

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 56 (1981)

**Artikel:** Ueber extremale quasikonforme Abbildungen.  
**Autor:** Fehlmann, Richard  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43258>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.10.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ueber extremale quasikonforme Abbildungen

RICHARD FEHLMANN

## 1. Einleitung

Wir betrachten quasikonforme Abbildungen  $f$  des Einheitskreises  $D = \{z \mid |z| < 1\}$  auf sich. Diese induzieren durch stetige Fortsetzung einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus  $\mu$  der Kreislinie  $\partial D$  auf sich. Betrachten wir die Klasse  $Q_f$  (gelegentlich bezeichnen wir sie auch mit  $Q_\mu$ ) aller quasikonformen Abbildungen mit denselben Randwerten wie  $f$ , so gibt es eine (oder mehrere) extremale quasikonforme Abbildung  $f_0$  in  $Q_f$ , d.h. eine mit kleinstmöglicher maximaler Dilatation. Dies folgt aus der Normalität der Menge aller  $K$ -quasikonformen Abbildungen in  $Q_f$  für festes  $K$ . Im Folgenden bezeichne  $K_f$  die maximale Dilatation von  $f$  und  $K_0 = \inf_{f \in Q_{f_0}} K_f$  diejenige einer Extremalen  $f_0$ .

Wir wissen:  $f \in Q_{f_0}$  ist genau dann für seine Randwerte extremal, wenn für dessen komplexe Dilatation  $\kappa$  gilt

$$\sup_{\phi \in v} \left| \iint_D \kappa(z) \phi(z) \, dx \, dy \right| = \|\kappa\|_\infty. \tag{1}$$

Dabei ist  $v$  die Menge aller holomorphen quadratischen Differentiale  $\phi$  in  $D$  mit  $L_1$ -Norm

$$\|\phi\| = \iint_D |\phi(z)| \, dx \, dy = 1.$$

Die Notwendigkeit dieser Bedingung wurde von Hamilton [3] gezeigt und die Hinlänglichkeit von Reich und Strebel [10]. Sie hat zur Konsequenz: ist  $\kappa_0$  komplexe Dilatation einer extremalen Abbildung  $f_0$ , so gibt es eine Folge in  $D$  holomorpher quadratischer Differentiale  $\phi_n$  mit  $\|\phi_n\| = 1$ , sodass

$$\left| \iint_D \kappa_0 \phi_n \, dx \, dy \right| \rightarrow \|\kappa_0\|_\infty =: k_0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Eine solche Folge heisst Hamiltonfolge. Da  $v$  normal ist, können wir o.B.d.A. annehmen, eine solche Hamiltonfolge konvergiere lokal gleichmässig in  $D$  gegen

eine holomorphe Funktion  $\phi_0$ . Ist  $\|\phi_0\| = 1$ , so folgt

$$\left| \iint_D \kappa_0 \phi_0 \, dx \, dy \right| = k_0.$$

Ist  $0 < k_0 < 1$  und berücksichtigen wir, dass wir  $\phi_0$  durch  $\phi_0 e^{i\theta}$  ersetzen können, so folgt

$$\kappa_0 = k_0 \frac{\bar{\phi}_0}{|\phi_0|} \quad \text{f.ü.}$$

und damit ist  $f_0$  eine Teichmüllersche Abbildung sowie  $\phi_0$  ihr zugehöriges holomorphes quadratisches Differential. Dieses hat endliche Norm, also ist  $f_0$  sogar eindeutig extremal, d.h. für  $f \in Q_{f_0}$ ,  $f \neq f_0$ , gilt  $K_f > K_{f_0} = K_0$  (vgl. [12]).

Ist  $0 \leq \|\phi_0\| < 1$ , so können wir annehmen, dass  $\phi_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  lokal gleichmässig in  $D$  [14]. Wir sprechen von einer degenerierenden Hamiltonfolge. Es ist also von Interesse, diesen Fall zu untersuchen. Wir werden in Abschnitt 4 zeigen, dass es dann einen wesentlichen Randpunkt gibt, d.h. einen Punkt  $\zeta \in \partial D$ , sodass die maximale Dilatation  $K_0$  der Extremalen eine untere Schranke für die maximale Dilatation jeder Erweiterung der Randabbildung in nur eine Umgebung von  $\zeta$  ist. Hieraus ergibt sich die folgende Alternative für extremale quasikonforme Abbildungen. Es handelt sich um eine Teichmüllersche Abbildung mit holomorphem quadratischem Differential endlicher Norm (sie ist also eindeutig extremal) oder eine mit mindestens einem wesentlichen Randpunkt. Diese Aussage ist eine Verschärfung des Rahmenabbildungskriteriums [14].

An dieser Stelle wollen wir das Problem auch allgemeiner stellen. Sei  $\Gamma$  eine abgeschlossene Menge auf  $\partial D$  und  $f \in Q_\mu$ . Es gibt dann auch extremale Abbildungen  $f_\Gamma$  in der grösseren Klasse  $Q_\mu^\Gamma$  aller quasikonformen Abbildungen des Einheitskreises auf sich, die auf  $\Gamma$  mit  $\mu$  übereinstimmen. Dann gilt, sofern  $\Gamma$  mindestens 4 Punkte hat:  $f_\Gamma$  ist in  $Q_\mu^\Gamma$  genau dann extremal, wenn für deren komplexe Dilatation  $\kappa_\Gamma$

$$\sup_{\phi \in v_\Gamma} \left| \iint_D \kappa_\Gamma \phi \, dx \, dy \right| = \|\kappa_\Gamma\|_\infty \tag{2}$$

ist, wobei  $v_\Gamma$  die Menge der  $\phi \in v$  ist, die noch reell längs  $\partial D \setminus \Gamma$  sind, d.h. wo  $\phi(z) \, dz^2 \in \mathbb{R}$  für  $z \in \partial D \setminus \Gamma$  [9].

Sei  $K_\Gamma = \inf_{f \in Q_\mu^\Gamma} K_f$ . Für eine Extremale  $f_\Gamma$  gilt dann: Sie ist Teichmüllersch mit holomorphem quadratischem Differential  $\phi_\Gamma$  in  $v_\Gamma$  oder es gibt einen bezüglich  $\Gamma$  wesentlichen Randpunkt  $\zeta$ , d.h. einen Punkt  $\zeta \in \Gamma$ , sodass  $K_\Gamma$  eine untere Schranke für die maximale Dilatation jeder quasikonformen Abbildung ist,

welche eine Umgebung  $U$  von  $\zeta$  (bezüglich  $\bar{D}$ ) abbildet und auf  $U \cap \Gamma$  mit  $\mu$  übereinstimmt.

## 2. Die Dilatation der Randabbildung und die Hauptungleichung

Ist  $A$  eine offene Menge in  $\mathbb{C}$  und  $B \subset \mathbb{C}$ , so verstehen wir unter einer  $K$ -quasikonformen ( $K$ -q.k.) Abbildung  $f: A \rightarrow B$  eine Injektion, die  $K$ -quasikonform in jeder Zusammenhangskomponente von  $A$  mit Bildgebieten in  $B$  ist. Eine solche Abbildung heisst quasikonform (q.k.), wenn sie  $K$ -quasikonform für ein gewisses  $K$  ist.

Ist  $\mu$  die Randabbildung einer q.k. Abbildung des Einheitskreises  $D$  auf sich, so verstehen wir unter der Dilatation  $H$  von  $\mu$  die Zahl

$$H := \inf \{K_f \mid f: U(\partial D) \rightarrow D, \text{ q.k.}, f|_{\partial D} = \mu\}$$

und unter der (lokalen) Dilatation  $H_\zeta$  von  $\mu$  in  $\zeta$  ( $\zeta \in \partial D$ ) die Zahl

$$H_\zeta := \inf \{K_f \mid f: U(\zeta) \rightarrow D, \text{ q.k.}, f|_{U(\zeta) \cap \partial D} = \mu|_{U(\zeta) \cap \partial D}\}.$$

Dabei werden die Infima über alle bezüglich  $\bar{D}$  offenen Umgebungen  $U(\partial D)$  von  $\partial D$  bzw.  $U(\zeta)$  von  $\zeta$  und über alle derartigen Funktionen  $f$  genommen.

Wir bemerken sogleich, dass die Abbildung  $\zeta \mapsto H_\zeta$  auf  $\partial D$  nach oben halbstetig ist. Ist nämlich  $a > H_\zeta$ , so gibt es eine  $a$ -quasikonforme Erweiterung von  $\mu$  in eine Umgebung  $U$  von  $\zeta$  in  $\bar{D}$ . Also ist  $H_{\zeta'} \leq a$  für  $\zeta' \in U \cap \partial D$ . Deshalb wird das Supremum von  $\{H_\zeta \mid \zeta \in \partial D\}$  in einem Punkt  $\zeta_0 \in \partial D$  angenommen, und es ist  $H_{\zeta_0} = \text{Max}_{\zeta \in \partial D} H_\zeta$ .

Die Dilatation  $H$  und insbesondere die lokalen Dilatationen  $H_\zeta$  bilden natürlich untere Schranken für die zur Extremalen gehörige maximale Dilatation  $K_0$ . Ein wichtiges Werkzeug, um diese Grössen zu vergleichen, ist die Hauptungleichung ([10], p. 380). Sie besagt das folgende:

Sind  $f$  und  $f_1$  zwei quasikonforme Selbstabbildungen des Einheitskreises  $D$  in der Klasse  $Q_\mu$  mit komplexen Dilatationen  $\kappa$  und  $\kappa_1$ , so gilt für alle  $\phi \in \nu$

$$1 \leq \iint_D |\phi(z)| \frac{\left| 1 - \kappa(z) \frac{\phi(z)}{|\phi(z)|} \right|^2}{1 - |\kappa(z)|^2} \cdot \frac{\left| 1 + \mu_1(w) \frac{\kappa(z)}{\mu(w)} \frac{\phi(z)}{|\phi(z)|} \left[ \frac{1 - \bar{\kappa}(z) \bar{\phi}(z)/|\phi(z)|}{1 - \kappa(z) \phi(z)/|\phi(z)|} \right] \right|^2}{1 - |\mu_1(w)|^2} dx dy. \quad (1)$$



Dabei ist  $w = f(z)$  und  $\mu$  und  $\mu_1$  sind die komplexen Dilatationen von  $f^{-1}$  und  $f_1^{-1}$ .

Daraus ergibt sich die Hinlänglichkeit der Bedingung (1.1) [10] und auch das Rahmenabbildungskriterium [14]: Ist  $H < K_0$ , so gibt es keine degenerierende Hamiltonfolge. Die Extremale  $f_0$  ist also eindeutig extremal, denn sie ist Teichmüllersch mit quadratischem Differential endlicher Norm.

### 3. Eine Abschätzung der Dilatation der Randabbildung und ein daraus resultierender Fortsetzungssatz

Sei  $\mu$  eine Abbildung der Kreislinie  $\partial D$  auf sich, die sich quasikonform in den ganzen Einheitskreis fortsetzen lässt. Wir sagen dann kurz,  $\mu$  sei eine quasisymmetrische (q.s.) Abbildung von  $\partial D$  auf sich. Wenden wir nämlich auf Bild und Urbild die Abbildung  $-i \cdot \log z$  an und bezeichnen die induzierte Abbildung der reellen Achse auf sich wieder mit  $\mu$ , so ist  $\mu$  eine quasisymmetrische Abbildung gemäss der Definition in [2], denn sie lässt sich ja quasikonform in die obere Halbebene erweitern. Ferner gilt  $\mu(x + 2\pi) = \mu(x) + 2\pi$  für alle  $x \in \mathbf{R}$ .

Es gibt also ein  $\rho \geq 1$  mit

$$Q(\mu, x, t) := \frac{\mu(x+t) - \mu(x)}{\mu(x) - \mu(x-t)} \in \left[ \frac{1}{\rho}, \rho \right]$$

für alle  $x \in \mathbf{R}$  und  $t > 0$ . ( $\mu$  heisst dann  $\rho$ -quasisymmetrisch.)

Für  $E \subset \mathbf{R}$  definieren wir

$$\rho(E) := \inf \left\{ \rho \geq 1 \mid Q(\mu, x, t) \in \left[ \frac{1}{\rho}, \rho \right]; x-t, x, x+t \in E \right\},$$

und verstehen unter der lokalen Quasisymmetrie von  $\mu$  in  $x$  die Zahl

$$\rho_x := \inf \{ \rho(I) \mid x \in I, I \text{ ein offenes Intervall} \}.$$

Wie die lokale Dilatation ist auch  $x \mapsto \rho_x$  nach oben halbstetig. Weil  $\rho_x < \infty$  in  $x \in \mathbf{R}$ , gibt es ein  $x_0$ ,  $0 \leq x_0 \leq 2\pi$ , mit  $\rho_{x_0} = \text{Max}_{0 \leq x \leq 2\pi} \rho_x$ . Wegen  $\mu(x + 2\pi) = \mu(x) + 2\pi$  ist also  $\text{Max}_{x \in \mathbf{R}} \rho_x < \infty$ .

Für jeden Homöomorphismus  $\mu$  der Kreislinie auf sich nennen wir die so erhaltene Abbildung  $\mu$  kurz die induzierte reelle Abbildung.

LEMMA 3.1.  $\mu$  sei ein orientierungserhaltender Homöomorphismus der Kreislinie  $\partial D$  auf sich. Für die induzierte reelle Abbildung gelte

$$\rho_x < \infty \text{ für jedes reelle } x.$$

Dann lässt sich  $\mu$  quasikonform in den Einheitskreis erweitern, und für die Dilatation  $H$  von  $\mu$  gilt:

$$H \leq \left( \max_{x \in \mathbf{R}} \rho_x \right)^2.$$

Für die lokale Dilatation  $H_\zeta$  von  $\mu$  in  $\zeta \in \partial D$  gilt:

$$H_\zeta \leq \rho_x^2.$$

*Beweis.* Wir haben schon gesehen, dass  $\text{Max}_{x \in \mathbf{R}} \rho_x$  endlich ist. Sei nun  $A > \text{Max}_{x \in \mathbf{R}} \rho_x$ . Dann liegt jedes  $x \in \mathbf{R}$  in einem offenen Intervall  $J$ , in welchem  $\mu$   $A$ -quasisymmetrisch ist, d.h. wo  $\rho(J) \leq A$  ist. Die Funktion

$$l_x := \sup \{ l > 0 \mid \mu \text{ ist } A\text{-q.s. in } (x-l, x+l) \}$$

ist stetig, denn man sieht sofort, dass

$$l_x - |\Delta x| \leq l_{x+\Delta x} \leq l_x + |\Delta x|$$

gilt, und sie ist positiv oder konstant unendlich. Wegen  $l_{x+2\pi} = l_x$ , gibt es ein  $l_0 > 0$ , sodass  $\mu$   $A$ -quasisymmetrisch ist in  $[x-l_0, x+l_0]$  für jedes  $x \in \mathbf{R}$ . Wir konstruieren nun die Beurling-Ahlfors-Fortsetzung [2] in der oberen Halbebene. Im horizontalen Streifen  $\{x+iy \mid 0 \leq y \leq l_0\}$  wird diese  $A^2$ -quasikonform, und da sie auch die horizontale Periode  $2\pi$  hat, erhalten wir eine  $A^2$ -q.k. Erweiterung von  $\mu$  in einen Kreisring  $r < |z| \leq 1$ . Da  $A > \text{Max}_{x \in \mathbf{R}} \rho_x$  beliebig war, gilt also  $H \leq (\text{Max}_{x \in \mathbf{R}} \rho_x)^2$ .

Nach einem Erweiterungssatz von Lehto und Virtanen ([7], p. 100) gibt es nun eine q.k. Abbildung des Einheitskreises, die in einem kleineren Kreisring  $\tilde{r} \leq |z| \leq 1$ ,  $\tilde{r} > r$ , mit der konstruierten Erweiterung zusammenfällt.

Die Abschätzung für die lokale Dilatation erhalten wir ebenso, indem wir  $A > \rho_x$  wählen.

Seien  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$  reelle Zahlen oder  $\infty$ , dann bezeichne  $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$  den Modul des Vierecks, bestehend aus der oberen Halbebene und den Ecken

$x_1, x_2, x_3, x_4$ . Wir definieren

$$\mathcal{P}(r) := M(-1, 0, r, \infty).$$

Die  $a$ - und  $b$ -Seiten seien so gewählt, dass  $\mathcal{P}$  monoton wächst.  $\mathcal{P}$  ist stetig in  $[0, \infty]$ , wenn wir  $\mathcal{P}(0) = 0$  und  $\mathcal{P}(\infty) = \infty$  setzen. Es gilt

$$\mathcal{P}(r) = 1 + \Theta(r) \log r \quad \text{für } r \geq 1,$$

Wobei  $\Theta$  monoton von  $0,2284 \dots$  bis  $1/\pi$  wächst (vgl. [2]).

Für eine reellwertige Funktion  $\mu$  in einem Intervall der reellen Achse, welche sich quasikonform in eine Umgebung dieses Intervalls fortsetzen lässt, sind lokale Dilatation  $H_x$  und lokale Quasisymmetrie  $\rho_x$  in  $x$  definiert, und wir können  $\rho_x$  durch  $H_x$  abschätzen.

**LEMMA 3.2.** *Sei  $I$  ein offenes Intervall und  $\mu : I \rightarrow \mathbf{R}$  stetig monoton wachsend. Für ein  $x_0 \in I$  existiere eine quasikonforme Fortsetzung von  $\mu$ , die in einer Umgebung von  $x_0$  (bezügl. der oberen Halbebene) mit  $\mu$  übereinstimmt. Also  $H_{x_0} < \infty$ . Dann gilt*

$$\rho_{x_0} \leq \mathcal{P}^{-1}(H_{x_0}).$$

*Beweis.* Sei  $A > H_{x_0}$ . Es gibt also eine  $A$ -quasikonforme Abbildung  $f$  eines Halbkreises  $\{z = x + iy \mid |z - x_0| \leq r, y \geq 0\}$  in die obere Halbebene mit  $f(x) = \mu(x)$  für reelle  $x$ .

Wir betrachten Folgen  $x_n, t_n$  mit  $x_n \rightarrow x_0, t_n \downarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Auf das Urbild wenden wir die Abbildung  $z \mapsto (z - x_n)/t_n$  an und auf das Bild  $w \mapsto (w - \mu(x_n))/(\mu(x_n) - \mu(x_n - t_n))$ . Weil  $x_n - t_n, x_n, x_n + t_n$  dabei in  $-1, 0, 1$  übergehen und  $\mu(x_n - t_n), \mu(x_n)$  in  $-1, 0$ , so gilt für die neue induzierte Abbildung  $f_n : f_n(-1) = -1, f_n(0) = 0, f_n(1) = Q(\mu, x_n, t_n)$ , und  $f_n$  ist in einem Gebiet  $A$ -q.k., das mit  $n \rightarrow \infty$  gegen die obere Halbebene geht.  $\{f_n\}$  ist normal ([7], p. 76), also konvergiert eine Teilfolge gegen eine  $A$ -q.k. Abbildung  $g$  der oberen Halbebene auf sich mit  $g(-1) = -1, g(0) = 0$  und  $g(\infty) = \infty$ . Also ist

$$\mathcal{P}(g(1)) = M(-1, 0, g(1), \infty) \in \left[ \frac{1}{A}, A \right].$$

Somit ist  $\mathcal{P}^{-1}(1/A) \leq g(1) \leq \mathcal{P}^{-1}(A)$ , und weil  $g(1)$  der Limes einer Teilfolge von  $Q(\mu, x_n, t_n)$  ist, kann es keine Folgen  $x_n \rightarrow x_0, t_n \downarrow 0$  geben mit

$Q(\mu, x_n, t_n) \notin [1/B, B]$  für jedes  $n$ , wenn  $B > \mathcal{P}^{-1}(A)$  ist. Also ist

$$\rho_{x_0} \leq \mathcal{P}^{-1}(H_{x_0}),$$

denn  $A > H_{x_0}$  war beliebig.

Weil bei der konformen Abbildung  $-i \log z$  natürlich  $H_\zeta = H_x$  gilt für  $x = -i \log \zeta$ , und weil auf Grund der Monotonie von  $\mathcal{P}$  eben  $\mathcal{P}^{-1}(\text{Max}_{\zeta \in \partial D} H_\zeta) = \text{Max}_{\zeta \in \partial D} \mathcal{P}^{-1}(H_\zeta)$  ist, erhalten wir aus Lemma 3.1. und 3.2. den Fortsetzungssatz:

**SATZ 3.1.** *Ist  $\mu$  ein orientierungserhaltender Homöomorphismus der Kreislinie  $\partial D$  auf sich und gilt in jedem Punkt  $\zeta \in \partial D$  für die lokale Dilatation von  $\mu$  in  $\zeta$*

$$H_\zeta < \infty,$$

*dann lässt sich  $\mu$  quasikonform in den Einheitskreis erweitern ( $\mu$  ist also quasisymmetrisch) und für die Dilatation  $H$  von  $\mu$  gilt*

$$H \leq \left( \mathcal{P}^{-1} \left( \text{Max}_{\zeta \in \partial D} H_\zeta \right) \right)^2,$$

*d.h.  $H$  ist durch eine Konstante nach oben beschränkt, die nur von  $\text{Max}_{\zeta \in \partial D} H_\zeta$  abhängt.*

**Bemerkung 3.1.** Zusammen mit dem schon erwähnten Erweiterungssatz ([7], p. 100) können wir schliessen: Unter den Voraussetzungen des Satzes 3.1. gibt es für jede Zahl  $\hat{H} > (\mathcal{P}^{-1}(\text{Max}_{\zeta \in \partial D} H_\zeta))^2$  eine quasikonforme Fortsetzung von  $\mu$  in den ganzen Einheitskreis, die in einer Umgebung der Kreislinie noch  $\hat{H}$ -quasikonform ist.

#### **4. Bestimmung der maximalen Dilatation einer extremalen quasikonformen Abbildung im Falle degenerierender Hamiltonfolgen**

Die Funktionenklasse  $v$  ist enthalten in der grösseren Klasse  $L_1(D)$  der komplexwertigen messbaren Funktionen  $\phi$  in  $D$  mit

$$\|\phi\| = \iint_D |\phi| \, dx \, dy < \infty.$$

Wir betrachten zunächst degenerierende Folgen  $(\phi_m)$  in  $L_1(D)$ , also  $\phi_m \in L_1(D)$

und  $\phi_m \rightarrow 0$  lokal gleichmässig in  $D$  für  $m \rightarrow \infty$ . Ist  $I \subseteq \partial D$  ein abgeschlossenes oder offenes Intervall mit Endpunkten  $z_1, z_2$ , so sei das Argument  $\arg z$  in einer Umgebung von  $I$  stetig festgelegt, die  $z_i$  seien so numeriert, dass  $\arg z_1 \leq \arg z \leq \arg z_2$  ist für  $z \in I$ , und  $S_I$  bezeichne den Sektor

$$S_I := \{z \in D \mid \arg z_1 \leq \arg z \leq \arg z_2\}.$$

$|I|$  steht für die Bogenlänge von  $I$ . Wir definieren

$$\theta(I) := \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \iint_{S_I} |\phi_m| \, dx \, dy.$$

Für festes  $\zeta \in \partial D$  definieren wir

$$\theta(\zeta) := \inf \{ \theta(I) \mid \zeta \in I, I \text{ ein offenes Intervall auf } \partial D \}.$$

Für Intervalle  $I, J$  mit  $J \subset I$  gilt natürlich  $\theta(J) \leq \theta(I)$ . Verlangen wir ferner  $\|\phi_m\| \leq 1$ , so gilt  $\theta(I) \leq 1$ . Ist  $I_n$  das abgeschlossene oder offene Intervall auf  $\partial D$  mit Endpunkten  $\zeta e^{-i/n}, \zeta e^{i/n}$ , so überlegt man sich leicht, dass gilt

$$\theta(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta(I_n).$$

$\zeta \mapsto \theta(\zeta)$  ist somit auf  $\partial D$  definiert und hängt von der degenerierenden Folge  $(\phi_m)$  ab. Geht man zu einer Teilfolge  $(\phi_{m_k})$  über, so wird die entsprechende Funktion  $\theta$  höchstens kleiner. Wir beweisen nun das

**LEMMA 4.1.** *Sei  $(\phi_m)$  eine Folge in  $L_1(D)$  mit  $\|\phi_m\| \leq 1$ , die lokal gleichmässig gegen Null konvergiert. Weiter seien  $l > 0, \varepsilon > 0$ . Dann gibt es eine Unterteilung  $\{z_1, \dots, z_N\}$  von  $\partial D$  von einer Feinheit  $l$ , sodass für eine geeignet gewählte Teilfolge  $(\phi_{m_k})$  gilt:*

$$\sum_{i=1}^N \theta(z_i) < \varepsilon.$$

*Dabei verstehen wir unter einer Feinheit  $l$ , dass für die Intervalle  $I_i, i = 1, \dots, N$  mit Endpunkten  $z_i, z_{i+1}$  ( $z_{N+1} := z_1$ )  $|I_i| \leq l$  für  $i \leq N$  gilt.*

**Beweis.** Wir nehmen an, es existiere ein  $\zeta_1 \in \partial D$  mit  $\theta(\zeta_1) \geq \varepsilon/8\pi \cdot l$ .  $I_n$  sei das Intervall auf  $\partial D$  mit Endpunkten  $\zeta_1 e^{-i/n}, \zeta_1 e^{i/n}$ . Wegen  $\theta(I_n) \downarrow \theta(\zeta_1)$  gibt es zu

jedem  $n$  ein  $m_n$  mit

$$\iint_{S_{t_n}} |\phi_{m_n}| \, dx \, dy \geq \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot l - \frac{1}{n},$$

also ist  $(\phi_{m_n})$  eine Teilfolge mit

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_t} |\phi_{m_n}| \, dx \, dy \geq \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot l. \quad (1)$$

Bei Wahl einer Teilfolge verkleinern sich die  $\theta(\zeta)$  höchstens, während der obige Limes inferior höchstens grösser wird, also Ungleichung (1) erhalten bleibt. Gibt es für die neue Folge noch ein  $\zeta_2$  mit  $\theta(\zeta_2) \geq \varepsilon/8\pi \cdot l$ , wählen wir analog eine weitere Teilfolge. Nach endlich vielen Schritten sind wir fertig, da  $\|\phi_m\| \leq 1$ . Wir haben also durch Uebergang zu einer Teilfolge, die wir wieder  $(\phi_m)$  nennen wollen, erreicht, dass  $\theta(\zeta) \leq \varepsilon/8\pi \cdot l$  für  $\zeta \in \partial D \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_k\}$  (vgl. [8]). Wir wählen nun eine Unterteilung  $z_1, \dots, z_N$  von  $\partial D$ , sodass für die Intervalle  $I_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  mit Endpunkten  $z_i, z_{i+1}$  ( $z_{N+1} := z_1$ ) gilt  $|I_i| < l$ . Wir können  $l < \pi$  voraussetzen und für die Anzahl  $N$  der Intervalle  $2\pi/l \leq N \leq 4\pi/l$  erreichen durch  $l/2 \leq |I_i| < l$ . Ebenfalls erreichen wir, dass  $\{z_i \mid i \leq N\} \cap \{\zeta_1, \dots, \zeta_k\} = \emptyset$  ist. Also gilt  $\theta(z_i) \leq \varepsilon/8\pi \cdot l$ ,  $i \leq N$ , und damit

$$\sum_{i=1}^N \theta(z_i) \leq N \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot l \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Wir bemerken, dass wir zu jedem  $z_i$  ein offenes Intervall  $J_i$  mit  $z_i \in J_i$  auf  $\partial D$  wählen können, sodass gilt

$$\sum_{i=1}^N \theta(J_i) < \varepsilon.$$

Wegen  $\sum_{i=1}^N \theta(z_i) \leq \varepsilon/2$  brauchen wir bloss  $\theta(J_i) \leq \theta(z_i) + \varepsilon/2N$  zu verlangen.

**KOROLLAR 4.1.** *Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.1. (die Teilfolge, für welche  $\sum_{i=1}^N \theta(z_i) < \varepsilon$  gilt, bezeichnen wir wieder mit  $(\phi_m)$ ), seien die offenen Intervalle  $J_i$  o.B.d.A. disjunkt gewählt gemäss obiger Bemerkung. Ist  $\gamma_i$  ein Jordanbogen, der in  $D$  einen Punkt von  $J_i$  mit einem von  $J_{i+1}$  verbindet ( $J_{N+1} := J_1$ ) und dabei eine Umgebung  $G_i$  vom abgeschlossenen Intervall zwischen  $J_i$  und  $J_{i+1}$  von  $D$*

abtrennt, und ist  $D_\varepsilon := D \setminus \bigcup_{i=1}^N \bar{G}_i$ , so gilt

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \iint_{D_\varepsilon} |\phi_m| \, dx \, dy \leq \varepsilon.$$

Dies ergibt sich unmittelbar, da wegen  $\phi_m \rightarrow 0$  lokal gleichmässig in  $D$  für  $m \rightarrow \infty$

$$\iint_{D_\varepsilon \setminus \bigcup_{i=1}^N S_i} |\phi_m| \, dx \, dy \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty$$

gilt, und damit ist

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \iint_{D_\varepsilon} |\phi_m| \, dx \, dy \leq \sum_{i=1}^N \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \iint_{S_i} |\phi_m| \, dx \, dy = \sum_{i=1}^N \theta(J_i) < \varepsilon.$$

Wir betrachten nun wieder eine quasisymmetrische Abbildung  $\mu$  der Kreislinie  $\partial D$  auf sich. Wir nehmen an, es existiere eine degenerierende Hamiltonfolge  $(\phi_m)$ ,  $\phi_m \in v \subset L_1(D)$ . Es gilt also  $\phi_m \rightarrow 0$  lokal gleichmässig in  $D$  und

$$\iint_D \phi_m \kappa_0 \, dx \, dy \rightarrow \|\kappa_0\|_\infty, \quad m \rightarrow \infty.$$

Dabei ist  $\kappa_0$  die komplexe Dilatation einer extremalen Erweiterung  $f_0$  von  $\mu$ . Dann gilt [10]

$$\iint_D |\phi_m| \frac{\left| 1 - \kappa_0 \frac{\phi_m}{|\phi_m|} \right|^2}{1 - |\kappa_0|^2} \, dx \, dy \rightarrow \frac{1}{K_0}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Wir beweisen nun den

**SATZ 4.1.** *Sei  $\mu$  ein orientierungserhaltender Homöomorphismus der Kreislinie  $\partial D$  auf sich, der sich quasikonform in den Einheitskreis fortsetzen lässt. Zu der komplexen Dilatation  $\kappa_0$  einer extremalen Fortsetzung  $f_0$  existiere eine degenerierende Hamiltonfolge  $(\phi_m)$  in  $v$ . Also*

$$\iint_D \kappa_0 \phi_m \, dx \, dy \rightarrow \|\kappa_0\|_\infty, \quad m \rightarrow \infty.$$

Dann gilt für die maximale Dilatation  $K_0$  dieser Erweiterung

$$K_0 = \max_{\zeta \in \partial D} H_\zeta.$$

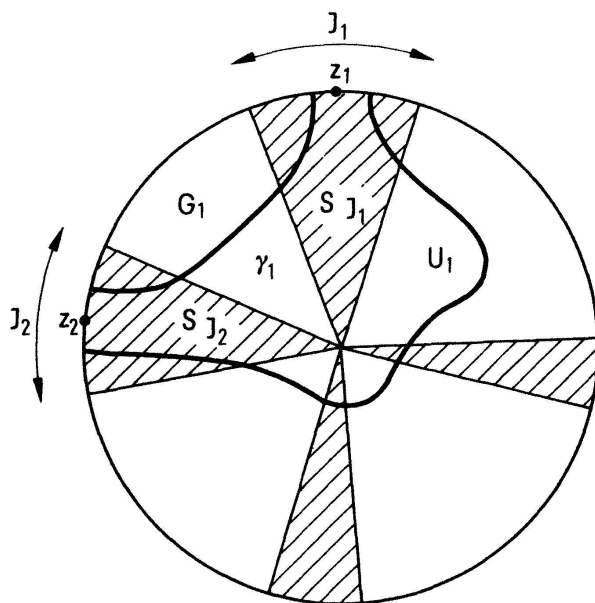
Es gibt also einen wesentlichen Randpunkt  $\zeta_0 \in \partial D$  mit  $H_{\zeta_0} = K_0$ .

*Beweis.* Sei  $H' > \max_{\zeta \in \partial D} H_\zeta$ . Für  $\zeta \in \partial D$  definieren wir

$$l_\zeta := \sup \left\{ |I| \mid \begin{array}{l} I \text{ ein offenes Intervall auf } \partial D \text{ mit Mittelpunkt } \zeta, \text{ und } \mu|_I \text{ lasse} \\ \text{sich } H'\text{-q.k. in eine Umgebung von } I \text{ fortsetzen} \end{array} \right\}$$

Wie früher sehen wir,  $\zeta \mapsto l_\zeta$  ist stetig auf  $\partial D$ ; es gibt also ein  $l_0 > 0$  mit  $l_0 = \min_{\zeta \in \partial D} l_\zeta$ . Ein beliebiges Intervall auf  $\partial D$  der Länge  $l_0$  lässt also eine  $H'$ -q.k. Erweiterung von  $\mu$  in eine Umgebung zu.

Zu  $(\phi_m)$ ,  $l = l_0$  und  $\varepsilon > 0$  wählen wir nun nach Lemma 4.1. eine Teilfolge  $(\phi_{m_k})$  und eine Unterteilung  $\{z_1, \dots, z_N\}$  von  $\partial D$  mit  $|I_i| \leq l$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Dabei bezeichnen  $I_i$  wie vorher die offenen Intervalle mit Endpunkten  $z_i, z_{i+1}$ , und, entsprechend unserer Bemerkung am Schluss von Lemma 4.1, seien die offenen Intervalle  $J_i$  ( $z_i \in J_i$ ) gewählt mit  $\sum_{i=1}^N \theta(J_i) < \varepsilon$ . Weil die Länge von  $I_1$  höchstens  $l$  ist, gibt es eine  $H'$ -q.k. Erweiterung  $h_1$  von  $\mu$  in eine einfach zusammenhängende Umgebung  $U_1$  von  $I_1$ . Darin wählen wir einen analytischen Bogen  $\gamma_1$ , der einen Punkt in  $J_1 \cap I_1$  mit einem Punkt in  $J_2 \cap I_1$  verbindet und dabei eine Umgebung  $G_1$  vom abgeschlossenen Intervall zwischen  $J_1$  und  $J_2$  von  $D$  abtrennt. Wir können zum Beispiel die Umgebung  $U_1$  konform auf einen Halbkreis abbilden,





sodass  $\bar{I}_1$  ins Innere des Durchmessers zu liegen kommt und dort einen orthogonalen Halbkreis wählen, der durch die entsprechenden Punkte des Durchmessers läuft. Das durch  $\gamma_1$  von  $D$  abgetrennte Gebiet nennen wir  $G_1$ . Durch  $h_1$  wird es auf ein Gebiet im Bildkreis  $H'$ -q.k. abgebildet. Dieses Gebiet wiederum wird durch die inverse Abbildung  $f_0^{-1}$  der extremalen q.k. Erweiterung  $f_0$  von  $\mu$  auf ein Gebiet  $G'_1$  abgebildet.  $f_0^{-1} \circ h_1$  ist auf dem Randintervall  $\partial D \cap \partial G_1$  die identische Abbildung.  $G'_1$  wird also durch  $\partial D \cap \partial G_1$  und den quasikonformen Bogen  $f_0^{-1} \circ h_1(\gamma_1)$  berandet, welcher dieselben Endpunkte hat wie  $\gamma_1$ .

Nun betrachten wir eine  $H'$ -q.k. Erweiterung  $h_2$  von  $\mu|_{I_2}$  in eine Umgebung  $U_2$  von  $I_2$ . Das Bild von  $I_2$  unter  $\mu$  liegt ausserhalb der abgeschlossenen Menge  $h_1(\bar{G}_1)$ . Wir dürfen also annehmen,  $h_2(U_2) \cap h_1(\bar{G}_1) = \emptyset$  und  $U_2 \cap \bar{G}_1 = \emptyset$ . Dann wählen wir einen analytischen Bogen  $\gamma_2$ , der in  $U_2$  einen Punkt von  $J_2 \cap I_2$  mit einem Punkt in  $J_3 \cap I_2$  verbindet und das Gebiet  $G_2$  von  $D$  abtrennt. Es ist also  $\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 = \emptyset$  und  $h_1(\bar{G}_1) \cap h_2(\bar{G}_2) = \emptyset$ . Wieder setzen wir  $G'_2 = f_0^{-1} \circ h_2(G_2)$ . Diese Konstruktion setzen wir fort, sodass schliesslich sowohl die  $\bar{G}_i$  als auch die  $h_i(\bar{G}_i)$  paarweise disjunkt sind. Wir erhalten (in Abhängigkeit von  $\varepsilon > 0$ ) Gebiete  $G_1, \dots, G_N$  in  $D$  und setzen

$$D_\varepsilon := D \setminus \bigcup_{i=1}^N \bar{G}_i, \quad D'_\varepsilon := D \setminus \bigcup_{i=1}^N \bar{G}'_i.$$

Dies sind zwei einfach zusammenhängende Gebiete. Wir wollen nun die durch  $\mu$  und die  $h_i$  auf  $\partial D_\varepsilon$  induzierte Abbildung quasikonform in  $D_\varepsilon$  fortsetzen. Die erweiterte Abbildung ist dann quasikonform in  $D$  (Hebbarkeit analytischer Bögen ([7], p. 47)) und hat die Randwerte von  $\mu$ . Sei

$$D_\varepsilon^\sim = D \setminus \bigcup_{i=1}^N h_i(\bar{G}_i).$$

Die durch  $\mu$  und die  $h_i$  von  $\partial D_\varepsilon$  auf  $\partial D_\varepsilon^\sim$  induzierte Abbildung nennen wir  $\mu_\varepsilon$ .  $\mu_\varepsilon$  hat die Eigenschaft, dass sie in eine Umgebung jeden Punktes  $\zeta \in \partial D_\varepsilon$   $H'$ -q.k. erweitert werden kann. Entweder ist nämlich  $\zeta \in \partial D \setminus \bigcup_{i=1}^N \gamma_i$ , wegen  $H' > \text{Max}_{\zeta \in \partial D} H_\zeta$  ist die Erweiterung also möglich, oder dann ist  $\zeta \in \gamma_i$  für ein gewisses  $i$ ,  $\mu_\varepsilon$  also sowieso die Einschränkung einer  $H'$ -q.k. Abbildung.

Nennen wir die lokale Dilatation von  $\mu_\varepsilon$  in  $\zeta$  nun  $H_\zeta^\varepsilon$ , so gilt demnach

$$H_\zeta^\varepsilon \leq H' \quad \forall \zeta \in \partial D_\varepsilon.$$

Aus Satz 3.1. folgt:  $\mu_\varepsilon$  lässt sich quasikonform in  $D_\varepsilon$  erweitern, und die Dilatation  $H^\varepsilon$  von  $\mu_\varepsilon$  ist also kleiner oder gleich  $(\mathcal{P}^{-1}(H'))^2$ . Für das folgende sei  $\hat{H}$  eine

festen Zahl mit  $H > (\mathcal{P}^{-1}(H'))^2$ . Wir können  $\mu_\epsilon$  also  $\hat{H}$ -q.k. in eine Umgebung von  $\partial D_\epsilon$  (bezüglich  $\bar{D}_\epsilon$ ) erweitern. Gemäss unserer Bemerkung 3.1. gibt es sogar eine q.k. Abbildung  $f_\epsilon$  von  $D_\epsilon$  in  $D_\epsilon^-$ , welche in einer kompakten Umgebung  $U$  von  $\partial D_\epsilon$  bezüglich  $\bar{D}_\epsilon$   $\hat{H}$ -q.k. ist. Wir setzen  $f_\epsilon$  durch die  $h_i$  in die  $G_i$  fort und nennen die erweiterte Abbildung wieder  $f_\epsilon$ . Wir haben also eine q.k. Erweiterung  $f_\epsilon$  von  $\mu$ . Ihre maximale Dilatation in den  $G_i$  ist kleiner oder gleich  $H'$ , in  $U$  höchstens  $\hat{H}$ , und in ganz  $D$  nennen wir sie  $K_\epsilon$ .  $D_\epsilon \setminus U$  ist in einer kompakten Menge in  $D$  enthalten, also gilt für  $U' = f_0^{-1} \circ f_\epsilon(U)$

$$\iint_{D_\epsilon' \setminus U'} |\phi_m| dx dy \rightarrow 0 \quad \text{für } m \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Nach der Hauptungleichung gilt, wenn  $\kappa_\epsilon$  die komplexe Dilatation von  $f_\epsilon^{-1}$  ist,  $w = f_0(z)$  sowie

$$K_\epsilon(w) = \frac{1 + |\kappa_\epsilon(w)|}{1 - |\kappa_\epsilon(w)|}$$

ist, für jedes  $m$

$$1 \leq \iint_D |\phi_m(z)| \frac{|1 - \kappa_0 \phi_m / |\phi_m||^2}{1 - |\kappa_0|^2} K_\epsilon(w) dx dy.$$

Wir schätzen  $K_\epsilon(f_0(z))$  in  $G_i'$  und  $U'$  ab. Weil die Dilatation von  $f_\epsilon$  in  $f_\epsilon^{-1}(w)$  dieselbe ist, wie die von  $f_\epsilon^{-1}$  in  $w$  und  $G_i'$  und  $U'$  durch  $f_\epsilon^{-1} \circ f_0$  auf  $G_i$  und  $U$  abgebildet werden, ist  $K_\epsilon(f_0(z))$  in  $G_i'$  kleiner oder gleich  $H'$  und in  $U'$  kleiner oder gleich  $\hat{H}$ . Aus der Hauptungleichung folgt also sicher

$$1 \leq \iint_D |\phi_m| \frac{|1 - \kappa_0 \phi_m / |\phi_m||^2}{1 - |\kappa_0|^2} H' dx dy + \iint_{D_i'} |\phi_m| K_0 \hat{H} dx dy + \iint_{D_\epsilon' \setminus U'} |\phi_m| K_0 K_\epsilon dx dy$$

weil

$$\frac{|1 - \kappa_0 \phi_m / |\phi_m||^2}{1 - |\kappa_0|^2} \leq \frac{(1 + |\kappa_0|)^2}{1 - |\kappa_0|^2} = \frac{1 + |\kappa_0|}{1 - |\kappa_0|} \leq K_0.$$

Lassen wir  $m \rightarrow \infty$  gehen, so gilt, weil  $(\phi_m)$  eine Hamiltonfolge ist,

$$\iint_D |\phi_m| \frac{|1 - \kappa_0 \phi_m / |\phi_m||^2}{1 - |\kappa_0|^2} dx dy \rightarrow \frac{1}{K_0},$$

nach Korollar 4.1., angewandt auf  $G'_i$  und  $D'_\varepsilon$ , und mit (2) ist

$$1 \leq \frac{H'}{K_0} + \hat{H}K_0\varepsilon.$$

Weil  $\varepsilon > 0$  beliebig war, ist  $K_0 \leq H'$ , und da  $H' > \text{Max}_{\zeta \in \partial D} H_\zeta$  beliebig war, also  $K_0 \leq \text{Max}_{\zeta \in \partial D} H_\zeta$ .

Damit ist die Behauptung bewiesen.

### 5. Das analoge Resultat im Fall der Randwertvorgabe auf einer abgeschlossenen Teilmenge von $\partial D$

Wir geben nun eine Uebersicht, wie man den Satz 4.1. auf den Fall verallgemeinert, wo  $\mu$  eine quasisymmetrische Abbildung der Kreislinie auf sich ist und die Randwerte durch  $\mu$  nur auf einer abgeschlossenen Teilmenge  $\Gamma$  von  $\partial D$  festgelegt sind. Wir definieren deshalb die Dilatation  $H_\Gamma$  von  $\mu$  bezüglich  $\Gamma$  durch

$$H_\Gamma := \inf \{K_f \mid f: U(\Gamma) \rightarrow D, \text{ q.k.}, f|_\Gamma = \mu|_\Gamma\}$$

und die (lokale) Dilatation  $H_\zeta^\Gamma$  von  $\mu$  bezüglich  $\Gamma$  in  $\zeta \in \Gamma$  durch

$$H_\zeta^\Gamma := \inf \{K_f \mid f: U(\zeta) \rightarrow D, \text{ q.k.}, f|_{U(\zeta) \cap \Gamma} = \mu|_{U(\zeta) \cap \Gamma}\},$$

wobei die Infima über alle bezüglich  $\bar{D}$  offenen Umgebungen  $U(\Gamma)$  von  $\Gamma$  bzw.  $U(\zeta)$  von  $\zeta$  und über alle derartigen Funktionen  $f$  genommen werden.

Die Hauptungleichung (2.1) gilt dann für Funktionen  $f$  und  $f_1$  in der Klasse  $Q_\mu^\Gamma$  für alle  $\phi \in v_\Gamma$ . Eine Hamiltonfolge für die Klasse  $Q_\mu^\Gamma$  ist also eine Folge  $(\phi_m)$  mit  $\phi_m \in v_\Gamma$  und

$$\left| \iint_D \kappa_\Gamma \phi_m dx dy \right| \rightarrow \|\kappa_\Gamma\|_\infty \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

Dabei ist  $\kappa_\Gamma$  die komplexe Dilatation einer extremalen Abbildung  $f_\Gamma$  in  $Q_\mu^\Gamma$ . Da

diese  $\phi_m$  durch Spiegelung über  $\partial D \setminus \Gamma$  analytisch fortsetzbar sind, gilt für eine degenerierende Folge  $\phi_m \rightarrow 0$  lokal gleichmässig in  $\bar{D} \setminus \Gamma$  für  $m \rightarrow \infty$  (vgl. [9]).

Der Fortsetzungssatz 3.1 gilt dann in der folgenden Form:

**SATZ 5.1.** *Sei  $\mu$  ein orientierungserhaltender Homöomorphismus der Kreislinie  $\partial D$  auf sich und  $\Gamma$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\partial D$ . In jedem Punkt  $\zeta \in \Gamma$  gelte für die lokale Dilatation von  $\mu$  bezüglich  $\Gamma$  in  $\zeta$*

$$H_\zeta^\Gamma < \infty.$$

*Dann lässt sich  $\mu|_\Gamma$  quasikonform in den Einheitskreis erweitern, und die Dilatation  $H_\Gamma$  der dadurch induzierten Randabbildung bezüglich  $\Gamma$  ist durch eine Konstante nach oben beschränkt, die nur von  $\text{Max}_{\zeta \in \Gamma} H_\zeta^\Gamma$  abhängt.*

*Beweis.* Sei  $H_1 > \text{Max}_{\zeta \in \Gamma} H_\zeta^\Gamma$ . Wir wollen  $\mu|_\Gamma$  zunächst auf endlich viele Intervalle, die  $\Gamma$  enthalten, erweitern und dabei die Dilatation durch  $H_1$  beschränkt halten.  $\Gamma$  ist kompakt, also gibt es endlich viele offene Intervalle, die  $\Gamma$  überdecken und die Eigenschaft haben, dass sich  $\mu|_\Gamma$  in jedem dieser Intervalle  $H_1$ -q.k. in eine Umgebung fortsetzen lassen. Durch Trennung überlappender Intervalle<sup>(1)</sup> erhalten wir endlich viele disjunkte offene Intervalle  $I_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , die  $\Gamma$  überdecken, sowie eine Erweiterung  $\mu_1$  von  $\mu|_\Gamma$  auf  $\bigcup_{k=1}^n I_k$ , deren lokale Dilatation  $H_\zeta$  in jedem Punkt dieser Vereinigung höchstens  $H_1$  ist. Weil  $\Gamma$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\bigcup_{k=1}^n I_k$  ist, finden wir abgeschlossene Intervalle  $\bar{J}_k \subset I_k$  mit  $\Gamma \subset \bigcup_{k=1}^n \bar{J}_k$ . Für jedes  $k = 1, \dots, n$  erweitern wir  $\mu_1|_{\bar{J}_k}$  durch Spiegelung über die beiden Enden hinaus. In einem Randpunkt  $\zeta$  von  $\bar{J}_k$  wird dabei die lokale Quasisymmetrie nicht grösser als  $1 + \rho_\zeta + \rho_\zeta^2$ , wobei  $\rho_\zeta$  die lokale Quasisymmetrie von  $\mu_1|_{I_k}$  in  $\zeta$  ist ([4], Korollar 2). Nach Lemma 3.2. bleibt somit die lokale Quasisymmetrie in  $\zeta$  kleiner oder gleich  $1 + \mathcal{P}^{-1}(H_\zeta) + \mathcal{P}^{-1}(H_\zeta)^2$ . Wegen  $H_\zeta \leq \mathcal{P}^{-1}(H_\zeta)^2$  (Lemma 3.1. und 3.2.) und  $H_\zeta \leq H_1$  ist  $(1 + \mathcal{P}^{-1}(H_1) + \mathcal{P}^{-1}(H_1)^2)^2$  eine obere Schranke der lokalen Dilatationen der durch Spiegelung in gewisse offene Intervalle  $J'_k$ ,  $\bar{J}_k \subset J'_k \subset I_k$ , erweiterten Abbildung  $\mu_1$ . Entsprechend Lemma 1 in [4] ändern wir diese Erweiterung in  $J'_k \setminus \bar{J}_k$  stetig differenzierbar ab. Dabei wird die lokale Quasisymmetrie in den Endpunkten von  $\bar{J}_k$  nicht vergrössert, und die Ableitung in  $J'_k \setminus \bar{J}_k$  ist überall positiv. Wir erweitern diese Abbildung stetig differenzierbar, streng monoton, ohne die Ableitung Null werden zu lassen zwischen den Intervallen  $J'_k$ . In diesen Punkten ist die lokale Dilatation also eins.

Damit haben wir  $\mu|_\Gamma$  zu einer Abbildung  $\mu_1$  der Kreislinie auf sich erweitert, die die Voraussetzungen von Satz 3.1. erfüllt, und der Satz ist bewiesen.

<sup>1</sup> Gehört ein Punkt des Durchschnitts nicht zu  $\Gamma$ , so liegt mit ihm ein ganzes Intervall ausserhalb  $\Gamma$ .

Wir bemerken noch, dass wir, weil  $H_1 > \text{Max}_{\zeta \in \Gamma} H_\zeta^\Gamma$  beliebig war, für die Dilatation  $H$  von  $\mu_1$  die Abschätzung

$$H \leq \left( 1 + \mathcal{P}^{-1} \left( \text{Max}_{\zeta \in \Gamma} H_\zeta^\Gamma \right) + \left( \mathcal{P}^{-1} \left( \text{Max}_{\zeta \in \Gamma} H_\zeta^\Gamma \right) \right)^2 \right)^2$$

erhalten.

Wir verallgemeinern nun den Satz 4.1.

**SATZ 5.2.** *Sei  $\mu$  ein orientierungserhaltender Homöomorphismus der Kreislinie  $\partial D$  auf sich und  $\Gamma$  eine abgeschlossene Menge in  $\partial D$ . Ferner lasse sich  $\mu|_\Gamma$  quasikonform ins Innere fortsetzen, d.h.  $Q_\mu^\Gamma$  sei nicht leer. Wenn es dann eine degenerierende Hamiltonfolge  $(\phi_m)$  für die Klasse  $Q_\mu^\Gamma$  gibt, so gilt für die maximale Dilatation  $K_\Gamma$  einer extremalen Abbildung  $f_\Gamma$  in  $Q_\mu^\Gamma$*

$$K_\Gamma = \text{Max}_{\zeta \in \Gamma} H_\zeta^\Gamma.$$

Mit Hilfe von Satz 5.1. lässt sich nun der Beweis von Satz 3.1. leicht auf diesen Fall übertragen. Zunächst bemerken wir, dass wir für die Unterteilungspunkte  $\{z_1, \dots, z_N\}$  in Lemma 4.1. verlangen können, dass je ein offenes Intervall  $J_k \ni z_k$  entweder in  $\Gamma$  enthalten ist oder ganz ausserhalb  $\Gamma$  liegt. Dies ist möglich, denn falls kein Intervall  $J_k \ni z_k \in \Gamma$  in  $\Gamma$  enthalten ist, gibt es in beliebiger Nähe von  $z_k$  einen Punkt  $z_k^-$  und mit ihm ein ganzes Intervall aussen an  $\Gamma$ . Dort wählen wir einen neuen Punkt, wir nennen diesen nun  $z_k$ , und behalten die Eigenschaften  $|I_i| < l$  und  $\theta(z_k) \leq \varepsilon/8\pi \cdot l$  bei. Die offenen Intervalle  $J_k \ni z_k$  mit

$$\sum_{i=1}^N \theta(J_i) < \varepsilon$$

können wir dann innerhalb  $\Gamma$  oder ganz ausserhalb  $\Gamma$  wählen. Wir wählen  $H' > \text{Max}_{\zeta \in \Gamma} H_\zeta^\Gamma$  und definieren

$$l_\zeta := \sup \left\{ |I| \mid \begin{array}{l} I \text{ ein offenes Intervall auf } \partial D \text{ mit Mittelpunkt } \zeta, \text{ und } \mu|_{I \cap \Gamma} \\ \text{lasse sich } H'\text{-q.k. in eine Umgebung von } I \text{ fortsetzen} \end{array} \right\}$$

Es genügt dann, diejenigen Kreisbögen  $z_k z_{k+1}$  durch analytische Bögen  $\gamma_k$  von  $D$  abzutrennen, die Punkte von  $\Gamma$  enthalten. Die neu induzierte Randabbildung  $\mu_\varepsilon$  von  $\partial D_\varepsilon$  auf  $\partial D_\varepsilon^-$  ist durch die  $H'$ -q.k. Erweiterungen auf abgeschlossenen Intervallen auf  $\partial D_\varepsilon$  vorgegeben, welche die  $\gamma_k$  enthalten. Diese Abbildung  $\mu_\varepsilon$  erfüllt die Voraussetzungen von Satz 5.1, wobei der Menge  $\Gamma$  nun die Vereinigung dieser endlich vielen abgeschlossenen Intervalle entspricht. Wählen wir nun

die Konstante  $\hat{H}$  (unabhängig von  $\varepsilon$ !) hinreichend gross, zeigt dieselbe Berechnung wie früher

$$1 \leq \frac{H'}{K_\Gamma} + \hat{H}K_\Gamma\varepsilon$$

und damit

$$K_\Gamma = \text{Max}_{\zeta \in \Gamma} H_\zeta^\Gamma.$$

Wir erwähnen noch, dass damit für das Extremalproblem mit Randwertvorgabe auf einer abgeschlossenen Menge  $\Gamma$  gilt: Es gibt eine eindeutige extremale Abbildung, und sie ist Teichmüllersch mit quadratischem Differential  $\phi \in v_\Gamma$ , oder es existiert mindestens ein bezüglich  $\Gamma$  wesentlicher Randpunkt  $\zeta_0 \in \Gamma$ , d.h. ein Punkt  $\zeta_0$  mit  $K_\Gamma = H_{\zeta_0}^\Gamma$ .

## 6. Anwendungen

### a. Konstruktion einer Randabbildung mit überall wesentlichen Randpunkten

Wir konstruieren eine quasisymmetrische Randabbildung  $\mu$ , für welche die lokale Dilatation  $H_\zeta$  konstant gleich  $K_0$  ist. M.a.W., jeder Randpunkt ist wesentlich. Dabei soll  $K_0 > 1$  sein, da die Problemstellung sonst trivial ist.

Sei  $f$  die extremale q.k. Abbildung in einer Homotopieklasse von Abbildungen zwischen zwei kompakten Riemannschen Flächen. Ihre maximale Dilatation sei  $K > 1$ .  $f$  ist eine Teichmüllersche Abbildung mit quadratischem Differential endlicher Norm und komplexer Dilatation

$$\kappa = k \frac{\bar{\phi}}{|\phi|}.$$

Die Riemannschen Flächen  $R$  und  $R' = f(R)$  haben die Gestalt  $R = D|_G$ ,  $R' = D|_{G'}$ , wo  $G$  und  $G'$  diskrete Gruppen von Decktransformationen in  $D = \{z \mid |z| < 1\}$  sind.  $f$  induziert eine  $K$ -q.k. Abbildung  $\hat{f}$  des Einheitskreises auf sich.  $\phi$  induziert das quadratische Differential  $\hat{\phi}$  auf  $D$ , und es ist  $\|\hat{\phi}\| = \infty$ , weil in jedem der unendlich vielen kompakten Fundamentalgebiete die Norm von  $\hat{\phi}$  gleich  $\|\phi\|_R$  ist.  $\hat{f}$  ist also eine Teichmüllersche Abbildung mit quadratischem Differential unendlicher Norm.  $\hat{f}$  induziert eine Randabbildung  $\mu$  der Kreislinie auf sich, und diese hat eine extremale  $K_0$ -q.k. Fortsetzung  $f_0$ . Wäre  $f_0$  eine

Teichmüllersche Abbildung mit holomorphem quadratischem Differential endlicher Norm, so wäre  $K_0 < K$  wegen der eindeutigen Extremalität. Aus demselben Grunde liesse sich  $f_0$  nach unten durchdrücken [6], was einen Widerspruch zur Extremalität von  $f$  zur Folge hätte. Dies sieht man in folgender Weise:  $\hat{f}$  induziert einen Isomorphismus  $\theta$  der Gruppen  $G$  und  $G'$  durch

$$\theta(g) = \hat{f} \circ g \circ \hat{f}^{-1}, \quad g \in G.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \theta(g) \circ \hat{f} \circ g^{-1}, & \text{in } D, \text{ insbesondere} \\ \mu &= \theta(g) \circ \mu \circ g^{-1} & \text{für } g \in G. \end{aligned}$$

Damit ist aber auch  $\theta(g) \circ f_0 \circ g^{-1}$  für jedes  $g \in G$  eine Erweiterung von  $\mu$ , wegen der eindeutigen Extremalität also

$$f_0 = \theta(g) \circ f_0 \circ g^{-1}, \quad g \in G.$$

Also lässt sich  $f_0$  nach unten durchdrücken.

Wir haben gesehen,  $\mu$  besitzt als extreme Erweiterung  $f_0$  keine Teichmüllersche Abbildung mit holomorphem quadratischem Differential endlicher Norm, also gibt es einen wesentlichen Randpunkt  $\zeta_0 \in \partial D$ , d.h.

$$H_{\zeta_0} = K_0.$$

( $K_0 > 1$ , denn sonst hätten wir wieder eindeutige Extremalität und obigen Widerspruch.)

Nun zeigen wir, dass die Bahn  $G(\zeta_0) := \{g(\zeta_0) \mid g \in G\}$  dicht liegt auf  $\partial D$  (d.h.  $G$  und  $G'$  sind Gruppen erster Art). Weil  $R$  kompakt ist, ist jedes  $g \in G \setminus \{id\}$  hyperbolisch ([1], p. 97). Wäre  $G(\zeta_0) = \{\zeta_0\}$ , so hätten alle  $g \in G$  dieselben zwei Fixpunkte, und das Fundamentalgebiet wäre nicht kompakt. Somit gibt es ein  $\zeta_1 \neq \zeta_0$  mit  $\zeta_1 \in G(\zeta_0)$ . Weil bei kompaktem Fundamentalgebiet die "limit-set"  $L$  schon ganz  $\partial D$  ist, gilt nach Lehner ([5], p. 18):

Zu jedem  $z \in \partial D \setminus \{\zeta_0, \zeta_1\}$  gibt es ein  $z' \in \partial D$  mit  $z \in \overline{G(w)}$  für jedes  $w \in \partial D \setminus \{z'\}$ . In unserem Fall also ist  $z \in \overline{G(\zeta_0)}$  oder  $z \in \overline{G(\zeta_1)}$ . Wegen  $G(\zeta_0) = G(\zeta_1)$  gilt  $z \in \overline{G(\zeta_0)}$  für jedes  $z \in \partial D$ . Also  $\overline{G(\zeta_0)} = \partial D$ .

Sei nun  $z \in G(\zeta_0)$ . Es gibt somit ein  $g \in G$  mit  $g(\zeta_0) = z$ . Wegen  $\mu = \theta(g) \circ \mu \circ g^{-1}$  ist  $H_z = H_{\zeta_0}$ , denn  $g$  und  $\theta(g)$  sind ja konform. Also ist

$$H_z = K_0 \quad \text{für alle } z \in G(\zeta_0).$$

$z \mapsto H_z$  ist aber halbstetig nach oben und  $\overline{G(\zeta_0)} = \partial D$ , somit gilt

$$H_z = K_0 > 1 \quad \text{für jedes } z \in \partial D.$$

b. *Vergleich der Grössen  $H_\zeta$ ,  $K_\zeta$  sowie  $H_\Gamma$ ,  $K_\Gamma$ ,  $H_\Gamma^0$ ,  $K_\Gamma^0$*

Wir betrachten zu  $H$ ,  $H_\zeta$ ,  $H_\Gamma$  noch einige weitere Grössen. Wir definieren für  $\zeta \in \partial D$ ,

$$K_\zeta := \inf \{K_f \mid f: D \rightarrow D, \text{ q.k.}, f|_I = \mu|_I\},$$

wobei das Infimum über alle offenen Intervalle  $I$  auf  $\partial D$  genommen wird, die  $\zeta$  enthalten, sowie über alle derartigen Funktionen  $f$ . Offensichtlich ist  $H_\zeta \leq K_\zeta$ . Wir werden in diesem Abschnitt die Gleichheit beweisen. Zunächst verallgemeinern wir diese Definition. Sei  $\Gamma$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\partial D$ .  $H_\Gamma$  und  $K_\Gamma$  sind also definiert. Wir setzen

$$H_\Gamma^0 := \inf_{\{\Gamma'\}} H_{\Gamma'}, \quad K_\Gamma^0 := \inf_{\{\Gamma'\}} K_{\Gamma'},$$

wobei das Infimum über alle abgeschlossenen Mengen  $\Gamma'$  in  $\partial D$  genommen wird, die  $\Gamma$  im Innern enthalten. Ist zum Beispiel  $\Gamma = \{\zeta\}$ , so gilt  $H_\zeta = H_\Gamma^0$  und  $K_\zeta = K_\Gamma^0$ ; oder für  $\Gamma = \partial D$  ist  $H_\Gamma^0 = H_\Gamma = H$ ,  $K_\Gamma^0 = K_\Gamma = K_0$ . Wir beweisen, dass gilt

$$K_\Gamma^0 = \text{Max} \{H_\Gamma^0, K_\Gamma\}.$$

Daraus erhalten wir für  $\Gamma = \{\zeta\}$  wegen  $K_{\{\zeta\}} = 1$  sofort

$$K_\zeta = H_\zeta.$$

Im Falle  $\Gamma = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\}$  ist  $H_\Gamma^0 = \text{Max}_{i \leq n} H_{\zeta_i}$  sowie  $K_\Gamma = K_n$  die maximale Dilatation der Teichmüllerschen Extremalen für dieses  $n$ -Eck [13]. Also gilt

$$K_{\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}}^0 = \text{Max} \{K_n, H_{\zeta_1}, H_{\zeta_2}, \dots, H_{\zeta_n}\}.$$

Für  $n \leq 3$  ist  $K_n = 1$ , also

$$K_{\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}}^0 = \text{Max} \{H_{\zeta_1}, H_{\zeta_2}, H_{\zeta_3}\}.$$

Mit Hilfe von Satz 5.1. beweisen wir jetzt den



SATZ 6.1. Sei  $\mu$  eine quasisymmetrische Abbildung der Kreislinie  $\partial D$  auf sich und  $\Gamma$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\partial D$ . Dann gilt

$$K_\Gamma^0 = \text{Max} \{H_\Gamma^0, K_\Gamma\}.$$

*Beweis.* Weil  $K_\Gamma^0 \geq H_\Gamma^0$  und  $K_\Gamma^0 \geq K_\Gamma$  ist, folgt die Behauptung zum Beispiel aus  $K_\Gamma^0 = H_\Gamma^0$ . Wir haben also den Fall  $K_\Gamma^0 > H_\Gamma^0$  zu untersuchen. Falls  $\Gamma = \partial D$  ist, haben wir  $K_\Gamma^0 = K_\Gamma$ , also dürfen wir annehmen,  $\Gamma$  sei nicht die ganze Kreislinie  $\partial D$ . Ferner sei  $\Gamma$  nicht-leer, da sonst sowieso  $K_\Gamma^0 = K_\Gamma = H_\Gamma^0 = 1$  gilt. Sei  $(\varepsilon_n)$  eine Folge mit  $\varepsilon_n \downarrow 0$ .  $\Gamma_n$  seien endliche Vereinigungen disjunkter abgeschlossener Intervalle so, dass  $\Gamma$  im Innern von  $\Gamma_n$  und  $\Gamma_n$  in der  $\varepsilon_n$ -Umgebung von  $\Gamma$  bezüglich  $\partial D$  enthalten ist. Es gilt

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \Gamma_n = \Gamma.$$

Die Folge  $\Gamma_n$  ist monoton fallend. Zunächst sehen wir, dass  $H_{\Gamma_n} \downarrow H_\Gamma^0$  und  $K_{\Gamma_n} \downarrow K_\Gamma^0$ . Aus  $H_\Gamma^0 < K_\Gamma^0$  schliessen wir  $H_{\Gamma_n} < K_{\Gamma_n}$  für  $n \geq n_0$ . Die Extremalen  $f_n$  für die Randwerte  $\mu$  auf  $\Gamma_n$  sind also Teichmüllersche Abbildungen mit quadratischen Differentialen  $\phi_n \in v_{\Gamma_n}$ , denn kein Punkt von  $\Gamma_n$  kann bezüglich  $\Gamma_n$  wesentlich sein. Aus der Normalität von  $\{\phi_n\}$  schliessen wir auf eine in  $\bar{D} \setminus \Gamma$  lokal gleichmässig konvergente Teilfolge, die wir wieder  $\phi_n$  nennen wollen. Also  $\phi_n \rightarrow \phi_\Gamma$  in  $\bar{D} \setminus \Gamma$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wir behaupten zunächst,  $\|\phi_\Gamma\| \neq 0$ . Ist nämlich  $\|\phi_\Gamma\| = 0$ , d.h. konvergieren die  $\phi_n$  lokal gleichmässig in  $\bar{D} \setminus \Gamma$  gegen Null, so schliessen wir wieder, dass  $H_\Gamma^0 = K_\Gamma^0$  gilt in folgender Weise:

Sei  $H' > H_\Gamma^0$ . Es gibt also eine  $H'$ -q.k. Fortsetzung  $h$ , welche in einer Umgebung  $U(\Gamma)$  von  $\Gamma$  definiert ist und in  $\Gamma_n$  die Randwerte von  $\mu$  hat für  $n \geq n_0$ . Wie früher wählen wir wieder analytische Kurven  $\gamma_k$  in  $U(\Gamma)$ , welche die Endpunkte der Intervalle von  $\Gamma_{n_0}$  verbinden und Gebiete  $G_k$  von  $D$  abtrennen. Wir setzen  $\tilde{D} = D \setminus \bigcup \tilde{G}_k$  und haben in Intervallen auf  $\partial \tilde{D}$ , welche die  $\gamma_k$  enthalten, die Randwerte durch  $h$  vorzugeben. Nach Satz 5.1. können wir diese Abbildung  $\tilde{K}$ -q.k. in  $\tilde{D}$  erweitern (für ein gewisses  $\tilde{K}$ ). Wir nennen die erweiterte Abbildung  $\tilde{f}$ , und weil  $\tilde{f}$  und  $f_n$  auf  $\Gamma_n$  übereinstimmen für alle  $n \geq n_0$ , gilt die Hauptungleichung

$$1 \leq \iint_D |\phi_n| \frac{|1 - \kappa_n \phi_n / |\phi_n||^2}{1 - |\kappa_n|^2} \cdot \frac{1 + |\tilde{\kappa}|}{1 - |\tilde{\kappa}|} dx dy, \quad n \geq n_0.$$

Die Abbildung  $f_n$  hat aber komplexe Dilatation

$$\kappa_n = k_n \frac{\bar{\phi}_n}{|\phi_n|}, \quad K_{\Gamma_n} = \frac{1 + k_n}{1 - k_n},$$

also

$$\frac{|1 - \kappa_n \phi_n / |\phi_n||^2}{1 - |\kappa_n|^2} = \frac{1}{K_{\Gamma_n}},$$

und damit

$$K_{\Gamma_n} \leq \iint_D |\phi_n| \frac{1 + |\tilde{\kappa}|}{1 - |\tilde{\kappa}|} dx dy, \quad n \geq n_0.$$

Lassen wir  $n \rightarrow \infty$  gehen, so folgt, weil  $\phi_n \rightarrow 0$  lokal gleichmässig in  $\bar{D} \setminus \Gamma$  und  $(1 + |\tilde{\kappa}|)/(1 - |\tilde{\kappa}|) \leq H'$  in  $U(\Gamma)$

$$K_{\Gamma}^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} K_{\Gamma_n} \leq H'.$$

$H' > H_{\Gamma}^0$  war beliebig, also  $K_{\Gamma}^0 = H_{\Gamma}^0$  im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wie früher haben wir also  $0 < \|\phi_{\Gamma}\| \leq 1$ . Mit  $K_{\Gamma}^0 = (1 + k_{\Gamma}^0)/(1 - k_{\Gamma}^0)$  haben wir

$$\kappa_n = k_n \frac{\bar{\phi}_n}{|\phi_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} k_{\Gamma}^0 \frac{\bar{\phi}_{\Gamma}}{|\phi_{\Gamma}|} \quad \text{f.ü.}$$

Die Abbildungen  $f_n$  konvergieren also gegen eine Teichmüllersche Abbildung  $f_{\Gamma}$  mit quadratischem Differential in  $v_{\Gamma}$  und komplexer Dilatation  $k_{\Gamma}^0 \bar{\phi}_{\Gamma}/|\phi_{\Gamma}|$ . Ausserdem stimmt  $f_{\Gamma}$  auf  $\Gamma$  mit  $\mu$  überein, ist also die eindeutig bestimmte Extremale für  $\mu$  bezüglich  $\Gamma$ . Damit ist  $K_{\Gamma} = K_{\Gamma}^0$  und die Behauptung damit bewiesen.

Wir bemerken noch, dass keine analoge Beziehung zwischen  $H_{\Gamma}$ ,  $H_{\Gamma}^0$  und  $K_{\Gamma}$  gilt und führen das folgende Beispiel an. Wir strecken ein achsenparalleles Quadrat mit den Ecken  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$  durch  $F_{K_0}(x + iy) = K_0 x + iy$ ,  $K_0 > 1$ . Wir wählen  $\Gamma = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4\}$ . Also ist  $H_{\Gamma} = 1$ , da  $\Gamma$  nur aus isolierten Punkten besteht, ferner  $1 < H_{\Gamma}^0 < K_0 = K_{\Gamma} = K_{\Gamma}^0$ .

### c. Beweis einer Vermutung von Sethares

Als weitere Anwendung wollen wir eine in der Dissertation von Sethares [11] aufgestellte Vermutung beweisen. Wir betrachten eine Teichmüllersche Abbildung  $f$ , welche in einem Gebiet definiert sei, das den abgeschlossenen Einheitskreis  $\bar{D}$  enthält.  $f$  hat also lokal die Darstellung  $f = \Psi^{-1} \circ F_K \circ \Phi$ , wo  $\Phi, \Psi$  konform sind und  $F_K(x + iy) = Kx + iy$  ist,  $K > 1$ , mit Ausnahme in isolierten

Punkten.  $\phi := \Phi'^2$  und  $\psi := \Psi'^2$  sind eindeutige Funktionen mit Nullstellen und Polen in diesen isolierten Punkten bzw. deren Bildpunkten (vgl. [12]). Ist  $z_0$  eine Nullstelle oder ein Pol von  $\phi$  der Ordnung  $n$ , so ist  $f(z_0)$  eine Nullstelle bzw. ein Pol von  $\psi$  derselben Ordnung. Wir fragen nun, ob  $f$  für den induzierten Randhomöomorphismus  $\mu$  von  $\partial D$  auf  $f(\partial D)$  extremal ist. Ist  $\phi$  holomorph in  $D$  und hat auf  $\partial D$  nur Pole der Ordnung  $n \leq 2$ , so ist  $f$ , wie Sethares gezeigt hat, eindeutig extremal. Existieren auf dem Rand Pole höherer Ordnung, so lässt sich  $f$  abändern, ohne die maximale Dilatation zu vergrößern und ohne die Randwerte zu verändern. Auch ist ersichtlich, dass die Extremalität von  $f$  aus der Existenz von Polen zweiter Ordnung von  $\phi$  auf  $\partial D$  folgt. Die Vermutung lautet dann: Hat  $\phi$  auf  $\partial D$  keine Pole zweiter Ordnung, aber mindestens einen Pol höherer Ordnung, so ist  $f$  nicht extremal. Wir beweisen nun den

**SATZ 6.2.** *Sei  $f$  eine Teichmüllersche Abbildung in einem Gebiet, das den abgeschlossenen Einheitskreis  $\bar{D}$  enthält,  $\phi$  das zugehörige meromorphe quadratische Differential sowie  $K$  die maximale Dilatation von  $f$ . Dann sind für die quasikonforme Erweiterung von  $f|_{\partial D}$  ins Innere die folgenden Fälle möglich:*

(a)  *$\phi$  hat auf  $\partial D$  mindestens einen Pol zweiter Ordnung. Dann ist  $f$  extremal, und die Pole zweiter Ordnung sind wesentliche Randpunkte.*

*In diesem Fall ist  $f$  eindeutig extremal genau dann, wenn  $\phi$  in  $D$  holomorph ist und auf  $\partial D$  höchstens Pole der Ordnung  $n \leq 2$  hat.*

(b)  *$\phi$  hat auf  $\partial D$  keinen Pol zweiter Ordnung. Dann ist das Maximum der lokalen Dilatationen  $\max_{\zeta \in \partial D} H_\zeta$  echt kleiner als  $K$ .*

*$f$  ist d.u.n.d. eindeutig extremal, wenn  $\phi$  in  $D$  holomorph ist und auf  $\partial D$  höchstens Pole erster Ordnung hat. Andernfalls ist  $f$  nicht extremal.*

*Beweis.* Man berechnet die lokale Dilatation  $H_\zeta$  der Randabbildung  $\mu$  in jedem Punkt  $\zeta \in \partial D$ . Ist  $\zeta$  ein Pol zweiter Ordnung von  $\phi$ , so ist  $H_\zeta = K$ . Diese Stellen sind also wesentliche Randpunkte, und mithin ist  $f$  extremal. In regulären Punkten  $\zeta \in \partial D$  von  $\phi$  (für die Definitionen im Zusammenhang mit quadratischen Differentialen siehe [15]) berechnet man leicht, dass  $H_\zeta = 1$  gilt. Für Nullstellen oder Pole der Ordnung  $n \neq 2$  erhält man  $H_\zeta < K$ . Im Falle (b) gibt es unter der Annahme, dass  $f$  extremal ist, keinen wesentlichen Randpunkt, und nach Satz 4.1 muss  $f$  damit eine Teichmüllersche Abbildung mit in  $D$  holomorphem quadratischem Differential  $\phi$  von endlicher Norm sein.  $\phi$  hat also auf  $\partial D$  höchstens Pole erster Ordnung, und  $f$  ist mithin eindeutig extremal. Damit ist (b) bewiesen, und (a) ergibt sich in folgender Weise:

Hat  $\phi$  auf  $\partial D$  mindestens einen Pol zweiter Ordnung, so ist  $f$  nach dem soeben Gesagten extremal. Ist  $\phi$  zudem holomorph in  $D$  und hat auf  $\partial D$  höchstens Pole zweiter Ordnung, so ist  $f$  nach Sethares eindeutig extremal. Besitzt  $\phi$  auf  $\partial D$  einen Pol der Ordnung  $n \geq 3$ , so können wir, wie Sethares gezeigt hat,  $f$

abändern, indem wir  $F_K$  in einem Gebiet der Form  $\{z \mid \theta_1 < \arg z < \theta_2\}$  durch die durch die Randwerte induzierte Extremale  $\tilde{F} \neq F_K$  ersetzen ( $f = \Psi^{-1} \circ F_K \circ \Phi$ ). Hat  $\phi$  in  $z_0 \in D$  einen Pol, so betrachten wir eine Kreislinie  $\gamma$  von  $z_0$  in  $D$ , die durch keinen Pol und keine Nullstelle von  $\phi$  geht. Weil das Bild einer analytischen Kurve unter  $F_K$  wieder analytisch ist, ist  $f(\gamma)$  analytisch. Die Dilatation der von  $f$  zwischen  $\gamma$  und  $f(\gamma)$  induzierten Randabbildung ist also eins. Im Innern von  $\gamma$  können wir  $f$  also durch die dazugehörige Extremale  $\tilde{f}$  abändern. Diese ist konform oder eine Teichmüllersche Abbildung mit holomorphem quadratischem Differential, also ist  $f \neq \tilde{f}$ .  $f$  kann also nie eindeutig extremal sein, wenn  $\phi$  einen Pol in  $D$  besitzt.

Auf die explizite Berechnung der lokalen Dilatationen  $H_\zeta$  wollen wir an dieser Stelle verzichten.

#### LITERATUR

- [1] BERS, L., *Quasiconformal mappings and Teichmüller's theorem*. Analytic Functions. Princeton University Press, Princeton, N.J. (1960), 89–119.
- [2] BEURLING, A. and AHLFORS, L. V., *The boundary correspondence under quasiconformal mappings*. Acta Math. 96 (1956), 125–142.
- [3] HAMILTON, R., *Extremal quasiconformal mappings with prescribed boundary values*. Trans. Amer. Math. Soc. 138 (1969), 399–406.
- [4] KELINGOS, J. A., *Boundary correspondence under quasiconformal mappings*. Michigan Math. Journal, 13 (1966), 235–249.
- [5] LEHNER, J., *A short course in automorphic functions*. Holt, Rinehart and Winston, New York (1966).
- [6] LEHTO, O., *Group isomorphisms induced by quasiconformal mappings*. Contributions to Analysis (1974).
- [7] LEHTO, O., und VIRTANEN, K. I., *Quasikonforme Abbildungen*. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1965).
- [8] ORTEL, M., *Quasiconformal mappings, extremal for their boundary values*. Preprint.
- [9] REICH, E., *On the relation between local and global properties of boundary values for extremal quasiconformal mappings*. Annals of Math. Studies 79 (1974), 391–407.
- [10] REICH, E. and STREBEL, K., *Extremal quasiconformal mappings with given boundary values*. Contributions to Analysis. A Collection of Papers Dedicated to Lipman Bers. Academic Press, New York and London (1974).
- [11] SETHARES, G. C., *The extremal property of certain Teichmüller mappings*. Comment. Math. Helv. 45 (1970), 353–362.
- [12] STREBEL, K., *Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises II*. Comment. Math. Helv. 39 (1964), 77–89.
- [13] STREBEL, K., *Ueber quadratische Differentiale mit geschlossenen Trajektorien und extremale quasikonforme Abbildungen*. Festband zum 70. Geburtstag von Prof. Rolf Nevanlinna. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1966), 105–127.
- [14] STREBEL, K., *On the existence of extremal Teichmüller mappings*. Journal d'analyse Math. 30 (1976), 464–480.
- [15] STREBEL, K., *Quadratic Differentials*. Erscheint demnächst in: Ergebnisse der Mathematik.

Math. Inst. Freiestr. 36 8032 Zurich

Eingegangen den 15. Oktober 1980