Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 56 (1981)

Artikel: Ueber extremale quasikonforme Abbildungen.

Autor: Fehlmann, Richard

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43258

Comment. Math. Helvetici **56** (1981) 558–580 0010–2571/81/004558–34$01.50+0.20/0

Ueber extremale quasikonforme Abbildungen

RICHARD FEHLMANN

1. Einleitung

Wir betrachten quasikonforme Abbildungen f des Einheitskreises $D=\{z \mid |z|<1\}$ auf sich. Diese induzieren durch stetige Fortsetzung einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus μ der Kreislinie ∂D auf sich. Betrachten wir die Klasse Q_f (gelegentlich bezeichnen wir sie auch mit Q_μ) aller quasikonformen Abbildungen mit denselben Randwerten wie f, so gibt es eine (oder mehrere) extremale quasikonforme Abbildung f_0 in Q_f, d.h. eine mit kleinstmöglicher maximaler Dilatation. Dies folgt aus der Normalität der Menge aller K-quasikonformen Abbildungen in Q_f für festes K. Im Folgenden bezeichne K_f die maximale Dilatation von f und $K_0=\inf_{f\in Q_{f_0}} K_f$ diejenige einer Extremalen f_0.

Wir wissen: $f\in Q_{f_0}$ ist genau dann für seine Randwerte extremal, wenn für dessen komplexe Dilatation κ gilt

$$\sup_{\phi\in v}\left|\iint_D \kappa(z)\phi(z)\,dx\,dy\right|=\|\kappa\|_\infty. \tag{1}$$

Dabei ist v die Menge aller holomorphen quadratischen Differentiale ϕ in D mit L_1-Norm

$$\|\phi\|=\iint_D |\phi(z)|\,dx\,dy=1.$$

Die Notwendigkeit dieser Bedingung wurde von Hamilton [3] gezeigt und die Hinlänglichkeit von Reich und Strebel [10]. Sie hat zur Konsequenz: ist κ_0 komplexe Dilatation einer extremalen Abbildung f_0, so gibt es eine Folge in D holomorpher quadratischer Differentiale ϕ_n mit $\|\phi_n\|=1$, sodass

$$\left|\iint_D \kappa_0\phi_n\,dx\,dy\right|\to\|\kappa_0\|_\infty=:k_0,\qquad n\to\infty.$$

Eine solche Folge heisst Hamiltonfolge. Da v normal ist, können wir o.B.d.A. annehmen, eine solche Hamiltonfolge konvergiere lokal gleichmässig in D gegen eine holomorphe Funktion ϕ_0. Ist $\|\phi_0\|=1$, so folgt

$$\left|\iint_D \kappa_0\phi_0\,dx\,dy\right|=k_0.$$

Ist $0<k_0<1$ und berücksichtigen wir, dass wir ϕ_0 durch $\phi_0 e^{i\theta}$ ersetzen können, so folgt

$$\kappa_0=k_0\frac{\bar{\phi}_0}{|\phi_0|}\quad \text{f.ü.}$$

und damit ist f_0 eine Teichmüllersche Abbildung sowie ϕ_0 ihr zugehöriges holomorphes quadratisches Differential. Dieses hat endliche Norm, also ist f_0 sogar eindeutig extremal, d.h. für $f\in Q_{f_0}$, $f\neq f_0$, gilt $K_f>K_{f_0}=K_0$ (vgl. [12]).

Ist $0\leqq\|\phi_0\|<1$, so können wir annehmen, dass $\phi_n\to 0$ für $n\to\infty$ lokal gleichmässig in D [14]. Wir sprechen von einer degenerierenden Hamiltonfolge. Es ist also von Interesse, diesen Fall zu untersuchen. Wir werden in Abschnitt 4 zeigen, dass es dann einen wesentlichen Randpunkt gibt, d.h. einen Punkt $\zeta\in\partial D$, sodass die maximale Dilatation K_0 der Extremalen eine untere Schranke für die maximale Dilatation jeder Erweiterung der Randabbildung in nur eine Umgebung von ζ ist. Hieraus ergibt sich die folgende Alternative für extremale quasikonforme Abbildungen. Es handelt sich um eine Teichmüllersche Abbildung mit holomorphem quadratischem Differential endlicher Norm (sie ist also eindeutig extremal) oder eine mit mindestens einem wesentlichen Randpunkt. Diese Aussage ist eine Verschärfung des Rahmenabbildungskriteriums [14].

An dieser Stelle wollen wir das Problem auch allgemeiner stellen. Sei Γ eine abgeschlossene Menge auf ∂D und $f\in Q_\mu$. Es gibt dann auch extremale Abbildungen f_Γ in der grösseren Klasse Q_μ^Γ aller quasikonformen Abbildungen des Einheitskreises auf sich, die auf Γ mit μ übereinstimmen. Dann gilt, sofern Γ mindestens 4 Punkte hat: f_Γ ist in Q_μ^Γ genau dann extremal, wenn für deren komplexe Dilatation κ_Γ

$$\sup_{\phi\in v_\Gamma}\left|\iint_D \kappa_\Gamma\phi\,dx\,dy\right|=\|\kappa_\Gamma\|_\infty \tag{2}$$

ist, wobei v_Γ die Menge der $\phi\in v$ ist, die noch reell längs $\partial D\setminus\Gamma$ sind, d.h. wo $\phi(z)\,dz^2\in\mathbb{R}$ für $z\in\partial D\setminus\Gamma$ [9].

Sei $K_\Gamma=\inf_{f\in Q_\mu^\Gamma}K_f$. Für eine Extremale f_Γ gilt dann: Sie ist Teichmüllersch mit holomorphem quadratischem Differential ϕ_Γ in v_Γ oder es gibt einen bezüglich Γ wesentlichen Randpunkt ζ, d.h. einen Punkt $\zeta\in\Gamma$, sodass K_Γ eine untere Schranke für die maximale Dilatation jeder quasikonformen Abbildung ist, welche eine Umgebung U von ζ (bezüglich $\bar{D}$) abbildet und auf $U \cap \Gamma$ mit μ übereinstimmt.

2. Die Dilatation der Randabbildung und die Hauptungleichung

Ist A eine offene Menge in $\mathbb{C}$ und $B \subset \mathbb{C}$, so verstehen wir unter einer K-quasikonformen (K-q.k.) Abbildung $f: A \to B$ eine Injektion, die K-quasikonform in jeder Zusammenhangskomponente von A mit Bildgebieten in B ist. Eine solche Abbildung heisst quasikonform (q.k.), wenn sie K-quasikonform für ein gewisses K ist.

Ist μ die Randabbildung einer q.k. Abbildung des Einheitskreises D auf sich, so verstehen wir unter der Dilatation H von μ die Zahl

$$H := \inf \{K_f \mid f: U(\partial D) \to D, \text{ q.k.}, f|_{\partial D} = \mu\}$$

und unter der (lokalen) Dilatation H_ζ von μ in ζ ($\zeta \in \partial D$) die Zahl

$$H_\zeta := \inf \{K_f \mid f: U(\zeta) \to D, \text{ q.k.}, f|_{U(\zeta) \cap \partial D} = \mu|_{U(\zeta) \cap \partial D}\}.$$

Dabei werden die Infima über alle bezüglich $\bar{D}$ offenen Umgebungen $U(\partial D)$ von ∂D bezw. $U(\zeta)$ von ζ und über alle derartigen Funktionen f genommen.

Wir bemerken sogleich, dass die Abbildung $\zeta \mapsto H_\zeta$ auf ∂D nach oben halbstetig ist. Ist nämlich $a > H_\zeta$, so gibt es eine a-quasikonforme Erweiterung von μ in eine Umgebung U von ζ in $\bar{D}$. Also ist $H_{\zeta'} \leqq a$ für $\zeta' \in U \cap \partial D$. Deshalb wird das Supremum von $\{H_\zeta \mid \zeta \in \partial D\}$ in einem Punkt $\zeta_0 \in \partial D$ angenommen, und es ist $H_{\zeta_0} = \text{Max}_{\zeta \in \partial D} H_\zeta$.

Die Dilatation H und insbesondere die lokalen Dilatationen H_ζ bilden natürlich untere Schranken für die zur Extremalen gehörige maximale Dilatation K_0. Ein wichtiges Werkzeug, un diese Grössen zu vergleichen, ist die Hauptungleichung ([10], p. 380). Sie besagt das folgende:

Sind f und f_1 zwei quasikonforme Selbstabbildungen des Einheitskreises D in der Klasse Q_μ mit komplexen Dilatationen κ und κ_1, so gilt für alle $\phi \in v$

$$1 \leqq \iint_D |\phi(z)| \frac{\left|1 - \kappa(z) \dfrac{\phi(z)}{|\phi(z)|}\right|^2}{1 - |\kappa(z)|^2} \cdot \frac{\left|1 + \mu_1(w) \dfrac{\kappa(z)}{\mu(w)} \dfrac{\phi(z)}{|\phi(z)|} \left[\dfrac{1 - \bar{\kappa}(z)\bar{\phi}(z)/|\phi(z)|}{1 - \kappa(z)\phi(z)/|\phi(z)|}\right]\right|^2}{1 - |\mu_1(w)|^2}\, dx\, dy. \tag{1}$$

Dabei ist $w=f(z)$ und μ und μ_1 sind die komplexen Dilatationen von f^{-1} und f_1^{-1}.

Daraus ergibt sich die Hinlänglichkeit der Bedingung (1.1) [10] und auch das Rahmenabbildungskriterium [14]: Ist $H<K_0$, so gibt es keine degenerierende Hamiltonfolge. Die Extremale f_0 ist also eindeutig extremal, denn sie ist Teichmüllersch mit quadratischem Differential endlicher Norm.

3. Eine Abschätzung der Dilatation der Randabbildung und ein daraus resultierender Fortsetzungssatz

Sei μ eine Abbildung der Kreislinie ∂D auf sich, die sich quasikonform in den ganzen Einheitskreis fortsetzen lässt. Wir sagen dann kurz, μ sei eine quasisymmetrische (q.s.) Abbildung von ∂D auf sich. Wenden wir nämlich auf Bild und Urbild die Abbildung $-i \cdot \log z$ an und bezeichnen die induzierte Abbildung der reellen Achse auf sich wieder mit μ, so ist μ eine quasisymmetrische Abbildung gemäss der Definition in [2], denn sie lässt sich ja quasikonform in die obere Halbebene erweitern. Ferner gilt $\mu(x+2\pi)=\mu(x)+2\pi$ für alle $x\in\mathbf{R}$.

Es gibt also ein $\rho\geqq 1$ mit

$$Q(\mu, x, t):=\frac{\mu(x+t)-\mu(x)}{\mu(x)-\mu(x-t)}\in\left[\frac{1}{\rho}, \rho\right]$$

für alle $x\in\mathbf{R}$ und $t>0$. (μ heisst dann ρ-quasisymmetrisch.)

Für $E\subset\mathbf{R}$ definieren wir

$$\rho(E):=\inf\left\{\rho\geqq 1 \mid Q(\mu, x, t)\in\left[\frac{1}{\rho}, \rho\right]; x-t, x, x+t\in E\right\},$$

und verstehen unter der lokalen Quasisymmetrie von μ in x die Zahl

$$\rho_x:=\inf\{\rho(I) \mid x\in I,\ I \text{ ein offenes Intervall}\}.$$

Wie die lokale Dilatation ist auch $x\mapsto\rho_x$ nach oben halbstetig. Weil $\rho_x<\infty$ in $x\in\mathbf{R}$, gibt es ein x_0, $0\leqq x_0\leqq 2\pi$, mit $\rho_{x_0}=\mathrm{Max}_{0\leqq x\leqq 2\pi}\,\rho_x$. Wegen $\mu(x+2\pi)=\mu(x)+2\pi$ ist also $\mathrm{Max}_{x\in\mathbf{R}}\,\rho_x<\infty$.

Für jeden Homöomorphismus μ der Kreislinie auf sich nennen wir die so erhaltene Abbildung μ kurz die induzierte reelle Abbildung.

LEMMA 3.1. *μ sei ein orientierungserhaltender Homöomorphismus der Kreislinie ∂D auf sich. Für die induzierte reelle Abbildung gelte*

$$\rho_x < \infty \quad \textit{für jedes reelle } x.$$

Dann lässt sich μ quasikonform in den Einheitskreis erweitern, und für die Dilatation H von μ gilt:

$$H \leqq \left(\max_{x \in \mathbf{R}} \rho_x\right)^2.$$

Für die lokale Dilatation H_ζ von μ in $\zeta \in \partial D$ gilt:

$$H_\zeta \leqq \rho_x^2.$$

Beweis. Wir haben schon gesehen, dass $\text{Max}_{x \in \mathbf{R}} \rho_x$ endlich ist. Sei nun $A > \text{Max}_{x \in \mathbf{R}} \rho_x$. Dann liegt jedes $x \in \mathbf{R}$ in einem offenen Intervall J, in welchem μ A-quasisymmetrisch ist, d.h. wo $\rho(J) \leqq A$ ist. Die Funktion

$$l_x := \sup \{l > 0 \mid \mu \quad \text{ist } A\text{-q.s. in } (x-l, x+l)\}$$

ist stetig, denn man sieht sofort, dass

$$l_x - |\Delta x| \leqq l_{x+\Delta x} \leqq l_x + |\Delta x|$$

gilt, und sie ist positiv oder konstant unendlich. Wegen $l_{x+2\pi} = l_x$, gibt es ein $l_0 > 0$, sodass μ A-quasisymmetrisch ist in $[x - l_0, x + l_0]$ für jedes $x \in \mathbf{R}$. Wir konstruieren nun die Beurling–Ahlfors-Fortsetzung [2] in der oberen Halbebene. Im horizontalen Streifen $\{x + iy \mid 0 \leqq y \leqq l_0\}$ wird diese A^2-quasikonform, und da sie auch die horizontale Periode 2π hat, erhalten wir eine A^2-q.k. Erweiterung von μ in einen Kreisring $r < |z| \leqq 1$. Da $A > \text{Max}_{x \in \mathbf{R}} \rho_x$ beliebig war, gilt also $H \leqq (\text{Max}_{x \in \mathbf{R}} \rho_x)^2$.

Nach einem Erweiterungssatz von Lehto und Virtanen ([7], p. 100) gibt es nun eine q.k. Abbildung des Einheitskreises, die in einem kleineren Kreisring $\tilde{r} \leqq |z| \leqq 1$, $\tilde{r} > r$, mit der konstruierten Erweiterung zusammenfällt.

Die Abschätzung für die lokale Dilatation erhalten wir ebenso, indem wir $A > \rho_x$ wählen.

Seien $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ reelle Zahlen oder ∞, dann bezeichne $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ den Modul des Vierecks, bestehend aus der oberen Halbebene und den Ecken

x_1, x_2, x_3, x_4. Wir definieren

$$\mathcal{P}(r) := M(-1, 0, r, \infty).$$

Die a- und b-Seiten seien so gewählt, dass $\mathcal{P}$ monoton wächst. $\mathcal{P}$ ist stetig in $[0, \infty]$, wenn wir $\mathcal{P}(0)=0$ und $\mathcal{P}(\infty)=\infty$ setzen. Es gilt

$$\mathcal{P}(r) = 1 + \Theta(r) \log r \quad \text{für} \quad r \geqq 1,$$

Wobei Θ monoton von $0{,}2284\cdots$ bis $1/\pi$ wächst (vgl. [2]).

Für eine reellwertige Funktion μ in einem Intervall der reellen Achse, welche sich quasikonform in eine Umgebung dieses Intervalls fortsetzen lässt, sind lokale Dilatation H_x und lokale Quasisymmetrie ρ_x in x definiert, und wir können ρ_x durch H_x abschätzen.

LEMMA 3.2. *Sei I ein offenes Intervall und $\mu : I \to \mathbf{R}$ stetig monoton wachsend. Für ein $x_0 \in I$ existiere eine quasikonforme Fortsetzung von μ, die in einer Umgebung von x_0 (bezügl. der oberen Halbebene) mit μ übereinstimmt. Also $H_{x_0} < \infty$. Dann gilt*

$$\rho_{x_0} \leqq \mathcal{P}^{-1}(H_{x_0}).$$

Beweis. Sei $A > H_{x_0}$. Es gibt also eine A-quasikonforme Abbildung f eines Halbkreises $\{z = x + iy \mid |z - x_0| \leqq r,\ y \geqq 0\}$ in die obere Halbebene mit $f(x) = \mu(x)$ für reelle x.

Wir betrachten Folgen x_n, t_n mit $x_n \to x_0$, $t_n \downarrow 0$ für $n \to \infty$. Auf das Urbild wenden wir die Abbildung $z \mapsto (z - x_n)/t_n$ an und auf das Bild $w \mapsto (w - \mu(x_n))/(\mu(x_n) - \mu(x_n - t_n))$. Weil $x_n - t_n$, x_n, $x_n + t_n$ dabei in -1, 0, 1 übergehen und $\mu(x_n - t_n)$, $\mu(x_n)$ in -1, 0, so gilt für die neue induzierte Abbildung $f_n : f_n(-1) = -1$, $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = Q(\mu, x_n, t_n)$, und f_n ist in einem Gebiet A-q.k., das mit $n \to \infty$ gegen die obere Halbebene geht. $\{f_n\}$ ist normal ([7], p. 76), also konvergiert eine Teilfolge gegen eine A-q.k. Abbildung g der oberen Halbebene auf sich mit $g(-1) = -1$, $g(0) = 0$ und $g(\infty) = \infty$. Also ist

$$\mathcal{P}(g(1)) = M(-1, 0, g(1), \infty) \in \left[\frac{1}{A}, A\right].$$

Somit ist $\mathcal{P}^{-1}(1/A) \leqq g(1) \leqq \mathcal{P}^{-1}(A)$, und weil $g(1)$ der Limes einer Teilfolge von $Q(\mu, x_n, t_n)$ ist, kann es keine Folgen $x_n \to x_0$, $t_n \downarrow 0$ geben mit

$Q(\mu, x_n, t_n) \notin [1/B, B]$ für jedes n, wenn $B > \mathcal{P}^{-1}(A)$ ist. Also ist

$$\rho_{x_0} \leqq \mathcal{P}^{-1}(H_{x_0}),$$

denn $A > H_{x_0}$ war beliebig.

Weil bei der konformen Abbildung $-i \log z$ natürlich $H_\zeta = H_x$ gilt für $x = -i \log \zeta$, und weil auf Grund der Monotonie von $\mathcal{P}$ eben $\mathcal{P}^{-1}(\mathrm{Max}_{\zeta \in \partial D} H_\zeta) = \mathrm{Max}_{\zeta \in \partial D} \mathcal{P}^{-1}(H_\zeta)$ ist, erhalten wir aus Lemma 3.1. und 3.2. den Fortsetzungssatz:

SATZ 3.1. *Ist μ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus der Kreislinie ∂D auf sich und gilt in jedem Punkt $\zeta \in \partial D$ für die lokale Dilatation von μ in ζ*

$$H_\zeta < \infty,$$

dann lässt sich μ quasikonform in den Einheitskreis erweitern (μ ist also quasisymmetrisch) und für die Dilatation H von μ gilt

$$H \leqq \left(\mathcal{P}^{-1}\left(\mathrm{Max}_{\zeta \in \partial D} H_\zeta\right)\right)^2,$$

d.h. H ist durch eine Konstante nach oben beschränkt, die nur von $\mathrm{Max}_{\zeta \in \partial D} H_\zeta$ *abhängt.*

Bemerkung 3.1. Zusammen mit dem schon erwähnten Erweiterungssatz ([7], p. 100) können wir schliessen: Unter den Voraussetzungen des Satzes 3.1. gibt es für jede Zahl $\hat{H} > (\mathcal{P}^{-1}(\mathrm{Max}_{\zeta \in \partial D} H_\zeta))^2$ eine quasikonforme Fortsetzung von μ in den ganzen Einheitskreis, die in einer Umgebung der Kreislinie noch $\hat{H}$-quasikonform ist.

4. Bestimmung der maximalen Dilatation einer extremalen quasikonformen Abbildung im Falle degenerierender Hamiltonfolgen

Die Funktionenklasse v ist enthalten in der grösseren Klasse $L_1(D)$ der komplexwertigen messbaren Funktionen ϕ in D mit

$$\|\phi\| = \iint_D |\phi| \, dx \, dy < \infty.$$

Wir betrachten zunächst degenerierende Folgen (ϕ_m) in $L_1(D)$, also $\phi_m \in L_1(D)$

und $\phi_m \to 0$ lokal gleichmässig in D für $m \to \infty$. Ist $I \subseteqq \partial D$ ein abgeschlossenes oder offenes Intervall mit Endpunkten z_1, z_2, so sei das Argument $\arg z$ in einer Umgebung von I stetig festgelegt, die z_i seien so numeriert, dass $\arg z_1 \leqq \arg z \leqq \arg z_2$ ist für $z \in I$, und S_I bezeichne den Sektor

$$S_I := \{z \in D \mid \arg z_1 \leqslant \arg z \leqq \arg z_2\}.$$

$|I|$ steht für die Bogenlänge von I. Wir definieren

$$\theta(I) := \overline{\lim_{m \to \infty}} \iint_{S_I} |\phi_m| \, dx \, dy.$$

Für festes $\zeta \in \partial D$ definieren wir

$$\theta(\zeta) := \inf \{\theta(I) \mid \zeta \in I, \ I \text{ ein offenes Intervall auf } \partial D\}.$$

Für Intervalle I, J mit $J \subset I$ gilt natürlich $\theta(J) \leqq \theta(I)$. Verlangen wir ferner $\|\phi_m\| \leqq 1$, so gilt $\theta(I) \leqq 1$. Ist I_n das abgeschlossene oder offene Intervall auf ∂D mit Endpunkten $\zeta e^{-i1/n}$, $\zeta e^{i1/n}$, so überlegt man sich leicht, dass gilt

$$\theta(\zeta) = \lim_{n \to \infty} \theta(I_n).$$

$\zeta \mapsto \theta(\zeta)$ ist somit auf ∂D definiert und hängt von der degenerierenden Folge (ϕ_m) ab. Geht man zu einer Teilfolge (ϕ_{m_k}) über, so wird die entsprechende Funktion θ höchstens kleiner. Wir beweisen nun das

LEMMA 4.1. *Sei (ϕ_m) eine Folge in $L_1(D)$ mit $\|\phi_m\| \leqq 1$, die lokal gleichmässig gegen Null konvergiert. Weiter seien $l > 0$, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Unterteilung $\{z_1, \ldots, z_N\}$ von ∂D von einer Feinheit l, sodass für eine geeignet gewählte Teilfolge (ϕ_{m_k}) gilt:*

$$\sum_{i=1}^{N} \theta(z_i) < \varepsilon.$$

Dabei verstehen wir unter einer Feinheit l, dass für die Intervalle I_i, $i = 1, \ldots, N$ mit Endpunkten z_i, z_{i+1} $(z_{N+1} := z_1)$ $|I_i| \leqq l$ für $i \leqq N$ gilt.

Beweis. Wir nehmen an, es existiere ein $\zeta_1 \in \partial D$ mit $\theta(\zeta_1) \geqq \varepsilon/8\pi \cdot l$. I_n sei das Intervall auf ∂D mit Endpunkten $\zeta_1 e^{-i/n}$, $\zeta_1 e^{i/n}$. Wegen $\theta(I_n) \downarrow \theta(\zeta_1)$ gibt es zu jedem n ein m_n mit

$$\iint_{S_{I_n}} |\phi_{m_n}|\, dx\, dy \geqq \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot l - \frac{1}{n},$$

also ist (ϕ_{m_n}) eine Teilfolge mit

$$\varliminf_{n\to\infty} \iint_{S_I} |\phi_{m_n}|\, dx\, dy \geqq \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot l. \tag{1}$$

Bei Wahl einer Teilfolge verkleinern sich die $\theta(\zeta)$ höchstens, während der obige Limes inferior höchstens grösser wird, also Ungleichung (1) erhalten bleibt. Gibt es für die neue Folge noch ein ζ_2 mit $\theta(\zeta_2) \geqq \varepsilon/8\pi \cdot l$, wählen wir analog eine weitere Teilfolge. Nach endlich vielen Schritten sind wir fertig, da $\|\phi_m\| \leqq 1$. Wir haben also durch Uebergang zu einer Teilfolge, die wir wieder (ϕ_m) nennen wollen, erreicht, dass $\theta(\zeta) \leqq \varepsilon/8\pi \cdot l$ für $\zeta \in \partial D \setminus \{\zeta_1, \ldots, \zeta_k\}$ (vgl. [8]). Wir wählen nun eine Unterteilung $z_1, \ldots, z_N$ von ∂D, sodass für die Intervalle I_i, $i = 1, \ldots, N$ mit Endpunkten z_i, z_{i+1} $(z_{N+1} := z_1)$ gilt $|I_i| < l$. Wir können $l < \pi$ voraussetzen und für die Anzahl N der Intervalle $2\pi/l \leqq N \leqq 4\pi/l$ erreichen durch $l/2 \leqq |I_i| < l$. Ebenfalls erreichen wir, dass $\{z_i \mid i \leqq N\} \cap \{\zeta_1, \ldots, \zeta_k\} = \emptyset$ ist. Also gilt $\theta(z_i) \leqq \varepsilon/8\pi \cdot l$, $i \leqq N$, und damit

$$\sum_{i=1}^{N} \theta(z_i) \leqq N \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot l \leqq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Wir bemerken, dass wir zu jedem z_i ein offenes Intervall J_i mit $z_i \in J_i$ auf ∂D wählen können, sodass gilt

$$\sum_{i=1}^{N} \theta(J_i) < \varepsilon.$$

Wegen $\sum_{i=1}^{N} \theta(z_i) \leqq \varepsilon/2$ brauchen wir bloss $\theta(J_i) \leqq \theta(z_i) + \varepsilon/2N$ zu verlangen.

KOROLLAR 4.1. *Unter den Voraussetzungen von Lemma* 4.1. (*die Teilfolge, für welche* $\sum_{i=1}^{N} \theta(z_i) < \varepsilon$ *gilt, bezeichnen wir wieder mit* (ϕ_m)), *seien die offenen Intervalle* J_i *o.B.d.A. disjunkt gewählt gemäss obiger Bemerkung. Ist* γ_i *ein Jordanbogen, der in* D *einen Punkt von* J_i *mit einem von* J_{i+1} *verbindet* $(J_{N+1} := J_1)$ *und dabei eine Umgebung* G_i *vom abgeschlossenen Intervall zwischen* J_i *und* J_{i+1} *von* D

abtrennt, und ist $D_\varepsilon := D \setminus \bigcup_{i=1}^{N} \bar{G}_i$, *so gilt*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \iint_{D_\varepsilon} |\phi_m|\, dx\, dy \leqq \varepsilon.$$

Dies ergibt sich unmittelbar, da wegen $\phi_m \to 0$ lokal gleichmässig in D für $m \to \infty$

$$\iint_{D_\varepsilon \setminus \bigcup_{i=1}^{N} S_{I_i}} |\phi_m|\, dx\, dy \to 0, \qquad m \to \infty$$

gilt, und damit ist

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \iint_{D_\varepsilon} |\phi_m|\, dx\, dy \leqq \sum_{i=1}^{N} \overline{\lim_{m\to\infty}} \iint_{S_{I_i}} |\phi_m|\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{N} \theta(J_i) < \varepsilon.$$

Wir betrachten nun wieder eine quasisymmetrische Abbildung μ der Kreislinie ∂D auf sich. Wir nehmen an, es existiere eine degenerierende Hamiltonfolge (ϕ_m), $\phi_m \in v \subset L_1(D)$. Es gilt also $\phi_m \to 0$ lokal gleichmässig in D und

$$\iint_D \phi_m \kappa_0\, dx\, dy \to \|\kappa_0\|_\infty, \qquad m \to \infty.$$

Dabei ist κ_0 die komplexe Dilatation einer extremalen Erweiterung f_0 von μ. Dann gilt [10]

$$\iint_D |\phi_m| \frac{\left|1 - \kappa_0 \dfrac{\phi_m}{|\phi_m|}\right|^2}{1 - |\kappa_0|^2}\, dx\, dy \to \frac{1}{K_0}, \qquad m \to \infty.$$

Wir beweisen nun den

SATZ 4.1. *Sei μ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus der Kreislinie ∂D auf sich, der sich quasikonform in den Einheitskreis fortsetzen lässt. Zu der komplexen Dilatation κ_0 einer extremalen Fortsetzung f_0 existiere eine degenerierende Hamiltonfolge (ϕ_m) in v. Also*

$$\iint_D \kappa_0 \phi_m\, dx\, dy \to \|\kappa_0\|_\infty, \qquad m \to \infty.$$

Dann gilt für die maximale Dilatation K_0 dieser Erweiterung

$$K_0 = \operatorname*{Max}_{\zeta \in \partial D} H_\zeta.$$

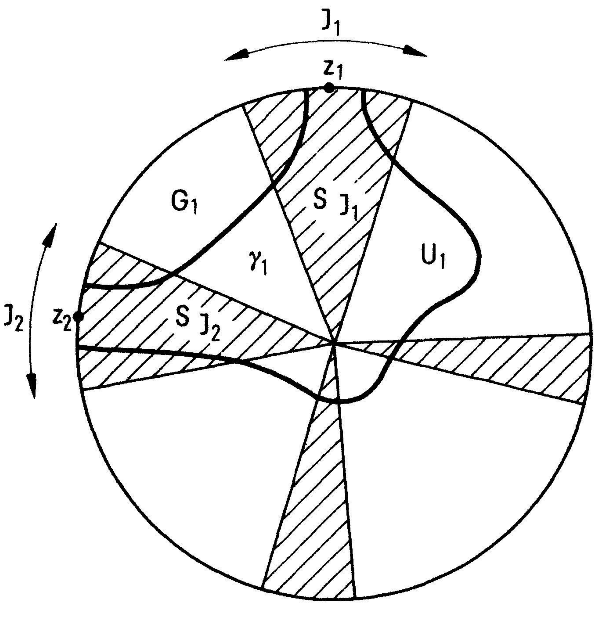
Es gibt also einen wesentlichen Randpunkt $\zeta_0 \in \partial D$ mit $H_{\zeta_0} = K_0$.

Beweis. Sei $H' > \operatorname{Max}_{\zeta \in \partial D} H_\zeta$. Für $\zeta \in \partial D$ definieren wir

$$l_\zeta := \sup \left\{ |I| \;\middle|\; \begin{array}{l} I \text{ ein offenes Intervall auf } \partial D \text{ mit Mittelpunkt } \zeta, \text{ und } \mu|_I \text{ lasse} \\ \text{sich } H'\text{-q.k. in eine Umgebung von } I \text{ fortsetzen} \end{array} \right\}$$

Wie früher sehen wir, $\zeta \mapsto l_\zeta$ ist stetig auf ∂D; es gibt also ein $l_0 > 0$ mit $l_0 = \operatorname{Min}_{\zeta \in \partial D} l_\zeta$. Ein beliebiges Intervall auf ∂D der Länge l_0 lässt also eine H'-q.k. Erweiterung von μ in eine Umgebung zu.

Zu (ϕ_m), $l = l_0$ und $\varepsilon > 0$ wählen wir nun nach Lemma 4.1. eine Teilfolge (ϕ_{m_k}) und eine Unterteilung $\{z_1, \ldots, z_N\}$ von ∂D mit $|I_i| \leqq l$, $i = 1, \ldots, N$. Dabei bezeichnen I_i wie vorher die offenen Intervalle mit Endpunkten z_i, z_{i+1}, und, entsprechend unserer Bemerkung am Schluss von Lemma 4.1, seien die offenen Intervalle J_i $(z_i \in J_i)$ gewählt mit $\sum_{i=1}^N \theta(J_i) < \varepsilon$. Weil die Länge von I_1 höchstens l ist, gibt es eine H'-q.k. Erweiterung h_1 von μ in eine einfach zusammenhängende Umgebung U_1 von I_1. Darin wählen wir einen analytischen Bogen γ_1, der einen Punkt in $J_1 \cap I_1$ mit einem Punkt in $J_2 \cap I_1$ verbindet und dabei eine Umgebung G_1 vom abgeschlossenen Intervall zwischen J_1 und J_2 von D abtrennt. Wir können zum Beispiel die Umgebung U_1 konform auf einen Halbkreis abbilden,



sodass $\bar{I}_1$ ins Innere des Durchmessers zu liegen kommt und dort einen orthogonalen Halbkreis wählen, der durch die entsprechenden Punkte des Durchmessers läuft. Das durch γ_1 von D abgetrennte Gebiet nennen wir G_1. Durch h_1 wird es auf ein Gebiet im Bildkreis H'-q.k. abgebildet. Dieses Gebiet wiederum wird durch die inverse Abbildung f_0^{-1} der extremalen q.k. Erweiterung f_0 von μ auf ein Gebiet G_1' abgebildet. $f_0^{-1}\circ h_1$ ist auf dem Randintervall $\partial D\cap\partial G_1$ die identische Abbildung. G_1' wird also durch $\partial D\cap\partial G_1$ und den quasikonformen Bogen $f_0^{-1}\circ h_1(\gamma_1)$ berandet, welcher dieselben Endpunkte hat wie γ_1.

Nun betrachten wir eine H'-q.k. Erweiterung h_2 von $\mu|_{I_2}$ in eine Umgebung U_2 von I_2. Das Bild von I_2 unter μ liegt ausserhalb der abgeschlossenen Menge $h_1(\bar{G}_1)$. Wir dürfen also annehmen, $h_2(U_2)\cap h_1(\bar{G}_1)=\emptyset$ und $U_2\cap\bar{G}_1=\emptyset$. Dann wählen wir einen analytischen Bogen γ_2, der in U_2 einen Punkt von $J_2\cap I_2$ mit einem Punkt in $J_3\cap I_2$ verbindet und das Gebiet G_2 von D abtrennt. Es ist also $\bar{G}_1\cap\bar{G}_2=\emptyset$ und $h_1(\bar{G}_1)\cap h_2(\bar{G}_2)=\emptyset$. Wieder setzen wir $G_2'=f_0^{-1}\circ h_2(G_2)$. Diese Konstruktion setzen wir fort, sodass schliesslich sowohl die $\bar{G}_i$ als auch die $h_i(\bar{G}_i)$ paarweise disjunkt sind. Wir erhalten (in Abhängigkeit von $\varepsilon>0$) Gebiete $G_1,\ldots,G_N$ in D und setzen

$$D_\varepsilon:=D\setminus\bigcup_{i=1}^{N}\bar{G}_i,\qquad D_\varepsilon':=D\setminus\bigcup_{i=1}^{N}\bar{G}_i'.$$

Dies sind zwei einfach zusammenhängende Gebiete. Wir wollen nun die durch μ und die h_i auf ∂D_ε induzierte Abbildung quasikonform in D_ε fortsetzen. Die erweiterte Abbildung ist dann quasikonform in D (Hebbarkeit analytischer Bögen ([7], p. 47)) und hat die Randwerte von μ. Sei

$$D_\varepsilon^{\sim}=D\setminus\bigcup_{i=1}^{N}h_i(\bar{G}_i).$$

Die durch μ und die h_i von ∂D_ε auf $\partial D_\varepsilon^{\sim}$ induzierte Abbildung nennen wir μ_ε. μ_ε hat die Eigenschaft, dass sie in eine Umgebung jeden Punktes $\zeta\in\partial D_\varepsilon$ H'-q.k. erweitert werden kann. Entweder ist nämlich $\zeta\in\partial D\setminus\bigcup_{i=1}^{N}\gamma_i$, wegen $H'>\mathrm{Max}_{\zeta\in\partial D}H_\zeta$ ist die Erweiterung also möglich, oder dann ist $\zeta\in\gamma_i$ für ein gewisses i, μ_ε also sowieso die Einschränkung einer H'-q.k. Abbildung.

Nennen wir die lokale Dilatation von μ_ε in ζ nun H_ζ^ε, so gilt demnach

$$H_\zeta^\varepsilon\leqq H'\qquad\forall\,\zeta\in\partial D_\varepsilon.$$

Aus Satz 3.1. folgt: μ_ε lässt sich quasikonform in D_ε erweitern, und die Dilatation H^ε von μ_ε ist also kleiner oder gleich $(\mathcal{P}^{-1}(H'))^2$. Für das folgende sei $\hat{H}$ eine feste Zahl mit $H > (\mathcal{P}^{-1}(H'))^2$. Wir können μ_ε also $\hat{H}$-q.k. in eine Umgebung von ∂D_ε (bezüglich $\bar{D}_\varepsilon$) erweitern. Gemäss unserer Bemerkung 3.1. gibt es sogar eine q.k. Abbildung f_ε von D_ε in $D_\varepsilon^\sim$, welche in einer kompakten Umgebung U von ∂D_ε bezüglich $\bar{D}_\varepsilon$ $\hat{H}$-q.k. ist. Wir setzen f_ε durch die h_i in die G_i fort und nennen die erweiterte Abbildung wieder f_ε. Wir haben also eine q.k. Erweiterung f_ε von μ. Ihre maximale Dilatation in den G_i ist kleiner oder gleich H', in U höchstens $\hat{H}$, und in ganz D nennen wir sie K_ε. $D_\varepsilon \setminus U$ ist in einer kompakten Menge in D enthalten, also gilt für $U' = f_0^{-1} \circ f_\varepsilon(U)$

$$\iint_{D'_\varepsilon \setminus U'} |\phi_m| \, dx \, dy \to 0 \quad \text{für} \quad m \to \infty. \tag{2}$$

Nach der Hauptungleichung gilt, wenn κ_ε die komplexe Dilatation von f_ε^{-1} ist, $w = f_0(z)$ sowie

$$K_\varepsilon(w) = \frac{1 + |\kappa_\varepsilon(w)|}{1 - |\kappa_\varepsilon(w)|}$$

ist, für jedes m

$$1 \leqq \iint_D |\phi_m(z)| \frac{|1 - \kappa_0 \phi_m / |\phi_m||^2}{1 - |\kappa_0|^2} K_\varepsilon(w) \, dx \, dy.$$

Wir schätzen $K_\varepsilon(f_0(z))$ in G'_i und U' ab. Weil die Dilatation von f_ε in $f_\varepsilon^{-1}(w)$ dieselbe ist, wie die von f_ε^{-1} in w und G'_i und U' durch $f_\varepsilon^{-1} \circ f_0$ auf G_i und U abgebildet werden, ist $K_\varepsilon(f_0(z))$ in G'_i kleiner oder gleich H' und in U' kleiner oder gleich $\hat{H}$. Aus der Hauptungleichung folgt also sicher

$$1 \leqq \iint_D |\phi_m| \frac{|1 - \kappa_0 \phi_m / |\phi_m||^2}{1 - |\kappa_0|^2} H' \, dx \, dy + \iint_{D'_\varepsilon} |\phi_m| \, K_0 \hat{H} \, dx \, dy + \iint_{D'_\varepsilon \setminus U'} |\phi_m| \, K_0 K_\varepsilon \, dx \, dy$$

weil

$$\frac{|1 - \kappa_0 \phi_m / |\phi_m||^2}{1 - |\kappa_0|^2} \leqq \frac{(1 + |\kappa_0|)^2}{1 - |\kappa_0|^2} = \frac{1 + |\kappa_0|}{1 - |\kappa_0|} \leqq K_0.$$

Lassen wir $m \to \infty$ gehen, so gilt, weil (ϕ_m) eine Hamiltonfolge ist,

$$\iint_D |\phi_m| \frac{|1-\kappa_0\phi_m/|\phi_m||^2}{1-|\kappa_0|^2}\,dx\,dy \to \frac{1}{K_0},$$

nach Korollar 4.1., angewandt auf G_i' und D_ε', und mit (2) ist

$$1 \leqq \frac{H'}{K_0} + \hat{H}K_0\varepsilon.$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist $K_0 \leqq H'$, und da $H' > \mathrm{Max}_{\zeta\in\partial D} H_\zeta$ beliebig war, also $K_0 \leqq \mathrm{Max}_{\zeta\in\partial D} H_\zeta$.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

5. Das analoge Resultat im Fall der Randwertvorgabe auf einer abgeschlossenen Teilmenge von ∂D

Wir geben nun eine Uebersicht, wie man den Satz 4.1. auf den Fall verallgemeinert, wo μ eine quasisymmetrische Abbildung der Kreislinie auf sich ist und die Randwerte durch μ nur auf einer abgeschlossenen Teilmenge Γ von ∂D festgelegt sind. Wir definieren deshalb die Dilatation H_Γ von μ bezüglich Γ durch

$$H_\Gamma := \inf\{K_f \mid f: U(\Gamma) \to D,\ \text{q.k.},\ f|_\Gamma = \mu|_\Gamma\}$$

und die (lokale) Dilatation H_ζ^Γ von μ bezüglich Γ in $\zeta \in \Gamma$ durch

$$H_\zeta^\Gamma := \inf\{K_f \mid f: U(\zeta) \to D,\ \text{q.k.},\ f|_{U(\zeta)\cap\Gamma} = \mu|_{U(\zeta)\cap\Gamma}\},$$

wobei die Infima über alle bezüglich $\bar{D}$ offenen Umgebungen $U(\Gamma)$ von Γ bezw. $U(\zeta)$ von ζ und über alle derartigen Funktionen f genommen werden.

Die Hauptungleichung (2.1) gilt dann für Funktionen f und f_1 in der Klasse Q_μ^Γ für alle $\phi \in v_\Gamma$. Eine Hamiltonfolge für die Klasse Q_μ^Γ ist also eine Folge (ϕ_m) mit $\phi_m \in v_\Gamma$ und

$$\left|\iint_D \kappa_\Gamma\phi_m\,dx\,dy\right| \to \|\kappa_\Gamma\|_\infty \quad \text{für} \quad m \to \infty.$$

Dabei ist κ_Γ die komplexe Dilatation einer extremalen Abbildung f_Γ in Q_μ^Γ. Da diese ϕ_m durch Spiegelung über $\partial D \setminus \Gamma$ analytisch fortsetzbar sind, gilt für eine degenerierende Folge $\phi_m \to 0$ lokal gleichmässig in $\bar{D} \setminus \Gamma$ für $m \to \infty$ (vgl. [9]).

Der Fortsetzungssatz 3.1 gilt dann in der folgenden Form:

SATZ 5.1. *Sei μ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus der Kreislinie ∂D auf sich und Γ eine abgeschlossene Teilmenge von ∂D. In jedem Punkt $\zeta \in \Gamma$ gelte für die lokale Dilatation von μ bezüglich Γ in ζ*

$$H_\zeta^\Gamma < \infty.$$

Dann lässt sich $\mu|_\Gamma$ quasikonform in den Einheitskreis erweitern, und die Dilatation H_Γ der dadurch induzierten Randabbildung bezüglich Γ ist durch eine Konstante nach oben beschränkt, die nur von $\operatorname{Max}_{\zeta \in \Gamma} H_\zeta^\Gamma$ *abhängt.*

Beweis. Sei $H_1 > \operatorname{Max}_{\zeta \in \Gamma} H_\zeta^\Gamma$. Wir wollen $\mu|_\Gamma$ zunächst auf endlich viele Intervalle, die Γ enthalten, erweitern und dabei die Dilatation durch H_1 beschränkt halten. Γ ist kompakt, also gibt es endlich viele offene Intervalle, die Γ überdecken und die Eigenschaft haben, dass sich $\mu|_\Gamma$ in jedem dieser Intervalle H_1-q.k. in eine Umgebung fortsetzen lassen. Durch Trennung überlappender Intervalle(1) erhalten wir endlich viele disjunkte offene Intervalle I_k, $k = 1, \ldots, n$, die Γ überdecken, sowie eine Erweiterung μ_1 von $\mu|_\Gamma$ auf $\bigcup_{k=1}^n I_k$, deren lokale Dilatation H_ζ in jedem Punkt dieser Vereinigung höchstens H_1 ist. Weil Γ eine abgeschlossene Teilmenge von $\bigcup_{k=1}^n I_k$ ist, finden wir abgeschlossene Intervalle $\bar{J}_k \subset I_k$ mit $\Gamma \subset \bigcup_{k=1}^n \bar{J}_k$. Für jedes $k = 1, \ldots, n$ erweitern wir $\mu_1|_{\bar{J}_k}$ durch Spiegelung über die beiden Enden hinaus. In einem Randpunkt ζ von $\bar{J}_k$ wird dabei die lokale Quasisymmetrie nicht grösser als $1 + \rho_\zeta + \rho_\zeta^2$, wobei ρ_ζ die lokale Quasisymmetrie von $\mu_1|_{I_k}$ in ζ ist ([4], Korollar 2). Nach Lemma 3.2. bleibt somit die lokale Quasisymmetrie in ζ kleiner oder gleich $1 + \mathcal{P}^{-1}(H_\zeta) + \mathcal{P}^{-1}(H_\zeta)^2$. Wegen $H_\zeta \leq \mathcal{P}^{-1}(H_\zeta)^2$ (Lemma 3.1. und 3.2.) und $H_\zeta \leq H_1$ ist $(1 + \mathcal{P}^{-1}(H_1) + \mathcal{P}^{-1}(H_1)^2)^2$ eine obere Schranke der lokalen Dilatationen der durch Spiegelung in gewisse offene Intervalle J'_k, $\bar{J}_k \subset J'_k \subset I_k$, erweiterten Abbildung μ_1. Entsprechend Lemma 1 in [4] ändern wir diese Erweiterung in $J'_k \setminus \bar{J}_k$ stetig differenzierbar ab. Dabei wird die lokale Quasisymmetrie in den Endpunkten von $\bar{J}_k$ nicht vergrössert, und die Ableitung in $J'_k \setminus \bar{J}_k$ ist überall positiv. Wir erweitern diese Abbildung stetig differenzierbar, streng monoton, ohne die Ableitung Null werden zu lassen zwischen den Intervallen J'_k. In diesen Punkten ist die lokale Dilatation also eins.

Damit haben wir $\mu|_\Gamma$ zu einer Abbildung μ_1 der Kreislinie auf sich erweitert, die die Voraussetzungen von Satz 3.1. erfüllt, und der Satz ist bewiesen.

---

[1] Gehört ein Punkt des Durchschnitts nicht zu Γ, so liegt mit ihm ein ganzes Intervall ausserhalb Γ.

Wir bemerken noch, dass wir, weil $H_1 > \mathrm{Max}_{\zeta\in\Gamma} H_\zeta^\Gamma$ beliebig war, für die Dilatation H von μ_1 die Abschätzung

$$H \leqq \left(1 + \mathcal{P}^{-1}\left(\operatorname*{Max}_{\zeta\in\Gamma} H_\zeta^\Gamma\right) + \left(\mathcal{P}^{-1}\left(\operatorname*{Max}_{\zeta\in\Gamma} H_\zeta^\Gamma\right)\right)^2\right)^2$$

erhalten.

Wir verallgemeinern nun den Satz 4.1.

SATZ 5.2. *Sei μ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus der Kreislinie ∂D auf sich und Γ eine abgeschlossene Menge in ∂D. Ferner lasse sich $\mu|_\Gamma$ quasikonform ins Innere fortsetzen, d.h. Q_μ^Γ sei nicht leer. Wenn es dann eine degenerierende Hamiltonfolge (ϕ_m) für die Klasse Q_μ^Γ gibt, so gilt für die maximale Dilatation K_Γ einer extremalen Abbildung f_Γ in Q_μ^Γ*

$$K_\Gamma = \operatorname*{Max}_{\zeta\in\Gamma} H_\zeta^\Gamma.$$

Mit Hilfe von Satz 5.1. lässt sich nun der Beweis von Satz 3.1. leicht auf diesen Fall übertragen. Zunächst bemerken wir, dass wir für die Unterteilungspunkte $\{z_1, \ldots, z_N\}$ in Lemma 4.1. verlangen können, dass je ein offenes Intervall $J_k^\sim \ni z_k$ entweder in Γ enthalten ist oder ganz ausserhalb Γ liegt. Dies ist möglich, denn falls kein Intervall $J_k^\sim \ni z_k \in \Gamma$ in Γ enthalten ist, gibt es in beliebiger Nähe von z_k einen Punkt $z_k^\sim$ und mit ihm ein ganzes Intervall aussen an Γ. Dort wählen wir einen neuen Punkt, wir nennen diesen nun z_k, und behalten die Eigenschaften $|I_i| < l$ und $\theta(z_k) \leqq \varepsilon/8\pi \cdot l$ bei. Die offenen Intervalle $J_k \ni z_k$ mit

$$\sum_{i=1}^{N} \theta(J_i) < \varepsilon$$

können wir dann innerhalb Γ oder ganz ausserhalb Γ wählen. Wir wählen $H' > \mathrm{Max}_{\zeta\in\Gamma} H_\zeta^\Gamma$ und definieren

$$l_\zeta := \sup\left\{ |I| \;\middle|\; \begin{array}{l} I \text{ ein offenes Intervall auf } \partial D \text{ mit Mittelpunkt } \zeta, \text{ und } \mu|_{I\cap\Gamma} \\ \text{lasse sich } H'\text{-q.k. in eine Umgebung von } I \text{ fortsetzen} \end{array} \right\}$$

Es genügt dann, diejenigen Kreisbögen $z_k z_{k+1}$ durch analytische Bögen γ_k von D abzutrennen, die Punkte von Γ enthalten. Die neu induzierte Randabbildung μ_ε von ∂D_ε auf $\partial D_\varepsilon^\sim$ ist durch die H'-q.k. Erweiterungen auf abgeschlossenen Intervallen auf ∂D_ε vorgegeben, welche die γ_k enthalten. Diese Abbildung μ_ε erfüllt die Voraussetzungen von Satz 5.1, wobei der Menge Γ nun die Vereinigung dieser endlich vielen abgeschlossenen Intervalle entspricht. Wählen wir nun die Konstante $\hat{H}$ (unabhängig von ε!) hinreichend gross, zeigt dieselbe Berechnung wie früher

$$1 \leqq \frac{H'}{K_\Gamma} + \hat{H} K_\Gamma \varepsilon$$

und damit

$$K_\Gamma = \operatorname*{Max}_{\zeta \in \Gamma} H_\zeta^\Gamma.$$

Wir erwähnen noch, dass damit für das Extremalproblem mit Randwertvorgabe auf einer abgeschlossenen Menge Γ gilt: Es gibt eine eindeutige extremale Abbildung, und sie ist Teichmüllersch mit quadratischem Differential $\phi \in v_\Gamma$, oder es existiert mindestens ein bezüglich Γ wesentlicher Randpunkt $\zeta_0 \in \Gamma$, d.h. ein Punkt ζ_0 mit $K_\Gamma = H_{\zeta_0}^\Gamma$.

6. Anwendungen

a. Konstruktion einer Randabbildung mit überall wesentlichen Randpunkten

Wir konstruieren eine quasisymmetrische Randabbildung μ, für welche die lokale Dilatation H_ζ konstant gleich K_0 ist. M.a.W., jeder Randpunkt ist wesentlich. Dabei soll $K_0 > 1$ sein, da die Problemstellung sonst trivial ist.

Sei f die extremale q.k. Abbildung in einer Homotopieklasse von Abbildungen zwischen zwei kompakten Riemannschen Flächen. Ihre maximale Dilatation sie $K > 1$. f ist eine Teichmüllersche Abbildung mit quadratischem Differential endlicher Norm und komplexer Dilatation

$$\kappa = k \frac{\bar{\phi}}{|\phi|}.$$

Die Riemannschen Flächen R und $R' = f(R)$ haben die Gestalt $R = D|_G$, $R' = D|_{G'}$, wo G und G' diskrete Gruppen von Decktransformationen in $D = \{z \mid |z| < 1\}$ sind. f induziert eine K-q.k. Abbildung $\hat{f}$ des Einheitskreises auf sich. ϕ induziert das quadratische Differential $\hat{\phi}$ auf D, und es ist $\|\hat{\phi}\| = \infty$, weil in jedem der unendlich vielen kompakten Fundamentalgebiete die Norm von $\hat{\phi}$ gleich $\|\phi\|_R$ ist. $\hat{f}$ ist also eine Teichmüllersche Abbildung mit quadratischem Differential unendlicher Norm. $\hat{f}$ induziert eine Randabbildung μ der Kreislinie auf sich, und diese hat eine extremale K_0-q.k. Fortsetzung f_0. Wäre f_0 eine

Teichmüllersche Abbildung mit holomorphem quadratischem Differential endlicher Norm, so wäre $K_0 < K$ wegen der eindeutigen Extremalität. Aus demselben Grunde liesse sich f_0 nach unten durchdrücken [6], was einen Widerspruch zur Extremalität von f zur Folge hätte. Dies sieht man in folgender Weise: $\hat{f}$ induziert einen Isomorphismus θ der Gruppen G und G' durch

$$\theta(g) = \hat{f} \circ g \circ \hat{f}^{-1}, \qquad g \in G.$$

Also gilt

$$\hat{f} = \theta(g) \circ \hat{f} \circ g^{-1}, \qquad \text{in } D, \text{ insbesondere}$$
$$\mu = \theta(g) \circ \mu \circ g^{-1} \qquad \text{für } g \in G.$$

Damit ist aber auch $\theta(g) \circ f_0 \circ g^{-1}$ für jedes $g \in G$ eine Erweiterung von μ, wegen der eindeutigen Extremalität also

$$f_0 = \theta(g) \circ f_0 \circ g^{-1}, \qquad g \in G.$$

Also lässt sich f_0 nach unten durchdrücken.

Wir haben gesehen, μ besitzt als extremale Erweiterung f_0 keine Teichmüllersche Abbildung mit holomorphem quadratischem Differential endlicher Norm, also gibt es einen wesentlichen Randpunkt $\zeta_0 \in \partial D$, d.h.

$$H_{\zeta_0} = K_0.$$

($K_0 > 1$, denn sonst hätten wir wieder eindeutige Extremalität und obigen Widerspruch.)

Nun zeigen wir, dass die Bahn $G(\zeta_0) := \{g(\zeta_0) \mid g \in G\}$ dicht liegt auf ∂D (d.h. G und G' sind Gruppen erster Art). Weil R kompakt ist, ist jedes $g \in G \setminus \{id\}$ hyperbolisch ([1], p. 97). Wäre $G(\zeta_0) = \{\zeta_0\}$, so hätten alle $g \in G$ dieselben zwei Fixpunkte, und das Fundamentalgebiet wäre nicht kompakt. Somit gibt es ein $\zeta_1 \neq \zeta_0$ mit $\zeta_1 \in G(\zeta_0)$. Weil bei kompaktem Fundamentalgebiet die "limit-set" L schon ganz ∂D ist, gilt nach Lehner ([5], p. 18):

Zu jedem $z \in \partial D \setminus \{\zeta_0, \zeta_1\}$ gibt es ein $z' \in \partial D$ mit $z \in \overline{G(w)}$ für jedes $w \in \partial D \setminus \{z'\}$. In unserem Fall also ist $z \in \overline{G(\zeta_0)}$ oder $z \in \overline{G(\zeta_1)}$. Wegen $G(\zeta_0) = G(\zeta_1)$ gilt $z \in \overline{G(\zeta_0)}$ für jedes $z \in \partial D$. Also $\overline{G(\zeta_0)} = \partial D$.

Sei nun $z \in G(\zeta_0)$. Es gibt somit ein $g \in G$ mit $g(\zeta_0) = z$. Wegen $\mu = \theta(g) \circ \mu \circ g^{-1}$ ist $H_z = H_{\zeta_0}$, denn g und $\theta(g)$ sind ja konform. Also ist

$$H_z = K_0 \quad \text{für alle} \quad z \in G(\zeta_0).$$

$z \mapsto H_z$ ist aber halbstetig nach oben und $\overline{G(\zeta_0)} = \partial D$, somit gilt

$$H_z = K_0 > 1 \quad \text{für jedes} \quad z \in \partial D.$$

b. Vergleich der Grössen H_ζ, K_ζ *sowie* H_Γ, K_Γ, H_Γ^0, K_Γ^0

Wir betrachten zu H, H_ζ, H_Γ noch einige weitere Grössen. Wir definieren für $\zeta \in \partial D$,

$$K_\zeta := \inf \{K_f \mid f : D \to D, \text{ q.k., } f|_I = \mu|_I\},$$

wobei das Infimum über alle offenen Intervalle I auf ∂D genommen wird, die ζ enthalten, sowie über alle derartigen Funktionen f. Offensichtlich ist $H_\zeta \leqq K_\zeta$. Wir werden in diesem Abschnitt die Gleichheit beweisen. Zunächst verallgemeinern wir diese Definition. Sei Γ eine abgeschlossene Teilmenge von ∂D. H_Γ und K_Γ sind also definiert. Wir setzen

$$H_\Gamma^0 := \inf_{\{\Gamma'\}} H_{\Gamma'}, \qquad K_\Gamma^0 := \inf_{\{\Gamma'\}} K_{\Gamma'},$$

wobei das Infimum über alle abgeschlossenen Mengen Γ' in ∂D genommen wird, die Γ im Innern enthalten. Ist zum Beispiel $\Gamma = \{\zeta\}$, so gilt $H_\zeta = H_\Gamma^0$ und $K_\zeta = K_\Gamma^0$; oder für $\Gamma = \partial D$ ist $H_\Gamma^0 = H_\Gamma = H$, $K_\Gamma^0 = K_\Gamma = K_0$. Wir beweisen, dass gilt

$$K_\Gamma^0 = \operatorname{Max} \{H_\Gamma^0, K_\Gamma\}.$$

Daraus erhalten wir für $\Gamma = \{\zeta\}$ wegen $K_{\{\zeta\}} = 1$ sofort

$$K_\zeta = H_\zeta.$$

Im Falle $\Gamma = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\}$ ist $H_\Gamma^0 = \operatorname{Max}_{i \leqq n} H_{\zeta_i}$ sowie $K_\Gamma = K_n$ die maximale Dilatation der Teichmüllerschen Extremalen für dieses n-Eck [13]. Also gilt

$$K_{\{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}}^0 = \operatorname{Max} \{K_n, H_{\zeta_1}, H_{\zeta_2}, \ldots, H_{\zeta_n}\}.$$

Für $n \leqq 3$ ist $K_n = 1$, also

$$K_{\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}}^0 = \operatorname{Max} \{H_{\zeta_1}, H_{\zeta_2}, H_{\zeta_3}\}.$$

Mit Hilfe von Satz 5.1. beweisen wir jetzt den

SATZ 6.1. *Sei μ eine quasisymmetrische Abbildung der Kreislinie ∂D auf sich und Γ eine abgeschlossene Teilmenge von ∂D. Dann gilt*

$$K_\Gamma^0 = \mathrm{Max}\{H_\Gamma^0, K_\Gamma\}.$$

Beweis. Weil $K_\Gamma^0 \geqq H_\Gamma^0$ und $K_\Gamma^0 \geqq K_\Gamma$ ist, folgt die Behauptung zum Beispiel aus $K_\Gamma^0 = H_\Gamma^0$. Wir haben also den Fall $K_\Gamma^0 > H_\Gamma^0$ zu untersuchen. Falls $\Gamma = \partial D$ ist, haben wir $K_\Gamma^0 = K_\Gamma$, also dürfen wir annehmen, Γ sei nicht die ganze Kreislinie ∂D. Ferner sei Γ nicht-leer, da sonst sowieso $K_\Gamma^0 = K_\Gamma = H_\Gamma^0 = 1$ gilt. Sei (ε_n) eine Folge mit $\varepsilon_n \downarrow 0$. Γ_n seien endliche Vereinigungen disjunkter abgeschlossener Intervalle so, dass Γ im Innern von Γ_n und Γ_n in der ε_n-Umgebung von Γ bezüglich ∂D enthalten ist. Es gilt

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \Gamma_n = \Gamma.$$

Die Folge Γ_n ist monoton fallend. Zunächst sehen wir, dass $H_{\Gamma_n} \downarrow H_\Gamma^0$ und $K_{\Gamma_n} \downarrow K_\Gamma^0$. Aus $H_\Gamma^0 < K_\Gamma^0$ schliessen wir $H_{\Gamma_n} < K_{\Gamma_n}$ für $n \geqq n_0$. Die Extremalen f_n für die Randwerte μ auf Γ_n sind also Teichmüllersche Abbildungen mit quadratischen Differentialen $\phi_n \in v_{\Gamma_n}$, denn kein Punkt von Γ_n kann bezüglich Γ_n wesentlich sein. Aus der Normalität von $\{\phi_n\}$ schliessen wir auf eine in $\bar{D} \setminus \Gamma$ lokal gleichmässig konvergente Teilfolge, die wir wieder ϕ_n nennen wollen. Also $\phi_n \to \phi_\Gamma$ in $\bar{D} \setminus \Gamma$ für $n \to \infty$. Wir behaupten zunächst, $\|\phi_\Gamma\| \neq 0$. Ist nämlich $\|\phi_\Gamma\| = 0$, d.h. konvergieren die ϕ_n lokal gleichmässig in $\bar{D} \setminus \Gamma$ gegen Null, so schliessen wir wieder, dass $H_\Gamma^0 = K_\Gamma^0$ gilt in folgender Weise:

Sei $H' > H_\Gamma^0$. Es gibt also eine H'-q.k. Fortsetzung h, welche in einer Umgebung $U(\Gamma)$ von Γ definiert ist und in Γ_n die Randwerte von μ hat für $n \geqq n_0$. Wie früher wählen wir wieder analytische Kurven γ_k in $U(\Gamma)$, welche die Endpunkte der Intervalle von Γ_{n_0} verbinden und Gebiete G_k von D abtrennen. Wir setzen $\tilde{D} = D \setminus \bigcup \bar{G}_k$ und haben in Intervallen auf $\partial \tilde{D}$, welche die γ_k enthalten, die Randwerte durch h vorzugeben. Nach Satz 5.1. können wir diese Abbildung $\tilde{K}$-q.k. in $\tilde{D}$ erweitern (für ein gewisses $\tilde{K}$). Wir nennen die erweiterte Addildung $\tilde{f}$, und weil $\tilde{f}$ und f_n auf Γ_n übereinstimmen für alle $n \geqq n_0$, gilt die Hauptungleichung

$$1 \leqq \iint_D |\phi_n| \frac{|1 - \kappa_n \phi_n / |\phi_n||^2}{1 - |\kappa_n|^2} \cdot \frac{1 + |\tilde{\kappa}|}{1 - |\tilde{\kappa}|} \, dx \, dy, \qquad n \geqq n_0.$$

Die Abbildung f_n hat aber komplexe Dilatation

$$\kappa_n = k_n \frac{\bar{\phi}_n}{|\phi_n|}, \qquad K_{\Gamma_n} = \frac{1 + k_n}{1 - k_n},$$

also

$$\frac{|1-\kappa_n\phi_n/|\phi_n||^2}{1-|\kappa_n|^2}=\frac{1}{K_{\Gamma_n}},$$

und damit

$$K_{\Gamma_n} \leqq \iint_D |\phi_n| \frac{1+|\tilde{\kappa}|}{1-|\tilde{\kappa}|}\, dx\, dy, \qquad n \geqq n_0.$$

Lassen wir $n \to \infty$ gehen, so folgt, weil $\phi_n \to 0$ lokal gleichmässig in $\bar{D}\setminus\Gamma$ und $(1+|\tilde{\kappa}|)/(1-|\tilde{\kappa}|) \leqq H'$ in $U(\Gamma)$

$$K_\Gamma^0 = \lim_{n\to\infty} K_{\Gamma_n} \leqq H'.$$

$H' > H_\Gamma^0$ war beliebig, also $K_\Gamma^0 = H_\Gamma^0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wie früher haben wir also $0 < \|\phi_\Gamma\| \leqq 1$. Mit $K_\Gamma^0 =: (1+k_\Gamma^0)/(1-k_\Gamma^0)$ haben wir

$$\kappa_n = k_n \frac{\bar{\phi}_n}{|\phi_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} k_\Gamma^0 \frac{\bar{\phi}_\Gamma}{|\phi_\Gamma|} \quad \text{f.ü.}$$

Die Abbildungen f_n konvergieren also gegen eine Teichmüllersche Abbildung f_Γ mit quadratischem Differential in v_Γ und komplexer Dilatation $k_\Gamma^0\bar{\phi}_\Gamma/|\phi_\Gamma|$. Ausserdem stimmt f_Γ auf Γ mit μ überein, ist also die eindeutig bestimmte Extremale für μ bezüglich Γ. Damit ist $K_\Gamma = K_\Gamma^0$ und die Behauptung damit bewiesen.

Wir bemerken noch, dass keine analoge Beziehung zwischen H_Γ, H_Γ^0 und K_Γ gilt und führen das folgende Beispiel an. Wir strecken ein achsenparalleles Quadrat mit den Ecken $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ durch $F_{K_0}(x+iy) = K_0x+iy$, $K_0 > 1$. Wir wählen $\Gamma = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4\}$. Also ist $H_\Gamma = 1$, da Γ nur aus isolierten Punkten besteht, ferner $1 < H_\Gamma^0 < K_0 = K_\Gamma = K_\Gamma^0$.

c. Beweis einer Vermutung von Sethares

Als weitere Anwendung wollen wir eine in der Dissertation von Sethares [11] aufgestellte Vermutung beweisen. Wir betrachten eine Teichmüllersche Abbildung f, welche in einem Gebiet definiert sei, das den abgeschlossenen Einheitskreis $\bar{D}$ enthält. f hat also lokal die Darstellung $f = \Psi^{-1} \circ F_k \circ \Phi$, wo Φ, Ψ konform sind und $F_K(x+iy) = Kx+iy$ ist, $K > 1$, mit Ausnahme in isolierten

Punkten. $\phi := \Phi'^2$ und $\psi := \Psi'^2$ sind eindeutige Funktionen mit Nullstellen und Polen in diesen isolierten Punkten bezw. deren Bildpunkten (vgl. [12]). Ist z_0 eine Nullstelle oder ein Pol von ϕ der Ordnung n, so ist $f(z_0)$ eine Nullstelle bezw. ein Pol von ψ derselben Ordnung. Wir fragen nun, ob f für den induzierten Randhomöomorphismus μ von ∂D auf $f(\partial D)$ extremal ist. Ist ϕ holomorph in D und hat auf ∂D nur Pole der Ordnung $n \leqq 2$. so ist f, wie Sethares gezeigt hat, eindeutig extremal. Existieren auf dem Rand Pole höherer Ordnung, so lässt sich f abändern, ohne die maximale Dilatation zu vergrössern und ohne die Randwerte zu verändern. Auch ist ersichtlich, dass die Extremalität von f aus der Existenz von Polen zweiter Ordnung von ϕ auf ∂D folgt. Die Vermutung lautet dann: Hat ϕ auf ∂D keine Pole zweiter Ordnung, aber mindestens einen Pol höherer Ordnung, so ist f nicht extremal. Wir beweisen nun den

SATZ 6.2. *Sei f eine Teichmüllersche Abbildung in einem Gebiet, das den abgeschlossenen Einheitskreis $\bar{D}$ enthält, ϕ das zugehörige meromorphe quadratische Differential sowie K die maximale Dilatation von f. Dann sind für die quasikonforme Erweiterung von $f|_{\partial D}$ ins Innere die folgenden Fälle möglich:*

(a) *ϕ hat auf ∂D mindestens einen Pol zweiter Ordnung. Dann ist f extremal, und die Pole zweiter Ordnung sind wesentliche Randpunkte.*

In diesem Fall ist f eindeutig extremal genau dann, wenn ϕ in D holomorph ist und auf ∂D höchstens Pole der Ordnung $n \leqq 2$ hat.

(b) *ϕ hat auf ∂D keinen Pol zweiter Ordnung. Dann ist das Maximum der lokalen Dilatationen* $\text{Max}_{\zeta \in \partial D} H_\zeta$ *echt kleiner als K.*

f ist d.u.n.d. eindeutig extremal, wenn ϕ in D holomorph ist und auf ∂D höchstens Pole erster Ordnung hat. Andernfalls ist f nicht extremal.

Beweis. Man berechnet die lokale Dilatation H_ζ der Randabbildung μ in jedem Punkt $\zeta \in \partial D$. Ist ζ ein Pol zweiter Ordnung von ϕ, so ist $H_\zeta = K$. Diese Stellen sind also wesentliche Randpunkte, und mithin ist f extremal. In regulären Punkten $\zeta \in \partial D$ von ϕ (für die Definitionen im Zusammenhang mit quadratischen Differentialen siehe [15]) berechnet man leicht, dass $H_\zeta = 1$ gilt. Für Nullstellen oder Pole der Ordnung $n \neq 2$ erhält man $H_\zeta < K$. Im Falle (b) gibt es unter der Annahme, dass f extremal ist, keinen wesentlichen Randpunkt, und nach Satz 4.1 muss f damit eine Teichmüllersche Abbildung mit in D holomorphem quadratischem Differential ϕ von endlicher Norm sein. ϕ hat also auf ∂D höchstens Pole erster Ordnung, und f ist mithin eindeutig extremal. Damit ist (b) bewiesen, und (a) ergibt sich in folgender Weise:

Hat ϕ auf ∂D mindestens einen Pol zweiter Ordnung, so ist f nach dem soeben Gesagten extremal. Ist ϕ zudem holomorph in D und hat auf ∂D höchstens Pole zweiter Ordnung, so ist f nach Sethares eindeutig extremal. Besitzt ϕ auf ∂D einen Pol der Ordnung $n \geqq 3$, so können wir, wie Sethares gezeigt hat, f

abändern, indem wir F_K in einem Gebiet der Form $\{z \mid \theta_1 < \arg z < \theta_2\}$ durch die durch die Randwerte induzierte Extremale $\tilde{F} \neq F_K$ ersetzen ($f = \Psi^{-1} \circ F_K \circ \Phi$). Hat ϕ in $z_0 \in D$ einen Pol, so betrachten wir eine Kreislinie γ von z_0 in D, die durch keinen Pol und keine Nullstelle von ϕ geht. Weil das Bild einer analytischen Kurve unter F_K wieder analytisch ist, ist $f(\gamma)$ analytisch. Die Dilatation der von f zwischen γ und $f(\gamma)$ induzierten Randabbildung ist also eins. Im Innern von γ können wir f also durch die dazugehörige Extremale $\tilde{f}$ abändern. Diese ist konform oder eine Teichmüllersche Abbildung mit holomorphem quadratischem Differential, also ist $f \neq \tilde{f}$. f kann also nie eindeutig extremal sein, wenn ϕ einen Pol in D besitzt.

Auf die explizite Berechnung der lokalen Dilatationen H_ζ wollen wir an dieser Stelle verzichten.

LITERATUR

[1] Bers, L., *Quasiconformal mappings and Teichmüller's theorem. Analytic Functions.* Princeton University Press, Princeton, N.J. (1960), 89–119.

[2] Beurling, A. and Ahlfors, L. V., *The boundary correspondence under quasiconformal mappings.* Acta Math. *96* (1956), 125–142.

[3] Hamilton, R., *Extremal quasiconformal mappings with prescribed boundary values.* Trans. Amer. Math. Soc. *138* (1969), 399–406.

[4] Kelingos, J. A., *Boundary correspondence under quasiconformal mappings.* Michigan Math. Journal, *13* (1966), 235–249.

[5] Lehner, J., *A short course in automorphic functions.* Holt, Rinehart and Winston, New York (1966).

[6] Lehto, O., *Group isomorphisms induced by quasiconformal mappings. Contributions to Analysis* (1974).

[7] Lehto, O., und Virtanen, K. I., *Quasikonforme Abbildungen.* Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1965).

[8] Ortel, M., *Quasiconformal mappings, extremal for their boundary values.* Preprint.

[9] Reich, E., *On the relation between local and global properties of boundary values for extremal quasiconformal mappings.* Annals of Math. Studies *79* (1974), 391–407.

[10] Reich, E. and Strebel, K., *Extremal quasiconformal mappings with given boundary values. Contributions to Analysis.* A Collection of Papers Dedicated to Lipman Bers. Academic Press, New York and London (1974).

[11] Sethares, G. C., *The extremal property of certain Teichmüller mappings.* Comment. Math. Helv. *45* (1970), 353–362.

[12] Strebel, K., *Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises II.* Comment. Math. Helv. *39* (1964), 77–89.

[13] Strebel, K., *Ueber quadratische Differentiale mit geschlossenen Trajektorien und extremale quasikonforme Abbildungen.* Festband zum 70. Geburtstag von Prof. Rolf Nevanlinna. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1966), 105–127.

[14] Strebel, K., *On the existence of extremal Teichmüller mappings.* Journal d'analyse Math. *30* (1976), 464–480.

[15] Strebel, K., *Quadratic Differentials.* Erscheint demnächst in: Ergebnisse der Mathematik.

Math. Inst. Freiestr. 36 8032 Zurich

Eingegangen den 15. Oktober 1980