Comment. Math. Helvetici 57 (1982) 60–78 0010–2571/82/000160–19$01.50+0.20/0

Eine Verschärfung des Satzes von Dirichlet über diophantische Approximation

PETER THURNHEER

I. Einleitung, Resultat

Nach Dirichlet können zwei reelle Zahlen α, β von der Ordnung 2 diophantisch approximiert werden in dem Sinne, dass unendlich viele Gitterpunkte $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $ab \neq 0$, existieren, sodass mit einem positiven $k_0 = k_0(\alpha, \beta)$ gilt

$$[\![\alpha a + \beta b]\!] \leq k_0\{\max(|a|, |b|)\}^{-2},$$

wobei $[\![\ \ ]\!]$ den Abstand von der nächsten ganzen Zahl bezeichnet. In dieser Arbeit sollen folgende Fragen untersucht werden:

(A) Wie gut lassen sich α und β diophantisch approximieren, wenn man dazu nur Gitterpunkte aus einem gewissen vorgegebenen Teilgebiet von $\mathbf{R}^2$ verwendet?

(B) Lässt sich der Satz von Dirichlet verschärfen, indem gezeigt wird, dass es nichttriviale Teilmengen Φ von $\mathbf{R}^2$ gibt, sodass α und β schon von der Ordnung 2 diophantisch approximiert werden können durch Gitterpunkte ausschliesslich aus Φ?

Bei gegebenem reellem η bezeichne $\omega(\eta)$ die grösste reelle Nullstelle des Polynoms dritten Grades

$$f(x; \eta) := x^3\eta - 2x^2(\eta - 1) - x(\eta + 1) - 1,$$

und sei

$$\tau = \tau(\eta) := \begin{cases} 2, & \text{für } \eta \geq 2.5. \\ \omega(\eta), & \text{für } 1 \leq \eta \leq 2.5. \\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\eta}), & \text{für } 0 < \eta \leq 1. \end{cases} \tag{1}$$

Ist θ reell und $tg\theta$ rational (siehe unten, Bemerkung (iv)), so setzt man

$$u(\xi_1, \xi_2) := \xi_1 \cos\theta + \xi_2 \sin\theta, \qquad v(\xi_1, \xi_2) := -\xi_1 \sin\theta + \xi_2 \cos\theta.$$

Mit positiven ν, ν_1 und η, $0<\nu<\nu_1$, definiert man

$$\Phi=\Phi(\nu,\eta,\theta):=\{(\xi_1,\xi_2)\in\mathbf{R}^2 \mid |v(\xi_1,\xi_2)|\le\nu\,|u(\xi_1,\xi_2)|^{\eta}\},$$

$$\Phi_1=\Phi_1(\nu,\nu_1,\eta,\theta):=\begin{cases}\Phi(\nu,\eta,\theta)\cup\Phi^c(\nu_1,\eta,\theta), & \text{für } 1<\eta\le 2.\\ \Phi(\nu,\eta,\theta)\cup\Phi^c(\nu_1,(4-\eta)/(5-2\eta),\theta), & \text{für } 2\le\eta<2.5.\end{cases}$$

Dabei stehe Φ^c für das Komplement der Menge $\Phi\subset\mathbf{R}^2$.

SATZ. *Seien die reellen Zahlen* 1, α, β *linear unabhängig über den rationalen Zahlen* $\mathbf{Q}$ *und die Parameter* ν, ν_1 *sowie* ε *beliebig positiv*, $0<\nu<\nu_1$. *Zu gegebenem* $\eta>0$ *existieren unendlich viele Paare a, b ganzer Zahlen,* $ab\neq 0$, *sodass im Fall*

(A) $0<\eta<2.5$ *gilt:* $(a,b)\in\Phi(\nu,\eta,\theta)$ *und* $[\![\alpha a+\beta b]\!]\le\varepsilon\{\max(|a|,|b|)\}^{-\tau(\eta)}$.

(B) $\eta\ge 2.5$ *gilt:* $(a,b)\in\Phi(\nu,\eta,\theta)$ *und* $[\![\alpha a+\beta b]\!]\le k_1\{\max(|a|,|b|)\}^{-2}$.

(B_1) $1<\eta<2.5$ *gilt:* $(a,b)\in\Phi_1(\nu,\nu_1,\eta,\theta)$ *und* $[\![\alpha a+\beta b]\!]\le k_1\{\max(|a|,|b|)\}^{-2}$.

Dabei hängt die positive Schranke k_1 *höchstens von* α, β, ν, ν_1, η *und* θ *ab.*

Bemerkungen. (i) Für $1<\eta\le 2$ kann $k_1=k_0[(\nu_1/\nu)^{1/(\eta-1)}+1]^3$ gewählt werden (siehe Kapitel IV, Fall 1), wobei $[r]$ den Ganzteil der reellen Zahl r bezeichnet. Mit Hilfe der nachfolgenden Ueberlegungen könnten auch in den anderen Fällen mögliche Abhängigkeiten der Grösse k_1 von den Parametern ν, ν_1, η und θ angegeben werden.

(ii) Auf dem Intervall $1<\eta<2.5$ ist $\omega(\eta)$ monoton wachsend und konkav. Man beweist dies, indem man sich überlegt, dass für $(1+\sqrt{5})/2\le x\le 2$ die Umkehrfunktion $\omega^{[-1]}(x)$ von ω existiert und gegeben ist durch $\omega^{[-1]}(x)=(-2x^2+x+1)/x(x^2-2x-1)$. Damit lässt sich zeigen, dass die ersten beiden Ableitungen von $\omega^{[-1]}(x)$ positiv sind für $(1+\sqrt{5})/2\le x\le 2$, sodass $\omega^{[-1]}(x)$ auf diesem Intervall monoton wachsend und konvex ist, was die entsprechenden Eigenschaften von ω impliziert. Es ist $\omega(1)=(1+\sqrt{5})/2=1.618\ldots$ und $\omega(2.5)=2$.

(iii) Die Aussage im Fall (B_1) kann auch wie folgt formuliert werden: *Unter den Voraussetzungen des Satzes, lassen sich* α *und* β *diophantisch approximieren von der Ordnung* 2 *entweder durch Gitterpunkte ausschliesslich aus*

$$\Phi(\nu,\eta,\theta),\ \textit{oder durch solche aus}\ \begin{cases}\Phi^c(\nu_1,\eta,\theta), & \textit{für } 1<\eta\le 2.\\ \Phi^c(\nu_1,(4-\eta)/(5-2\eta),\theta), & \textit{für } 2\le\eta<2.5.\end{cases}$$

(iv) Die Voraussetzung, dass $tg\theta$ rational ist, wird nur beim Beweis des Satzes in den Fällen A, B für $\eta > 1$ gebraucht. Sie wäre nicht nötig, wenn man anstelle von Φ für beliebiges positives δ Gebiete

$$\tilde{\Phi}(\nu, \eta, \delta, \theta) := \Phi(\nu, \eta, \theta) \cup \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2 \mid |u(\xi_1, \xi_2)| < \delta\} \text{ betrachten würde.}$$

(v) Für $\eta = 1$ wurde der obige Satz von W. M. Schmidt [1] hergeleitet. Im nachfolgenden Beweis wird die von ihm dabei eingeführte Methode verwendet. Insbesondere dient Kapitel II im wesentlichen dazu, die in [1] bewiesenen Hilfssätze der hier betrachteten Situation anzupassen.

(vi) Der im Satz angegebene Exponent $\tau(\eta)$ ist sicher nicht für alle $\eta \in (0, 5/2)$ bestmöglich. Es lässt sich nämlich folgende Aussage herleiten:

BEHAUPTUNG C. *Seien die Zahlen* $\lambda(1)$, η *und* $\lambda(\eta)$ *gegeben,* $\lambda(1) < 2$, $\eta > 1$, $\lambda(\eta) < 2$, *wobei gelte*

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\ \ \eta/\lambda(1)\{\lambda(\eta) - 1\} > 1,\\ &\text{(ii)}\ \ \eta\lambda^2(\eta)\lambda(1) - 2\lambda(\eta)\lambda(1)\{\eta - 1\} - \eta\lambda(\eta) - \lambda(1) - 1 \leq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes ist dann die Aussage

$$\begin{aligned} &\text{“Es gibt unendlich viele Paare } a, b \text{ ganzer Zahlen, } ab \neq 0, \text{ mit}\\ &(a, b) \in \Phi(\nu, x, \theta) \text{ und } [\![\alpha a + \beta b]\!] \leq \varepsilon\{\max(|a|, |b|)\}^{-\lambda(x)}\text{”} \end{aligned} \tag{3}$$

erfüllt für mindestens einen der Werte $x = 1$ *und* $x = \eta$.

Dabei können für $\eta \in (1, 5/2)$ beide der Grössen $\lambda(1)$ und $\lambda(\eta)$ so gewählt werden, dass sowohl (2) gilt, als auch

$$\lambda(x) > \tau(x) \quad \text{für} \quad x = 1 \quad \text{und} \quad x = \eta.$$

Auch für $\eta \in (0, 1]$ kann man eine zu Behauptung C analoge Aussage beweisen:

BEHAUPTUNG D. *Sei* λ *eine Funktion, welche für alle* $\eta \in (0, 1]$ *den folgenden Bedingungen genügt:*

$$\left.\begin{aligned} &\text{(i)}\ \ 1 < \lambda(\eta) < 2, \quad \text{(ii)}\ \ \eta\lambda(\eta)/\{\lambda(\eta) - 1\} > 1 + \eta,\\ &\text{(iii)}\ \ \eta^*(\eta) := \{\lambda^2(\eta) - \lambda(\eta) - \eta\}\lambda(\eta)/\eta \in [0, 1],\\ &\text{(iv)}\ \ \eta/\{\lambda(\eta) - 1\} \geq \lambda(\eta^*(\eta)). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes (mit beliebigem reellem θ), sowie für irgend ein $\eta \in (0, 1]$ ist dann die Aussage (3) *erfüllt für mindestens einen der Werte $x = \eta$ und $x = \eta^*(\eta)$.*

Dabei existieren Funktionen λ mit den Eigenschaften (4), die grösser sind als τ. Um eine relativ einfache solche anzugeben – durch entsprechenden Aufwand, liesse sich die Konstruktion von λ in Kapitel V an verschiedenen Stellen verbessern – setzt man mit

$$z_1 := 3 - \sqrt{5} = 0.7639\ldots, \quad z_2 := (1 + 2x - \sqrt{1+4x})/x^2 \,|_{x=0.201} = 1.4571\ldots:$$

$$w(\eta) := \frac{\sqrt{(4-\eta z_1)^2 + 2\eta z_1\{12 - 4z_2 - \eta z_1(2-z_2)\}} - (4 - \eta z_1)}{12 - 4z_2 - \eta z_1(2 - z_2)}$$

und

$$g(x; \eta) := x^3 - x^2 - \eta x - \eta w(\eta).$$

Bei gegebenem $\eta \in (0, 1]$ ist $g(x; \eta)$ ein Polynom dritten Grades in x. Bezeichnet $\lambda(\eta)$ seine grösste reelle Nullstelle, so lässt sich zeigen

$$\left.\begin{array}{l} \text{(i) } \lambda(\eta) > \tau(\eta), \\ \text{(ii) } \lambda(\eta) \text{ erfüllt die Voraussetzungen (4).} \end{array}\right\} \tag{5}$$

Speziell ist zum Beispiel

$$\eta^*(1) = w(1) = 0.2003\ldots \quad \text{und} \quad \begin{array}{r} \lambda(1) = 1.6704\ldots > 1.6180\ldots = \tau(1). \\ \lambda(\eta^*(1)) = 1.1947\ldots > 1.1710\ldots = \tau(\eta^*(1)). \end{array}$$

Behauptung D und (5) werden in Kapitel V bewiesen. Die Herleitung von Behauptung C wird weggelassen. Sie besteht fast ausschliesslich darin, innerhalb des in Kapitel V angewandten Vorgehens die Ueberlegungen von Kapitel III zu wiederholen, wobei man nun benützt, dass der in Kapitel III, Fall 2.1 gefundene Punkt $\mathfrak{g}_j$ nicht nur in $\Phi(\nu, \eta, \theta)$, sondern sogar in $\Phi(\nu, 1, \theta)$ liegt.

(vii) Professor K. Chandrasekharan möchte ich danken für seine Unterstützung bei dieser Arbeit, Professor W. M. Schmidt für die Anregung und klärende Bemerkungen dazu – insbesondere den Hinweis, $tg\theta$ rational vorauszusetzen – sowie das Ueberlassen eines Preprints seiner Arbeit [1].

Im weitern bezeichnen grosse Buchstaben in deutscher Schrift Elemente aus dem auf die Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 bezogenen $\mathbf{R}^3$ mit Ursprung $\mathfrak{O}$, entsprechende Kleinbuchstaben stehen für ihre Projektionen parallel ξ_3 in die (ξ_1, ξ_2)-Ebene. Ist $\mathfrak{X}=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. so sei

$$L(\mathfrak{X}):=\alpha\xi_1+\beta\xi_2+\xi_3, \qquad |\mathfrak{X}|:=\{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\}^{1/2}$$

und für $\mathfrak{x}=(\xi_1, \xi_2)$ bedeute

$$u(\mathfrak{x}):=u(\xi_1, \xi_2), \qquad v(\mathfrak{x}):=v(\xi_1, \xi_2),$$
$$|\mathfrak{x}|:=\{\xi_1^2+\xi_2^2\}^{1/2}, \qquad \|\mathfrak{x}\|:=\max(|\xi_1|, |\xi_2|).$$

Unter einem Gitterpunkt versteht man von nun an ein Element des $\mathbf{R}^3$ oder $\mathbf{R}^2$, dessen Koordinaten im (ξ_1, ξ_2, ξ_3)-respektive (ξ_1, ξ_2)-System ganze Zahlen sind. Positive Grössen, die höchstens von α, β, ν, ν_1, η, θ und ε abhängen, werden mit $k_2, k_3 \ldots$ bezeichnet. Die in den $\ll$-Abschätzungen implizit auftretenden Schranken sind stets von der Art der $k_2, k_3, \ldots$.

Mit diesen Bezeichnungen lassen sich die zu beweisenden Aussagen des Satzes folgendermassen formulieren:

BEHAUPTUNG AB. Zu gegebenem $\eta>0$ existieren unendlich viele Gitterpunkte $\mathfrak{G}$ mit

$$\mathfrak{g}\neq\mathfrak{o}, \mathfrak{g}\in\Phi \quad \text{und} \quad |L(\mathfrak{G})|\begin{cases}\leq\varepsilon\,\|\mathfrak{g}\|^{-\tau}, & \text{für} \quad 0<\eta<2.5.\\ \ll\ \|\mathfrak{g}\|^{-\tau}, & \text{für} \quad \eta\geq 2.5.\end{cases} \tag{6}$$

BEHAUPTUNG B_1. Zu gegebenem η, $1<\eta<2.5$ existieren unendlich viele Gitterpunkte $\mathfrak{G}$ mit

$$\mathfrak{g}\neq\mathfrak{o}, \mathfrak{g}\in\Phi_1 \quad \text{und} \quad |L(\mathfrak{G})|\ll\|\mathfrak{g}\|^{-2}. \tag{7}$$

II. Hilfssätze

Seien α, β, ν, ν_1, θ und ε die im Satz auftretenden Parameter. Sei $h>0$ und Φ^* eine Teilmenge von $\mathbf{R}^2$, welche $\Phi(\nu, h, \theta)$ enthält.
Alle Aussagen in diesem Kapitel beweist man entweder unter der

VORAUSSETZUNG 1.

(i) Für die Zahl t gelte $1<t<2$ und $ht/(t-1)>1+h$. (8)
(ii) Es existieren höchstens endlich viele Gitterpunkte $\mathfrak{G}$ mit

$$\mathfrak{g}\neq\mathfrak{o},\ \mathfrak{g}\in\Phi^* \quad \text{und} \quad |L(\mathfrak{G})|\leq\varepsilon\,\|\mathfrak{g}\|^{-t}.$$

oder unter der

VORAUSSETZUNG 2.

(i) Sei $h>1$ und $t=2$.
(ii) Es existieren höchstens endlich viele Gitterpunkte $\mathfrak{G}$ mit

$$\mathfrak{g}\neq\mathfrak{o},\ \mathfrak{g}\in\Phi^* \quad \text{und} \quad |L(\mathfrak{G})|\ll\|\mathfrak{g}\|^{-2}.$$

Wiederholt wird man benützen, dass
aus

$$|L(\mathfrak{X})|\leq 1 \quad \text{und} \quad \|\mathfrak{x}\|\geq 1 \quad \text{folgt} \quad |\mathfrak{X}|\ll\|\mathfrak{x}\|. \tag{10}$$

LEMMA 1. *Zu genügend grossem $N>0$ existiert ein Gitterpunkt $\mathfrak{F}\neq\mathfrak{O}$, sodass gilt*

$$|L(\mathfrak{F})|\ll N^{-ht/(t-1)} \quad \text{und} \quad \begin{cases} |\mathfrak{F}|\ll N^h, & \text{für } h\geq 1. \\ |\mathfrak{F}|\ll N,\ |v(\mathfrak{f})|\leq N^h, & \text{für } 0<h\leq 1. \end{cases}$$

Beweis. Man wählt $k_2=k_2(\alpha,\beta)$ so, dass der konvexe, zu $\mathfrak{O}$ symmetrische Körper $\Xi:=\{\mathfrak{X}\mid |L(\mathfrak{X})|\leq k_3N^{-ht/(t-1)}\}\cap\{\mathfrak{X}\mid |u(\mathfrak{x})|\leq(k_2/k_3)N^{h/(t-1)}, |v(\mathfrak{x})|\leq N^h\}$ das – von k_3 unabhängige – Volumen 8 hat. Man setzt

$$k_3:=\begin{cases}\{(2k_2)^t/\varepsilon\}^{1/(t-1)}, & \text{falls Voraussetzung 1 erfüllt ist,}\\ 1, & \text{falls Voraussetzung 2 erfüllt ist,}\end{cases}$$

sodass im ersten Fall gilt $k_3=\varepsilon(2k_2/k_3)^{-t}$. Nach dem ersten Satz von Minkowski aus der Geometrie der Zahlen enthält Ξ einen Gitterpunkt $\mathfrak{F}\neq\mathfrak{O}$, für den nur noch die Bedingung über $|\mathfrak{F}|$ zu verifizieren bleibt. Man benützt nun (8), beziehungsweise (9). Ist N genügend gross, hat man

$$\|\mathfrak{f}\|\leq|\mathfrak{f}|\leq\begin{cases}(2k_2/k_3)N^{h/(t-1)}, & \text{unter Voraussetzung 1.}\\ \max(2,2k_2)N^{h/(t-1)}, & \text{unter Voraussetzung 2.}\end{cases}$$

Also ist

$$|L(\mathfrak{F})| \leq k_3 N^{-ht/(t-1)} \begin{cases} \leq \varepsilon\, \|\mathfrak{f}\|^{-t}, & \text{unter Voraussetzung 1.} \\ \ll \|\mathfrak{f}\|^{-t}, & \text{unter Voraussetzung 2.} \end{cases}$$

Wieder für grosses N folgt deshalb auf Grund der Voraussetzung 1 (ii), respektive 2(ii), dass $\mathfrak{f} \notin \Phi^*$ und damit $\mathfrak{f} \notin \Phi(\nu, h, \theta)$ ist. Das heisst, wegen $|v(\mathfrak{f})| \leq N^h$ muss $|u(\mathfrak{f})| \ll N$ sein und darum

$$\|\mathfrak{f}\| \ll \begin{cases} N^h, & \text{für } h \geq 1, \\ N, & \text{für } 0 < h \leq 1, \end{cases}$$

was wegen (10) Lemma 1 beweist.

Sei $\mathfrak{F}_m$, $m = 1, 2, \ldots$ eine Folge von Gitterpunkten ungleich $\mathfrak{O}$ mit $v(\mathfrak{f}_m) \geq 0$, sodass für jedes $m = 1, 2, \ldots$ gilt:

Es gibt keinen Gitterpunkt $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{O}$ mit

$$|L(\mathfrak{F})| \leq |L(\mathfrak{F}_m)| \quad \text{und} \quad \begin{cases} |\mathfrak{F}| < |\mathfrak{F}_m|, & \text{für } h \geq 1. \\ \max\{|v(\mathfrak{f})|^{1/h}, |\mathfrak{F}|\} < \max\{v(\mathfrak{f}_m)^{1/h}, |\mathfrak{F}_m|\}, & \text{für } 0 < h \leq 1. \end{cases}$$

Setzt man

$$N_m := \begin{cases} |\mathfrak{F}_m|^{1/h}, & \text{für} \quad h \geq 1, \\ \max\{v(\mathfrak{f}_m)^{1/h}, |\mathfrak{F}_m|\}, & \text{für} \quad 0 < h \leq 1, \end{cases}$$

so ist N_m, $m = 1, 2, \ldots$ eine strikt monoton gegen ∞ wachsende Folge und mit $u_m := u(\mathfrak{f}_m)$, $v_m := v(\mathfrak{f}_m)$, $L_m := |L(\mathfrak{F}_m)|$ gilt

LEMMA 2. *Es gibt einen Index m_0, sodass für alle $m \geq m_0$ folgende Beziehungen erfüllt sind*

$$L_m \ll N_{m+1}^{-ht/(t-1)}, \tag{11}$$

$$\mathfrak{f}_m \notin \Phi^*, \tag{12}$$

$$|u_m| \ll N_m, \; N_m^h \ll v_m \leq N_m^h. \tag{13}$$

Beweis. Abschätzung (11) ist eine Folge von Lemma 1. Mit ihr, (8) oder (9) und

$$\|\mathfrak{f}_m\| \leq \begin{cases} N_m^h, & \text{für} \quad h \geq 1, \\ N_m, & \text{für} \quad 0 > h \leq 1, \end{cases} \tag{14}$$

überlegt man sich wie oben, dass (12) gilt und somit auch $\mathfrak{f}_m \notin \Phi(\nu, h, \theta)$ ist für genügend grosses m. Beachtet man zusätzlich zu (14) noch (10), ergeben sich daraus die Beziehungen unter (13), womit Lemma 2 bewiesen ist.

LEMMA 3. *Für unendlich viele j sind $\mathfrak{F}_{j-1}$, $\mathfrak{F}_j$ und $\mathfrak{F}_{j+1}$ linear unabhängig.*

Die Herleitung von Lemma 3 verläuft – unter Verwendung der linearen Unabhängigkeit von α, β und 1 über $\mathbf{Q}$ – gleich wie der Beweis der entsprechenden Aussage in [1] respektive [2]. Zum dabei benötigten Nachweis, dass die rechte Seite der Gleichung $|v_{k-1}L(\mathfrak{F}_k) - v_k L(\mathfrak{F}_{k-1})| = |v_n L(\mathfrak{F}_{n+1}) - v_{n+1} L(\mathfrak{F}_n)|$ gegen 0 geht für $n \to \infty$, benützt man nun Lemma 2 und (8) oder (9).

Im weitern bezeichne j stets ein Element der unendlichen Folge von Indizes, für welche Lemma 3 erfüllt ist. Zudem sei $j \geq m_0$ und so gross, dass $L_j \leq 1$ ist.

LEMMA 4. *Es ist $D_j := |u_j v_{j+1} - u_{j+1} v_j| \gg N_j^{ht/(t-1)}$.*

Beweis. Ist $\mathfrak{F}_m := (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \xi_3^{(m)})$, so gilt

$$|\xi_1^{(m-1)}\xi_2^{(m)} - \xi_2^{(m-1)}\xi_1^{(m)}| = |u_{m-1}v_m - v_{m-1}u_m|, \qquad m = 2, 3, \ldots. \tag{15}$$

Mit Hilfe dieser Formel, den Lemmas 2 und 3, sowie (8) oder (9) zeigt man wie in [1], dass $|\xi_1^{(j)}\xi_2^{(j+1)} - \xi_1^{(j+1)}\xi_2^{(j)}| \gg L_{j-1}^{-1} \gg N_j^{ht/(t-1)}$ ist, woraus wieder wegen (15) Lemma 4 folgt.

Es bezeichne $\Lambda = \Lambda_j$ das von $\mathfrak{f}_j$ und $\mathfrak{f}_{j+1}$ in der (ξ_1, ξ_2)-Ebene aufgespannte Gitter und $\mu_1 = \mu_1(j)$, $\mu_2 = \mu_2(j)$ seien dessen sukzessive Minima bezüglich der Eichfunktion $g(\mathfrak{x}) := \max(|u(\mathfrak{x})|, |v(\mathfrak{x})|)$. Nach dem zweiten Satz von Minkowski und Lemma 4 gilt

$$N_j^{ht/(t-1)} \ll D_j \ll \mu_1\mu_2 \ll D_j.$$

Da $1 < t \leq 2$ impliziert $t/(t-1) \geq 2$, und weil nach (10) $\|\mathfrak{f}_j\| \gg N_j^h$ ist, $h \geq 1$, folgt daraus, dass μ_1 für $h \geq 1$ von der Grössenordnung N_j^h sein muss, und es ergibt sich

LEMMA 5. *Für* $h \geq 1$ *ist* $\mu_2 \ll D_j/N_j^h$.

Folgende Tatsache wird später gebraucht:

Ist $\mathfrak{x} = s\mathfrak{f}_j + t\mathfrak{f}_{j+1}$, so gilt

$$|s| \leq \frac{1}{D_j}\{|u(\mathfrak{x})| v_{j+1} + |v(\mathfrak{x})|\, |u_{j+1}|\}, \qquad |t| \leq \frac{1}{D_j}\{|u(\mathfrak{x})| v_j + |v(\mathfrak{x})|\, |u_j|\}, \tag{16}$$

denn es ist

$$D_j\,|s| = \left| \det \begin{pmatrix} su_j & u_{j+1} \\ sv_j & v_{j+1} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} su_j + tu_{j+1} & u_{j+1} \\ sv_j + tv_{j+1} & v_{j+1} \end{pmatrix} \right| = |u(\mathfrak{x}) v_{j+1} - v(\mathfrak{x}) u_{j+1}|.$$

Daraus folgt die Abschätzung für $|s|$. Eine analoge Rechnung ergibt diejenige für $|t|$.

III. Beweis der Behauptung AB

Für die unter (1) definierte Funktion $\tau = \tau(\eta)$ gelten folgende Beziehungen:

$$1 < \tau < 2 \quad \text{und} \quad \eta\tau/(\tau - 1) > 1 + \eta, \quad \text{für} \quad 0 < \eta < 2.5, \tag{17}$$

$$\eta/\tau(\tau - 1) \begin{cases} > 1, & \text{für} \quad \eta > 1. \\ = 1, & \text{für} \quad 0 < \eta \leq 1. \end{cases} \tag{18}$$

Aussage (17) und die Gleichung in (18) sind leicht zu verifizieren. Zum Beweis der Ungleichung in (18) setzt man $\rho = \rho(\eta) := \frac{1}{2}\{1 + \sqrt{1 + 4\eta}\}$. Dann ist $\rho > 1.6$ für $\eta > 1$ und $\rho^2 - \rho = \eta$, sowie $f(\rho; \eta) = (\rho - 1)(\eta - 1)^2 > 0$, für $\eta > 0$. Bei festem $\eta > 1$ ist $f(x; \eta)$ eine monoton wachsende Funktion von x für

$$x > 1.6 > \tfrac{1}{3}(2 + \sqrt{7}) > \frac{1}{3\eta}\{2(\eta - 1) + \sqrt{7\eta^2 - 5\eta + 4}\}.$$

Deshalb muss für das in der Einleitung definierte $\omega(\eta)$ gelten $\omega(\eta) < \rho(\eta)$, $\eta > 1$, woraus die zu beweisende Ungleichung folgt.

Die Behauptung AB wird indirekt bewiesen. Man geht somit aus von der

GEGENANNAHME AB. Zu gegebenem $\eta > 0$ existieren höchstens endlich viele Gitterpunkte $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{O}$, welche (6) erfüllen.

Beachtet man zudem (17) sieht man, dass für jedes $\eta > 0$ eine der zu Beginn von Kapitel II formulierten Voraussetzungen 1 und 2 erfüllt ist, wenn man setzt

$$h = \eta, \qquad t = \tau = \tau(\eta) \quad \text{und} \quad \Phi^* = \Phi = \Phi(\nu, \eta, \theta).$$

Für diese Wahl gelten somit alle in Kapitel II bewiesenen Aussagen.

Fall 1. $0 < \eta \leq 1$.

Wegen (13) ist

$$\delta = \delta_j := [v_{j+1}/v_j] \ll (N_{j+1}/N_j)^{\eta}.$$

Setzt man $\mathfrak{G}_j := \mathfrak{F}_{j+1} - \delta\mathfrak{F}_j$, so ist $\mathfrak{G}_j$ ein Gitterpunkt ungleich $\mathfrak{O}$ und es gilt

$$|v(\mathfrak{g}_j)| \leq v_j \leq N_j^{\eta}. \tag{19}$$

Aus (16) angewandt auf $\mathfrak{x} := \mathfrak{g}_j = -\delta\mathfrak{f}_j + \mathfrak{f}_{j+1}$, erhält man unter Beachtung der Lemmas 2 und 4, sowie von (17)

$$|u(\mathfrak{g}_j)| \gg \{D_j - |v(\mathfrak{g}_j)|\, |u_j|\} v_j^{-1} \gg \{N_j^{\eta\tau/(\tau-1)} - N_j^{\eta+1}\} N_j^{-\eta} \gg N_j^{\eta/(\tau-1)},$$

sodass wegen $\eta/(\tau-1) > 1$ für $\eta > 0$ zusammen mit (19) gilt

$$\mathfrak{g}_j \in \Phi \text{ für genügend grosses } j.$$

Weiter ist

$$\|\mathfrak{g}_j\| \ll N_{j+1}$$

und mit (11)

$$|L(\mathfrak{G}_j)| \ll N_j^{-\eta} N_{j+1}^{-\eta/(\tau-1)}.$$

Beachtet man (18) und die lineare Unabhängigkeit von α, β und 1 über $\mathbf{Q}$, so folgt aus diesen letzten drei Formeln

$$\left.\begin{array}{l} |\mathfrak{g}_j| \to \infty, \text{ für } j \to \infty, \\ \mathfrak{g}_j \in \Phi \text{ und } |L(\mathfrak{G}_j)| \leq \varepsilon\, \|\mathfrak{g}_j\|^{-\tau} \text{ für alle genügend grossen } j. \end{array}\right\} \tag{20}$$

Das ist ein Widerspruch zur Gegenannahme AB. Damit ist die Behauptung AB für $0<\eta\leq 1$ bewiesen.

Den verbleibenden Fall $\eta>1$ unterteilt man in mehrere Unterfälle, wobei man den Beweis im ersten mit Hilfe der in [1] eingeführten Ueberlegungen beendet.

Fall 2.1. $\eta>1$; $\mu_2 \ll N_{j+1}^{\eta/\tau(\tau-1)}$.

Jede Kreisscheibe in der (ξ_1, ξ_2)-Ebene vom Radius $2\mu_2$ enthält einen Punkt des Gitters Λ. Deshalb existiert ein Gitterpunkt $\mathfrak{g}_j \in \Lambda$, $\mathfrak{g}_j \neq \mathfrak{o}$, für den gilt

$$\mathfrak{g}_j \in \Phi, \qquad |u(\mathfrak{g}_j)| \ll \mu_2, \qquad |v(\mathfrak{g}_j)| \ll \mu_2. \tag{21}$$

Mit ganzen Zahlen a_j, b_j lässt sich $\mathfrak{g}_j$ darstellen in der Form $\mathfrak{g}_j = a_j\mathfrak{f}_j + b_j\mathfrak{f}_{j+1}$. Setzt man die Abschätzungen unter (21) in (16) ein und beachtet die Lemmas 2 und 5, erhält man

$$|a_j| \ll (N_{j+1}/N_j)^{\eta}, \qquad |b_j| \ll 1.$$

Für den Gitterpunkt $\mathfrak{G}_j := a_j\mathfrak{F}_j + b_j\mathfrak{F}_{j+1} \neq \mathfrak{O}$, dessen Projektion der Punkt $\mathfrak{g}_j$ ist, ergibt sich daraus mit (11)

$$|L(\mathfrak{G}_j)| \ll N_j^{-\eta} N_{j+1}^{-\eta/(\tau-1)}.$$

Zusammen mit (21) und $\mu_2 \ll N_{j+1}^{\eta/\tau(\tau-1)}$ impliziert diese Abschätzung erneut (20) was, wie man sich überlegt hat, die Behauptung in diesem Fall beweist.

Fall 2.2 $\eta>1$; $\mu_2 \geq k_4^3 N_{j+1}^{\eta/\tau(\tau-1)}$.

Nach Lemma 5 und (13) gilt

$$k_4^3 N_j^{\eta} N_{j+1}^{\eta/\tau(\tau-1)} \ll D_j \ll |u_j|\, N_{j+1}^{\eta} + N_j^{\eta} N_{j+1},$$

woraus wegen (18) zusammen mit (13) für genügend grosses k_4 folgt

$$k_4^2 N_j^{\eta} N_{j+1}^{-\eta+\eta/\tau(\tau-1)} \leq |u_j| \ll N_j. \tag{22}$$

Fall 2.2.1. $\eta>1$; $\mu_2 \geq k_4^3 N_{j+1}^{\eta/\tau(\tau-1)}$; $N_j \leq k_5 N_{j+1}^{1-1/\tau(\tau-1)}$.

Nach (22) ist $u_j \neq 0$. Da $tg\theta$ rational vorausgesetzt wurde, existiert also ein k_6 mit

$$|u_j| \geq k_6.$$

Sei

$$\delta = \delta_j := [N_j^{\eta/(\eta-1)}].$$

Aus (13) folgt dann für genügend grosses ganzes $k_7 > \{\nu^{-1}(2/k_6)^\eta\}^{1/(\eta-1)}$:

$$\mathfrak{g}_j := k_7 \delta \mathfrak{f}_j \in \Phi, \tag{23}$$

sowie

$$\|\mathfrak{g}_j\| \leq 2k_7 N_j^{\eta^2/(\eta-1)}. \tag{24}$$

Sei $\mathfrak{G}_j := k_7 \delta \mathfrak{F}_j$. Dann ist $\mathfrak{G}_j$ ein Gitterpunkt ungleich $\mathfrak{O}$ mit der Projektion $\mathfrak{g}_j$. Man benützt nun (11) und die im Fall 2.2.1 gültige Voraussetzung über N_j. Wählt man in letzterer k_5 klein genug – zum Beispiel $k_5 = \{\varepsilon/(2k_7)^{1+\tau} k_8\}^{(\tau^2-\tau-1)/\eta\tau^2}$, wobei k_8 die implizit in (11) auftretende Schranke ist – so erfüllt $\mathfrak{G}_j$ zudem die Abschätzung

$$|L(\mathfrak{G}_j)| \leq \varepsilon (2k_7)^{-\tau} N_j^{-(\eta\tau^2/(\tau^2-\tau-1))+\eta/(\eta-1)}. \tag{25}$$

Es gilt

$$-(\eta\tau^2/(\tau^2-\tau-1)) + \eta/(\eta-1) \leq -\tau\eta^2/(\eta-1) \quad \text{für alle} \quad \eta > 1, \tag{26}$$

denn diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$f(\tau(\eta); \eta) \leq 0 \quad \text{für alle} \quad \eta > 1, \tag{27}$$

wobei (27) für $1 < \eta < 2.5$ erfüllt ist nach Definition von $\tau(\eta)$ respektive $\omega(\eta)$ und für $\eta \geq 2.5$ sofort nachgeprüft werden kann.

Aus (24) bis (26) ergibt sich zusammen mit (23) wieder Aussage (20), sodass die Behauptung AB nur noch zu beweisen ist im

Fall 2.2.2. $\eta > 1$; $\mu_2 \geq k_4^3 N_{j+1}^{\eta/\tau(\tau-1)}$; $N_j > k_5 N_{j+1}^{1-1/\tau(\tau-1)}$.

Für $\eta > 1$ setzt man $\psi = \psi(\eta) := \dfrac{\eta^2}{\eta - 1}\{1 - 1/\tau(\tau-1)\}$, sodass gilt

$$\psi - \eta + \eta/\tau(\tau-1) = \psi/\eta \tag{28}$$

und wegen (22) wieder für genügend grosses k_4

$$k_4 N_j^\eta \leq N_{j+1}^\psi \tag{29}$$

ist. Mit

$$\delta = \delta_j := \left[\frac{N_{j+1}^\psi}{N_j^\eta k_4} + 1\right]$$

sowie (28) ergibt sich aus (22)

$$|u(\delta \mathfrak{f}_j)| \geq k_4 N_{j+1}^{\psi - \eta + \eta/\tau(\tau-1)} = k_4 N_{j+1}^{\psi/\eta}.$$

Zudem existiert nach (13) und (29) ein k_9 mit

$$|v(\delta \mathfrak{f}_j)| \leq |\delta \mathfrak{f}_j| \leq \frac{k_9}{k_4} N_{j+1}^\psi. \tag{30}$$

Diese letzten beiden Formeln zeigen, dass

$$\mathfrak{g}_j := \delta \mathfrak{f}_j \in \Phi \tag{31}$$

ist, falls man k_4 auch grösser $(k_9/\nu)^{1/(\eta-1)}$ wählt. Die Projektion des Gitterpunktes $\mathfrak{G}_j := \delta \mathfrak{F}_j \neq \mathfrak{O}$ ist $\mathfrak{g}_j$. Gemäss (30) gilt

$$\|\mathfrak{g}_j\| \leq \frac{k_9}{k_4} N_{j+1}^\psi, \tag{32}$$

und nach (11), (29), sowie der in diesem Fall gültigen Voraussetzung über N_j existiert eine Schranke k_{10}, sodass man hat

$$|L(\mathfrak{G}_j)| \leq \frac{k_{10}}{k_4} N_{j+1}^{\psi - (\eta\tau/(\tau-1)) - \eta(1 - 1/\tau(\tau-1))}. \tag{33}$$

Aequivalent zu (27) ist die Beziehung

$$\psi-(\eta\tau/(\tau-1))-\eta(1-1/\tau(\tau-1))\leq-\tau\psi \quad \text{für alle} \quad \eta>1.$$

Wählt man schliesslich k_4 auch grösser $\{k_9^\tau k_{10}/\varepsilon\}^{1/(\tau-1)}$, so implizieren also (32) und (33) zusammen mit (31) weider Aussage (20), und die Behauptung AB ist vollständig bewiesen.

IV. Beweis der Behauptung B_1

Fall 1. $1<\eta\leq 2$.

Nach dem Satz von Dirichlet existiert eine unendliche Folge von Gitterpunkten $\mathfrak{F}_m$, $\mathfrak{f}_m\neq\mathfrak{o}$, $m=1,2,\ldots$ mit

$$|L(\mathfrak{F}_m)|\leq k_0\,\|\mathfrak{f}_m\|^{-2},\ m=1,2,\ldots. \tag{34}$$

Man darf annehmen, dass $\mathfrak{f}_m\notin\Phi_1$ ist für genügend grosses m, da andernfalls die Behauptung mit (34) bewiesen wäre. Also ist $|u(\mathfrak{f}_m)|^\eta\geq(1/\nu_1)|v(\mathfrak{f}_m)|$, sodass für $k_{11}:=[(\nu_1/\nu)^{1/(\eta-1)}+1]$ gilt

$$\mathfrak{g}_m:=k_{11}\mathfrak{f}_m\in\Phi_1 \text{ für alle genügend grossen } m. \tag{35}$$

Zudem zeigt (34), dass der Gitterpunkt $\mathfrak{G}_m:=k_{11}\mathfrak{F}_m\neq\mathfrak{O}$, dessen Projektion der Punkt $\mathfrak{g}_m$ ist, die Abschätzung

$$|L(\mathfrak{G}_m)|\leq k_0k_{11}^3\,\|\mathfrak{g}_m\|^{-2}$$

erfüllt, was zusammen mit (35) die Behauptung B_1 für $1<\eta\leq 2$ beweist.

Fall 2. $2<\eta<2.5$.

Das weitere Vorgehen ist ganz analog wie beim Beweis der Behauptung AB. Man macht die

GEGENANNAHME $\boldsymbol{B_1}$. Zu gegebenem η, $2<\eta<2.5$, existieren höchstens endlich viele Gitterpunkte $\mathfrak{G}\neq\mathfrak{O}$, welche (7) genügen.

Das zeigt, dass die Voraussetzung 2 in Kapitel II erfüllt ist und alle dort bewiesenen Aussagen gelten für die Wahl

$$h=\eta, \qquad t=2, \qquad \Phi^*=\Phi_1=\Phi_1(\nu, \nu_1, \eta, \theta).$$

Insbesondere ist nach (12) und der Definition von Φ_1 zusätzlich zu (13) die Abschätzung

$$|u_j| \gg N_j^{\eta(5-2\eta)/(4-\eta)} \tag{36}$$

erfüllt. Im

Fall 2.1. $2<\eta<2.5$; $\mu_2 \leq N_{j+1}^{\eta/2}$,

kann die Behauptung durch genau dieselbe Argumentation bewiesen werden, wie im entsprechenden Fall 2.1 des Kapitels III.

Fall 2.2. $2<\eta<2.5$; $N_j \ll N_{j+1}^{(4-\eta)/2(\eta-1)}$.

Jetzt ist wegen (11)

$$L_j \ll N_j^{-4\eta(\eta-1)/(4-\eta)}. \tag{37}$$

Man definiert

$$\delta=\delta_j:=[N_j^{2\eta(\eta-2)/(4-\eta)}].$$

Die Abschätzungen (13) und (36) zeigen, dass ein ganzes k_{12} existiert, sodass gilt

$$\mathfrak{g}_j:=k_{12}\delta\mathfrak{f}_j \in \Phi_1. \tag{38}$$

Es ist

$$\|\mathfrak{g}_j\| \ll N_j^{\eta^2/(4-\eta)}. \tag{39}$$

Die Projektion des Gitterpunktes $\mathfrak{G}_j:=k_{12}\delta\mathfrak{F}_j \neq \mathfrak{O}$ ist $\mathfrak{g}_j$, und mit (37) sowie (39) hat man

$$|L(\mathfrak{G}_j)| \ll N_j^{2\eta^2/(4-\eta)} \ll \|\mathfrak{g}_j\|^{-2}.$$

Der Widerspruch, der sich daraus zusammen mit (38) zur Gegenannahme B_1

ergibt, beweist die Behauptung B_1 in diesem Fall.

Fall 2.3. $2<\eta<2.5$; $\mu_2>N_{j+1}^{\eta/2}$; $N_j \gg N_{j+1}^{(4-\eta)/2(\eta-1)}$.

Man benützt nun, dass $\eta>2$ vorausgesetzt ist. Wegen $\mu_2>N_{j+1}^{\eta/2}$ erhält man dann aus (13) und Lemma 4

$$N_j^{\eta}N_{j+1}^{-\eta/2} \ll |u_j| \ll N_j. \tag{40}$$

Also ist

$$N_j^{\eta} \ll N_{j+1}^{\eta^2/2(\eta-1)},$$

und mit

$$\delta=\delta_j := [1+N_{j+1}^{\eta^2/2(\eta-1)}/N_j^{\eta}],$$

sowie genügend grossem ganzem k_{13} gilt nach (13) und (36)

$$\mathfrak{g}_j := k_{13}\delta\mathfrak{f}_j \in \Phi_1 \tag{41}$$

und

$$\|\mathfrak{g}_j\| \ll N_{j+1}^{\eta^2/2(\eta-1)}.$$

Für den Gitterpunkt $\mathfrak{G}_j := k_{13}\delta\mathfrak{F}_j \neq \mathfrak{O}$, dessen Projektion der Punkt $\mathfrak{g}_j$ ist, folgt, wenn man (11) und die Bedingung über N_j beachtet

$$|L(\mathfrak{G}_j)| \ll N_j^{-\eta}N_{j+1}^{-2\eta+\eta^2/2(\eta-1)} \ll N_{j+1}^{-\eta^2/(\eta-1)} \ll \|\mathfrak{g}_j\|^{-2}.$$

Zusammen mit (41) ist dies für grosse j ein Widerspruch zur Gegenannahme B_1. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

V. Beweis der Behauptungen D und (5)

Zum Beweis der Behauptung D betrachtet man eine Funktion λ mit den Eigenschaften (4) und ein $\eta \in (0, 1]$. Man nimmt an, dass, ausser wenn es explizit angegeben wird, das Argument von λ gleich η ist, das heisst $\lambda := \lambda(\eta)$. Wieder führt man den Beweis indirekt und geht somit aus von der

GEGENANNAHME D. Sowohl für $x=\eta$ als auch für $x=\eta^*(\eta)$ gibt es höchstens endlich viele Gitterpunkte $\mathfrak{G}=(a, b, c)\neq\mathfrak{O}$ mit den unter (3) angegebenen Eigenschaften.

Wegen (4) ist also Voraussetzung 1 in Kapitel II erfüllt für

$$h=\eta, \qquad t=\lambda=\lambda(\eta), \qquad \Phi^*=\Phi(\nu, \eta, \theta), \tag{42}$$

und alle dort bewiesenen Aussagen gelten für diese Wahl. Wie in Kapitel III, Fall 1, zeigt man, dass man für $\delta=\delta_j:=[v_{j+1}/v_j]$, $\mathfrak{G}_j:=\mathfrak{F}_{j+1}-\delta\mathfrak{F}_j\neq\mathfrak{O}$ und geeignete k_{14}, k_{15} hat

$$|v(\mathfrak{g}_j)|\leq N_j^{\eta}, \tag{43}$$

$$\|\mathfrak{g}_j\|\leq k_{14}N_{j+1}, \tag{44}$$

$$\mathfrak{g}_j\in\Phi(\nu, \eta, \theta), |L(\mathfrak{G}_j)|\leq k_{15}N_j^{-\eta}N_{j+1}^{-\eta/(\lambda-1)}. \tag{45}$$

Für $N_j^{\eta}\geq k_{16}N_{j+1}^{\lambda-\eta/(\lambda-1)}$, $k_{16}=k_{15}k_{14}^{\lambda}/\varepsilon$, ergibt sich aus diesen Formeln wie in den vorangehenden Beweisen ein Widerspruch zur Gegenannahme D, sodass es genügt, folgende Fälle zu betrachten:

Fall 1. $N_j^{\eta}<k_{16}N_{j+1}^{\lambda-\eta/(\lambda-1)}$; $|u(\mathfrak{g}_j|\ll N_{j+1}^{\eta/\lambda(\lambda-1)}$.

Da aus (4) (iii) folgt $\lambda-\eta/(\lambda-1)\leq\eta/\lambda(\lambda-1)$ ist nun

$$|(v(\mathfrak{g}_j)|\ll N_{j+1}^{\eta/\lambda(\lambda-1)},$$

und (44) lässt sich ersetzen durch

$$\|\mathfrak{g}_j\|\ll N_{j+1}^{\eta/\lambda(\lambda-1)}.$$

Zusammen mit (45) widerspricht dies für grosse j wieder der Gegenannahme D.

Fall 2. $N_j^{\eta}<k_{16}N_{j+1}^{\lambda-\eta/(\lambda-1)}$; $|u(\mathfrak{g}_j)|\geq k_{17}^2N_{j+1}^{\eta/\lambda(\lambda-1)}$.

Jetzt ist für genügend grosses k_{17}

$$|u(\mathfrak{g}_j)|\geq k_{17}N_j^{\eta^2/\lambda(\lambda^2-\lambda-\eta)},$$

also mit (43) und wenn man k_{17} auch grösser $\nu^{-\eta/\lambda(\lambda^2-\lambda-\eta)}$ wählt:

$$\mathfrak{g}_j\in\Phi(\nu, \eta^*(\eta), \theta).$$

Beachtet man (44), die Abschätzung in (45) und (4) (iv), ergibt sich daraus erneut ein Widerspruch zur Gegenannahme D, und die Behauptung D ist bewiesen. Für die spezielle, mit Hilfe von g in Bemerkung (vi) definierte Funktion λ sind noch die Behauptungen (5) zu verifizieren. Sei von nun an η irgend eine feste Zahl aus $(0, 1]$. Dann ist $g(x;\eta)$ eine monoton wachsende Funktion von x für $x>1\geq(1+\sqrt{1+3\eta})/3$, und da $w(\eta)>0$ ist, gilt $g(\tau(\eta);\eta)<0$, woraus wegen $\tau(\eta)>1$ die Behauptung (5) (i) folgt. Es bleibt zu zeigen, dass λ die Bedingungen (4) erfüllt. Nach der Definition von λ ist $\eta^*(\eta)=w(\eta)$ und da für alle $x\in(0,1]$ mit $\tau(x)=\rho(x):=(1+\sqrt{1+4x})/2$ gilt

$$\rho(x)<\lambda(x)<\rho(x)+xw(x), \tag{46}$$

ist dies für (4) (i) and (iii) nicht schwierig. Aequivalent zu (4) (ii) ist die Ungleichung

$$\lambda(\eta)<1+\eta.$$

Diese ist aber erfüllt, was man wegen $g(1+\eta;\eta)>0$ einsieht mit Hilfe einer analogen Ueberlegung wie beim Beweis von (5) (i). Die letzte Beziehung (4) (iv) hat auf Grund der Definition von λ die Form

$$\eta/\{\lambda(\eta)-1\}\geq\lambda(w(\eta)). \tag{47}$$

Auf dem Intervall $0<x\leq1$ ist die Funktion $w(x)$ monoton wachsend und $0<w(x)\leq x$. Man kann dies zum Beispiel zeigen, indem man die entsprechende Eigenschaft zuerst für die Umkehrfunktion von w nachweist, respektive indem man analog argumentiert wie beim Beweis von (5) (i). Also ist

$$w^3(\eta)\leq w^2(\eta) \quad \text{und} \quad w(w(\eta))\leq w(\eta),$$

sowie wegen $\eta\leq1$, $w(\eta)<0,201$ auch

$$\sqrt{1+4\eta}\leq1+2\eta-z_1\eta^2,$$

$$\sqrt{1+4w(\eta)}\leq1+2w(\eta)-z_2w^2(\eta).$$

Unter Verwendung von (46) und diesen letzten 4 Formeln sieht man, dass (47) sicher erfüllt ist, falls gilt

$$\{12-4z_2-\eta z_1(2-z_2)\}w^2(\eta)+2\{4-\eta z_1\}w(\eta)-2\eta z_1\leq0.$$

Da w so gewählt wurde, dass man in dieser Beziehung Gleichheit hat, ist auch (4) (iv) verifiziert.

LITERATURANGABEN

[1] W. M. Schmidt. *Two questions in diophantine approximation.* Monatshefte für Mathematik *82* (1976), 237–245.

[2] H. Davenport and W. M. Schmidt. *Approximation to real numbers by quadratic irrationals.* Acta Arithm. *13* (1967), 169–176.

Forschungsinstitut für Mathematik
ETH-Z Hg. G.66.2
Rämistrasse 101
8092 Zürich

Eingegangen den 16 Oktober 1981