Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 56 (1981)

Artikel: Über Homöomorphismen n-dimensionaler Henkelkörper und endliche Erweiterungen von Schottky-Gruppen.

Autor: Zimmermann, Bruno

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43255

Comment. Math. Helvetici 56 (1981) 474–486 0010-2571/81/003474-13\$01.50+0.20/0

Über Homöomorphismen n-dimensionaler Henkelkörper und endliche Erweiterungen von Schottky-Gruppen

BRUNO ZIMMERMANN

Es sei V_g^n ein n-dimensionaler Henkelkörper vom Geschlecht g (d.h. V_g^n entsteht aus dem n-Ball D^n durch Ankleben von g 1-Henkeln). In [12] haben wir gezeigt, daß sich jede endliche Gruppe von Isotopieklassen von Homöomorphismen eines 3-dimensionalen Henkelkörpers V_g^3 repräsentieren läßt durch eine isomorphe Gruppe von Homöomorphismen, und daß die analoge Aussage für Homotopieklassen von Homöomorphismen von V_g^3 im allgemeinen nicht richtig ist. Dies führte dazu, das analoge Problem in höheren Dimensionen zu betrachten.

Die Gruppe der Homotopieklassen von Homöomorphismen (bzw. Homotopieäquivalenzen) von V_g^n ist isomorph zur äußeren Automorphismengruppe Out F_g der freien Gruppe F_g vom Rang g, $F_g = \pi_1 V_g^n$. Es sei $H(V_g^n)$ die Gruppe aller Homöomorphismen von V_g^n und $p: H(V_g^n) \to \text{Out } F_g$ die kanonische Abbildung, die jedem Homöomorphismus von V_g^n den induzierten äußeren Automorphismus der Fundamentalgruppe zuordnet. Wir zeigen in dieser Arbeit, daß es eine Dimension $n = n(g)$ gibt, so daß sich jede endliche Untergruppe A von Our F_g realisieren läßt durch die Operation auf $\pi_1 V_g^n \cong F_g$ einer isomorphen Gruppe $\tilde{A}$ von Homöomorphismen von V_g^n (d.h. $p: H(V_g^n) \to \text{Out } F_g$ induziert einen Isomorphismus von $\tilde{A}$ auf A). Dabei können wir $\tilde{A}$ sogar als Gruppe von Isometrien wählen, falls wir V_g^n durch eine geeignete $(n-1)$-dimensionale Schottky-Gruppe uniformieren (in Abhängigkeit von der gegebenen endlichen Untergruppe A von Out F_g; im Inneren von V_g^n gibt es dann eine Riemannsche Metrik konstanter negativer Krümmung). Dies ist äquivalent zu folgender Aussage. Ist $1 \to F_g \hookrightarrow G \to A \to 1$ die durch A bestimmte Erweiterung von F_g, so ist G isomorph zu einer Gruppe konformer Abbildungen der $(n-1)$-Sphäre S^{n-1}, wobei $F_g \subset G$ einer Schottky-Gruppe entspricht.

Als Haupthilfsmittel dient uns die Charakterisierung endlicher Erweiterungen von freien Gruppen in [3].

Die Ordnung einer endlichen Gruppe A orientierungserhaltender Homöomorphismen eines 3-dimensionalen Henkelkörpers V_g^3 ist beschränkt durch $12(g-1)$ [12]. Wir bestimmen im 4. Abschnitt alle Gruppen G, die als Erweiterung auftreten, falls diese Schranke angenommen wird.

1. Endliche Erweiterungen freier Gruppen

Eine Gruppe G ist genau dann endliche Erweiterung einer endlich erzeugten freien Gruppe, wenn G eine HNN-Erweiterung der folgenden Form ist [3]:

$$\langle t_1, \ldots, t_r, K \mid \text{Relationen von } K, t_1 L_1 t_1^{-1} = M_1, \ldots, t_r L_r t_r^{-1} = M_r \rangle, \tag{1.1}$$

wo K ein Baumprodukt endlich vieler endlicher Gruppen ist (den Eckengruppen von K, wobei über den Kantengruppen amalgamiert wird) und jede der Gruppen L_i, M_i Untergruppe einer Eckengruppe ist. Den K zugrunde liegenden Baum werden wir ebenfalls mit K bezeichnen, für die Ecken und Eckengruppen bzw. Kanten und Kantengruppen verwenden wir jeweils dieselben Symbole.

Ist F_g eine freie Untergruppe von G vom Rang g und Index j, so gilt folgende Formel ([3]; vgl. auch Bemerkung 3.3):

$$g = j\left(\frac{1}{f_1} + \cdots + \frac{1}{f_r} + \frac{1}{e_1} + \cdots + \frac{1}{e_s} - \frac{1}{v_1} - \cdots - \frac{1}{v_{s+1}}\right) + 1; \tag{1.2}$$

dabei ist f_i die Ordnung von L_i bzw. M_i, die e_j bzw. v_k sind die Ordnungen der Kanten- bzw. Eckengruppen von K.

Wir verwenden in §3 folgendes Lemma. Teil(a) wurde in [1] bewiesen. Wir geben einen kurzen Beweis unter Verwendung von 1.1 und 1.2 (die wir ohnehin später benötigen).

1.3. LEMMA. (a) *Sei α ein Automorphismus einer freien Gruppe F_g vom Rang g, so daß α^p ein innerer Automorphismus von F_g ist, p prim. Operiert α trivial auf $F_g/[F_g, F_g] \cong \mathbf{Z}^g$, so ist α ein innerer Automorphismus von F_g.*

(b) *Die Ordnungen endlicher Untergruppen der äußeren Automorphismengruppe* Out F_g *von F_g sind beschränkt für festes g.*

(c) *Es gibt nur endlich viele Isomorphietypen von Gruppen G, die endliche effektive Erweiterung einer freien Gruppe F_g von festem Rang g sind.*

Beweis. (a) Der Automorphismus α bestimmt eine Erweiterung $1 \to F_g \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} \mathbf{Z}_p \to 1$ zum abstrakten Kern ($\mathbf{Z}_p, F_g, \Omega : \mathbf{Z}_p \to \mathrm{Out}\, F_g$ mit $\Omega(1) = [\alpha]$). Die Gruppe G ist von der Form 1.1, wobei jede Eckengruppe von K isomorph zu $\mathbf{Z}_p$ und jede Kantengruppe trivial ist. Da α trivial auf $F_g/[F_g, F_g]$ operiert, hat

$G/[G, G]$ den freien Rang g, und es gibt genau g Erzeugende $t_1, \ldots, t_g$ in der Darstellung 1.1 von G. Aus 1.2 folgt

$$g \geq p\left(g \cdot \frac{1}{p} + s - (s+1)\frac{1}{p}\right) + 1 = g + p \cdot s - s,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $L_i \cong \mathbf{Z}_p$ für alle i. Es folgt $s = 0$ und $L_i \cong \mathbf{Z}_p$ für alle i, d.h. $G = \langle x, t_1, \ldots, t_g \mid x^p = 1, t_i x t_i^{-1} = x\rangle$ mit $\pi(x) = 1 \in \mathbf{Z}_p$. Durch Konjugation operiert x trivial auf G bzw. F_g und repräsentiert die Automorphismenklasse von α.

(b) folgt aus (a) und der entsprechenden Aussage für endliche Untergruppen von $\mathrm{GL}(g, \mathbf{Z})$ (vgl. z.B. [10, Satz 191], wo gezeigt wird, daß der Kern der kanonischen Abbildung $\mathrm{GL}(g, \mathbf{Z}) \to \mathrm{GL}(g, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ torsionsfrei ist für $p \geq 3$ prim).

(c) Jede Zahl e_i in 1.2 ist echter Teiler zweier v_j, wobei jedes v_j vorkommt. Wegen

$$g \geq j\left(\left(\frac{1}{e_1} - \frac{1}{v_{\alpha_1}} - \frac{1}{v_{\alpha_2}}\right) + \left(\frac{1}{e_2} - \frac{1}{v_{\alpha_3}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{e_s} - \frac{1}{v_{\alpha_{s+1}}}\right)\right) + 1 \geq s$$

ist die Anzahl der Eckengruppen von K für festes g beschränkt. Für die Anzahl r der t_i gilt:

$$g \geq j\left(r \cdot \frac{1}{j} - 1\right) + 1 = r - j + 1.$$

Wegen (b) ist daher auch die Anzahl der t_i beschränkt. Daher gibt es nur endlich viele Möglichkeiten, eine Gruppe G mit Darstellung 1.1 und der Eigenschaft in (c) zu konstruieren. □

Wir notieren noch eine Folgerung aus [11, Theorem 3.2.9] und 1.3 (a):

1.4. KOROLLAR. *Sei* $1 \to F_g \hookrightarrow G \to A \to 1$ *eine endliche effektive Erweiterung einer freien Gruppe vom Rang g. Dann ist* $G/[F_g, F_g]$ *isomorph zu einer kristallographischen Gruppe des* $\mathbf{R}^g$.

Wir wissen nicht, ob man jede kristallographische Gruppe auf diese Art erhalten kann.

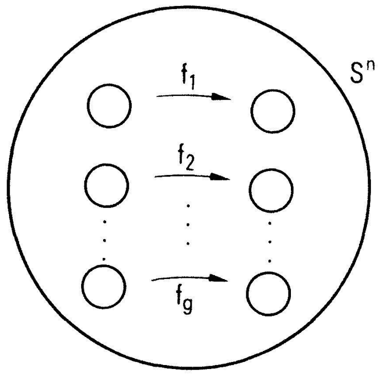
2. *n*-dimensionale Schottky-Gruppen

Es sei $M(n)$ die Gruppe der Kreisverwandschaften der n-Sphäre S^n. Dann ist $M(n)$ gleichzeitig die Gruppe aller konformen Abbildungen von S^n und läßt sich kanonisch fortsetzen auf den $(n+1)$-Ball D^{n+1}, $S^n=\partial D^{n+1}$. Fassen wir das Innere $\mathring{D}^{n+1}$ von D^{n+1} als Modell des hyperbolischen $(n+1)$-Raumes auf ("Poincaré-Modell"), so ist $M(n)$ die Gruppe der Isometrien von $\mathring{D}^{n+1}$ und wird erzeugt von Spiegelungen an n-Sphären, die senkrecht auf dem Rand von D^{n+1} stehen (hierzu und zum folgenden vgl. [2] und [7]).

Die orthogonale Gruppe $O(n+1)$ läßt sich auffassen als die Untergruppe aller Abbildungen aus $M(n)$, die den Nullpunkt in D^{n+1} fixieren. Da jede endliche Untergruppe von $M(n)$ im Inneren von D^{n+1} einen Fixpunkt hat [2, Proposition 13], sind endliche Untergruppen von $M(n)$ konjugiert zu Untergruppen der orthogonalen Gruppe $O(n+1)\subset M(n)$.

Entsprechend dem klassischen Fall $M(2)$ lassen sich die Elemente von $M(n)$ einteilen in parabolische, elliptische und loxodromische Transformationen [2]. Eine loxodromische Transformation besitzt eine Verschiebungsachse im Inneren von D^{n+1} und genau zwei Fixpunkte auf dem Rand (die Endpunkte der Achse). Eine loxodromische Transformation heißt hyperbolisch, wenn sie eine Translation entlang ihrer Verschiebungsachse ist, d.h. keine zusätzliche Drehung um diese Achse induziert (hyperbolische Transformationen sind das Produkt zweier Spiegelungen an Spiegelkreisen senkrecht zur Achse).

Eine n-dimensionale Schottky-Gruppe S_g^n ist eine diskrete Untergruppe von $M(n)$, die von g loxodromischen Transformationen $f_1, \ldots, f_g$ frei erzeugt wird, die ein System von $2g$ $(n-1)$-Sphären in S^n folgendermaßen abbilden:



Dabei soll jeweils das Innere jeder Urbildsphäre (das keine der anderen $2g-1$ Sphären enthält) auf das Äußere der Bildsphäre abgebildet werden; die beiden Fixpunkte von f_i liegen im Inneren von Urbild- und Bildsphäre. Diese Definition ist in völliger Analogie zur Definition der klassischen Schottky-Gruppen (vgl. z.B. [6, S. 265] und [5, Chapter IV. 2]).

Die Menge der Limespunkte $\Omega(S_g^n)$ einer Schottky-Gruppe S_g^n ist eine nirgendwo dichte perfekte Teilmenge von S^n (es sei $g\geq 2$). Im Inneren von D^{n+1} liegen keine Limespunkte von S_g^n, und $(D^{n+1}-\Omega(S_g^n))/S_g^n$ ist ein n-dimensionaler Henkelkörper V_g^n. Wir sagen, daß S_g^n den Henkelkörper V_g^n uniformisiert. Dann haben wir im Inneren von V_g^n eine Riemannsche Metrik konstanter negativer Krümmung, und wir können von Isometrien von V_g^n sprechen.

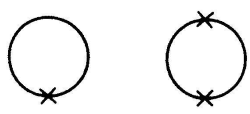
3. Geometrische Realisierung endlicher Untergruppen von Out F_g

Im nächsten Satz legen wir die PL-Kategorie zugrunde.

3.1. SATZ. (a) *Sei* Out F_g *die äußere Automorphismengruppe einer freien Gruppe* F_g *vom Rang* g. *Dann gibt es eine natürliche Zahl* $n = n(g)$, *so daß sich jede endliche Untergruppe* A *von Out* F_g *realisieren läßt durch eine isomorphe Gruppe von Homöomorphismen des* n-dimensionalen *Henkelkörpers* V_g^n *vom Geschlecht* g.

(b) *Es gilt* $n(g) \to \infty$ *für* $g \to \infty$, *d.h. es gibt keine natürliche Zahl* n, *die für alle* g *gleichzeitig die Folgerung von* (a) *erfüllt.*

Beweis. (a) Die Gruppe $A \subset \text{Out } F_g$ bestimmt eine Erweiterung $1 \to F_g \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} A \to 1$, wobei G eine Darstellung der Form 1.1 hat. Nach [8] operiert G auf einem Baum B, wobei $F_g \subset G$ frei operiert und die Stabilisatoren der Ecken bzw. Kanten von B durch die entsprechenden Gruppen in K gegeben sind (vgl. den Beweis von Satz 3.2). Dann ist $B_1 := B/F_g$ ein endlicher Graph mit $\pi_1 B \cong F_g$, und die Gruppe $A \cong G/F_g$ operiert auf B und induziert auf $F_g \cong \pi_1 B$ die vorgegebene Operation. Durch geeignetes Unterteilen können wir erreichen, daß B_1 keine Teilgraphen folgender Form enthält:



Es sei $n+2$ die Anzahl der Eckpunkte von B_1. Wir bilden die Eckpunkte von B_1 bijektiv auf die Eckpunkte des Standard-n-Simplexes $\Delta^{n+1} \subset \mathbf{R}^{n+1}$ ab. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte kanonische Einbettung von B_1 in $\partial\Delta^{n+1}$, und die Operation von A auf B_1 läßt sich zu einer Operation von A auf $\partial\Delta^{n+1}$ fortsetzen. Die reguläre Umgebung $\mathrm{U}(B_1)$ von B_1 in der zweiten Normalunterteilung von $\partial\Delta^{n+1}$ ist homöomorph zu einem n-dimensionalen Henkelkörper V_g^n, und A operiert auf $\mathrm{U}(B_1)$ und realisiert die gewünschte Operation auf $F_g \cong \pi_1(\mathrm{U}(B_1))$. Indem wir B_1 in höherdimensionale Simplices einbetten, sehen wir, daß sich A auch in jeder Dimension größer als n realisieren läßt. Wegen 1.3(c) gibt es daher die gewünschte Zahl $n = n(g)$.

(b) Wir uniformisieren V_g^n durch eine Schottky-Gruppe S_g^{n-1}, die auf D^n operiert. Für $n \geq 3$ ist $\partial D^n - \Omega(S_g^{n-1}) = S^{n-1} - \Omega(S_g^{n-1})$ universelle Überlagerung von

$\partial V^n_g = \#_g S^1 \times S^{n-2}$. Daher ist nach [4, Theorem 2.1] S^{n-1} die Endenkompaktifizierung der universellen Überlagerung von ∂V^n_g. Ist A eine endliche Untergruppe von Out F_g mit zugehöriger Erweiterung $1 \to F_g \hookrightarrow G \to A \to 1$, und operiert A auf V^n_g, so läßt sich $A \mid \partial V^n_g$ liften zu einer Operation von G auf der universellen Überlagerung von ∂V^n_g. Daher operiert G auch auf der Endenkompaktifizierung S^{n-1} und damit auch alle (endlichen) Eckengruppen von K. Wählen wir umgekehrt als Eckengruppen von K endliche Gruppen, die nicht auf S^{n-1} operieren (z.B. $(\mathbf{Z}_p)^\nu$ für großes ν), so kann $A \cong G/F_g$ nicht auf V^n_g operieren. □

Der folgende Satz zeigt, daß sich A sogar durch eine Gruppe von Isometrien realisieren läßt, wenn wir V^n_g durch eine geeignete Schottky-Gruppe S^{n-1}_g uniformieren.

3.1. SATZ. *Sei A eine endliche Untergruppe von* Out F_g *und* $1 \to F_g \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} A \to 1$ *die durch A bestimmte Erweiterung. Dann gibt es für geeignetes n einen Isomorphismus von G auf eine Untergruppe von $M(n-1)$, wobei $F_g \subset G$ auf eine Schottky-Gruppe abgebildet wird.*

Beweis. Wir legen das Standard-$(n+1)$-Simplex $\Delta^{n+1} \subset \mathbf{R}^{n+1}$ symmetrisch zum Nullpunkt und projezieren seinen Rand $\partial\Delta^{n+1}$ radial vom Nullpunkt aus auf die n-Sphäre $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Wir erhalten eine Triangulation von S^n, wobei die Kanten der Triangulation auf Großkreisen (Geodätischen bzgl. der sphärischen Metrik) liegen. Analog zum Beweis von 3.1 betten wir den Graphen B_1 in S^n ein und setzen A zu einer Gruppe orthogonaler Transformationen von S^n fort.

Die Gruppe G operiert auf B mit einem Fundamentalbereich der Form

$$F = K \cup \{r \text{ Kanten } T_1, \ldots, T_r\},$$

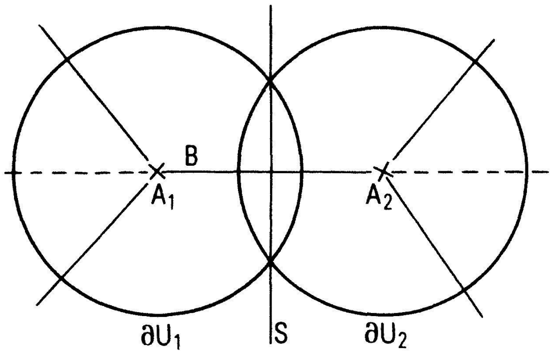
wobei der Anfangspunkt jeder Kante T_i in K liegt und $t_i \in G$ den Endpunkt von T_i nach K abbildet (vgl. [8, §4]). Die Stabilisatoren in G der Ecken bzw. Kanten von K sind die entsprechenden Ecken- bzw. Kantengruppen, der Stabilisator der Kante T_i ist die Gruppe L_i, der Kante $t_i(T_i)$ (die nicht zu F gehört) die Gruppe M_i.

Wir projezieren F nach $B_1 = B/F_g$ und bezeichen das Bild mit F_1. Dabei wird K isomorph auf einen Baum in F_1 abgebildet, den wir wieder mit K bezeichnen. Ist $t_i \in F_g$, so liegt der Endpunkt der Projektion $\tilde{T}_i$ von T_i in K. Alle Stabilisatoren in G werden isomorph auf die entsprechenden Stabilisatoren in A abgebildet, wobei der Isomorphismus durch π gegeben ist. Kein Element $\neq 1$ aus A operiert trivial auf B_1. Wir unterscheiden 3 Fälle.

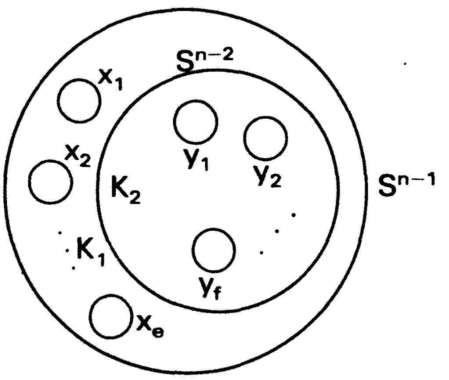
1. *Fall.* $G = A_1 *_B A_2$, d.h. es kommen keine t_i vor und K hat die Form

$$\overset{*}{A_1}\,\overline{B}\,\overset{*}{A_2}.$$

Nach obigem ist K in $B_1 \subset S^n$ eingebettet. Es sei δ der Abstand der Punkte A_1 und A_2. Wir wählen Kugelumgebungen U_1 und U_2 mit Radius $\frac{2}{3}\delta$ (bezüglich der sphärischen Metrik) der Punkte A_1 und A_2. Dann bildet der Stabilisator in A von A_i (den wir ebenfalls mit A_i bezeichen) die Umgebung U_i auf sich ab $(i=1,2)$, und A_i operiert konform auf $\partial U_i \cong S^{n-1}$.



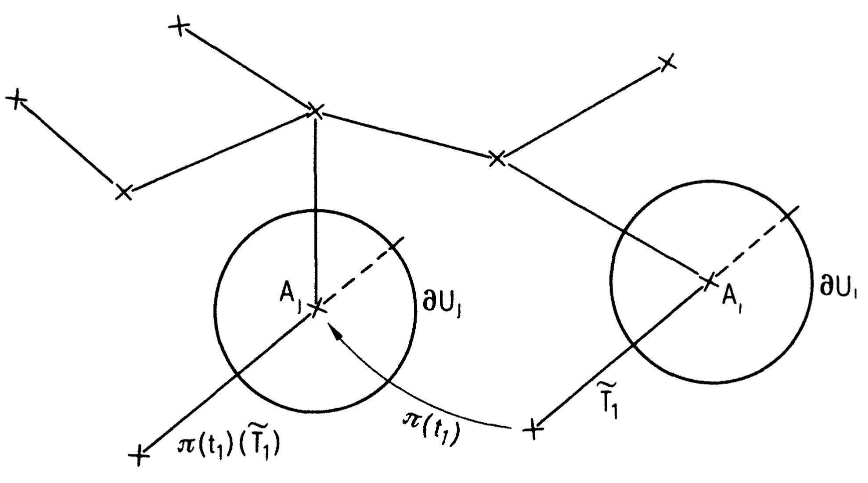
Die Operationen des Stabilisators $B \subset A_1, A_2$ auf ∂U_1 und ∂U_2 sind konform äquivalent (durch die Spiegelung an einer $(n-1)$-Sphäre S, die senkrecht auf dem Mittelpunkt der Kante B steht und die $(n-2)$-Sphäre $\partial U_1 \cap \partial U_2$ enthält). Kein Element $\neq 1$ aus B operiert trivial auf ∂U_i, da dasselbe für die Operation von A auf B_1 gilt. Wir können daher annehmen, daß A_1 und A_2 konform auf der $(n-1)$-Sphäre S^{n-1} operieren mit gemeinsamer Untergruppe B. Die Gruppe B hat 2 Fixpunkte R_1 und R_2 auf S^{n-1}, die den Schnittpunkten des Großkreises, auf dem die Kante B liegt, mit ∂U_1 bzw. ∂U_2 entsprechen. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß A_2 orthogonal auf S^{n-1} operiert, und daß R_1 und R_2 Diametralpunkte sind. Wir wählen eine hinreichend kleine ε-Umgebung V von R_1, so daß $a(V) \cap V = \varnothing$ für alle Elemente a aus $A_1 - B$ bzw. $A_2 - B$. Es gilt $B(V) = V$. Es sei τ die Spiegelung an der $(n-2)$-Sphäre $S^{n-2} = \partial V$, mit $\tau(R_1) = R_2$ und $\tau b \tau^{-1} = b$ für alle Elemente b aus B. Es sei G' die von A_1 und $\tau A_2 \tau^{-1}$ erzeugte Untergruppe von $M(n-1)$. Es seien $S^{n-2} = \partial V, x_1, \ldots, x_e$ die Bilder von S^{n-2} unter A_1, und K_1 das Ringgebiet in S^{n-1}, das von $S^{n-2}, x_1, \ldots, x_e$ begrenzt wird. Entsprechend seien $S^{n-2}, y_1, \ldots, y_f$ die Bilder von S^{n-2} unter $\tau A_2 \tau^{-1}$ und K_2 das Ringgebiet begrenzt von $S^{n-2}, y_1, \ldots, y_f$.



Aus der Operation von G' auf der Menge $G'(S^{n-2})$ von Sphären in S^{n-1} folgt $G' = A_1 *_B \tau A_2 \tau^{-1} \underset{\alpha}{\cong} G$ (keine Normalform des freien Produkts mit Amalgam operiert trivial auf S^{n-2}; für einen analogen Schluß im Falle von Schottky-Gruppen vgl. [5, Chapter IV. 2]). Wir betrachten die Menge von Ringgebieten $M := G'(K_1) \cup G'(K_2)$. Dann erhalten wir einen Fundamentalbereich von $\alpha(F_g) \subset G'$, indem wir mit $K_1 \cup K_2$ starten und sukzessive $|G/F_g|$ an $K_1 \cup K_2$ angrenzende Ringgebiete in M hinzufügen. Es folgt, daß $\alpha(F_g)$ eine Schottky-Gruppe ist. Der Graph B läßt sich aus M folgendermaßen zurückgewinnen: Es sei $\tilde{B}$ der Graph, dessen Eckpunkte die Ringgebiete aus M sind. Zwei Eckpunkte seien durch eine Kante verbunden, falls die entsprechenden Ringgebiete benachbart sind. Dann operiert G' auf $\tilde{B}$ und es gilt $(\tilde{B}, G') \cong (B, G)$ (äquivarianter Isomorphismus). Betrachten wir die Operation von G' auf $D^n (S^{n-1} = \partial D^n)$, so haben A_1 bzw. $\tau A_2 \tau^{-1}$ Fixpunkte P_1 bzw. P_2 im Inneren von D^n, $P_1 \neq P_2$, die den Mittelpunkten von U_1 bzw. U_2 entsprechen. Ist e die geodätische (nichteuklidische) Strecke zwischen P_1 und P_2, so ist $(G'(e), G')$ ein Baum, der ebenfalls äquivariant isomorph ist *zu* (B, G). ∎

2. *Fall.* $G = K$, d.h. es kommen keine t_i vor. Wir gehen induktiv vor. Wir starten mit einer Kante von K und konstruieren die entsprechende Gruppe wie im 1. Fall. Danach nehmen wir sukzessive je eine weitere angrenzende Kante hinzu und konstruieren die entsprechende Gruppe wieder analog zum 1. Fall; der einzige Unterschied ist, daß wir an Stelle von A_1 im 1. Fall jetzt schon ein Baumprodukt haben, daß bereits konform auf S^{n-1} operiert. Einen Fundamentalbereich von F_g konstruiert man analog zum 1. Fall aus Ringgebieten, die den Eckpunkten des Baumes B entsprechen.

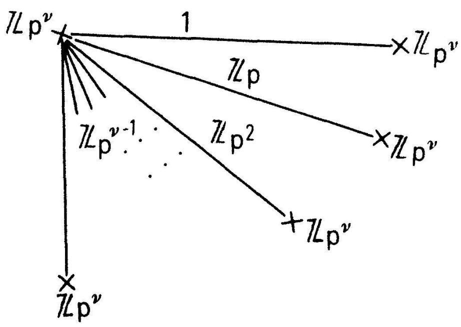
3. *Fall.* Es kommen t_i vor.
Wir konstruieren K wie im 2. Fall und führen den Beweis für t_1 (für die restlichen t_i geht er vollkommen analog). Wir betrachten die Teilmenge $F_1 \subset B_1 \subset S^n$.



Es gilt $L_1 \subset A_i$, $M_1 \subset A_j$, und $\pi(t_1) \in A$ ist eine orthogonale Abbildung mit $\pi(t_1)L_1\pi(t_1^{-1}) = M_1$, wobei L_1 die Kante $\tilde{T}_1$ fixiert und M_1 die Kante $\pi(t_1)(\tilde{T}_1)$ (eventuell $\pi(t_1) = 1$). Die Gruppe K operiert bereits auf S^{n-1}. Die Gruppe $L_1 \subset K$ hat 2 Fixpunkte S_1, S_2 auf S^{n-1}, die den Schnittpunkten von $\tilde{T}_1$ mit ∂U_i entsprechen. Analog hat M_1 zwei Fixpunkte T_1, T_2 auf S^{n-1}, die den Schnittpunkten von $\pi(t_1)(\tilde{T}_1)$ mit ∂U_j entsprechen. Es gibt eine konforme Abbildung k_1: $S^{n-1} \to S^{n-1}$ mit $k_1L_1k_1^{-1} = M_1$ und $k_1(S_1) = T_1$, $k_1(S_2) = T_2$ (diese Abbildung erhalten wir aus $\pi(t_1)$). Es sei f_1 eine hyperbolische Transformation von S^{n-1} mit Fixpunkten T_1 und T_2. Dann gilt $f_1M_1f_1^{-1} = M_1$, da M_1 die Achse von f im Inneren von $D^n(S^{n-1} = \partial D^n)$ punktweise festläßt. Es folgt $f_1^n k_1 L_1 k_1^{-1} f_1^{-n} = M_1$, und für großes n bildet $f_1^n k_1$ eine hinreichend kleine Umgebung V_1 von S_1 auf das komplement einer hinreichend kleinen Umgebung V_2 von T_2 ab. Dann können wir für t_1 konforme Abbildung $f_1^n k_1$ wählen (dies folgt wiederum aus der Normalform für Elemente in HNN-Gruppen). Einen Fundamentalbereich von F_g erhält man, indem man aus der Vereinigung der Ringgebiete, die den Ecken von K entsprechen, das Innere $\mathring{V}_1$ und $\mathring{V}_2$ von V_1 und V_2 wegnimmt, und endlich viele angrenzende unter G äquivalente Gebiete hinzunimmt. □

Nicht jede endliche Gruppe A von Homöomorphismen von V_g^n ist äquivalent zu einer Gruppe von Isometrien, da es endliche Gruppen von Homöomorphismen von Sphären gibt, die zu keiner orthogonalen Gruppe äquivalent sind.

In 3.1(b) haben wir gezeigt, daß die Dimension, in der sich eine endliche Untergruppe A von Out F_g realisieren läßt, mit g beliebig groß werden kann. Beschränken wir uns auf Realisierungen durch Gruppen von Isometrien, so tritt der Fall schon für endliche zyklische Gruppen auf. Wählen wir $\nu = \nu(n)$ hinreichend groß, so operiert folgendes Baumprodukt nicht auf S^n (man betrachte die Fixpunktmenge von $\mathbf{Z}_p$ in D^{n+1}).



3.3. *Bermerkung*. Aus der Operation von A auf dem Graphen B_1 mit $\pi_1 B_1 \cong F_g$ ergibt sich leicht ein Beweis der Formel 1.2. Es gilt $g = 1 - b + a$, wobei b die Anzahl der Ecken und a die Anzahl der Kanten von B_1 ist. Die Anzahl der Ecken von B_1, die unter A äquivalent sind zu einer Ecke A_i von $K \subset B_1$, ist gleich

$|A/A_i|$. Die Anzahl der Kanten äquivalent zu einer Kante B_j von K ist gleich $|A/B_j|$. Die Anzahl der Kanten äquivalent zu $\tilde{T}_k$ ist gleich $|A/L_k|$. Hieraus ergibt sich sofort 1.2 (falls F_g normal in G liegt; andernfalls gehen wir zu einem Normalteiler über und wenden das Verfahren zweimal an).

Satz 3.2 läßt sich verallgemeinern für endliche effektive Erweiterungen der freien Gruppe F_∞ von abzählbarem Rang. Eine Schottky-Gruppe S^n_∞ mit abzählbar vielen Erzeugenden sei analog zum endlichen Fall definiert durch abzählbar viele Paare von Sphären (die sich natürlich in S^n häufen). Für jede endliche effektive Erweiterung $1 \to F_\infty \hookrightarrow G \to A \to 1$ läßt sich nach [9] die Gruppe G einbetten in eine Gruppe $\bar{G}$, die endliche Erweiterung einer freien Gruppe F_g für geeignetes g ist. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß diese Erweiterung ebenfalls effektiv ist. Aus 3.2 folgt dann:

3.4. KOROLLAR. *Sei $1 \to F_\infty \hookrightarrow G \to A \to 1$ eine endliche effektive Erweiterung der freien Gruppe F_∞ von abzählbar unendlichem Rang. Dann läßt sich G realisieren als Untergruppe der Gruppe $M(n)$ konformer Abbildungen von S^n für geeignetes n, wobei $F_\infty \subset G$ einer Schottky-Gruppe entspricht.*

Die Sätze 3.2 bzw. 3.4 bleiben richtig für beliebige endliche Erweiterungen freier Gruppen (d.h. nicht notwendigerweise effektive). Die Operation von A auf B_1 braucht in diesem Fall nicht effektiv zu sein, wir können B_1 aber in eine hinreichend hochdimensionale Sphäre S^n einbetten und die Operation von A auf B_1 zu einer effektiven Operation von A auf S^n fortsetzen.

4. Homöomorphismen 3-dimensionaler Henkelkörper

Die Ordnung einer endlichen Gruppe A orientierungserhaltender Homöomorphismen eines 3-dim. Henkelkörpers V^3_g ist beschränkt durch $12(g-1)$ (es sei $g>1$); dies ist eine Folgerung aus der Formel von Riemann-Hurwitz ([12, Abschnitt 2]). Wir können V^3_g durch eine Schottky-Gruppe S^2_g uniformisieren, so daß A als Gruppe konformer Abbildungen von ∂V^3_g operiert (wobei wir jetzt auch Schottky-Gruppen zulassen, die durch 2g Jordankurven an Stelle der 2g 1-Sphären definiert sind, sog. nichtklassiche Schottky-Gruppen). Liften wir A in die Überlagerung $S^2 - \Omega(S^2_g)$ von ∂V^3_g, so erhalten wir eine Erweiterung

$$1 \to S^2_g \hookrightarrow G \to A \to 1,$$

wobei G eine Gruppe orientierungserhaltender konformer Abbildungen von S^2

ist, d.h. eine Untergruppe von $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. Die universelle Überlagerung von ∂V_g^3 bzw. $S^2 - \Omega(S_g^2)$ ist die hyperbolische Ebene $D^2 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ (Poincaré-Modell). Liften wir G nach D^2, so erhalten wir eine Fuchssche Gruppe F und eine kanonische Projektion $F \to G$. Genau dann hat A maximale Ordnung $12(g-1)$, wenn F isomorph ist zur Vierecksgruppe

$$V := \langle x, y, z, w \mid x^2 = y^2 = z^2 = w^3 = xyzw = 1 \rangle$$

(vgl. [12]).

4.1. SATZ. *Genau dann hat A maximale Ordnung* $12(g-1)$, *wenn G isomorph ist zu einer Gruppe der folgenden Form*:

$$D_2 *_{\mathbf{Z}_2} D_3, \qquad D_3 *_{\mathbf{Z}_3} A_4, \qquad D_4 *_{\mathbf{Z}_4} S_4, \qquad D_5 *_{\mathbf{Z}_5} A_5;$$

dabei bezeichnet D_i die Diedergruppe mit $2i$ Elementen, A_4 die Tetraedergruppe, S_4 die Oktaedergruppe und A_5 die Dodekaedergruppe. Jede der vier Gruppen operiert auf S^2 als Untergruppe von $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ *mit einer Schottky-Gruppe als Normalteiler von endlichem Index.*

Beweis. Hat A maximale Ordnung $12(g-1)$, so haben wir eine surjektive Abbildung $V \to G$ mit torsionsfreiem Kern. Die Gruppe G hat eine Darstellung der Form 1.1. Da $V/[V, V]$ endlich ist, treten keine Erzeugenden t_i auf. Da V von 3 Elementen der Ordnung 2 erzeugt wird, hat G eine Darstellung der Form $A_1 *_B A_2$, $A_1 A_2$, B endlich. Die Gruppen A_1 bzw. A_2 haben Fixpunkte P_1 bzw. P_2 im Inneren von D^3 ($S^2 = \partial D^3$), mit $P_1 \neq P_2$. Die nichteuklidische Gerade durch P_1 und P_2 wird von B punktweise festgelassen. Daher hat B mindestens 2 Fixpunkte auf S^2. Es folgt, daß B eine zyklische Gruppe ist (die anderen Möglichkeiten sind D_i, A_4, S_4 und A_5, die alle keinen gemeinsamen Fixpunkt besitzen).

Aus 1.2 folgt

$$\frac{1}{|B|} - \frac{1}{|A_1|} - \frac{1}{|A_2|} = \frac{1}{12}.$$

Einfaches Nachrechnen ergibt, daß es für $\{|A_1|, |A_2|\}$ nur die folgenden geometrisch realisierbaren Möglichkeiten gibt: $\{4, 6\}$ falls $B \cong \mathbf{Z}_2$, $\{6, 12\}$ falls $B \cong \mathbf{Z}_3$, $\{8, 24\}$ falls $B \cong \mathbf{Z}_4$ und $\{10, 60\}$ falls $B \cong \mathbf{Z}_5$. Dies entspricht den 4 Fällen des Satzes.

Wir konstruieren eine Operation von $D_2 *_{\mathbf{Z}_2} D_3$ auf S^2. Es sei $D^3 \subset \mathbf{R}^3$ der 3-Ball und α bzw. β die Drehung um 120 bzw. 180 Grad um die x-Achse und γ

die Drehung um 180 Grad um die z-Achse. Es sei A_1 die von α und γ und $\tilde{A}_2$ die von β und γ erzeugte Gruppe orthogonaler Abbildungen von D^3 bzw. S^2. Es sei τ die Spiegelung an einem kleinen Kreis um einen der beiden Fixpunkte von γ auf S^2. Dann gilt $\tau\gamma\tau^{-1}=\gamma$, und die von A_1 und $A_2:=\tau\tilde{A}_2\tau^{-1}$ erzeugte Gruppe G konformer Abbildungen von S^2 ist isomorph zu $D_2 *_{\mathbf{Z}_2} D_3$. In allen anderen Fällen geht die Konstruktion analog.

Schottky-Untergruppen finden wir als Kerne z.B. der Abbildungen

$$D_2 *_{\mathbf{Z}_2} D_3 \to D_3 \oplus \mathbf{Z}_2 \ (g=2), \qquad D_2 *_{\mathbf{Z}_2} D_3 \to S_4 \ (g=3),$$
$$D_3 *_{\mathbf{Z}_3} A_4 \to S_4 \ (g=3), \qquad D_4 *_{\mathbf{Z}_4} S_4 \to S_4 \ (g=3),$$
$$D_5 *_{\mathbf{Z}_5} A_5 \to S_5 \ (g=6).$$

Durch Übergang zu charakteristischen Untergruppen der Kerne finden wir Schottky-Normalteiler von beliebig hohem Rang g. □

4.2. KOROLLAR. *Es gibt jeweils unendlich viele Werte von g, für die die obere Schranke* $12(g-1)$ *einer endlichen Gruppe orientierungserhaltender Homöomorphismen von* V_g^3 *angenommen bzw. nicht angenommen wird.*

Beweis. Wir haben noch zu zeigen, daß für unendlich viele Werte von g die obere Schranke $12(g-1)$ nicht angenommen wird. Es sei $g=p+1$, wobei $p>12$ eine Primzahl sei, so daß 3 kein Teiler von $p-1$ ist. Wir nehmen an, daß es eine Gruppe von Homöomorphismen A der maximalen Ordnung $12p$ für $g=p+1$ gibt. Es sei

$$1 \to S_g^2 \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} A \to 1$$

die entsprechende Erweiterung. Nach einem Sylow-Satz besitzt A einen Normalteiler $\mathbf{Z}_p$ der Ordnung p. Wir haben eine Abbildung $\tilde{\pi}: G \to A \to A/\mathbf{Z}_p$ mit torsionsfreiem Kern, und $A/\mathbf{Z}_p$, hat die Ordnung 12. Es folgt $G \cong D_2 *_{\mathbf{Z}_2} D_3$ und $A/\mathbf{Z}_p \cong D_3 \oplus \mathbf{Z}_2$ (durch Nachprüfen aller Möglichkeiten). Wegen $(p, 12)=1$ ist A nach einem Satz von Schur das semidirekte Produkt von $\mathbf{Z}_p$ mit $D_3 \oplus \mathbf{Z}_2$, dessen Elemente wir in der Form (a, b) schreiben. Es operiert $\mathbf{Z}_3 \subset D_3$ trivial auf $\mathbf{Z}_p$, da $\mathbf{Z}_p$ wegen $(p-1, 3)=1$ keinen nicht-trivialen Automorphismus der Ordnung 3 besitzt. Es ist $\pi \mid D_2$ und $\pi \mid D_3$ jeweils ein Isomorphismus aufs Bild. Außerdem gilt $\pi((123))=(0,(123)) \in A$ $((123) \in D_3 \cong S_3)$. Es sei $x \in D_2 \cong \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$, so daß $\tilde{\pi}(x)$ den $\mathbf{Z}_2$-Faktor von $D_3 \oplus \mathbf{Z}_2$ erzeugt. Dann kommutiert $\pi(x)$ mit $\pi((123))$ und daher mit $\pi(D_3)$. Da A von $\pi(D_3)$ und $\pi(x)$ erzeugt wird, folgt $A \cong D_3 \oplus \mathbf{Z}_2$, was ein Widerspruch ist. □

LITERATUR

[1] BAUMSLAG, G. und TAYLOR, T., The center of groups with one defining relator. Math. Ann. *175* (1968), 315–319.
[2] GREENBERG, L., Discrete subgroups of the Lorentz group. Math. Scand. *10* (1962), 85–107.
[3] KARRAS, A., PIETROWSKI, A. und SOLITAR, D., Finite and infinite extensions of free groups. J. Austral. Math. Soc. *16* (1972), 458–466.
[4] KULKARNI, R. S., Some topological aspects of Kleinian groups. Amer. J. Math. *100* (1978), 897–911.
[5] LEHNER, J., Discontinuous groups and automorphic functions. Mathem. Surveys, Amer. Math. Soc. 1964.
[6] MARDEN, A., Geometrically finite Kleinian groups, in: Discrete groups and automorphic functions. Academic Press 1977.
[7] MOSTOW, G. D., Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms. Publ. Inst. Haute Etudes Sci. *34* (1968), 55–104.
[8] SERRE, J. P., Arbres, amalgames et SL_2, Astérisque *46*, 1977.
[9] SCOTT, G. P., An embedding theorem for groups with a free subgroup of finite index. Bull. London Math. Soc. *6* (1974), 304–306.
[10] SPEISER, A., Die Theorie der Gruppen endlicher Ordnung. Springer, Berlin 1937.
[11] WOLF, J. A., Spaces of constant curvature. McGraw-Hill 1967.
[12] ZIMMERMANN, B., Über Abbildungsklassen von Henkelkörpern. Arch. Math. *33* (1979), 379–382.

Ruhr Universität Institut f. Mathematik
Postfach 102148
D-4630 *Bochum* 1

Eingegangen den 24. August 1980