega)$, donc $||\omega - \omega_i|| < \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}m(\omega_i)$. \square

Fin de la démonstration. soit $(\omega_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite dense dans Ω_n , et posons:

$$\mathcal{N}_2 = \left\{ \omega \in B' \left(\omega_i, \frac{m(\omega_i)}{2} \right) \mid \omega \text{ non linéarisable} \right\} \quad (B' : \text{boule fermée})$$

$$N_i = \text{cl}(\mathcal{N}_{i/\approx}) \subset B' \left(\text{cl } \omega_i, \frac{m(\omega_i)}{2} \right) \subset \mathbf{R}^n - \{0\}.$$

Alors

a) Comme Ω'_n est un ouvert dense de Ω_n , $\mathcal{N}_{i/\approx}$ est un fermé d'intérieur vide dans $B'(\omega_i, m(\omega_i)/2)/\approx$.

b) Comme la restriction $\text{cl}: B'(\omega_i, m(\omega_i)/2) \rightarrow B'(\text{cl } \omega_i, m(\omega_i)/2)$ est un homéomorphisme, N_i est un compact d'intérieur vide dans $\mathbf{R}^n - \{0\}$.

c) D'après le lemme 2, on a $N = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} N_i$, ce qui termine la démonstration. \square

Remarque. D'après III.4 et III.5, N_i a la propriété suivante: si $a \in B'_i = B'(\text{cl } \omega_i, m(\omega_i)/2)$ et si a est sur une droite rationnelle ($\exists \lambda$ tel que $\lambda a \in \mathbf{Q}^n - \{0\}$), il existe des hyperplans "entiers" H_1, \dots, H_k de \mathbf{R}^n , contenant a ($k = 0$ n'est pas exclus) et un voisinage v de a dans B'_i tels que:

$$N_i \cap v = \left(\bigcup_{j=1}^k H_j \right) \cap v, \quad \text{si } n \geq 7$$

ou

$$N_i \cap v \subset \left(\bigcup_{j=1}^k H_j \right) \cap v, \quad \text{si } n = 6.$$

V. Préparatifs à la démonstration de I.9. Cobordisme élémentaire de paires en codimension un

V.1. *Généralités.* Nous considérons dans les paragraphes 1 à 6 de ce chapitre un cobordisme élémentaire compact $(A; A_0, A_1)$ dont la face latérale est un produit $\partial A_0 \times I$; pour simplifier, nous supposons $\partial A_0 = \emptyset$. Nous nous donnons une fonction de Morse $f: A \rightarrow I$ vérifiant $f^{-1}(0) = A_0$, $f^{-1}(1) = A_1$ et ayant un seul point critique et un champ de vecteurs ξ de pseudo-gradient pour f (voir définition dans [Mi]); nous noterons c le point critique de f , i son indice et n la dimension de A_0 et nous supposons $f(c) = \frac{1}{2}$.

Le point c admet un voisinage de Morse $v(c)$ avec les propriétés suivantes: il existe un difféomorphisme λ de $v(c)$ sur $L_{i,n+1} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^i \times \mathbf{R}^{n+1-i} \mid -1 \leq -|x|^2 + |y|^2 \leq 1 \text{ et } |x||y| \leq \text{ch } 1 \text{ sh } 1\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$, et dans ces coordonnées (x, y) , on a $f(x, y) = (\frac{1}{2})(-|x|^2 + |y|^2 + 1)$,

$$\xi = \text{grad } f = - \sum_1^i x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_1^{n+1-i} y_k \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

La nappe descendante de c pour ξ correspond alors à $D^i \times \{0\}$; son bord est une $(i-1)$ -sphère S_0 plongée dans A_0 : c'est la "sphère d'attachment." Cette

sphère a un voisinage tubulaire trivial $N(S_0, A_0) = v(c) \cap A_0$, image du plongement $\varphi : S^i \times D^{n+1-i} \rightarrow a_0$ défini par $\varphi(u, \theta u') = \lambda^{-1}(\text{ch } \theta \cdot u, \text{sh } \theta \cdot u')$ ($u \in S^{i-1}$, $\theta \in I$, $u' \in S^{n-i}$). Ainsi φ donne une trivialisatation du fibré normal $\nu(S_0, A_0)$.

V.2. LEMME. *Soit B_0 une sous-variété de codimension 1 de A_0 , contenant la sphère d'attachement S_0 ; on suppose que le sous-fibré $\nu(S_0, B_0)$ de $\nu(S_0, A_0)$ est un champ de $(n-i)$ -plans homotope à une constante dans la trivialisatation donnée de $\nu(S_0, A_0)$. Alors, quitte à modifier (f, ξ) par une isotopie de A , on peut supposer que, dans le voisinage tubulaire $N(S_0, A_0)$, B_0 est définie par $y_{n+1-i} = 0$.*

Démonstration. L'utilisation de l'astuce d'Alexander (Alexander trick) dans chaque fibre de $N(S_0, A_0) = \varphi(S^{i-1} \times D^{n+1-i})$ permet de supposer, à une isotopie de B_0 dans A_0 près, que $\varphi^{-1}(N(S_0, A_0) \cap B_0) = \{\{u\} \times (P_u \cap D^{n+1-i}) \mid u \in S^{i-1}\}$, où $u \rightarrow P_u$ est une application de S^{i-1} dans la grassmannienne $G_{n-i}(\mathbf{R}^{n+1-i})$ homotope à une constante. Choissant cette constante égale au plan ($y_{n-i} = 0$), on trouve une deuxième isotopie de B_0 dans A_0 qui permet d'obtenir $\varphi^{-1}(B_0 \cap N(S_0, A_0)) = S^{i-1} \times D^{n-i}$. Pour terminer la démonstration, il suffit de prolonger l'isotopie de B_0 dans A_0 à une isotopie de A et de modifier (f, ξ) par l'isotopie inverse. \square

V.3. COROLLAIRE. *On suppose (f, ξ) modifié comme l'indique le lemme. Soit alors B l'adhérence de la réunion des orbites de ξ issues de B_0 et soit $B_1 = B \cap A_1$. Alors $(B; B_0, B_1)$ est un sous-cobordisme de codimension 1 de $(A; A_0, A_1)$; de plus, $f|B$ est une fonction de Morse ayant c pour seul point critique, avec le même indice que pour f et ξ est tangent à B , $\xi|B$ étant de pseudo-gradient pour $f|B$.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement du fait que B est défini dans $v(c)$ par $y_{n+1-i} = 0$.

La paire (A, B) est alors appelée *cobordisme élémentaire de paires de codimension un* (en abrégé C.E.P.C.U.); elle est caractérisée par l'existence d'une fonction de Morse $f : A \rightarrow I$ avec un seul point critique, telle que $f|B$ soit une fonction de Morse avec un seul point critique, ce point étant le même et ayant le même indice que pour f .

Remarque. Si B est à deux côtés dans A , on convient que le côté positif est défini dans le voisinage de Morse par $y_{n+1-i} \geq 0$.

V.4. LEMME. *Soit (A, B) un C.E.P.C.U; soient f, ξ et $v(c)$ ayant toutes les propriétés de V.1, 2, 3. On suppose de plus que B est à deux côtés dans A . Alors, il existe un voisinage \mathcal{V} de B dans A et une fonction sans point critique $z : \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{R}$, avec*

les propriétés:

$$\mathcal{V} \supset v(c) \quad \text{et} \quad z \mid v(c) = y_{n+1-i};$$

$$z^{-1}(0) = B \quad \text{et} \quad \xi \cdot z = z.$$

Démonstration. L'hypothèse que B est à deux côtés dans A équivaut à: a) B_0 est à deux côtés dans A_0 et b) $\varphi(S^{i-1} \times D_+^{n+1-i})$ est situé d'un seul côté de B_0 (b résulte de a), si $i \geq 2$). Donc, il existe un voisinage \mathcal{V}_0 de B_0 dans A_0 , contenant $N(S_0, A_0)$, et une fonction sans point critique $u: \mathcal{V}_0 \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $u \mid N(S_0, A_0) = y_{n+1-i}$ et $u^{-1}(0) = B_0$. D'autre part, le champ ξ et la fonction f permettent d'identifier le complémentaire des nappes dans A à $(A_0 - S_0) \times I$; on a alors $f(a, t) = t$ et $\xi(a, t) = \alpha(a, t)(\partial/\partial t)$ ($a \in A_0 - S_0, t \in I$), où α est à valeurs > 0 . De cette façon, $(v(c)$ moins les nappes) s'identifie à $(N(S_0, A_0) - S_0) \times I$ et la coordonnée y_{n+1-i} sur $v(c)$ définit sur $(N(S_0, A_0) - S_0) \times I$ une fonction sans point critique encore notée y_{n+1-i} , vérifiant $y_{n+1-i}(a, 0) = u(a)$ et

$$\frac{\partial}{\partial t} y_{n+1-i} = \frac{1}{\alpha(a, t)} y_{n+1-i}.$$

Il en résulte $y_{n+1-i}(a, t) = u(a) \cdot \exp(\int_0^t dv/\alpha(a, v))$ sur $(N(S_0, A_0) - S_0) \times I$; or, cette expression est définie sur $(\mathcal{V}_0 - S_0) \times I$, ce qui permet de prolonger y_{n+1-i} en une fonction z définie sur $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_0 - S_0) \times I \cup v(c)$. \mathcal{V} est bien un voisinage de B dans A et, par construction, z vérifie $\xi \cdot z = z$ et $z^{-1}(0) = 0$. Enfin, z est sans point critique car:

$$\xi \cdot z = z \neq 0 \text{ hors de } B;$$

$$z \mid v(c) = y_{n+1-i} \text{ est sans point critique};$$

$$\text{sur } B \cap [(\mathcal{V}_0 - S_0) \times I] = (B_0 - S_0) \times I, \text{ on a } dz = \exp\left(\int_0^t \frac{dv}{\alpha(b_0, v)}\right) \cdot du \neq 0. \quad \square$$

V.5. LEMME. *Sous les hypothèses de V.4 il existe un voisinage tubulaire $N(B)$ de B dans A et une rétraction $r: N(B) \rightarrow B$ tels que $\lambda = (r, z)$ définisse un difféomorphisme de $N(B)$ sur $B \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ avec les propriétés:*

$$\text{a) } f \circ \lambda^{-1}(b, z) = f(b) \text{ si } b \text{ est près de } B_0 \cup B_1;$$

$$\text{b) } \xi \cdot (f \circ r) + 1 - f \circ r > 0 \text{ sur } N(B).$$

Démonstration. La fonction z est sans point critique et elle est transverse aux niveaux de f près de $B_0 \cup B_1$; donc, il existe un voisinage \mathcal{U} de B dans A , $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ et

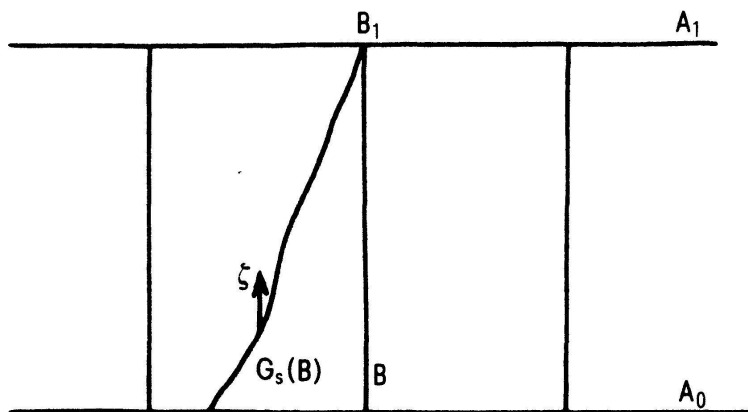
un champ η sur \mathcal{U} vérifiant $\eta \cdot z = 1$ sur \mathcal{U} et $\eta \cdot f = 0$ sur un voisinage dans \mathcal{U} de $(A_0 \cup A_1) \cap \mathcal{U}$. Par intégration de η , on construit $N_0(B)$ et une rétraction $r_0: N_0(B) \rightarrow B$ tels que $\lambda_0 = (r_0, z)$ soit un difféomorphisme de $N_0(B)$ sur $B \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ vérifiant a); de plus, on a, sur B , $\xi \cdot f \circ r_0 = (\xi|_B) \cdot (f|_B)$, qui est > 0 sur $B - \{c\}$; on a aussi $1 - f \circ r_0 \geq 0$ sur B et $1 - f \circ r_0(c) = \frac{1}{2} > 0$: donc, $\xi \cdot f \circ r_0 + 1 - f \circ r_0 > 0$ sur B . Comme B est compact, il suffit de remplacer $N_0(B)$ par $N(B) = \lambda_0^{-1}(B \times [-\varepsilon, \varepsilon])$ avec ε assez petit pour obtenir la propriété b). \square

V.6 PROPOSITION. Soit $((A, B); (A_0, B_0), (A_1, B_1))$ un corbordisme élémentaire de paires de codimension 1, muni d'une fonction de Morse f et d'un champ de pseudo-gradient ξ ; on suppose que B est à deux côtés dans A . Alors, il existe une isotopie de plongements propres $G_s: B \rightarrow A$ issue de l'inclusion, avec les propriétés:

- a) $G_s|_{B_1} =$ inclusion $B_1 \rightarrow A_1$ pour tout s ; $f \circ G_s = f$ près de $B_0 \cup B_1$;
- b) Pour $s > 0$, $G_s(B)$ admet $-\xi$ pour champ normal positif;
- c) Pour $s > 0$, $G_s(B)$ est situé du côté négatif de B et $G_s(B) \cap B = B_1$.

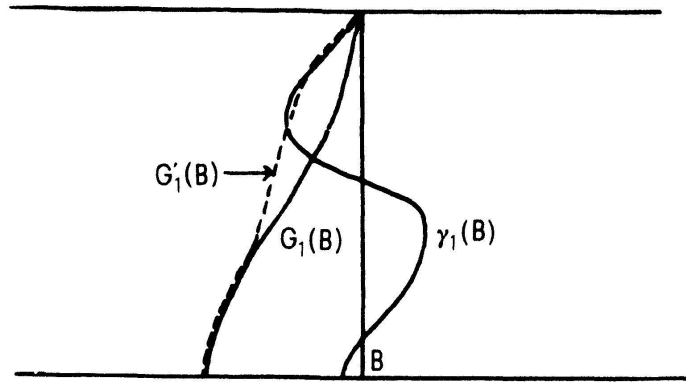
COROLLAIRE. Pour toute isotopie $\gamma_s: B \rightarrow A$ issue de l'inclusion, telle que $\gamma_s|_{B_1}$ est assez petite et que $\gamma_1(B)$ admet $-\xi$ pour champ normal positif près de $\gamma_1(B_1)$, il existe $G'_s: B \rightarrow A$ issue de l'inclusion, coïncidant avec γ_s près de B_1 et telle que $G'_1(B)$ admet $-\xi$ pour champ normal positif. Si $\gamma_1(B_1)$ est situé du côté négatif de B_1 et disjoint de B_1 , on peut imposer que $G'_1(B)$ soit disjoint de B .

Démonstration. Soient $N(B)$ et $\lambda = (r, z): N(B) \rightarrow B \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ avec les propriétés de V.5; on définit $G_s: B \rightarrow N(B)$ par $G_s(b) = \lambda^{-1}(b, \varepsilon s(f(b) - 1))$.



Les propriétés a) et c) sont évidentes; de plus, $G_s(B)$ admet l'équation "orientée" $z - \varepsilon s(f \circ r - 1) = 0$; donc, un vecteur X , tangent à A en un point de $G_s(B)$, est un vecteur normal positif si et seulement si $X \cdot (z - \varepsilon s(f \circ r - 1)) = 0$. Or, on a $(-\xi) \cdot (z - \varepsilon s(f \circ r - 1)) = \varepsilon s \xi \cdot f \circ r - z$, donc, en un point de $G_s(B)$, on trouve $\varepsilon s(\xi \cdot f \circ r + 1 - f \circ r)$, qui est > 0 pour $s < 0$ d'après la propriété b) de V.5. \square

Indication sur la preuve du corollaire. On utilise la transversalité de ξ au bord supérieur A_1 pour fabriquer G'_s comme l'indique la figure ci-dessous.



V.7. Elimination de deux cobordismes élémentaires de paires

Nous considérons maintenant un cobordisme $(A; A_0, A_2)$, A_0 étant compacte connexe de dimension n , muni d'une fonction de Morse $f: A \rightarrow [0, 2]$ avec deux points critiques, c d'indice i et c' d'indice $i+1$, $1 \leq i \leq n-1$, en position d'élimination (cf. [Ce]). Nous supposons $f(c) = \frac{1}{2}$ et $f(c') = \frac{3}{2}$. On a un plongement d'un modèle standard d'élimination (cf. [Ce]) $j: D^n \times [0, 2] \rightarrow A$; il existe un champ ξ de pseudo-gradient pour f , de la forme $\xi = \text{grad}_m f$, la restriction de m à $j(D^n \times [0, 2])$ correspondant à la métrique euclidienne. Soient \mathcal{A} la ξ -nappe ascendante de c et \mathcal{D} la ξ -nappe descendante de c' , limitées par $A_1 = f^{-1}(1)$; les bords $\partial\mathcal{A} = T_0 \approx S^{n-i}$ et $\partial\mathcal{D} = S_0 \approx S^i$ se coupent transversalement en un point dans A_1 . C'est ce que l'on exprime en disant que $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ est un couple de nappes en bonne position. Notons $\psi_0: S^i \rightarrow A_1$ un plongement d'image S_0 .

D'après [Ce] p. 252–253, on peut définir une application de l'ensemble des composantes connexes de l'espace \mathcal{N} des couples de nappes en bonne position vers $P(A_0)\alpha: \pi_0(\mathcal{N}, (\mathcal{A}, \mathcal{D})) \rightarrow P(A_0)$ de la façon suivante. L'élimination des points critiques de f donnée par $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ donne une fonction $f_1: A \rightarrow [0, 2]$ sans point critique, ce qui munit A d'une structure produit $A_0 \times [0, 2]$ définie à isotopie près; si $(\mathcal{A}', \mathcal{D}')$ est un autre couple en bonne position, l'élimination des points critiques donnée par $(\mathcal{A}', \mathcal{D}')$ donne une fonction $f'_1: A_0 \times [0, 2] \rightarrow [0, 2]$ sans point critique, donc une pseudo-isotopie Φ de A_0 (ici l'on remplace $[0, 1]$ par $[0, 2]$ dans la définition d'une pseudo-isotopie) telle que $f'_1 = f_1 \circ \Phi$; alors $\alpha([\mathcal{A}', \mathcal{D}']) = [\Phi]$.

Soit maintenant B_0 une sous-variété de A_0 de codimension 1; à isotopie près, on peut supposer $B_0 \cap j(D^n \times \{0\}) = j(D^{n-1} \times \{0\})$. Soient alors B l'adhérence des orbites de ξ issues de B_0 et $B_1 = B \cap A_1$, $B_2 = B \cap A_2$. On obtient ainsi un sous-cobordisme $(B; B_0, B_2)$ de codimension 1 de $(A; A_0, A_2)$; de plus, $f|_B$ est une fonction de Morse à deux points critiques c et c' , de même indice que pour f

et ξ est tangent à B , $\xi|_B$ étant de pseudo-gradient pour $f|_B$: en effet, ces propositions sont immédiates dans le modèle $D^n \times [0, 2]$ avec $B_0 = D^{n-1} \times \{0\}$.

Remarque essentielle. Soit L l'unique orbite de ξ joignant c et c' et soit V un voisinage arbitraire de L dans A ; alors, la structure produit définie sur A par $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ peut être obtenue par intégration d'un champ ξ_1 tangent à B et coïncidant avec ξ hors de V (la partie de cette remarque relative à V revient à dire que la méthode d'élimination de [Ce] donne le même résultat que celle de [Mi]).

Démonstration. Soit (f_t) un chemin d'élimination associé à $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$, défini par un modèle standard sur $j(D^n \times [0, 2])$ (cf. [Ce] p. 244–252); il existe alors un voisinage U de $L(= \{0\} \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}])$ dans $D^n \times [0, 2]$ sur lequel on a:

$$f_t(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = -\sum_1^i x_j^2 + \sum_{i+1}^n x_k^2 + (x_{n+1} - 1)^3 - \left(\frac{3}{4}\right)(1 - 2t)(x_{n+1} - 1).$$

On a alors, sur U ,

$$\xi = \text{grad } f_0 = -2 \sum_1^i x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + 2 \sum_{i+1}^n x_k \frac{\partial}{\partial x_k} + 3[(x_{n+1} - 1)^2 - \frac{1}{4}] \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$$

et

$$\text{grad } f_1 = -2 \sum_1^i x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + 2 \sum_{i+1}^n x_k \frac{\partial}{\partial x_k} + 3[(x_{n+1} - 1)^2 + \frac{1}{4}] \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}.$$

On peut supposer V contenu dans U ; soit alors ξ_1 un champ sur A égal à ξ hors de V et tel que:

$$\xi_1|_V = -2 \sum_1^i x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + 2 \sum_{n+1}^n x_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \lambda(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \frac{\partial}{\partial x_{n+1}},$$

avec $\lambda(0, \dots, 0, x_{n+1}) > 0$; un tel ξ_1 existe car $(x_{n+1} - 1)^2 - \frac{1}{4} > \text{constante} > 0$ si $(0, 0, \dots, 0, x_{n+1}) \notin V$. Alors ξ_1 est tangent à B car B est défini dans $j(D^n \times [0, 2])$ par $x_n = 0$. De plus, le champ $\eta_s = (1 - s) \text{grad}_m f_1 + s\xi_1$ est sans zéros pour $0 \leq s \leq 1$. Enfin, d'après [Mi] (p. 50), on peut supposer qu'il n'y a aucune orbite de ξ qui aille de V à V en passant hors de U ; on en déduit, en suivant exactement la preuve de Milnor, que les orbites de η_s vont de A_0 à A_2 : donc, on obtient une isotopie des structures produits définies par $\text{grad}_m f_1$ et ξ_1 . \square

Dans le chapitre VI, nous supposerons $A_0 = D^{n-1} \times S^1$ et $3 \leq i \leq n - 4$; d'après

[ChL] et [HaW], on obtient alors un diagramme commutatif d'isomorphismes:

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(\mathcal{N}, (\mathcal{A}, \mathcal{D})) & \rightarrow & P(D^{n-1} \times S^1, \partial) \\ \downarrow & & \searrow \\ \pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, A_1); \psi_0) & \rightarrow & \mathbf{Z}_2[\pi_1 A_1 - \{0\}] = \mathbf{Z}_2^0(T, T^{-1}), \end{array}$$

où $\pi_1^{\text{rel } T_0}$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie de chemins $I \rightarrow \text{Plgt}(S^i, A_1)$ issus de ψ_0 et aboutissant en un plongement transverse à T_0 en un point, et où T est le générateur canonique de $\pi_1(A_1) \approx \pi_1(A_0)$.

VI. Démonstration de la proposition I.9

Le plan de la démonstration est le suivant. Nous construisons un lacet de plongements de i -sphères dans A_1 dont la classe dans $\pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, A_1); \psi_0)$ est le polynôme T . Soit \mathcal{D}' la nouvelle nappe descendante de c' associée à ce lacet. Quelques propriétés de la construction permettent d'affirmer que \mathcal{D}' est l'image de \mathcal{D} par un difféomorphisme de A qui est l'identité sur le cobordisme inférieur $A_- = f^{-1}([0, 1])$ et qui préserve f . Si l'on regarde A comme un produit grâce à l'élimination des points critiques donnée par les nappes $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$, ce difféomorphisme devient une pseudo-isotopie d'invariant T . On vérifie sur la construction qu'il s'agit d'une pseudo-isotopie de Wall.

VI.1. Construction du lacet de sphères

PROPOSITION. *Il existe un plongement $F: S^i \times S^1 \rightarrow \text{int } A_1$ avec les propriétés suivantes:*

- Le lacet (F_s) dans $\text{Plgt}(S^i, A_1)$ est basé en ψ_0 et sa classe dans $\pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, A_1); \psi_0)$ est le polynôme T ;*
- Il existe un voisinage collier $N_-(B_1)$ du côté négatif tel que, pour tout $s \neq 0, 1$ l'image de F_s ne le rencontre pas;*
- F a un fibré normal trivial.*

Démonstration. Nous allons faire la construction de ([ChL]), pp. 425–427) en la précisant pour obtenir les propriétés b) et c). Nous construisons d'abord une $(i+1)$ -sphère Σ plongée dans le voisinage tubulaire de S_0 , représentant l'élément non nul de $\pi_{i+1}(S^i)$; comme la construction se fait par chirurgie sur un plongement de $S^i \times S^1$ à fibré normal trivial, Σ a un fibré normal trival. On impose en plus que Σ soit disjoint de B_1 et contenue dans un voisinage collier négatif de B_1 . Considérons d'autre part un plongement F' de $S^i \times S^1$ dans un collier positif de B_1 tel que le lacet associé (F'_s) est basé en ψ_0 et reste dans un petit voisinage de ψ_0

dans $\text{Plgt}(S^i, A_1)$, et que l'image de F'_s est disjointe de B_1 pour $s \neq 0, 1$. Comme ψ_0 a un fibré normal trivial, il en est de même pour F' .

Choisissons un arc simple α joignant l'image de F' à Σ et ne rencontrant ni B_1 ni T_0 (il en existe car $A_1 - B_1 - T_0$ est connexe). La somme connexe de Σ et de $F'(S^i \times S^1)$ donne l'image du plongement F cherché. D'après [ChL], la propriété a) est satisfaite; les b) et c) sont évidents. \square

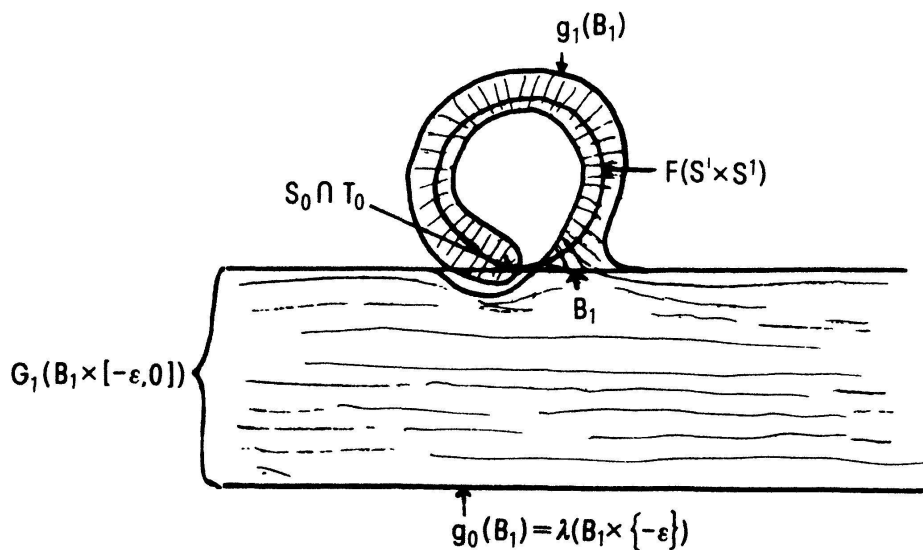
VI.2. PROPOSITION. *On utilise les notions de VI.1. Soit \mathcal{N} un voisinage de l'inclusion $B_1 \rightarrow A_1$ dans $\text{Plgt}(B_1, A_1)$. Alors, il existe des isotopies $G_t : A_1 \rightarrow A_1$ et $g_t : B_1 \rightarrow A_1$ avec les propriétés suivantes:*

- a) $G_0 = \text{id}$, $G_t \circ F_0 = F_t$ pour tout $t \in [0, 1]$ et G_1 est l'identité au voisinage de S_0 ;
- b) La collection des g_t donne un plongement positif de $B_1 \times I$ dans A_1 , avec $g_0 \in \mathcal{N}$ et $g_1 = G_1|_{B_1}$;
- c) Les isotopies (g_t) et $(G_t|_{B_1})$ sont homotopes à travers les chemins de plongements de B_1 dans A_1 commençant dans \mathcal{N} et finissant en g_1 .

Démonstration. Comme le plongement F donné en VI.1 a un fibré normal trivial, on construit G vérifiant la condition a); de plus, on peut choisir G_t à support dans un voisinage arbitrairement petit de l'image de F .

Identifions un voisinage tubulaire $N(B_1)$ à $B_1 \times [-1, 1]$ de sorte que $N_-(B_1) = B_1 \times [-1, 0]$. Etant donné \mathcal{N} , il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $u \in [-\varepsilon, 0]$, $B_1 \times \{u\}$ soit l'image d'un plongement appartenant à \mathcal{N} . Maintenant, on suppose que le support de G_t évite $B_1 \times \{-\varepsilon\}$.

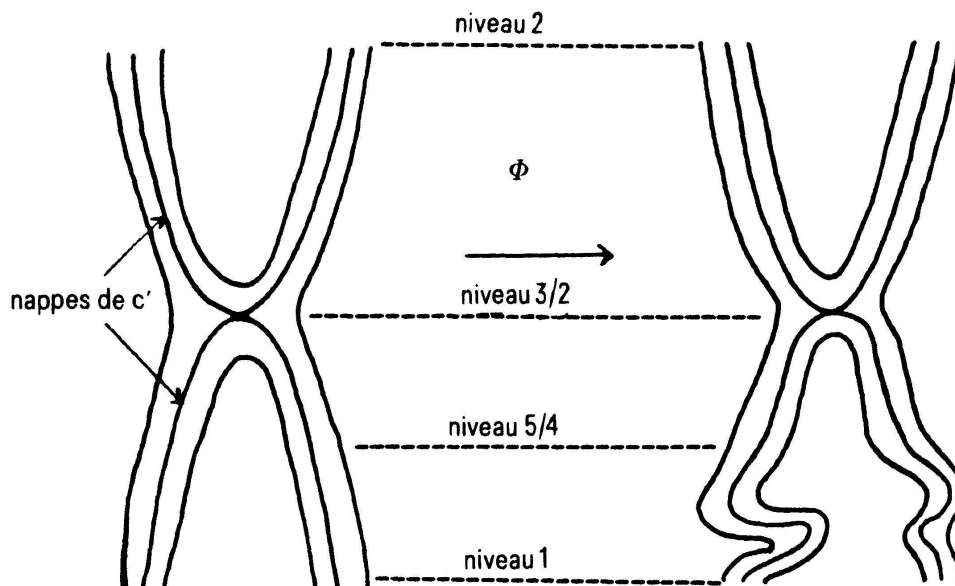
L'image $G_1(B_1 \times [-\varepsilon, 0])$ a naturellement une structure produit $B_1 \times [0, 1]$. Elle définit la collection des g_t cherchés. \square



VI.3. Construction d'un difféomorphisme Φ de A

On choisit une fonction $\mu : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ égale aux fonctions constantes 0 et 1 respectivement au voisinage de 0 et de 1. On pose $\Phi|_{A_-} = \text{id}$. Sur $f^{-1}([1, \frac{5}{4}])$,

que f et ξ permettent d'identifier à $A_1 \times [1, \frac{5}{4}]$, on pose $\Phi(a, 1+t/4) = G_{\mu(t)}(a, 1+t/4)$. Sur $f^{-1}([\frac{5}{4}, 2])$ moins les nappes de c' , que f et ξ permettent d'identifier à $(A_1 - S_1) \times [\frac{5}{4}, 2]$, on pose $\Phi(a, t) = (G_1(a), t)$. Enfin, sur ce qui reste, on pose $\Phi = \text{id}$. Comme G_1 est l'identité sur un voisinage de S_1 , $\Phi|_{f^{-1}([\frac{5}{4}, 2])}$ est l'identité près des nappes de c' , donc Φ est un difféomorphisme.



Remarque. Le difféomorphisme $\Phi|_{\partial_+ A}$ est celui décrit dans [Ha] p. 9–10, où l'idée en est attribuée à Farrell.

VI.4. Preuve que Φ est une pseudo-isotopie d'invariant T

Soit f_t un chemin d'élimination associé à $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$; par construction, $f \circ \Phi = f$ et $f|_{\mathcal{A}} = \text{id}$, donc, si l'on pose $\mathcal{D}' = \Phi(\mathcal{D})$, le couple $(\Phi(\mathcal{A}), \Phi(\mathcal{D})) = (\mathcal{A}, \mathcal{D}')$ est un couple de nappes en bonne position pour (c, c') auquel est associé le chemin d'élimination $f'_t = f_t \circ \Phi^{-1}$.

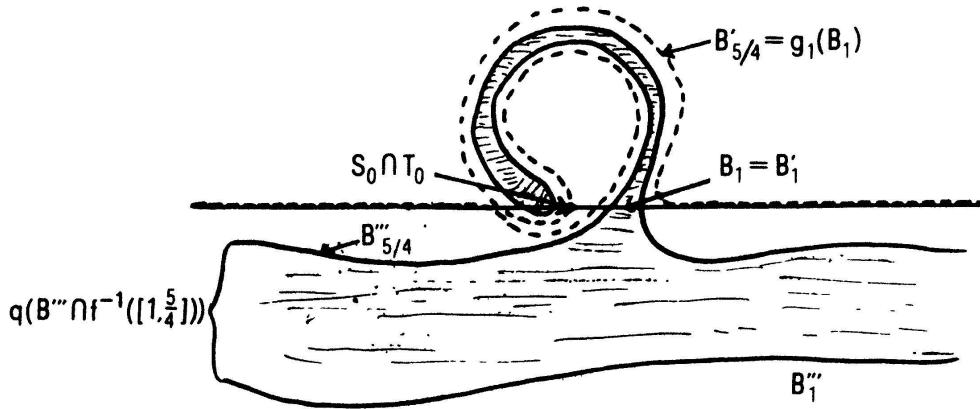
La structure produit sur A donnée par f_1 fait de Φ une pseudo-isotopie de A_0 ; comme $f'_1 = f_1 \circ \Phi^{-1}$, l'invariant de Φ^{-1} , qui est aussi celui de Φ , est donné par l'invariant de $(\mathcal{A}, \mathcal{D}')$ dans $\pi_0(\mathcal{N}, (\mathcal{A}, \mathcal{D}))$: par la construction de \mathcal{D}' , c'est le polynôme T . \square

VI.5. Preuve que Φ est une pseudo-isotopie de Wall

On pose $B' = \Phi(B)$ et $B'_2 = B' \cap A_2$. Par l'application successive de la proposition V.6, de la proposition VI.2 et de nouveau de la proposition V.6, nous allons isotoper B' de façon à rendre "positivement transverse" à $-\xi$ dans chacun des sous-cobordismes $f^{-1}([\frac{5}{4}, 2])$, $f^{-1}([1, \frac{5}{4}])$ et $f^{-1}([0, 1])$.

Par la proposition V.6, il existe une petite isotopie de B' à B'' , situé du côté négatif de B' , ne rencontrant B' qu'en B'_2 et dont l'intersection avec $f^{-1}([\frac{5}{4}, 2])$ admet $-\xi$ pour champ normal positif.

La proposition VI.2 donne une isotopie de B' le rendant positivement transverse à $-\xi$ dans la bande $f^{-1}([1, \frac{5}{4}]) \approx A_1 \times [1, \frac{5}{4}]$; comme pour le corollaire de V.6, on en déduit une isotopie de B'' jusqu'à B''' , constante au-dessus du niveau $\frac{5}{4}$ et telle que B''' admet $-\xi$ pour champ normal positif au-dessus du niveau 1. Plus précisément, dans la bande $f^{-1}([1, \frac{5}{4}]) \approx A_1 \times [1, \frac{5}{4}]$, la projection $q : B''' \cap f^{-1}([1, \frac{5}{4}]) \rightarrow A_1$ est un plongement positif, et $q(B''' \cap A_1) = B_1'''$ est proche de B_1' , du côté négatif (voir figure). Remarquons que le point $S_0 \cap T_0$ est dans $q(B' \cap f^{-1}(\frac{5}{4})) = B_{5/4}'$, et que $q(B''' \cap f^{-1}(\frac{5}{4})) = B_{5/4}'''$ est situé du côté négatif de $B_{5/4}'$, avec $B_{5/4}''' \cap B_{5/4}' = \emptyset$. Donc $q(B''' \cap f^{-1}([1, \frac{5}{4}]))$ est situé du côté négatif de $B_{5/4}'$ et ne le rencontre pas; en particulier, $S_0 \cap T_0$ n'est pas dans $q(B''' \cap f^{-1}([1, \frac{5}{4}]))$. Si L désigne l'unique orbite de ξ liant c et c' (cf. V.7), on a donc: $L \cap B''' \cap f^{-1}([1, \frac{5}{4}]) = ((S_0 \cap T_0) \times [1, \frac{5}{4}]) \cap B''' = \emptyset$.



En appliquant la proposition V.6 (corollaire) au cobordisme inférieur, on trouve finalement une isotopie de B' jusqu'à \tilde{B}' admettant $-\xi$ pour champ normal positif. De plus, \tilde{B}' est disjoint de B' au-dessous du niveau 1 et coïncide avec B''' au-dessus; donc, il ne rencontre pas L . D'après V.7, on peut supposer que la structure produit sur A est donnée par l'intégration de ξ_1 tangent à B et coïncidant avec ξ sur \tilde{B}' ; ainsi, nous venons de prouver que B' est un anneau de Wall et qu'il est l'image par Φ de l'anneau "vertical" $B_0 \times [0, 2]$; donc Φ est une pseudo-isotopie de Wall. \square

Remarque sur la Proposition II.1. Après avoir écrit cet article, je me suis aperçu, en suivant une suggestion du rapporteur, que l'on pouvait démontrer la proposition II.1, et donc les résultats du chapitre II, sans utiliser la proposition I.9. Ceci se fait de la façon suivante.

LEMME. *On suppose $n \geq 6$. Soit $f \in \text{Diff}_{PI}(D^{n-1} \times S^1 \text{ rel } \partial)$ tel que $f(D^{n-1} \times \{0\}) = D^{n-1} \times \{0\}$. Alors, f est isotope à l'identité.*

Démonstration. L'hypothèse $f(D^{n-1} \times \{0\}) = D^{n-1} \times \{0\}$ entraîne que la classe

d'isotopie $[f]$ est dans l'image de l'application naturelle:

$$\alpha : \Gamma_n \oplus \Gamma_{n+1} \rightarrow \pi_0(\text{Diff } D^{n-1} \times S^1 \text{ rel } \partial).$$

Or les classes d'isotopie dans $\text{im}(\alpha)$ sont PL-isotopes à l'identité, donc la considération du tore de l'application g , $M_g = (D^{n-1} \times S^1) \times I / (x, 1) \sim (g(x), 0)$, donne une application à valeurs dans l'espace des structures différentiables:

$$\beta : \Gamma_n \oplus \Gamma_{n+1} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{PL/O}}(D^{n-1} \times S^1 \times S^1, D^{n-1} \times S^1 \times 0 \cup S^{n-2} \times S^1 \times S^1).$$

On calcule:

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}_{\text{PL/O}}(D^{n-1} \times S^1 \times S^1, D^{n-1} \times S^1 \times 0 \cup S^{n-2} \times S^1 \times S^1) \\ & \approx [D^{n+1} \times S^1 \times S^1, D^{n-1} \times S^1 \times 0 \cup S^{n-2} \times S^1 \times S^1; \text{PL/O}, *] \\ & \approx \pi_n(\text{PL/O}) \oplus \pi_{n+1}(\text{PL/O}) \approx \Gamma_n \oplus \Gamma_{n+1} \end{aligned}$$

et l'application β est l'identité.

L'hypothèse que f est pseudo-isotope à l'identité entraîne que M_f est difféomorphe à $D^{n-1} \times S^1 \times S^1 \text{ rel } D^{n-1} \times S^1 \times 0 \cup S^{n-2} \times S^1 \times S^1$. Donc, on a $[f] = \alpha(x)$ avec $\beta(x) = x = 0$, ce qui entraîne $[f] = 0$. \square

[En fait, d'après [HaW] p. 273, on a la proposition plus forte:

$$\pi_0(\text{Diff } D^{n-1} \times S^1 \text{ rel } \partial) \approx \pi_0(\text{Diff}_{\text{PI}} D^{n-1} \times S^1 \text{ rel } \partial) \oplus \Gamma_n \oplus \Gamma_{n+1},$$

de façon tout à fait analogue à ce qui se passe pour T^n . Mais pour prouver cela, [HaW] se réfère à un article de E. C. Turner (Invent. Math. 8, 1969) qui ne me paraît pas convaincant, aussi ai-je préféré donner cette démonstration.]

En faisant le raisonnement de II.1 à l'envers, on en déduit que:

$$\rho : \text{Wa}(D^{n-1} \times \{0\}) \rightarrow \pi_0(\text{Diff}_{\text{PI}}(D^{n-1} \times S^1 \text{ rel } \partial)) = \mathbf{Z}_2^0[T, T^{-1}]$$

est surjective. La construction faite en I.10 montre alors que:

$$\rho_n : \text{Wa}(T^{n-1} \times \{0\}) \rightarrow \pi_0(\text{Diff}_{\text{PI}} T^n)$$

est aussi surjective, ce qui est une autre façon d'énoncer I.12 (l'équivalence de a) et b) dans II.1 étant déjà connue, voir II.2). La démonstration de II.1 se fait alors sans changement.

En revanche, les résultats de III et IV dépendent de I.9, mais cette dépendance est concentrée dans le lemme III.3.

BIBLIOGRAPHIE

- [Ce] CERF, J., *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie*, Publications Math. I.H.E.S. 39 (1970).
- [ChL] CHENCINER, A. et LAUDENBACH, F., *Contribution à une théorie de Smale à un paramètre dans le cas non simplement connexe*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 1970, p. 409–478.
- [Ha] HATCHER, A., *Concordance spaces, higher simple homotopy theory and applications*, Proceedings of Symposia in Pure Math., XXXII (1978), p. 3–21.
- [HaW] HATCHER, A. and WAGONER, J., *Pseudo-isotopies of compact manifolds*, Astérisque 6, Soc. Math. France, 1973.
- [HsS] HSIANG, W. C. and SHARPE, R. W. *Parametrized surgery and isotopy*, Pacific Journal of Math., 67 (1976), p. 401–459.
- [L₁] LAUDENBACH, F., *Submersions sur le cercle*, Bull. Soc. Math. France 104 (1976), p. 417–431.
- [L₂] LAUDENBACH, F., *Formes différentielles de degré 1 fermées non singulières: classes d'homotopie de leurs noyaux*, Comment. Math. Helv. 51 (1976), p. 447–464.
- [LB] LAUDENBACH, F. et BLANK, S., *Isotopie de formes fermées en dimension trois*, Inventiones Math. 54 (1979), p. 103–177.
- [Mi] MILNOR, J., *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton Mathematical Notes 1 (1965).
- [Mo] MOSER, J., *On the volume elements on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. 120 (1965), p. 286–294.
- [RR] ROSENBERG, H. and ROUSSARIE, R., *Topological equivalence of Reeb foliations*, Topology 9 (1970), p. 231–242.
- [T] TISCHLER, D., *On fibering certain foliated manifolds over S^1* , Topology 9 (1970), p. 153–154.

Université Paris-Sud
 Mathématiques, bâtiment 425
 F-91405 ORSAY cedex

Reçu en décembre 1981