

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 56 (1981)

Artikel: Funktionalabschätzungen bei quasikonformen Abbildungen mit Fredholmschen Eigenwerten.
Autor: Kühnau, Reiner
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-43245>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Funktionalabschätzungen bei quasikonformen Abbildungen mit Fredholmschen Eigenwerten

REINER KÜHNAU

§1. Einleitung

In [9] wurden Abschätzungen für gewisse Funktionale bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung hergeleitet. Diese Abschätzungen waren zwar unscharf, jedoch asymptotisch scharf für den Fall, die Dilatationsschranke $p(z) \geq 1$ weicht wenig von 1 ab. Für $p(z) \rightarrow \infty$ degenerierten die Ungleichungen zu trivialen solchen. Im folgenden werden wir diese Ungleichungen so verbessern, daß dieser Übelstand nicht mehr auftritt. Dabei gehen jetzt zusätzlich die Fredholmschen Eigenwerte (vgl. hierzu die Darstellung in [3]) ein, da wir entscheidend neben dem Extremalprinzip in [10] die Variationscharakterisierung dieser Eigenwerte benutzen werden. Wir werden die Überlegungen an einem Beispiel dartun.

Es sei G ein Gebiet der z -Ebene ($z = x + iy$) mit dem inneren Punkt $z = \infty$ und dem Rand C . Die in G erklärte Funktion $p(z)$, die später als Dilatationsschranke auftreten wird, erfülle nebst

$$0 < m \leq p(z) \leq M < \infty$$

(wobei zunächst nicht notwendig $m \geq 1$ sein muß) der Einfachheit halber einschlägige, die Anwendung des Gauß-Greenschen Integralsatzes unmittelbar ermöglichende Glattheitsvoraussetzungen, ebenso C und die unten auftretenden Funktionen. In Umgebung von $z = \infty$ sei $p(z) \equiv 1$. \mathfrak{R} sei ein großer Kreis $|z| = R$, G_R der ins Innere fallende Teil von G , n die Innennormale von \mathfrak{R} und Außennormale bei C .

Nun sei $g(z)$ diejenige schlichte quasikonforme Abbildung von G , die die Differentialgleichung

$$g_z = \nu \bar{g}_z \quad \text{mit} \quad \nu = \frac{p-1}{p+1} \tag{1}$$

erfüllt, die in $z = \infty$ durch

$$g(z) = z + \frac{a_1}{z} + \dots \quad (2)$$

hydrodynamisch normiert ist, und die Bildrandkomponenten erzeugt, die Strecken parallel zur reellen Achse sind. Entsprechend sei $g(z)$ die in $z = \infty$ durch

$$g(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \dots \quad (3)$$

normierte durchweg konforme Abbildung von G , bei der Strecken parallel zur reellen Achse entstehen.

Speziell für $p(z) \geq 1$ löst nach [4] $g(z)$ das folgende Extremalproblem. Unter allen schlichten quasikonformen Abbildungen von G , deren Dilatation (= Achsenverhältnis ≥ 1 der Ellipsen, die Bilder der zum Punkte z konzentrischen infinitesimalen Kreise sind) stets $\leq p(z)$ ist, und die in $z = \infty$ durch

$$z + \frac{\alpha_1}{z} + \dots \quad (4)$$

hydrodynamisch normiert sind, wird genau für $g(z)$ das Funktional $\Re \alpha_1$ maximal. $g(z)$ löst nach H. Grötzsch und R. de Possel bekanntlich das entsprechende Extremalproblem in der Klasse der konformen Abbildungen von G .

Wir wollen in vorliegender Mitteilung Ungleichungen für $\Re a_1$ angeben, so daß damit explizite Abschätzungen für $\Re \alpha_1$ möglich werden, was bisher nur in Sonderfällen gelang.

§2. Ein Extremalprinzip

Wir setzen

$$\varphi_0(z) = \Re g(z), \quad (5)$$

$$\phi^*(z) = \Re g(z) = \varphi_0(z) + \phi^*(z). \quad (6)$$

ϕ^* erfüllt dann die Differentialgleichung

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{p} \operatorname{grad} \phi^* \right) = 0. \quad (7)$$

Daneben betrachten wir alle “zulässigen Vergleichsfunktionen” $\varphi(z)$, für die

$$|\text{grad } \varphi(z)| \leq c |z|^{-2} \quad \text{für } z \rightarrow \infty \tag{8}$$

mit einer Konstanten c gilt.

Entscheidendes Hilfsmittel ist für uns das folgende mit dem Dirichletschen Prinzip zusammenhängende Extremalprinzip nach [10] (in leichter Abschwächung der Voraussetzungen).

SATZ 1. *Für alle zulässigen $\varphi(z)$ gilt*

$$\iint_G \left[\left(1 - \frac{1}{p}\right) \text{grad}^2 (\varphi_0 + \varphi) - \text{grad}^2 \varphi \right] dx dy \leq 2\pi \Re (a_1 - \alpha_1) \tag{9}$$

mit Gleichheit genau für $\varphi \equiv \varphi^* + \text{const.}$

Wir geben hier einen gegenüber [10] etwas vereinfachten *Beweis* an, der Umformungen ähnlich wie in [17] benutzt. Die linke Seite von (9) ist zunächst bei Beschränkung auf den Anteil von G_R

$$\begin{aligned} &= \iint_{G_R} \left[\left(1 - \frac{1}{p}\right) \text{grad}^2 (\varphi_0 + \varphi^*) - \text{grad}^2 \varphi^* \right] dx dy - \iint_{G_R} \frac{1}{p} \text{grad}^2 (\varphi - \varphi^*) dx dy \\ &\quad - 2 \iint_{G_R} \frac{1}{p} \text{grad} (\varphi_0 + \varphi^*) \text{grad} (\varphi - \varphi^*) dx dy \\ &\qquad\qquad\qquad + 2 \iint_{G_R} \text{grad } \varphi_0 \text{grad} (\varphi - \varphi^*) dx dy. \end{aligned} \tag{10}$$

Nach dem Gauß-Greenschen Satze wird hier der dritte Term ($ds =$ Bogenlänge, Durchlaufung der Kurven so, daß G_R zur Linken)

$$\begin{aligned} &= 2 \int_{\mathfrak{R}+C} \frac{1}{p} (\varphi - \varphi^*) \frac{\partial(\varphi_0 + \varphi^*)}{\partial n} ds = -2 \int_{\mathfrak{R}+C} (\varphi - \varphi^*) d \Im g \\ &= 2 \int_{\mathfrak{R}} \Im g d(\varphi - \varphi^*), \end{aligned}$$

da hier zuletzt der Anteil über C verschwindet, weil $\Im m g$ dort konstant ist. Ebenso wird der letzte Term in (10)

$$= -2 \int_{\mathfrak{R}+C} (\varphi - \varphi^*) \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} ds = 2 \int_{\mathfrak{R}+C} (\varphi - \varphi^*) d \Im m g = -2 \int_{\mathfrak{R}} \Im m g d(\varphi - \varphi^*).$$

In der Zusammenfassung verschwinden beide Terme für $R \rightarrow \infty$. Dies liefert schon (9), da sich in (10) der erste Term zur rechten Seite von (9) analog umrechnet, z.B. auch wie in [10].

Setzt man nun in (9) $\varphi = \gamma\psi$ und bestimmt von der linken Seite das Maximum des entstehenden Ausdruckes als Funktion von γ (bei festem ψ), dann entsteht

SATZ 2. Für alle zulässigen ψ gilt

$$\left[\iint_G \left(1 - \frac{1}{p}\right) \text{grad } \varphi_0 \text{ grad } \psi \, dx \, dy \right]^2 / \iint_G \frac{1}{p} \text{grad}^2 \psi \, dx \, dy \\ \cong 2\pi \Re e (a_1 - \alpha_1) - \iint_G \left(1 - \frac{1}{p}\right) \text{grad}^2 \varphi_0 \, dx \, dy \quad (11)$$

mit Gleichheit genau für $\psi \equiv \alpha\varphi^* + \beta$, α, β Konstanten.

Insbesondere ist die rechte Seite von (11) stets ≥ 0 in Übereinstimmung mit [10].

Im folgenden wollen wir uns mit dem Spezialfalle beschäftigen, es ist G die ganze Ebene und es wird definiert $p(z) \equiv Q$ im Innern endlich vieler sich untereinander nicht treffender oder umschlingender fixierter geschlossener analytischer Jordankurven \mathfrak{C}_k , $p(z) \equiv 1$ im Komplement \mathfrak{G} (= Gebiet $\ni \infty$). Das Innere von \mathfrak{C}_k sei \mathfrak{G}_k , $\mathfrak{C} = \bigcup \mathfrak{C}_k$, $\bigcup \mathfrak{G}_k = \mathfrak{G}^*$. Die Abbildung $g(z)$ hängt dann vom Parameter Q ab und wir schreiben $g(z) = g_Q(z)$, $a_1 = a_1(Q)$. Für $Q \rightarrow \infty$ entsteht in bekannter Weise die konforme Parallelschlitzabbildung von \mathfrak{G} , die wir

$$g_\infty(z) = z + \frac{\alpha_1(\infty)}{z} + \dots \quad (12)$$

schreiben. \mathfrak{G}^* habe den Inhalt I . Der kleinste nichttriviale Fredholmsche Eigenwert > 1 zum Kurvensystem \mathfrak{C} sei λ . Wir setzen noch

$$\Lambda = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} > 1. \quad (13)$$

Hier ist jetzt $g(z) \equiv z$, $\varphi_0(z) \equiv x$ und die zulässigen ψ sind in der ganzen z -Ebene erklärt und insbesondere längs \mathfrak{C} stetig und klingen entsprechend (8) ab. Aus Satz 2 wird

SATZ 2'. Für alle zulässigen ψ gilt

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^2 \left[\int_{\mathfrak{C}} \psi dy \right]^2 / \left[\iint_{\mathfrak{G}} \text{grad}^2 \psi dx dy + \frac{1}{Q} \iint_{\mathfrak{G}^*} \text{grad}^2 \psi dx dy \right] \\ & \cong 2\pi \Re a_1(Q) - \left(1 - \frac{1}{Q}\right) I \end{aligned} \tag{14}$$

mit Gleichheit genau für $\psi = \alpha(\Re g - x) + \beta$, α, β Konstanten.

Insbesondere ist die rechte Seite von (14) stets ≥ 0 in Übereinstimmung mit [10]. Im Grenzfalle $Q \rightarrow \infty$ entsteht ein bekanntes Extremalprinzip von Diaz und Weinstein – vgl. [14], [2] – zur Charakterisierung der dann entstehenden konformen Parallelschlitzabbildung als Extremalfunktion bzw. der virtuellen Masse (als rechter Seite von (14)).

Ersetzt man $g(z)$ durch

$$-i \cdot g_Q(iz) = z - \frac{a_1(Q)}{z} + \dots,$$

so entsteht aus Satz 2', da dann Q durch $1/Q$ zu ersetzen ist, noch

SATZ 2''. Für alle zulässigen ψ gilt

$$\begin{aligned} & (Q - 1)^2 \left[\int_{\mathfrak{C}} \psi dy \right]^2 / \left[\iint_{\mathfrak{G}} \text{grad}^2 \psi dx dy + Q \iint_{\mathfrak{G}^*} \text{grad}^2 \psi dx dy \right] \\ & \cong (Q - 1) I - 2\pi \Re a_1(Q) \end{aligned} \tag{15}$$

mit Gleichheit genau für $\psi \equiv \alpha(\Im g_Q - y) + \beta$, α, β Konstanten.

§3. Abschätzungen für das Gebietsfunktional $\Re a_1(Q)$

Um zu handlichen Abschätzungen für $\Re a_1(Q)$ zu gelangen, verwenden wir neben (14) und (15) noch die folgende Ungleichung, die sich aus der bekannten

Extremalcharakterisierung der Fredholmschen Eigenwerte (vgl. hierzu B. [1], [16]) ergibt:

$$\begin{aligned} & \left[\iint_{\mathfrak{G}} \text{grad}^2 \chi \, dx \, dy + \frac{1}{Q} \iint_{\mathfrak{G}^*} \text{grad}^2 \chi \, dx \, dy \right] / \left[\iint_{\mathfrak{G}} \text{grad}^2 \chi + \frac{1}{Q'} \iint_{\mathfrak{G}^*} \text{grad}^2 \chi \, dx \, dy \right] \\ & \cong (1 + Q^{-1} \Lambda^{-1}) / (1 + Q'^{-1} \Lambda^{-1}) \quad \text{für } 0 < Q' \leq Q, \text{ bzw.} \\ & \cong (1 + Q^{-1} \Lambda) / (1 + Q'^{-1} \Lambda) \quad \text{für } 0 < Q \leq Q'. \end{aligned} \quad (16)$$

Dabei sind die zulässigen χ in der ganzen z -Ebene stetig, sowohl in \mathfrak{G} als auch in \mathfrak{G}^* harmonisch, wobei die harmonisch Konjugierte in \mathfrak{G} eindeutig ist, und die χ sind noch in $z = \infty$ regulär.

Setzen wir nun $\psi = \chi = \Re e \, g_{Q'} - x$, so kommt nach (14) und (16) für $Q' \leq Q$

$$\begin{aligned} & 2\pi \Re e \, a_1(Q) - \left(1 - \frac{1}{Q}\right) I \\ & \cong \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^2 \frac{1 + Q'^{-1} \Lambda^{-1}}{1 + Q^{-1} \Lambda^{-1}} \left[\int_{\mathfrak{G}} \psi \, dy \right]^2 / \left[\iint_{\mathfrak{G}} \text{grad}^2 \psi + \frac{1}{Q'} \iint_{\mathfrak{G}^*} \text{grad}^2 \psi \, dx \, dy \right] \\ & = \frac{1 + Q'^{-1} \Lambda^{-1}}{1 + Q^{-1} \Lambda^{-1}} \left(\frac{1 - Q^{-1}}{1 - Q'^{-1}} \right)^2 \cdot \left[2\pi \Re e \, a_1(Q') - \left(1 - \frac{1}{Q'}\right) I \right] \end{aligned} \quad (17)$$

bzw. für $Q \leq Q'$

$$2\pi \Re e \, a_1(Q) - \left(1 - \frac{1}{Q}\right) I \cong \frac{1 + Q'^{-1} \Lambda}{1 + Q^{-1} \Lambda} \left(\frac{1 - Q^{-1}}{1 - Q'^{-1}} \right)^2 \cdot \left[2\pi \Re e \, a_1(Q') - \left(1 - \frac{1}{Q'}\right) I \right].$$

Damit haben wir den

SATZ 3. *Es ist die Funktion von Q*

$$\left(1 + \frac{1}{\Lambda Q}\right) \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^{-2} \left[2\pi \Re e \, a_1(Q) - \left(1 - \frac{1}{Q}\right) I \right] \quad \text{monoton steigend,}$$

$$\left(1 + \frac{\Lambda}{Q}\right) \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^{-2} \left[2\pi \Re e \, a_1(Q) - \left(1 - \frac{1}{Q}\right) I \right] \quad \text{monoton fallend.}$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{1}{Q}\right)I + [2\pi \Re a_1(\infty) - I] \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^2 \left(1 + \frac{\Lambda}{Q}\right)^{-1} &\leq 2\pi \Re a_1(Q) \\
 &\cong \left(1 - \frac{1}{Q}\right)I + [2\pi \Re a_1(\infty) - I] \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{\Lambda Q}\right)^{-1} \\
 &\cong \left(1 - \frac{1}{Q}\right)I + [2\pi \Re a_1(\infty) - I] \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^2.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Arbeiten wir analog mit (15), so kommt

SATZ 4. *Es ist die Funktion von Q*

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{Q}{\Lambda}\right)(Q-1)^{-2}[(Q-1)I - 2\pi \Re a_1(Q)] &\text{ monoton fallend,} \\
 (1 + \Lambda Q)(Q-1)^{-2}[(Q-1)I - 2\pi \Re a_1(Q)] &\text{ monoton steigend.}
 \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}
 (Q-1)I - I(Q-1)^2 \left(\frac{1}{\Lambda} + Q\right)^{-1} &\leq 2\pi \Re a_1(Q) \\
 &\cong (Q-1)I - I(Q-1)^2(\Lambda + Q)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

§4. Bemerkungen

a) Mit Hilfe einer der vielen bekannten Abschätzungen für die Fredholmschen Eigenwerte kann man im konkreten Einzelfalle zu konkreten Ungleichungen für $\Re a_1(Q)$ vordringen. Besteht \mathfrak{C} z.B. aus einer Cassinischen Kurve, sind die Fredholmschen Eigenwerte sogar explizit bekannt [11]. Die für diesen Fall entstehenden Ungleichungen (18), (19) liefern nach der bekannten Quadratwurzeloperation dann Abschätzungen für den Wertebereich von $w(z)$ bei festem z , falls $w(z)$ die Klasse $\Sigma(Q)$ durchläuft. Dabei muß die so aus (19) (rechts) bzw. (18) (links) entstehende Ungleichung schärfer werden (die aus (18) rechts entstehende zumindest für große Q noch schärfer – vgl. unten Bemerkung d) als die schon in [9] unter (33) hierzu angegebene, da letztere aus (29) dort hervorgeht. Der genaue Wertebereich von $w(z)$ wurde in [6], [13] angegeben, was aber formelmäßig recht aufwendig war, so daß unscharfe Abschätzungen sinnvoll

sind. Diese Bemerkung liefert auch über den durch lineare Transformation zu erhaltenden Wertebereich von $w''(z)/w'(z)$ Verbesserungen der in [12] angegebenen Abschätzungen der in [13] durch eine transzendente Gleichung charakterisierten Rundungsschranke der Klasse $\Sigma(Q)$.

b) Aussagen ähnlicher Art wie in §3 unter Einbeziehung des Inhaltes des Bildes von \mathfrak{G}^* finden sich in [10].

c) Aus (19) folgt für $Q \rightarrow \infty$

$$I/\Lambda \leq 2\pi \Re a_1(\infty) - I \leq I\Lambda. \quad (20)$$

Da sich hier der mittlere Term als virtuelle Masse deuten läßt, entspricht diese Ungleichung einer solchen von M. Schiffer [15] (dort im räumlichen Analogon).

d) Für manche Fälle ist (19) günstiger als (18), für manche gilt das Umgekehrte. (18) ist genau dann z.B. im rechten Teil schärfer als (19), wenn

$$[2\pi \Re a_1(\infty) - I]/I < \Lambda - (\Lambda^2 - 1)(Q + \Lambda)^{-1}. \quad (21)$$

Dies ist wegen (20) i.allg. für große Q der Fall.

e) Genau für $\lambda = \infty$, $\Lambda = 1$ schrumpft das durch (18) (ohne letzten Teil) bzw. (19) gelieferte Intervall für $2\pi \Re a_1(Q)$ zu einem Punkt, so daß dann (etwas allgemeiner als in [4])

$$2\pi \Re a_1(Q) = 2I(Q - 1)/(Q + 1), \quad (22)$$

und dies ist dann $= \pi S$, wobei S die in [8] eingeführte "quasikonforme Spanne" ist. Die Kurvensysteme mit $\lambda = \infty$ sind einfach charakterisierbar – vgl. [7]. Besteht \mathfrak{C} aus einer Kurve, ist $\lambda = \infty$ genau dann, wenn diese eine Kreislinie ist. Man kann leicht noch in (18), (19) eine ins Einzelne gehende Diskussion des Gleichheitszeichens vornehmen, da bei den verwendeten Ungleichungen die Extremalfunktionen bekannt sind.

f) Setzt man in (9) allgemeiner $\varphi = \sum \gamma_k \psi_k$ (Ritz-Ansatz) und bestimmt dann das Maximum des entstehenden Ausdruckes (quadratische Form) als Funktion der γ_k (bei festen ψ_k), so entstehen entsprechend schärfere Formen von Satz 2.

g) Durch Einsetzen günstigerer und komplizierterer "Testfunktionen" ψ in (14), (15) kann man natürlich Satz 3 und 4 verschärfen. Dies bietet sich insbesondere für sternförmige o.ä. \mathfrak{C} an entsprechend dem Vorgehen z.B. in [1], [16].

h) Wenn \mathfrak{G} ein $z = \infty$ im Innern enthaltendes Gebiet ist und man kennt lediglich den Inhalt I des Komplementes, so ist es natürlich unmöglich, eine Abschätzung für den Koeffizienten α_1 in der Entwicklung (4) bei den wie dort normierten schlichten konformen Abbildungen von \mathfrak{G} anzugeben. Es kann

nämlich $|\alpha_1|$ beliebig groß werden, wie schon das Äußere von Ellipsen zeigt. Es sei hier die Gelegenheit wahrgenommen für den Hinweis, daß eine solche Abschätzung möglich wird, wenn man zusätzlich Q -quasikonforme Fortsetzbarkeit ins Komplement von \mathfrak{G} fordert. Denn nach (19) folgt

$$|\alpha_1| < \frac{1}{2\pi} (Q-1)I. \quad (23)$$

Diese Abschätzung ist sogar scharf, da $|\alpha_1|$ beim Äußeren geeigneter Ellipsen der rechten Seite von (23) beliebig nahe kommt – vgl. z.B. [5], Zusatzbemerkung 1.

i) Die obige Betrachtung von §2 und 3 läßt sich ganz entsprechend bei Zugrundelegung anderer Extremalprobleme (statt wie oben $\Re \alpha_1 \rightarrow \max$) durchführen. Man halte sich hierbei etwa an die in [9] betrachteten Beispiele, z.B. die verallgemeinerten Grunskyschen Koeffizientenbedingungen.

j) Die wie in §2 und 3 oder allgemeiner nach der vorigen Bemerkung i) bei irgendeinem Funktional entstehenden Ungleichungen lassen sich natürlich auch umgekehrt deuten als Abschätzungen für den Fredholmschen Eigenwert λ . Benutzt man z.B. Satz 4, rechte Seite von (19), so ergibt sich mit Hilfe der am Ende von §1 erwähnten Extremaleigenschaft der

SATZ 5. *Ist $w(z)$ eine schlichte konforme Abbildung von \mathfrak{G} mit der Entwicklung (4) in $z = \infty$, die ins Komplement von \mathfrak{G} noch Q -quasikonform fortsetzbar ist, so gilt*

$$\Lambda \geq \frac{Q \cdot 2\pi \Re \alpha_1 - (Q-1)I}{(Q-1)I - 2\pi \Re \alpha_1} \quad (24)$$

Arbeitet man mit den Grunskyschen Koeffizientenbedingungen, erhält man eine allgemeinere Ungleichung, in der man noch die auftretenden freien komplexen Parameter optimieren kann.

SCHRIFTTUM

- [1] AHLFORS, L. V., *Remarks on the Neumann–Poincaré integral equation*. Pacif. J. Math. 2, 271–280 (1952).
- [2] BERGMAN, S. and M. SCHIFFER, *Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics*. New York 1953.
- [3] GAIER, D., *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung*. Berlin–Göttingen–Heidelberg 1964.
- [4] KÜHNAU, R., *Wertannahmeprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung*. Math. Nachr. 40, 1–11 (1969).

- [5] — *Bemerkungen zu den GRUNSKYschen Gebieten*. Math. Nachr. 44, 285–293 (1970).
- [6] — *Eine funktionentheoretische Randwertaufgabe in der Theorie der quasikonformen Abbildungen*. Indiana Univ. Math. J. 21, 1–10 (1971).
- [7] — *Eine Integralgleichung in der Theorie der quasikonformen Abbildungen*. Math. Nachr. 76, 139–152 (1977).
- [8] — *Die Spanne von Gebieten bei quasikonformen Abbildungen*. Arch. Rat. Mech. Anal. 65, 299–303 (1977).
- [9] —, *Verzerrungsaussagen bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung und ein Extremalprinzip der Elektrostatik in inhomogenen Medien*. Comm. Math. Helv. 53, 408–428 (1978).
- [10] — *Einige Verzerrungsaussagen bei quasikonformen Abbildungen endlich vielfach zusammenhängender Gebiete*. L'Enseign. math. 24, 189–201 (1978).
- [11] — *Bemerkung zu einer klassischen Arbeit von J. Blumenfeld und W. Mayer*. Mathematische Forschung, Band 1, Berlin 1979; hier S. 161–164.
- [12] KÜHNAU, R. und E. HOY, *Abschätzung des Wertebereichs einiger Funktionale bei quasikonformen Abbildungen*. Bull. Soc. Sciences Lettres Łódź 29, 4 (1979).
- [13] KÜHNAU, R. und B. THÜRING, *Berechnung einer quasikonformen Extremalfunktion*. Math. Nachr. 79, 99–113 (1977).
- [14] PÓLYA, G. and G. SZEGÖ, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*. Princeton 1951.
- [15] SCHIFFER, M., *Problèmes aux limites et fonctions propres de l'équation intégrale de Poincaré et Fredholm*. Comptes rendus Paris 245, 18–21 (1957).
- [16] SPRINGER, G., *Fredholm eigenvalues and quasiconformal mapping*. Acta Math. 111, 121–142 (1964).
- [17] WEISEL, J., *Numerische Ermittlung quasikonformer Abbildungen mit finiten Elementen*. Numer. Math. (im Druck).

*Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
DDR-402 Halle an der Saale*

Eingegangen den 17. Oktober 1980