Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 56 (1981)

Artikel: Zu einem hyperbolischen Gitterpunktproblem.
Autor: Thurnheer, Peter
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43243

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 31.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 56 (1981) 240–271 0010–2571/81/002240–32$01.50+0.20/0
© 1981 Birkhäuser Verlag, Basel

Zu einem hyperbolischen Gitterpunktproblem

PETER THURNHEER

I. Einleitung

Sei H der dreidimensionale hyperbolische Raum, Λ eine Bewegungsgruppe von H mit kompaktem messbarem Fundamentalbereich $\mathcal{F}$. Sei Λ diskontinuierlich in dem Sinne, dass das hyperbolische Gitter $\{Tp \mid T \in \Lambda\}$ keine endlichen Häufungspunkte besitzt für alle $p \in H$.

Wie in einem klassischen euklidischen Problem, betrachtet man die Anzahl $N^0(\Lambda, p, q, x)$ der Punkte eines solchen von $p \in H$ erzeugten Gitters – jeder so oft gezählt, wie er als Bild von p unter Λ auftritt – im Innern und auf der hyperbolischen Kugel vom Radius x um $q \in H$, sowie die entsprechenden Rieszschen Summen $N^k(\Lambda, p, q, x)$ positiver Ordnung k. Schreibt man $\rho(v, w)$ für den hyperbolischen Abstand der Punkte $v \in H$, $w \in H$, so ist

$$N^k(\Lambda, p, q, x) := \sum_{\substack{T \in \Lambda \\ \rho(Tp,q) \leq x}} \{x - \rho(Tp, q)\}^k, \quad k \geq 0, \quad x \geq 0, \quad p \in H, \quad q \in H.$$

Man interessiert sich dabei vor allem für das Wachstum dieser Funktionen, wenn der Radius x gegen ∞ geht, insbesondere im Falle $k=0$ und für $p=q$.

In dieser Arbeit werden mehrere Resultate hergeleitet, die Aufschluss geben über die Art dieses Wachstums – eines mit Hilfe einer Verallgemeinerung des Satzes von Wiener–Ikehara, welche im letzten Kapitel formuliert und bewiesen wird. Sie entsprechen alle den klassischen Ergebnissen, die man im analogen euklidischen Problem kennt.

Eine wichtige Rolle bei verschiedenen Beweisen spielt die Laplacetransformierte der Funktion N^k, von der man unter anderem zeigen kann, dass sie einer einfachen Funktionalgleichung genügt.

Die Funktion $N^0(\Lambda, p, p, x)$ wurde – in zwei Dimensionen – erstmals eingeführt und untersucht von H. Huber ([12], [13]), der dabei gezeigt hat, dass ihr Verhalten eng zusammenhängt mit dem Laplace-Beltrami-Eigenwertproblem auf H/Λ.

Diese Arbeit entstand aus der Dissertation, die ich bei Professor K. Chandrasekharan geschrieben und im Herbst 1979 abgegeben habe (man siehe auch [17] und [18]). Ich möchte ihm, sowie seinen früheren Assistenten Dr. H. Joris

und Dr. A. Good danken für Ermutigungen, Anregungen und wertvolle Hinweise.

II. Zum Laplace-Beltrami-Eigenwertproblem

Seien H, Λ und $\mathcal{F}$ definiert wie in der Einleitung. Das Laplace-Beltrami-Eigenwertproblem auf H/Λ wird von F. Fricker beschrieben und studiert in [10]. Es ergibt sich dabei, dass auch im Falle wo Λ elliptische Elemente enthalten darf, die folgenden Tatsachen gelten: Das Spektrum ist diskret, die Eigenwertfolge $\{\lambda_n \mid n=0,1,\ldots\}$ reell und bei geeigneter Numerierung von der Form

$$0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots,\ \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty.$$

Die Vielfachheit jedes Eigenwertes λ, das heisst die Dimension des zu λ gehörigen Eigenraumes ε_λ ist endlich. Es existiert ein vollständiges orthonormiertes System $\{\phi_j \mid j=0,1,\ldots\}$ von auf H definierten und Λ-automorphen Eigenfunktionen. Somit ist

$$\int_{\mathcal{F}} \phi_j(p)\bar{\phi}_m(p)\,d\omega_p=\begin{cases}1, & j=m.\\ 0, & j\neq m.\end{cases} \tag{1}$$

Dabei steht $d\omega$ für das durch die Metrik in H induzierte Mass. Es bezeichne τ denjenigen Index, für den $\lambda_{\tau-1}\leq 1<\lambda_\tau$ ist. Man definiert

$$\alpha_n:=(1-\lambda_n)^{1/2}\begin{cases}\geq 0 & \text{für } n<\tau.\\ :=i\beta_n,\quad \beta_n\geq\beta_\tau>0 & \text{für } n\geq\tau.\end{cases}$$

Die Menge $\{\alpha_n \mid n=0,1,\ldots\}$ ist dann eine diskrete Teilmenge der komplexen Ebene, ohne Häufungspunkte im Endlichen, und für die endlich vielen n mit $0\leq\lambda_n\leq 1$ ist α_n reell und $1\geq\alpha_n\geq 0$. Für die übrigen n ist α_n reinimaginär. Es ist $\alpha_0=1$ und $\alpha_m=0$, falls $\lambda_m=1$. Für $p\in H$, $q\in H$, setzt man weiter

$$K_m(p,q):=\sum_{\phi_j\in\varepsilon_{\lambda_m}}\phi_j(p)\overline{\phi_j}(q),\qquad K^*(p,q):=\sum_{\phi_j\in\varepsilon_1}\phi_j(p)\overline{\phi_j}(q).$$

Dann sind $K_m(p,q)$, $m=0,1,\ldots$ und $K^*(p,q)$ unabhängig von der speziellen Wahl des Systems $\{\phi_j \mid j=0,1,\ldots\}$, also reell. Schreibt man $|\mathcal{F}|$ für den hyper-

bolischen Inhalt des Fundamentalbereichs $\mathcal{F}$, so gilt zudem nach [10]

$$K_0(p, q) = 1/|\mathcal{F}| \quad \text{für alle} \quad p \in H,\ q \in H.$$

Es bezeichne Λ_p, $p \in H$, die Untergruppe derjenigen $T \in \Lambda$, für die $Tp = p$ ist. Die Ordnung Ord Λ_p dieser Gruppe ist wegen der Diskontinuität von Λ endlich. Nach A. Selberg ([15]), enthält Λ einen fixpunktfreien Normalteiler N von endlichem Index n. In [10] wird die Existenz eines Repräsentantensystems $\{U_j \mid j = 1, 2, \ldots, n\}$ der Restklassen von Λ modulo N nachgewiesen, für welches $\{U_j \mid j = 1, 2, \ldots, \text{Ord } \Lambda_p\}$ eine Teilmenge von Λ_p ist. Also gilt

$$U_j p = \begin{cases} p, & j = 1, 2, \ldots, \text{Ord } \Lambda_p. \\ r \not\equiv p \bmod \Lambda, & j = \text{Ord } \Lambda_p + 1, \text{Ord } \Lambda_p + 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{2}$$

Da N fixpunktfrei ist, wird H/N eine geschlossene dreidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und im Zusammenhang mit dem Laplace-Beltrami-Eigenwertproblem auf H/N gelten die klassischen Resultate [1], [14]. Es bezeichne $0 = \lambda_0^N < \lambda_1^N < \cdots$ die entsprechende Eigenwertfolge, $\varepsilon_{\lambda_j^N}$ den zu λ_j^N gehörigen Eigenraum und $\{\phi_j^N \mid j = 0, 1, \ldots\}$ ein vollständiges, orthonormiertes und N-automorphes System von Eigenfunktionen. Setzt man

$$K_m^N(p, q) := \sum_{\phi_j^N \in \varepsilon_{\lambda_m^N}} \phi_j^N(p)\phi_j^N(q), \qquad p \in H, \qquad q \in H,$$

so ist insbesondere nach [1, Satz 1] und [11, Satz 5.1]:

$$\sum_{\lambda_m^N \le x} K_m^N(p, q) = \frac{\delta_{pq}}{6\pi^2} x^{3/2} + O(x), \qquad \delta_{pq} := \begin{cases} 1, & p \equiv q \bmod \Lambda. \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3}$$

Für $p \equiv q \bmod \Lambda$ gilt die Abschätzung gleichmässig in $p \in \mathcal{F}$.

Bemerkungen. (i) Leere Summen sind in der ganzen Arbeit gleich 0 zu setzen. Insbesondere ist also $K^*(p, q) = 0$, falls 1 kein Eigenwert ist.

(ii) Ist die Funktion f rechtsseitig differenzierbar an der Stelle x, so bezeichnet man ihre rechtsseitige Ableitung bei x mit $d^+f(x)/dx$.

III. Ergebnisse

Sei H der dreidimensionale hyperbolische Raum, Λ eine diskontinuierliche Bewegungsgruppe von H mit kompaktem messbarem Fundamentalbereich $\mathcal{F}$.

Einer Idee in [10] folgend, überträgt man das Resultat [1] von G. V. Avacumović auf den hier betrachteten Fall, wo Λ elliptische Elemente enthalten darf:

$$\sum_{\lambda_n \le x} K_n(p, p) = \frac{\operatorname{Ord} \Lambda_p}{6\pi^2} x^{3/2} + O(x), \tag{4}$$

und

$$\sum_{\lambda_n \le x} |K_n(p, q)| = O(x^{3/2}), \text{ gleichmässig in } (p, q) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}. \tag{5}$$

Für $k \ge 0$, $p \in H$, $q \in H$ und reelles x definiert man

$$N^k(\Lambda, p, q, x) := \sum_{\substack{T \in \Lambda \\ \rho(Tp, q) \le x}} \{x - \rho(Tp, q)\}^k,$$

$$Q^k(\Lambda, p, q, x) := \frac{\pi\Gamma(k+1)}{|\mathcal{F}|\, 2^{k+1}} e^{2x} + \pi\Gamma(k+1) \sum_{0<\lambda_n<1} \frac{K_n(p, q)}{\alpha_n(\alpha_n+1)^{k+1}} e^{(\alpha_n+1)x}$$
$$+ 2\pi\Gamma(k+1) K^*(p, q) e^x (x - k - 1), \tag{6}$$

$$N^k(\Lambda, p, q, x) := Q^k(\Lambda, p, q, x) + R^k(\Lambda, p, q, x). \tag{7}$$

Es wird sich zeigen, dass Q^k der Hauptterm, R^k der Restterm ist von N^k. Ausgangspunkt aller weiteren Ueberlegungen ist eine Reihendarstellung für $N^k(\Lambda, p, q, x)$, $k > 0$, insbesondere der Fall $k > 1$, in dem diese absolut konvergiert.

SATZ 1. *Für $k > 0$ ist*

$$N^k(\Lambda, p, q, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k(x) K_n(p, q), \tag{8}$$

mit

$$a_n^k(x) = \begin{cases} 4\pi \displaystyle\int_0^x (x-\rho)^k \rho \operatorname{Sinh} \rho \, d\rho, & \lambda_n = 1. \\ \dfrac{4\pi}{\alpha_n} \displaystyle\int_0^x (x-\rho)^k \operatorname{Sinh} \rho \operatorname{Sinh}(\alpha_n \rho)\, d\rho, & \lambda_n \ne 1. \end{cases} \tag{9}$$

Für $k > 1$ konvergiert die Reihe absolut und gleichmässig in $(p, q) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, sowie gleichmässig in x aus einer beliebigen kompakten Teilmenge von $[0, \infty)$. Für $0 < k \le 1$ ist die Konvergenz gleichmässig in x aus einer beliebigen kompakten Teilmenge von $(0, \infty)$.

Für $k>1$ lässt sich die Identität (8) herleiten durch Anwendung einer speziellen, in [10] gegebenen Form eines klassischen Entwicklungssatzes ([14]). Ihr Gültigkeitsbereich kann auf Grund von (4) ausgedehnt werden nach $k>0$ durch ein Verfahren von K. Chandrasekharan und R. Narasimhan, welches auf einem Aequikonvergenzsatz von A. Zygmund beruht ([4]).

Unter (vii) überlegt man sich direkt, dass die Funktion $N^k(\Lambda, p, q, x) = O(e^{2x})$ ist für $k \geq 0$. Also ist ihre Laplacetransformierte

$$G^k(\Lambda, p, q, s) := \int_0^\infty N^k(\Lambda, p, q, x) e^{-xs}\, dx, \qquad s := \sigma + it, \quad \sigma > 2, \quad k \geq 0$$

analytisch in der Halbebene $\sigma > 2$. Mit Hilfe von Satz 1 lässt sie sich meromorph fortsetzen, und zwar auf Grund der Reihendarstellung von

SATZ 2. *Für alle komplexen $s \notin P$, $P := \{\pm 1 \pm \alpha_n \mid n = 0, 1, \ldots\}$, und alle $k \geq 0$, gelten die Gleichungen*

$$s^k G^k(\Lambda, p, q, s) = 8\pi \Gamma(k+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(p, q)}{(s^2 - (\alpha_n + 1)^2)(s^2 - (\alpha_n - 1)^2)}, \tag{10}$$

$$G^k(\Lambda, p, q, s) = (-1)^k G^k(\Lambda, p, q, -s).$$

Die Reihe unter (10) *konvergiert absolut und gleichmässig in s aus einer beliebigen kompakten Teilmenge von $\mathbf{C} - P$, sowie gleichmässig in $(p, q) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$.*

Somit ist $s^k G^k(\Lambda, p, q, s)$, $k \geq 0$, eine in der ganzen komplexen s-Ebene meromorphe Funktion mit der Polmenge P. Die in Satz 2 gegebene einfache Funktionalgleichung für $G^k(\Lambda, p, q, s)$ folgt unmittelbar aus (10). Beim Beweis der Reihendarstellung (10) benützt man die Tatsache, dass sich die Koeffizienten $a_n^k(x)$ für ganzes k explizit berechnen lassen – für $k = 2$ siehe man die Formel (58) – sowie die Beziehung

$$s^k G^k(\Lambda, p, q, s) = \Gamma(k+1) G^0(\Lambda, p, q, s), \quad k \geq 0, \quad s \notin P. \tag{11}$$

Speziell für $k = 0$ ergibt sich aus (10):

$$G^0(\Lambda, p, q, s) = \frac{1}{s} \sum_{T \in \Lambda} e^{-\rho(Tp, q)s} = 8\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(p, q)}{(s^2 - (\alpha_n + 1)^2)(s^2 - (\alpha_n - 1)^2)}, \quad \sigma > 2. \tag{12}$$

Die Sätze 1 und 2 ermöglichen den Beweis verschiedener Resultate, die Aufschluss geben über das Wachstum der Funktion $N^k(\Lambda, p, q, x)$, $k \geq 0$, wenn x gegen ∞ geht.

SATZ 3. *Gleichmässig in* $(p, q) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ *ist*

$$R^k(\Lambda, p, q, x) = \begin{cases} O(e^x), & k > 1. \quad (13) \\ O(x^k e^{(3-k)x/2}), & 0 \leq k \leq 1. \quad (14) \end{cases}$$

Um abzuklären, wie präzies die Aussagen (13) und (14) sind, beweist man

SATZ 4. *Für* $k \geq 0$ *ist*

$$R^k(\Lambda, p, q, x) = \Omega \pm (e^x). \tag{15}$$

Ist $R^k(\Lambda, p, p, x) = O(e^{(1+\varepsilon)x})$ *für alle positiven* ε, *so gilt*

$$\liminf_{x \to \infty} R^k(\Lambda, p, p, x)/e^x = -\infty, \quad 0 \leq k < 1. \tag{16}$$

Formel (15) bedeutet $\limsup_{x \to \infty} R^k(\Lambda, p, q, x)/e^x \gtrless 0$. Bezeichnet $W^k(\Lambda, p, q, x)$ die Anzahl Vorzeichenwechsel der Funktion $R^k(\Lambda, p, q, y)$ auf dem Intervall $0 \leq y \leq x$, dann geht also $W^k(\Lambda, p, q, x)$ gegen ∞ für $x \to \infty$. Diese Aussage wird präzisiert durch

SATZ 5. *Für* $k \geq 0$ *gilt*

$$W^k(\Lambda, p, q, x) \geq \frac{\beta_\tau}{\pi} x - d_k, \text{ wobei } d_k \text{ unabhängig ist von } x. \tag{17}$$

Aus (16) folgt speziell $R^k(\Lambda, p, p, x) \neq O(e^x)$, für $0 \leq k < 1$, aus (15) $R^k(\Lambda, p, q, x) \neq o(e^x)$, für $x \to \infty$ und $k \geq 0$. Das zeigt, dass das Resultat (13) in dieser Form bestmöglich ist. Anders verhält es sich für $0 \leq k < 1$, denn es gilt

SATZ 6. *Bezüglich des durch die Metrik in H induzierten Masses ist für fast alle* $q \in \mathcal{F}$, *mit beliebigem* $\delta > 0$:

$$R^k(\Lambda, p, q, x) = O(e^{(1+\delta)x}), \qquad k \geq 0. \tag{18}$$

Nach Satz 6 ist zu vermuten, dass die Abschätzung (14) noch wesentlich verbessert werden könnte.

Die Sätze 3, 4 und 5 lassen sich beweisen mit Hilfe der Methoden, die von K. Chandrasekharan und R. Narasimhan entwickelt wurden im Rahmen ihrer Theorie über arithmetische Funktionen und Funktionalgleichungen, ([5] bis [8]),

sowie einer Idee, die von J. Steinig im selben Zusammenhang eingeführt wurde ([16]), obwohl die Funktionalgleichung für $G^k(\Lambda, p, q, s)$ nach Satz 2 nicht von derselben Art ist. So erhält man insbesondere einen neuen Beweis für das Resultat (14) im Falle $k=0$ und $p=q$, in dem dieses schon von F. Fricker hergeleitet wurde ([10]).

Die Funktion $G^0(\Lambda, p, q, s)$ lässt sich nach (12) darstellen durch eine Dirichletreihe:

$$G^0(\Lambda, p, q, s) = \frac{1}{s} \sum_{T \in \Lambda} \lambda_T^{-s}, \qquad \lambda_T := e^{\rho(Tp,q)}, \quad \sigma > 2.$$

Anders als zum Beispiel in den Teilerproblemen, kennt man die Verteilung der Grössen λ_T nicht genau. Aus diesem Grunde dürfte $G^0(\Lambda, p, q, s)$ schwerer zu kontrollieren sein, auch in der Halbebene der absoluten Konvergenz und scheint es sinnvoll, beim Beweis von Satz 6 den Hilfssatz aus Kapitel V zu verwenden, anstelle der Laplaceumkehr- respektive Perronschen Formel. Man benützt dabei, dass gilt

$$(d/ds)^m G^0(\Lambda, p, q, s) = O(|t|^{-1+\omega}), \quad \text{für alle ganzen } m \geq 0, \text{ beliebiges } \omega > 1/(4m+10) \text{ und fast alle } q \in \mathscr{F}, \text{ sowie gleichmässig in } \sigma \text{ mit } |\sigma \pm 1| \geq \kappa, \ \kappa \text{ beliebig positiv.} \tag{19}$$

Dies lässt sich zeigen auf Grund von Satz 2.

III. Beweise

(i) *Hilfsbeziehungen.* Sei $\delta > 0$, $x > 0$ und $s := \sigma + i\beta$. Definiert man

$$f(x, s, \delta) := -(\delta - 1) \int_0^\infty (x + w/s)^{\delta-2} e^{-w}\, dw \text{ für } \sigma > 0, \text{ oder für } \sigma < 0 \text{ und } \beta \neq 0, \tag{20}$$

so ist

$$\int_0^x (x-\rho)^{\delta-1} e^{s\rho}\, d\rho = \frac{e^{sx}}{s^\delta}\Gamma(\delta) - \frac{x^{\delta-1}}{s} + \frac{1}{s^2} f(x, s, \delta)$$

$$\text{für } \sigma > 0, \text{ oder für } \sigma < 0 \text{ und } \beta \neq 0. \tag{21}$$

Dies folgt durch eine partielle Integration aus der Formel

$$\int_0^x (x-\rho)^{\delta-1} e^{s\rho}\, d\rho = \frac{e^{sx}}{s^\delta}\Gamma(\delta) - \frac{1}{s}\int_0^\infty (x+w/s)^{\delta-1} e^{-w}\, dw,$$

$$x>0, \quad \sigma\neq 0, \quad \delta>0. \tag{22}$$

Für beliebige $\varepsilon>0$, $\beta^*>0$ und

für $0<\delta\leq 2$ gilt gleichmässig in $x\geq\varepsilon$, sowie $\beta\geq\beta^*$:

$$\begin{cases} f(x, \pm 1\pm i\beta, \delta) = O(1). & (23)\\ df(x, \pm 1\pm i\beta, \delta)/dx = O(1). & (24)\end{cases}$$

Beachtet man, dass $|x+w/(\pm 1\pm i\beta)|\geq \varepsilon\beta^*/(1+\beta^*)$ ist, für $\beta\geq\beta^*$, $x\geq\varepsilon$ und $w\in\mathbf{R}$, so ergeben sich die Abschätzungen (23) und (24) aus der Voraussetzung $\delta\leq 2$. Rechnungen, analog denjenigen, welche auf (21) bis (24) führten, zeigen, dass für $s:=\sigma+i\beta$, $\chi:=\min(1,\delta)$ und beliebige $\varepsilon>0$, $\beta^*>0$ auch gilt

$$\int_0^x (x-\rho)^{\delta-1} e^{s\rho}\, d\rho = \begin{cases} O(e^x/|s|^\chi),\ \delta>0,\ \sigma=\pm 1, \\ \qquad\qquad \text{gleichmässig in } x\geq 0 \text{ und } |\beta|\geq\beta^*. & (25)\\ \dfrac{e^{sx}}{s^\delta}\Gamma(\delta) + O(x^\delta/|s|^\chi),\ \delta>0, \\ \qquad\qquad \text{gleichmässig in } \varepsilon\leq\sigma\leq 3,\ x\geq\varepsilon \text{ und } \beta\in\mathbf{R}. & (26)\\ O(x^\delta/|s|^\chi),\ \delta>0, \\ \qquad\qquad \text{gleichmässig in } -3\leq\sigma\leq-\varepsilon,\ x\geq\varepsilon \text{ und } \beta\in\mathbf{R}. & (27)\end{cases}$$

Um Beziehungen zwischen den Resttermen R^k verschiedener Ordnungen k zu erhalten, überlegt man sich, dass für die Rieszschen Summen N^k gilt ([2]):

$$kN^{k-1}(\Lambda, p, q, x) = \begin{cases} dN^k(\Lambda, p, q, x)/dx,\ k>1, \\ \qquad\qquad \text{oder } k=1 \text{ und } x\neq\rho(Tp, q), \quad T\in\Lambda, & (28)\\ d^+N^k(\Lambda, p, q, x)/dx,\ k=1 \text{ und } x=\rho(Tp, q), \quad T\in\Lambda, \end{cases}$$

$$N^{k+1}(\Lambda, p, q, x) = (k+1)\int_0^x N^k(\Lambda, p, q, v)\, dv, \quad k\geq 0, \tag{29}$$

und

$$N^k(\Lambda, p, q, x) = k\int_0^x (x-v)^{k-1} N^0(\Lambda, p, q, v)\, dv, \quad k>0. \tag{30}$$

Aus der Definition (6) folgt direkt

$$kQ^{k-1}(\Lambda, p, q, x) = dQ^k(\Lambda, p, q, x)/dx$$

und mit Hilfe von (22):

$$Q^k(\Lambda, p, q, x) = k \int_0^x (x-v)^{k-1} Q^0(\Lambda, p, q, v)\, dv + O(x^{k+1}),$$
$$k > 0, \text{ gleichmässig in } (p, q) \in \mathscr{F} \times \mathscr{F}. \quad (31)$$

Die erste dieser beiden Formeln impliziert wegen (28):

$$kR^{k-1}(\Lambda, p, q, x) = \begin{cases} dR^k(\Lambda, p, q, x)/dx, \ k > 1, \\ \qquad\qquad \text{oder } k = 1 \text{ und } x \neq \rho\,(Tp, q),\ T \in \Lambda, \\ d^+R^k(\Lambda, p, q, x)/dx, \ k = 1 \text{ und } x = \rho(Tp, q),\ T \in \Lambda, \end{cases} \quad (32)$$

sowie, wegen (29):

$$R^{k+1}(\Lambda, p, q, x) = (k+1) \int_0^x R^k(\Lambda, p, q, v)\, dv - Q^{k+1}(\Lambda, p, q, 0), \qquad k \geq 0. \quad (33)$$

Zusammen mit (30) ergibt sich aus (31)

$$R^k(\Lambda, p, q, x) = k \int_0^x (x-v)^{k-1} R^0(\Lambda, p, q, v)\, dv + O(x^{k+1}),$$
$$\text{gleichmässig in } (p, q) \in \mathscr{F} \times \mathscr{F}. \quad (34)$$

(ii) *Beweis von* (4) *und* (5), *Folgerungen.* Summiert man bei gegebenem $x \geq 0$ beide Seiten der Gleichung (4) in [10, Seite 406] über alle $\lambda \leq x$ und setzt für $\{S_j \mid j = 1, 2, \ldots, n\}$ das spezielle Repräsentantensystem $\{U_j \mid j = 1, 2, \ldots, n\}$ ein, so ergibt sich

$$\sum_{\lambda_j \leq x} K_j(p, q) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\lambda_j^N \leq x} K_j^N(U_m p, q). \quad (35)$$

Zusammen mit (2) und (3) erhält man daraus (4), wenn man $q = p$ wählt. Für $p = q$ gilt die Abschätzung (3) gleichmässig in $p \in \mathscr{F}$, woraus mit der Cauchyschen Ungleichung folgt

$$\sum_{\lambda_j^N \leq x} |K_j^N(p, q)| = O(x^{3/2}), \text{ gleichmässig in } (p, q) \in \mathscr{F} \times \mathscr{F},$$

was unter Beachtung von (35) die Behauptung (5) beweist. Unter Verwendung von (5) zeigt man mit Hilfe Abelscher partieller Summation:

$$\text{Gleichmässig in } (p,q)\in\mathcal{F}\times\mathcal{F} \text{ gilt:} \begin{cases} \sum\limits_{\lambda_n\geq x>1} |K_n(p,q)|/|\alpha_n|^\kappa = O(x^{(3-\kappa)/2}), & \kappa>3. \quad (36)\\ \sum\limits_{1<\lambda_n\leq x} |K_n(p,q)|/|\alpha_n|^\kappa = \begin{cases} O(x^{(3-\kappa)/2}) & \kappa<3.\\ O(\log x), & \kappa=3. \end{cases} \quad (37)\end{cases}$$

Da nur endlich viele $\lambda_n \leq 1$ sind, folgt aus (36):

$$\sum_{\lambda_n\neq 1} |K_n(p,q)|/|\alpha_n|^\kappa \text{ konvergiert für } \kappa>3 \text{ gleichmässig in } (p,q)\in\mathcal{F}\times\mathcal{F}. \quad (38)$$

(iii) *Reihendarstellung von* $N^k(\Lambda, p, q, x)$, $k>2$. Definiert man bei gegebenem $x\geq 0$

$$F_x^k(v) := \begin{cases} (x-v)^k, & 0\leq v\leq x,\\ 0, & v>x, \end{cases}$$

so hat $F_x^k(v)$ kompakten Träger und ist für $k>2$ zweimal stetig differenzierbar nach v auf $[0,\infty)$. Zudem ist $N^k(\Lambda, p, q, x) = \sum_{T\in\Lambda} F_x^k(\rho(Tp, q))$. Dies erlaubt auf Grund der Entwicklung in [10, Seite 411] die in Satz 1 gegebene Reihendarstellung der Funktion $N^k(\Lambda, p, q, x)$, $k>2$, zu gewinnen.

(iv) *Reihendarstellung von* $N^k(\Lambda, p, q, x)$, $k>1$. Für alle reellen $k>-1$ seien die Koeffizienten $a_n^k(x)$ definiert durch die Formel (9). Dann ist

$$a_n^{k+1}(x) = (k+1)\int_0^x a_n^k(v)\,dv, \qquad n=0,1,\ldots,k>-1, \quad (39)$$

und

$$k a_n^{k-1}(x) = d a_n^k(x)/dx, \qquad n=0,1,\ldots,k>0. \quad (40)$$

Sei $\delta>0$. Für λ_n ungleich 0 oder 1 erhält man aus (9) durch zweimalige partielle Integration:

$$\begin{aligned} a_n^{1+\delta}(x) = {} & \frac{8\pi(1+\delta)}{(\alpha_n^2-1)^2}x^\delta + \frac{\pi(1+\delta)\delta}{\alpha_n(\alpha_n+1)^2}\int_0^x (x-\rho)^{\delta-1}[e^{(\alpha_n+1)\rho}+e^{(-\alpha_n-1)\rho}]\,d\rho\\ & -\frac{\pi(1+\delta)\delta}{\alpha_n(\alpha_n-1)^2}\int_0^x (x-\rho)^{\delta-1}[e^{(\alpha_n-1)\rho}+e^{(-\alpha_n+1)\rho}]\,d\rho, \quad \delta>0, \quad \lambda_n\neq {}^0_1. \end{aligned} \quad (41)$$

Beachtet man (25), so folgt aus (41):

$$a_n^{1+\delta}(x) = O(e^x/|\alpha_n|^\chi),\ \delta > 0,\ \chi := \min(3+\delta, 4), \text{ gleichmässig in } x \geq 0 \text{ und } n \geq \tau. \tag{42}$$

Nun zeigt (42) zusammen mit (38) erstens: *Die Reihe* (8) *für* $N^k(\Lambda, p, q, x)$, $k > 2$, *konvergiert absolut und gleichmässig in* $(p, q) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, *sowie gleichmässig in* x *aus einer beliebigen kompakten Teilmenge von* $[0, \infty)$, und zweitens, wenn man (40) beachtet: *Genau dasselbe gilt für die – vorerst formal – gliedweise differenzierte Reihe.* Wegen (28) beweist dies die Gültigkeit von (8) für $k > 1$.

(v) *Reihendarstellung von* $N^k(\Lambda, p, q, x)$, $k > 0$. Im ganzen Abschnitt (v) bezeichne δ eine feste Zahl, $0 < \delta \leq 2$. Durch einmalige partielle Integration erhält man aus (9):

$$a_n^\delta(x) = \frac{\pi\delta}{\alpha_n} \int_0^x (x-\rho)^{\delta-1} \left[\frac{e^{(\alpha_n+1)\rho}}{\alpha_n+1} + \frac{e^{(-\alpha_n-1)\rho}}{-\alpha_n-1} - \frac{e^{(\alpha_n-1)\rho}}{\alpha_n-1} - \frac{e^{(-\alpha_n+1)\rho}}{-\alpha_n+1} \right] d\rho, \quad \lambda_n \neq {}^0_1. \tag{43}$$

Für $n \geq \tau$ und $x > 0$ ergibt sich daraus mit (21):

$$\begin{aligned} a_n^\delta(x) &- \frac{\pi}{\alpha_n} \Gamma(\delta+1) \left[\frac{e^{(\alpha_n+1)x}}{(\alpha_n+1)^{1+\delta}} + \frac{e^{(-\alpha_n-1)x}}{(-\alpha_n-1)^{1+\delta}} - \frac{e^{(\alpha_n-1)x}}{(\alpha_n-1)^{1+\delta}} - \frac{e^{(-\alpha_n+1)x}}{(-\alpha_n+1)^{1+\delta}} \right] \\ &= -\frac{2\pi\delta}{\alpha_n} x^{\delta-1} \{1/(\alpha_n+1)^2 - 1/(\alpha_n-1)^2\} \\ &\quad + \frac{\pi\delta}{\alpha_n} \left[\frac{f(x, \alpha_n+1, \delta)}{(\alpha_n+1)^3} + \frac{f(x, -\alpha_n-1, \delta)}{(-\alpha_n-1)^3} - \frac{f(x, \alpha_n-1, \delta)}{(\alpha_n-1)^3} \right. \\ &\qquad \left. - \frac{f(x, -\alpha_n+1, \delta)}{(-\alpha_n+1)^3} \right]. \end{aligned} \tag{44}$$

Beachtet man (23), so sieht man, dass alle Summanden auf der rechten Seite dieser Gleichung $O(|\alpha_n|^{-4})$ sind, gleichmässig in $n \geq \tau$ und x aus einem beliebigen kompakten Teilintervall I von $(0, \infty)$. Nun multipliziert man beide Seiten von (44) mit $K_n(p, q)$ und summiert über alle $n \geq \tau$. Nach (38) konvergieren dann die beidseits entstehenden Reihen absolut und man darf auf der rechten Seite beliebig umordnen. Mit

$$\xi = \xi(\Lambda, p, q, \delta) := 8\pi\delta \sum_{n \geq \tau} \frac{K_n(p, q)}{(\alpha_n^2 - 1)^2}$$

und

$$P^{\delta}_{(x)} = P^{\delta}_{(\Lambda,p,q,x)} := \sum_{n\geq\tau} \left[a_n^{\delta}(x) - \frac{\pi}{\alpha_n}\Gamma(\delta+1)\left[\frac{e^{(\alpha_n+1)x}}{(\alpha_n+1)^{1+\delta}} + \frac{e^{(-\alpha_n-1)x}}{(-\alpha_n-1)^{1+\delta}} - \frac{e^{(\alpha_n-1)x}}{(\alpha_n-1)^{1+\delta}} - \frac{e^{(-\alpha_n+1)x}}{(-\alpha_n+1)^{1+\delta}}\right]\right] K_n(p,q) \tag{45}$$

wird

$$P^{\delta}(x) = \xi x^{\delta-1} + \pi\delta \sum_{n\geq\tau} \left[\frac{f(x,\alpha_n+1,\delta)-f(x,-\alpha_n-1,\delta)}{(1+\alpha_n)^3} - \frac{f(x,-\alpha_n+1,\delta)-f(x,\alpha_n-1,\delta)}{(1-\alpha_n)^3}\right]\frac{K_n(p,q)}{\alpha_n}. \tag{46}$$

Dabei gilt:

Die Reihe (45) für $P^{\delta}(x)$ konvergiert absolut und gleichmässig in $x \in I$, wobei I ein beliebiges kompaktes Teilintervall von $(0,\infty)$ ist. (47)

Nach (23), (24) und (38) konvergiert die Summe auf der rechten Seite von (46), sowie ihre – vorerst formale – gliedweise Ableitung nach x gleichmässig in $x \in I$. Da die Funktionen $f(x, \pm 1 \pm \alpha_n, \delta)$, $\delta > 0$, $n \geq \tau$, und ihre Ableitungen nach x stetig sind in x, $x > 0$, folgt:

$P^{\delta}(x)$ ist stetig differenzierbar nach x, $0 < x < \infty$. (48)

Weiter ist

$$\sum_{m\leq\beta_n\leq m+1} \left|\frac{K_n(p,q)}{\alpha_n(\pm 1\pm\alpha_n)^{1+\delta}}\right| = o(1) \quad \text{für} \quad m \to \infty. \tag{49}$$

Man zeigt dies mit Hilfe von (4) zuerst für $p = q$ und erhält daraus (49) wegen $|K_n(p,q)| \leq K_n(p,p) + K_n(q,q)$. Nach (38) ist

$$\sum_{n\geq\tau} \left|\frac{K_n(p,q)}{\alpha_n(\pm 1\pm\alpha_n)^{1+\delta}}\right| \beta_n^{-1} < \infty. \tag{50}$$

Es bezeichne nun I wie oben ein kompaktes Teilintervall von $(0,\infty)$, J ein abgeschlossenes Intervall, enthalten im Innern von I. Sei μ die Länge von I. Aus

(49) und (50), folgt mit [4, Corollary 3, Seite 221]:

$$\left.\begin{array}{ll} \pi\Gamma(\delta+1)\sum\limits_{n\geq\tau}\dfrac{K_n(p,q)}{\alpha_n}\dfrac{e^{(\pm1\pm\alpha_n)x}}{(\pm1\pm\alpha_n)^{1+\delta}} & \text{ist gleichmässig äquikonvergent in } x\in I \text{ zur abgeleiteten Fourier Reihe einer } \mu\text{-periodischen Funktion. Diese Funktion ist auf } I \text{ gleich} \\ \pi\Gamma(\delta+1)\gamma(x)\sum\limits_{n\geq\tau}\dfrac{K_n(p,q)}{\alpha_n(\pm1\pm\alpha_n)^{1+\delta}}\displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{(\pm1\pm\alpha_n)v}\,dv, \quad x_0\in J, & \end{array}\right\} \quad (51)$$

$$\text{mit } \gamma\in C_I^\infty,\ \gamma(x)=1 \quad \text{für} \quad x\in J. \tag{52}$$

Sei $L^*(x)=L^*(\delta,\Lambda,p,q,x)$ die μ-periodische Funktion, für die gilt

$$L^*(x)=\gamma(x)\int_{x_0}^{x} P^\delta(v)\,dv, \quad \text{für} \quad x\in I.$$

Nach (52) ist dann

$$dL^*(x)/dx=P^\delta(x) \quad \text{für} \quad x\in J. \tag{53}$$

Ist f eine auf I definierte Funktion, so bezeichne f^* die μ-periodische Funktion mit $f^*(x)=f(x)$ für alle $x\in I$.

Wegen (48) ist die Fourier Reihe von $\{P^\delta(x)\}^*$ gleichmässig konvergent in $x\in J$. Auf J ist deshalb nach (53) die Ableitung der Fourier Reihe von $L^*(x)$ gleich der – gleichmässig in x aus J gegen $P^\delta(x)$ konvergenten – Fourier Reihe von $\{P^\delta(x)\}^*$. Zusammen mit (47) folgt:

Die Reihe (45) für $P^\delta(x)$ ist gleichmässig äquikonvergent in $x\in J$ zur Ableitung der Fourier Reihe von $L^*(x)$.

Aus (47), (51) und der Definition von $L^*(x)$ erhält man damit

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{n\geq\tau} a_n^\delta(x)K_n(p,q) \quad \text{ist gleichmässig äquikonvergent in } x\in J \text{ zur Ableitung der Fourier Reihe der Funktion} \\ \left[\gamma(x)\sum\limits_{n\geq\tau}K_n(p,q)\displaystyle\int_{x_0}^{x} a_n^\delta(v)\,dv\right]^* = \left[\dfrac{\gamma(x)}{\delta+1}\sum\limits_{n\geq\tau}K_n(p,q)a_n^{1+\delta}(x)-\gamma(x)c_1\right]^* \\ \quad = \left[\dfrac{\gamma(x)}{\delta+1}\{N^{1+\delta}(\Lambda,p,q,x)-T^{1+\delta}(x)\}-\gamma(x)c_1\right]^*, \ c_1 \text{ unabhängig von } x. \end{array}\right\} \quad (54)$$

Dabei werde gesetzt

$$c_1 = c_1(\delta, \Lambda, p, q, x_0) := (1+\delta)^{-1} \sum_{n \geq \tau} a_n^{1+\delta}(x_0) K_n(p, q)$$

und für $k > -1$:

$$T^k(x) = T^k(\Lambda, p, q, x) := \sum_{n < \tau} a_n^k(x) K_n(p, q).$$

Man wird sich überlegen:

Die Ableitung der Fourier Reihe der Funktion $\{\gamma(x)(\delta+1)^{-1}\{N^{1+\delta}(\Lambda, p, q, x) - T^{1+\delta}(x)\} - \gamma(x)c_1\}^*$ konvergiert gleichmässig in $x \in J$. (55)

Das bedeutet wegen (54), dass $\sum_{n \geq \tau} a_n^\delta(x) K_n(p, q)$ gleichmässig äquikonvergent ist auf J zu einer gleichmässig auf J konvergenten Reihe und somit dort ebenfalls gleichmässig konvergiert. Es folgt, dass auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^\delta(x) K_n(p, q)$ gleichmässig konvergiert auf J. Zusammen mit (28) und (40) vervollständigt diese Tatsache den Beweis von Satz 1. Es bleibt noch (55) zu verifizieren. Offensichtlich gilt:

Die Ableitung der Fourier Reihe der Funktion $\{\gamma(x)(\delta+1)^{-1}\{N^{1+\delta}(\Lambda, p, q, x) - T^{1+\delta}(x)\} - \gamma(x)c_1\}^*$ konvergiert sicher dort gleichmässig, wo die Fourier Reihe der Ableitung dieser Funktion gleichmässig konvergiert. (56)

Nach (40) und (9) ist $dT^{1+\delta}(x)/dx = (1+\delta)T^\delta(x)$ und $T^\delta(x)$ stetig differenzierbar nach x auf I. Also konvergiert die Fourier Reihe von $d/dx\{T^{1+\delta}(x)\}^*$ gleichmässig auf J. Da ausserdem $\gamma \in C_I^\infty$ ist, folgt

Die Fourier Reihe von $d/dx\{\gamma(x)(\delta+1)^{-1}\{N^{1+\delta}(\Lambda, p, q, x) - T^{1+\delta}(x)\} - \gamma(x)c_1\}^*$ konvergiert zumindest dort gleichmässig, wo die Fourier Reihe von $d/dx\{(1+\delta)^{-1}N^{1+\delta}(\Lambda, p, q, x)\}^* = \{N^\delta(\Lambda, p, q, x)\}^*$ gleichmässig konvergiert. (57)

Als Summenfunktion positiver stetiger Funktionen ist $N^\delta(\Lambda, p, q, x)$ stetig und nicht fallend, also von beschränkter Schwankung auf jedem kompakten Intervall. Somit ([19, Seite 410]), konvergiert die Fourier Reihe von $\{N^\delta(\Lambda, p, q, x)\}^*$ gleichmässig in $x \in J$. Das beweist (55) wegen (56) und (57).

(vi) *Die explizite Reihe für* $N^2(\Lambda, p, q, x)$. Für ganzes k lassen sich die Koeffizienten $a_n^k(x)$ durch partielle Integration explizit berechnen. Speziell für $k=2$ *erhält man:*

$$\begin{aligned} N^2_{(\Lambda,p,q,x)} = & \frac{\pi}{|\mathcal{F}|}\left\{\frac{1}{2}\operatorname{Sinh} 2x - \frac{2x^3}{3} - x\right\} \\ & + 8\pi K^*_{(p,q)}\{x \operatorname{Cosh} x - 3 \operatorname{Sinh} x + 2x\} \\ & + 4\pi \sum_{\lambda_n \neq 1^0} \frac{K_n(p,q)}{\alpha_n}\left[\frac{\operatorname{Sinh}((\alpha_n+1)x)}{(\alpha_n+1)^3} - \frac{\operatorname{Sinh}((\alpha_n-1)x)}{(\alpha_n-1)^3} + \frac{4\alpha_n x}{(\alpha_n^2-1)^2}\right]. \end{aligned} \tag{58}$$

(vii) *Beweis von Satz* 2, (11) *und* (12). Bezeichnet $I(x)$ den hyperbolischen Inhalt einer hyperbolischen Kugel vom Radius x, so ist ([10, Seite 409]) $I(x) = \pi\{\operatorname{Sinh} 2x - 2x\}$. Da $\mathcal{F}$ kompakt ist, existiert ein $\xi > 0$, sodass $\mathcal{F}$ enthalten ist in einer Kugel vom hyperbolischen Radius ξ und es gilt $N^0(\Lambda, p, q, x) = O(I(x+\xi)/|\mathcal{F}|)$. Also ist die Funktion $N^k(\Lambda, p, q, x) = O(e^{2x})$ für $k=0$ – und damit nach (30) für alle $k \geq 0$ – und ihre Laplacetransformierte $G^k(\Lambda, p, q, s)$, $k \geq 0$, $s := \sigma + it$, ist analytisch in der Halbebene $\sigma > 2$. Dabei gilt

$$s^k G^k(\Lambda, p, q, s) = \Gamma(k+1) G^0(\Lambda, p, q, s), \quad \sigma > 2, \quad k \geq 0. \tag{59}$$

Nach dem Identitätsprinzip genügt es, die Aussage (59) für reelles $s > 2$ zu beweisen. Setzt man in die Definition von $G^k(\Lambda, p, q, s)$, $k > 0$, die Beziehung (30) ein, so erhält man (59) für $s > 2$ und $k > 0$, indem man sich überlegt, dass man die Integrationen vertauschen darf und anschliessend $s(x-v)$ substituiert. Zudem ist (59) offensichtlich richtig für $k = 0$.

Die Formeln (58) und (38) zeigen, dass die Reihe $e^{-xs} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(x) K_n(p, q)$ absolut konvergiert und zwar gleichmässig in $x \in [0, \infty)$ für jedes s mit $\sigma > 2$. Setzt man also in die Definition von $G^2(\Lambda, p, q, s)$ die explizite Reihe (58) für $N^2(\Lambda, p, q, x)$ ein, so erhält man durch Vertauschung von Summation und Integration

$$G^2(\Lambda, p, q, s) = \frac{16\pi}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(p,q)}{(s^2-(\alpha_n+1)^2)(s^2-(\alpha_n-1)^2)}, \quad \sigma > 2. \tag{60}$$

Mit Hilfe von (60) soll $G^2(\Lambda, p, q, s)$ meromorph fortgesetzt werden nach ganz $\mathbf{C}$. Dazu definiert man $P := \{\pm 1 \pm \alpha_n \mid n = 0, 1, \ldots\}$. Dann ist P eine diskrete Punktmenge ohne Häufungspunkt im Endlichen. Wegen $\alpha_0 = 1$ gehört 0 zu P.

Sei M eine beliebige kompakte Teilmenge von $\mathbf{C}-P$. Da gilt

$1/(s^2-(\alpha_n+1)^2)(s^2-(\alpha_n-1)^2)=O(1/|\alpha_n|^4)$, gleichmässig in $n=0,1,\ldots$ und $s\in M$,

konvergiert die Reihe (60) nach (38) gleichmässig in $s\in M$ sowie in $(p,q)\in\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ und

$G^2(\Lambda,p,q,s)$ ist meromorph in ganz $\mathbf{C}$ mit der Polmenge P.

Mit (59) und (60) erhält man daraus durch wiederholte Anwendung des Prinzips der analytischen Forteszung und des Identitätsprinzips Satz 2, sowie (11). Wegen der für $\sigma>2$ gültigen Beziehung

$$G^0(\Lambda,p,q,s)=\int_0^\infty e^{-xs}\sum_{\substack{T\in\Lambda\\ \rho(Tp,q)\le x}}1\,dx=\sum_{T\in\Lambda}\int_{\rho(Tp,q)}^\infty e^{-xs}\,dx$$
$$=\frac{1}{s}\sum_{T\in\Lambda}e^{-\rho(Tp,q)s},\qquad \sigma>2,$$

ist damit auch (12) bewiesen.

(viii) *Beweis von* (13). Man setzt $\theta:=\min_{n<\tau}\alpha_n$. Dann ist $0<\theta\le 1$ und unter Beachtung von (41) lassen sich mit (26) und (27) die Koeffizienten $a_n^{1+\delta}(x)$ in folgender Weise darstellen:

$$a_n^{1+\delta}(x)=\pi\frac{\Gamma(2+\delta)}{\alpha_n}\left[\frac{e^{(1+\alpha_n)x}}{(1+\alpha_n)^{2+\delta}}-\frac{e^{(1-\alpha_n)x}}{(1-\alpha_n)^{2+\delta}}\right]$$
$$+\begin{cases}O(x^\delta)+O(e^{(1-\theta)x}), & 0<\lambda_n<1.\\ O(x^\delta/|\alpha_n|^x), \text{ gleichmässig in } n\ge\tau.\end{cases}\tag{61}$$

Dabei ist $\delta>0$ vorausgesetzt und $\chi:=\min(3+\delta,4)$. Unter Verwendung von (22) folgert man direkt aus (9):

$$a_n^{1+\delta}(x)=2\pi e^x\Gamma(2+\delta)\{x-2-\delta\}+O(x^{2+\delta}),\qquad \lambda_n=1,\qquad \delta>0,$$

$$a_0^{1+\delta}(x)=\frac{\pi}{2^{2+\delta}}\Gamma(2+\delta)e^{2x}+O(x^{2+\delta}),\qquad \delta>0.$$

Also gilt speziell für die unter (6) definierte Funktion Q^k:

$$\sum_{n<\tau} a_n^{1+\delta}(x)K_n(p,q) = Q^{1+\delta}(\Lambda, p, q, x) + O(e^{(1-\theta)x}) + O(x^{2+\delta}), \qquad \delta > 0.$$

Setzt man diese, sowie die Beziehung (61) in die Reihendarstellung (8) für $N^{1+\delta}(\Lambda, p, q, x)$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} N^{1+\delta}(\Lambda, p, q, x) &= Q^{1+\delta}(\Lambda, p, q, x) \\ &\quad + \pi\Gamma(2+\delta)e^x \sum_{n\geq\tau} \frac{K_n(p,q)}{\alpha_n}\left[\frac{e^{\alpha_n x}}{(1+\alpha_n)^{2+\delta}} - \frac{e^{-\alpha_n x}}{(1-\alpha_n)^{2+\delta}}\right] \\ &\quad + O(e^{(1-\theta)x}) + O(x^{2+\delta}) + O(x^\delta) \sum_{n\geq\tau} K_n(p,q)/|\alpha_n|^\chi, \\ &\qquad \delta > 0, \qquad \chi := \min(3+\delta, 4). \end{aligned} \tag{62}$$

Für $n \geq \tau$ und $x \in \mathbf{R}$ ist $|e^{\alpha_n x}| = 1$. Beachtet man noch (38), so folgt aus (62) die Behauptung (13).

(ix) *Beweis von* (14) *für* $k = 0$, $k = 1$. Die Abschätzung (14) im Falle $k = 0$ und für $p = q$, wurde bewiesen von F. Fricker ([10]), mit Hilfe einer Approximation der Funktion $N^0(\Lambda, p, p, x)$ von oben und unten durch bezüglich der Koordinaten in H zweimal stetig differenzierbare und Λ-automorphe Funktionen. Die Anwendung seines unter (iii) zitierten Entwicklungssatzes auf diese Funktionen lieferte das entsprechende Resultat.

Für $k = 0$, sowie für $k = 1$, kann man (14) auch herleiten unter Verwendung der Methode der endlichen Differenzen, ausgehend von der expliziten Reihendarstellung (58) für $N^2(\Lambda, p, q, x)$. Sei die Funktion $y = y(x)$ reellwertig und definiert auf $[0,\infty)$, $y(x) \neq 0$ für $x \geq 0$ und $y(x) = o(1)$, $x \to \infty$. Für eine beliebige, auf $[0,\infty)$ definierte Funktion F setzt man

$$\begin{aligned} \Delta_y^1(F(x)) &:= \frac{1}{y}\{F(x+y) - F(x)\}, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \geq 0, \qquad x + 2y \geq 0. \\ \Delta_y^2(F(x)) &:= \frac{1}{y^2}\{F(x+2y) - 2F(x+y) + F(x)\}, \end{aligned}$$

Durch geeignete Entwicklungen in Taylorreihen mit Restglied überlegt man sich,

dass für $j=1,2$ gilt

$$\Delta_y^j(x^\kappa)=O(x^{(\kappa-j)}),\qquad \kappa\in\mathbf{R},\qquad \Delta_y^j(e^{\alpha x})=O(e^x),\ \text{gleichmässig in } -3\le\alpha\le 1.$$

$$\Delta_y^j(e^{(\pm 1\pm i\beta)x})=\begin{cases}O(e^x/|y|^j),\\ O(e^x(1+|\beta|)^j),\end{cases}\ \text{gleichmässig in } \beta\in\mathbf{R}.$$

$$\Delta_y^j(e^{(\pm 1\pm\alpha)x})=(\pm 1\pm\alpha)^j e^{(\pm 1\pm\alpha)x}+O(e^{2x}\,|y|),\ \text{gleichmässig in } 0\le\alpha\le 1.$$

$$\Delta_y^j(xe^x)=xe^x+je^x+O(xe^x\,|y|).$$

Mit diesen Formeln und der Definition (6) für $Q^k(\Lambda,p,q,x)$ erhält man aus den unter (58) explizit gegebenen Ausdrücken für $a_n^2(x)$:

$$\Delta_y^j(a_n^2(x))=\begin{cases}O(e^x/|\alpha_n|^4\,|y|^j), & j=1,2,\ \text{gleichmässig in } n\ge\tau, \qquad (63)\\ O(e^x/|\alpha_n|^{4-j}), & \qquad (64)\end{cases}$$

$$\Delta_y^j\left\{\sum_{n<\tau} a_n^2(x)K_n(p,q)\right\}=2Q^{2-j}(\Lambda,p,q,x)+O(e^{2x}\,|y|)+O(e^x),\quad j=1,2. \qquad (65)$$

Nun wendet man die Operatoren Δ_y^j auf die Gleichung (8) an. Für $k=2$ konvergiert die Reihe auf der rechten Seite von (8) absolut. Aus diesem Grunde darf man rechts Summation und Anwendung von Δ_y^j vertauschen. Auf die Terme mit $n<\tau$ wendet man (65) an, auf diejenigen mit $1<\lambda_n\le|y|^{-2}$ die Beziehung (64) und die restlichen Summanden schätzt man ab mit Hilfe von (63). So ergibt sich für $j=1,2$:

$$\Delta_y^j(N^2(\Lambda,p,q,x))=2Q^{2-j}(\Lambda,p,q,x)+O(e^x)\sum_{1<\lambda_n\le|y|^{-2}}|K_n(p,q)|/|\alpha_n|^{4-j}$$
$$+O(e^x/|y|^j)\sum_{\lambda_n>|y|^{-2}}|K_n(p,q)|/|\alpha_n|^4+O(e^{2x}\,|y|)+O(e^x).$$

Die O-Abschätzungen in dieser Beziehung sind gleichmässig in $(p,q)\in\mathscr{F}\times\mathscr{F}$, denn nach (5) sind es auch diejenigen unter (65) und wegen (36) und (37) folgt, dass gleichmässig in $(p,q)\in\mathscr{F}\times\mathscr{F}$ gilt

$$\Delta_y^1(N^2(\Lambda,p,q,x))=2Q^1(\Lambda,p,q,x)+O(e^x\,|\log|y||)+O(e^x)+O(e^{2x}\,|y|), \qquad (66)$$

$$\Delta_y^2(N^2(\Lambda,p,q,x))=2Q^0(\Lambda,p,q,x)+O(e^x\,|y|^{-1})+O(e^{2x}\,|y|), \qquad (67)$$

Andererseits ist nach (29):

$$\Delta_y^1(N^2(\Lambda, p, q, x)) = \frac{2}{y}\int_x^{x+y} N^1(\Lambda, p, q, v)\, dv,$$

$$\Delta_y^2(N^2(\Lambda, p, q, x)) = \frac{2}{y^2}\int_x^{x+y}\left\{\int_u^{u+y} N^0(\Lambda, p, q, v)\, dv\right\} du,$$

sodass, da die Funktionen $N^m(\Lambda, p, q, x)$, $m = 0, 1$ monoton wachsen, auch gilt

$$\begin{array}{lll} 2N^{2-j}(\Lambda, p, q, x) \leq \Delta_y^j(N^2(\Lambda, p, q, x)) & \text{für} & y > 0, \\ 2N^{2-j}(\Lambda, p, q, x) \geq \Delta_y^j(N^2(\Lambda, p, q, x)) & \text{für} & y < 0, \end{array} \qquad j = 1, 2.$$

Das Resultat (14) im Falle $k = 1$ ergibt sich aus diesen Ungleichungen, zusammen mit (66), wenn man $j = 1$ und $y = \pm e^{-x}$ wählt, und für $k = 0$ erhält man (14), indem man $j = 2$, $y = \pm e^{-x/2}$ setzt und (67) beachtet.

(x) *Beweis von* (14) *für* $0 < k < 1$. Mit Hilfe der unter (ix) hergeleiteten Resultate soll der Beweis von (14) vervollständigt werden. Das Vorgehen ist analog zu demjenigen beim Beweis von Satz 1.71 in [2]. Nach (34) gilt für beliebiges $\xi \geq 0$:

$$R^k(\Lambda, p, q, x) = k\left\{\int_0^{\xi} + \int_{\xi}^{x}\right\}(x - v)^{k-1} R^0(\Lambda, p, q, v)\, dv + O(x^{k+1}),$$
$$k > 0, \text{ gleichmässig in } (p, q) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}. \quad (68)$$

Man wählt nun $\xi = \xi(x) := x - xe^{-x/2}$, das heisst $x - \xi = xe^{-x/2}$. Aus dem schon bewiesenen Resultat (14) im Falle $k = 0$ ersieht man, dass dann das Integral von ξ bis x in (68) gleich $O(x^k e^{(3-k)x/2})$ ist für $0 < k < 1$ und gleichmässig in $(p, q) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$. Zudem existiert nach dem zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung ([9, Seite 256]) ein u, $0 \leq u \leq \xi$, sodass gilt

$$\begin{aligned} &\int_0^{\xi} (x - v)^{k-1} R^0(\Lambda, p, q, v)\, dv \\ &= (x - \xi)^{k-1}\int_u^{\xi} R^0(\Lambda, p, q, v)\, dv + x^{k-1}\int_0^{u} R^0(\Lambda, p, q, v)\, dv \\ &= (x - \xi)^{k-1} R^1(\Lambda, p, q, v)\Big|_{v=u}^{v=\xi} + x^{k-1} R^1(\Lambda, p, q, v)\Big|_{v=0}^{v=u} + O(x^{k-1}) \\ &= O(x^k e^{(3-k)x/2}), \quad 0 < k < 1, \text{gleichmässig in } (p, q) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}. \end{aligned}$$

gleichmässig in $(p, q) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$.

Diese letzte Abschätzung, welche man aus dem Resultat (14) für $k=1$ erhält, beweist, eingesetzt in (68) die Aussage (14) vollständig.

(xi) *Beweis von* (15) *und* (17). Wird definiert

$$S^k(\Lambda, p, q, x) := R^k(\Lambda, p, q, x) - \pi\Gamma(k+1)e^x \sum_{n\geq\tau} \frac{K_n(p,q)}{\alpha_n}\left[\frac{e^{\alpha_n x}}{(1+\alpha_n)^{k+1}} - \frac{e^{-\alpha_n x}}{(1-\alpha_n)^{k+1}}\right], \qquad k>1,$$

so ist nach (62)

$$S^k(\Lambda, p, q, x) = O(e^{(1-\theta)x}) + O(x^{k+1}), \qquad k>1. \tag{69}$$

Setzt man für $n\geq\tau$ $\arg(1-\alpha_n) := \psi_n$, so wird $1-\alpha_n = \lambda_n^{1/2}e^{i\psi_n}$, $n\geq\tau$.

Mit dieser Schreibweise ergibt sich aus der Definition von $S^{k-1}(\Lambda, p, q, x)$:

$$R^{k-1}(\Lambda, p, q, x) = 2\pi\Gamma(k)e^x \sum_{n\geq\tau} \frac{K_n(p,q)}{\beta_n\lambda_n^{k/2}} \sin(\beta_n x + \psi_n k) + S^{k-1}(\Lambda, p, q, x), \qquad k>2. \tag{70}$$

Aus (38) und der Tatsache, dass die Folge λ_j strikt monoton wachsend ist, folgert man die Existenz einer reellen Zahl $k_0>4$, sodass für alle $k\geq k_0$ gilt

$$\Gamma(k)\left[\frac{|K_\tau(p,q)|}{\beta_\tau\lambda_\tau^{k/2}} - \sum_{m\geq\tau+1} \frac{|K_m(p,q)|}{\beta_m\lambda_m^{k/2}}\right] := \gamma_k > 0. \tag{71}$$

Nach (69) gibt es zu jedem k ein $x_0 = x_0(k)$, sodass die Abschätzung

$$|S^k(\Lambda, p, q, x)| \leq \pi\gamma_k e^x \quad \text{für alle} \quad x\geq x_0 \tag{72}$$

erfüllt ist. Für $x_\nu = x_\nu(k) := (\pi/2 + \nu\pi - \psi_\tau k)/\beta_\tau$ ist $\sin(\beta_\tau x_\nu + \psi_\tau k) = (-1)^\nu$, $\nu = 0, 1, \ldots$ und aus (70), (71) und (72) folgt für $k\geq h_0$

$$R^{k-1}(\Lambda, p, q, x_\nu)\begin{cases} \leq -\pi\gamma_k e^{x_\nu}, \text{ für alle } \nu \text{ mit } (-1)^\nu K_\tau(p,q)<0, & x_\nu\geq x_0. \\ \geq \pi\gamma_k e^{x_\nu}, \text{ für alle } \nu \text{ mit } (-1)^\nu K_\tau(p,q)>0, & x_\nu\geq x_0. \end{cases} \tag{73}$$

Das bedeutet, dass $R^k(\Lambda, p, q, x)$, $k\geq k_0-1$, das Vorzeichen wechselt auf jedem x-Intervall $x_0\leq x_\nu\leq x\leq x_{\nu+1}$ der Länge π/β_τ. Somit beweist (73) sowohl (15) als auch (17) für $k\geq k_0-1$.

Genau wie in [16] folgert man mit der dort gegebenen Verallgemeinerung des Satzes von Rolle aus (73) und (28) die Gültigkeit von (17) für alle $k \geq 0$, und auch (15) ergibt sich für alle $k \geq 0$ aus (73) unter Beachtung von (29).

(xii) *Vorbereitungen zum Beweis von* (16). Aus Satz 2 lassen sich die Hauptteile von $G^k(\Lambda, p, q, s)$ in den Polen $s \in P$ bestimmen. Insbesondere ersieht man:

$$\left.\begin{array}{l} G^k(\Lambda, p, q, s) \text{ ist analytisch für } \sigma > 0,\ k \geq 0, \text{ bis auf einfache Pole bei} \\ s_n^{\pm} := 1 \pm \alpha_n, \text{ mit Residuen } v_{nk}^{\pm} = \pi\Gamma(k+1)K_n(p, q)/(\pm\alpha_n)(1 \pm \alpha_n)^{k+1}, \\ \text{für } n = 0, 1, \ldots, s_n^{\pm} \neq 1. \\ \text{Falls 1 Eigenwert ist, hat } G^k(\Lambda, p, q, s) \text{ zudem einen doppelten} \\ \text{und einen einfachen Pol bei } s = 1 \text{ mit den Hauptteilen} \\ 2\pi\Gamma(k+1)K^*(p, q)/(s-1)^2, \text{ respektive } -2\pi\Gamma(k+2)K^*(p, q)/(s-1). \end{array}\right\} \quad (74)$$

Man definiert

$$H^k(\Lambda, p, s) := \int_0^\infty R^k(\Lambda, p, p, x)e^{-xs}\,dx, \qquad \sigma > 3/2, \qquad k \geq 0. \tag{75}$$

Vorerst für $\sigma > 2$ ist dann

$$H^k(\Lambda, p, s) = G^k(\Lambda, p, p, s) - \int_0^\infty Q^k(\Lambda, p, p, x)e^{-xs}\,dx, \qquad k \geq 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung den expliziten Ausdruck (6) für $Q^k(\Lambda, p, p, x)$ ein und führt die Integration durch, so ergibt sich zusammen mit (74):

$$\begin{array}{l} H^k(\Lambda, p, s),\ k \geq 0, \text{ ist analytisch für } \sigma > 1 - \theta,\ (0 < \theta := \min_{n<\tau} \alpha_n \leq 1), \\ \text{bis auf einfache Pole bei } s_n^{\pm} := 1 \pm \alpha_n \text{ mit Residuen } v_{nk}^{\pm} = \pi\Gamma(k+1) \times \\ K_n(p, p)/(\pm\alpha_n)(1 \pm \alpha_n)^{k+1} \text{ für alle } n \geq \tau. \end{array} \tag{76}$$

Als weitere Vorbereitung zum Beweis von (16) wählt man eine beliebige ganze Zahl $M > 0$ und betrachtet die Funktionen

$$V(x) := 2\cos^2(x/2) = 1 + \cos x = 1 + \tfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \qquad W(x) := \prod_{j=\tau}^{\tau+M} V(\beta_j x).$$

Die Funktion $W(x)$ ist von der Form $W(x) := \sum_{j=0}^{Q} v_j(e^{iw_j} + e^{-iw_j})$. Dabei ist $v_j = (1/2)^\nu$, $\nu \geq 0$, ν ganz, also $v_j > 0$, $j = 0, 1, \ldots, Q$ und w_j durchläuft die $Q := (3^{M+1} + 1)/2$ Zahlen $r_0\beta_\tau + r_1\beta_{\tau+1} + \cdots + r_M\beta_{\tau+M}$, $r_j = 0$ oder ± 1, wobei der erste von 0 verschiedene Term der Folge $r_0, r_1, \ldots, r_M$ jeweils gleich $+1$ ist.

Die w_j seien so numeriert, dass $w_j = \beta_{\tau+j}$ ist, $j = 0, 1, \ldots, M$ und $w_Q = 0$. Dann ist $v_j = 1/2$ für $j = 0, 1, \ldots, M$ und

$$W(x) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{M} \{e^{i\beta_{\tau+j}x} + e^{-i\beta_{\tau+j}x}\} + \sum_{j=M+1}^{Q-1} v_j \{e^{iw_j x} + e^{-iw_j x}\},$$

$$\text{mit} \quad w_j \neq 0, \quad j = M+1, M+2, \ldots, Q-1. \tag{77}$$

(xiii) *Beweis von* (16). Man will zeigen, dass unter der Annahme

$$R^k(\Lambda, p, p, x) = O(e^{(1+\varepsilon)x}), \qquad k \geq 0, \quad \text{für jedes} \quad \varepsilon > 0, \tag{78}$$

gilt

$$\liminf_{x \to \infty} R^k(\Lambda, p, p, x)/e^x = -\infty, \qquad 0 \leq k < 1. \tag{79}$$

Sei im ganzen Abschnitt (xiii) $0 \leq k < 1$. Mit der unter (xii) betrachteten Funktion W definiert man

$$L = L(\Lambda, p, k) := \lim_{\sigma \downarrow 1} (\sigma - 1) \int_0^\infty e^{-\sigma x} R^k(\Lambda, p, p, x) W(x)\, dx.$$

Man wird folgende Ungleichungen herleiten:

$$\liminf_{x \to \infty} R^k(\Lambda, p, p, x)/e^x \leq L \leq -\pi \Gamma(k+1) c_2 \sum_{j=\tau}^{\tau+M} K_j(p, p)/\beta_j \lambda_j^{(k+1)/2},$$

$$c_2 \text{ positiv und unabhängig von } M. \tag{80}$$

Für $n \geq \tau$ ist $\beta_n = (\lambda_n - 1)^{1/2} \sim \lambda_n^{1/2}$, $n \to \infty$, und nach [10, Seite 408] ist die Konvergenzabszisse der Dirichletreihe $\sum_{n \geq 1} K_n(p, p)/\lambda_n^s$ gleich 3/2. Somit geht die Summe auf der rechten Seite von (80) gegen ∞ für $k < 1$ und $M \to \infty$. Da M eine beliebige positive ganze Zahl war, ist mit (80) auch (79) bewiesen. Das bedeutet (78) impliziert (79), was zu zeigen war. Die erste Ungleichung in (80) ist eine Folge der offensichtlichen Tatsache, dass $W(x) \geq 0$ ist für reelles x. Beachtet man nämlich noch, dass für beliebiges festes ξ, $\xi > 0$, gilt

$$\left|(\sigma - 1) \int_0^\xi e^{-\sigma x} R^k(\Lambda, p, p, x) W(x)\, dx\right|$$

$$\leq (\sigma - 1)\xi \max_{0 \leq x \leq \xi} |e^{-\sigma x} R^k(\Lambda, p, p, x) W(x)| \to 0, \qquad \sigma \downarrow 1,$$

so erhält man

$$L \geq \inf_{x \geq \xi} \frac{R^k(\Lambda, p, p, x)}{e^x} \lim_{\sigma \downarrow 1} (\sigma - 1) \int_{\xi}^{\infty} e^{-(\sigma-1)x} W(x)\, dx. \tag{81}$$

Aus der Darstellung (77) von $W(x)$ folgt aber, dass für jedes feste ξ der in (81) auftretende Limes gleich 1 ist. Da ξ beliebig positiv war, ist damit die erste Ungleichung unter (80) bewiesen.

Die andere Behauptung in (80) verifiziert man, indem man sich überlegt, dass mit (77) und der Definition (75) von $H^k(\Lambda, p, s)$ gilt

$$L = \sum_{j=0}^{M} \tfrac{1}{2} \lim_{\sigma \downarrow 1} (\sigma - 1)\{H^k(\Lambda, p, \sigma - \alpha_{j+\tau}) + H^k(\Lambda, p, \sigma + \alpha_{j+\tau})\}$$
$$+ \sum_{j=M+1}^{Q-1} v_j \lim_{\sigma \downarrow 1} (\sigma - 1)\{H^k(\Lambda, p, \sigma - iw_j) + H^k(\Lambda, p, \sigma + iw_j)\}.$$

Beachtet man (76), so ergibt sich daraus

$$L = \frac{\pi}{2} \Gamma(k+1) \sum_{j=\tau}^{\tau+M} \frac{K_j(p, p)}{\alpha_j} \{-1/(1-\alpha_j)^{k+1} + 1/(1+\alpha_j)^{k+1}\}$$
$$+ \frac{\pi}{2} \Gamma(k+1) \sum_{w_j = \beta_m} v_j \frac{K_m(p, p)}{\alpha_m} \{-1/(1-\alpha_m)^{k+1} + 1/(1+\alpha_m)^{k+1}\}. \tag{82}$$

Dabei bezeichnet $\sum_{w_j=\beta_m}$ die Summe über alle j aus der Menge $\{M+1, M+2, \ldots, Q\}$, für die $w_j = \beta_m$ ist, für irgend ein $m \geq \tau$. Mit der unter (xi) eingeführten Bezeichnung $\arg(1-\alpha_n) := \psi_n$, $n \geq \tau$, wird (82) zu

$$L = \pi \Gamma(k+1) \sum_{j=\tau}^{\tau+M} \frac{K_j(p, p)}{\beta_j \lambda_j^{(k+1)/2}} \sin((k+1)\psi_j)$$
$$+ \pi \Gamma(k+1) \sum_{w_j = \beta_m} v_j \frac{K_m(p, p)}{\beta_m \lambda_m^{(k+1)/2}} \sin((k+1)\psi_m). \tag{83}$$

Da $\beta_j \geq \beta_\tau > 0$ ist für $j \geq \tau$ gilt $0 > \psi_\tau := \arg(1-\alpha_\tau) \geq \arg(1-\alpha_j) := \psi_j \geq -\pi/2$, $j \geq \tau$, also wegen $0 \leq k < 1$:

$$0 > \psi_\tau(k+1) \geq \psi_j(k+1) \geq -\frac{\pi}{2}(k+1) > -\pi, \qquad j \geq \tau.$$

Somit existiert ein nur von k abhängiges $c_2>0$, sodass gilt

$$0>-c_2>\sin((k+1)\psi_j), \text{ gleichmässig in } j\geq\tau.$$

Unter (xii) hat man sich überlegt, dass alle $v_j>0$ sind, $j=0,1,\ldots,Q$. Also, da auch die $K_j(p,p)=|\phi_j(p)|^2>0$ sind, folgt aus (83):

$$L\leq-\pi\Gamma(k+1)c_2\sum_{j=\tau}^{\tau+M}\frac{K_j(p,p)}{\beta_j\lambda_j^{(k+1)/2}}.$$

Das beweist (80) und damit (16).

(xiv) *Beweis von* (19) *und Satz* 6. Ist $f(s)$ eine analytische Funktion von s, so setzt man $(d/ds)^m f(s):=f^{(m)}(s)$, $m=0,1,\ldots$. Für $s\notin P$, $n=0,1,\ldots$ und $m\geq 0$, m ganz, definiert man $\gamma(s,n,m):=\{1/(s^2-(\alpha_n+1)^2)(s^2-(\alpha_n-1)^2)\}^{(m)}$. Dann ist für $s\notin P$:

$$\gamma(s,n,m)=\sum_{\eta=0}^{m}\sum_{\mu=0}^{\eta}\sum_{\nu=0}^{m-\eta}\binom{m}{\eta}\binom{\eta}{\mu}\binom{m-\eta}{\nu}\left\{\frac{1}{s-\alpha_n-1}\right\}^{(\mu)}\left\{\frac{1}{s+\alpha_n+1}\right\}^{(\eta-\mu)}$$
$$\left\{\frac{1}{s+\alpha_n-1}\right\}^{(\nu)}\left\{\frac{1}{s-\alpha_n+1}\right\}^{(m-\eta-\nu)}. \tag{84}$$

Unter Beachtung von Satz 2 erhält man

$$|(d/ds)^m G^0(\Lambda,p,q,s)|^2=(8\pi)^2\sum_{n,j=0}^{\infty}K_n(p,q)K_j(p,q)\gamma(s,n,m)\bar{\gamma}(s,j,m),$$
$$s\notin P. \tag{85}$$

Für festes $s\notin P$ ist $\gamma(s,n,m)=O(1/|\alpha_n|^4)$, $m\geq 0$, gleichmässig in $n=0,1,\ldots$, sodass nach (38) die Doppelreihe unter (85) gleichmässig konvergiert in $(p,q)\in\mathscr{F}\times\mathscr{F}$. Mit der Orthogonalitätsrelation (1) folgt deshalb

$$\int_{\mathscr{F}}|(d/ds)^m G^0(\Lambda,p,q,s)|^2\,d\omega_q=(8\pi)^2\sum_{n=0}^{\infty}K_n(p,p)\,|\gamma(s,n,m)|^2,\qquad s\notin P. \tag{86}$$

Sei $0<\xi<1$. Aus Formel (84) ersieht man, dass für beliebige $\delta>0$, $\kappa>0$ und

gleichmässig in σ mit $|\sigma \pm 1| \geq \kappa$ gilt

$$|\gamma(s, n, m)|^2 = \begin{cases} O(\beta_n^{-3-\delta}\,|t|^{-1+\delta}\,|t|^{-2\xi(m+2)}), \text{ gleichmässig in } n \text{ mit} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \beta_n \leq |t| - |t|^{\xi},\ \beta_n \geq |t| + |t|^{\xi}. \\ O(|t|^{-4}), \text{ gleichmässig in allen übrigen } n. \end{cases}$$

Man setzt diese Abschätzungen in (86) ein und wendet (38), sowie (4) an. Setzt man dann $\xi = 1/(2m+5)$, so ist $2\xi(m+2) = 1 - \xi$. Wählt man schliesslich bei gegebenem ω, $\omega > 1/(4m+10) = \xi/2$, den Parameter δ derart, dass $0 < \delta < 2\omega - \xi$ ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{F}} |(d/ds)^m G^0(\Lambda, p, q, s)|^2\, d\omega_q \\ &= O(|t|^{-1+\delta-2\xi(m+2)}) + O(|t|^{-4}) \sum_{|t|-|t|^{\xi} \leq \beta_n \leq |t|+|t|^{\xi}} K_n(p, p) \\ &= O(|t|^{-1+\delta-2\xi(m+2)}) + O(|t|^{-2+\xi}) = O(|t|^{-2+\delta+\xi}) \\ &= O(|t|^{-2+2\omega}), \text{ gleichmässig in } \sigma \text{ mit } |\sigma \pm 1| \geq \kappa. \end{aligned}$$

Damit ist auch (19) bewiesen. Durch wiederholte partielle Integration lässt sich mit Hilfe von (19) für fast alle $q \in \mathcal{F}$ zeigen:

$$\int_0^U G^0(\Lambda, p, q, \sigma + it) e^{ity}\, dt = O(e^{\varepsilon y}), \quad \begin{array}{l} \text{für beliebig vorgegebenes } \varepsilon > 0 \\ \text{und für feste } \xi > 1,\ \sigma > 1,\ \sigma \notin P, \\ \text{gleichmässig in } 0 \leq U \leq 2e^{2\xi y}. \end{array}$$

Mit dieser Formel und (19) sind die Voraussetzungen des nachfolgenden Hilfssatzes verifiziert für die Wahl $A(x) := N^0(\Lambda, p, q, x)$, $f(s) := G^0(\Lambda, p, q, s)$, $\sigma_0 = \beta_1 := 2$, $\gamma > 1$, $\gamma \notin P$, $s_j := 1 + \alpha_j$, $j = 0, 1, \ldots, \tau$, $w(y) := e^{\varepsilon y}$, ε beliebig positiv. Beachtet man (74) und die Definition (6) von $Q^0(\Lambda, p, q, x)$, so ergibt sich Satz 6 für $k = 0$ aus dem Hilfssatz und damit für $k > 0$ aus (34).

V. Ein Hilfssatz

Der Satz von Wiener–Ikehara gibt das asymptotische Wachstum einer reellwertigen, nicht fallenden Funktion an, unter der Voraussetzung, dass deren Laplacetransformierte in der Konvergenzabszisse σ_0 einen einfachen Pol mit

bekanntem Residuum besitzt und sonst analytisch ist in der s-Halbebene $\operatorname{Re} s \geq \sigma_0$.

Oft ist aber von der Laplacetransformierten mehr bekannt in dem Sinne, dass sie über σ_0 hinaus meromorph fortgesetzt werden kann, eventuell mit mehreren, auch mehrfachen Polen. Im folgenden soll eine Verallgemeinerung des Satzes von Wiener-Ikehara bewiesen werden, die sich auf diese Situation bezieht.

Hilfssatz. Sei die Funktion $A(x)$ definiert für $x \geq 0$, nicht negativ, monoton wachsend und das Integral $\int_0^\infty A(x)e^{-xs}\,dx$, $s := \sigma + it$, konvergiere für $\sigma > \sigma_0$ gegen die Funktion $f(s)$.

Sei $f(s)$ analytisch für $\sigma \geq \gamma$, bis auf (a_j+1)-fache Pole bei $s = s_j$, $s_j := \beta_j + i\gamma_j$, mit den Hauptteilen $v_j/(s-s_j)^{a_j+1}$, $a_j \geq 0$, a_j ganz, $j = 1, 2, \ldots, q$ und $\gamma < \beta_q \leq \beta_{q-1} \leq \cdots \leq \beta_1 = \sigma_0$. Sei

$$R(x) := A(x) - \sum_{j=1}^{q} \frac{v_j}{a_j!} x^{a_j} e^{s_j x}.$$

Ist mit einer positiven, nicht fallenden Funktion w und für beliebiges festes $\xi > \beta_1 - \gamma$

(a) $f(\sigma + it) = O(1)$, gleichmässig in $\sigma \in [\gamma, \beta_1 + 1]$,

(b) $\displaystyle\int_0^U f(\gamma + it)e^{ity}\,dt = O(w(y))$ für $y \to \infty$, gleichmässig in $0 \leq U \leq 2e^{2\xi y}$,

so lässt sich folgern

$$R(x) = O(e^{\gamma x} w(x)). \tag{87}$$

Bemerkungen. (i) Weil A monoton wachsend vorausgesetzt wurde, ist $\sigma_0 = \beta_1$.

(ii) Da $f(s)$ reell ist für reelles $s > \sigma_0$, folgt $f(s) = \bar{f}(\bar{s})$ für alle $s \neq s_j$ mit $\operatorname{Re} s \geq \gamma$. Dies impliziert, dass die Summe in der Definition von $R(x)$ – und damit $R(x)$ selbst – reell ist.

(iii) Die in der Voraussetzung (b) auftretende Funktion w wird im allgemeinen von der Grössenordnung der oberen Grenze des zu betrachtenden Integrals abhängen und die Aussage des Satzes kann unter Umständen besser werden, je kleiner diese Grössenordnung gewählt werden darf. Ersetzt man die beim Beweis auftretende Hilfsfunktion

$$h_1(x) := \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

durch die n-fache Faltung

$$h_n(x) := (h_1 * h_1 * \cdots * h_1)(x) \ (n \text{ Faktoren}),$$

$$(h_1 * h_1)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} h_1(v) h_1(x-v)\, dv,$$

so ist $h_n(t/2n\lambda) = O(1)$, gleichmässig in $t \in \mathbf{R}$ für alle $\lambda > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ und es lässt sich zeigen, dass gilt:

Zu beliebig festem $\xi > \beta_1 - \gamma$ existiert ein ganzes $j \geq 1$, sodass die Bedingungen

(a) $f(s) = O(1)$, gleichmässig in $\sigma \in [\gamma, \beta_1 + 1]$,

(b) $\displaystyle\int_0^{2e^{\xi y}} f(\gamma + it) h_j(t/2je^{\xi y}) e^{ity}\, dt = O(w(y))$ für $y \to \infty$,

implizieren

$$R(x) = O(e^{\gamma x} w(x)).$$

Das bedeutet, die Grössenordnung der oberen Grenze des unter (b) zu betrachtenden Integrals kann in dieser Formulierung des Satzes halbiert werden. Die mit dem Hilfssatz hergeleitete Aussage (18) kann allerdings auf Grund dieser Feststellung nicht verbessert werden.

(iv) Indem man das Integral der Funktion A betrachtet und durch Anwendung der Methode der endlichen Differenzen, lässt sich aus dem Hilfssatz beweisen, dass allein die Voraussetzung

(a) $f(\sigma + it) = O(1)$, gleichmässig in $\sigma \in [\gamma, \beta_1 + 1]$,

impliziert

$$R(x) = O(e^{(\beta_1 - \gamma)x/2} x^{(\nu+1)/2}), \qquad \nu := \max_{\beta_j = \beta_1} a_j.$$

Beweis des Hilfssatzes. Abschätzung (87) soll hergeleitet werden durch Uebertragung eines Beweises von Landau–Bochner für den Satz von Wiener–Ikehara (man siehe dazu zum Beispiel [3]).

Man setzt $R^*(x) := R(x) e^{-\gamma x}$. In einem ersten Schritt will man zeigen, dass gilt

$$R^*(x) \leq c_3 w(x), \qquad x \geq 1,\ c_3 \text{ unabhängig von } x. \tag{88}$$

Setzt man

$$g(s) := f(s) - \sum_{j=1}^{q} v_j/(s-s_j)^{a_j+1},$$

so ist $g(s)$ analytisch für $\sigma \geq \gamma$ und

$$g(s) = \int_0^\infty R^*(x) e^{-x(s-\gamma)}\, dx, \qquad \sigma > \beta_1. \tag{89}$$

Sei $\eta > \beta_1$ und $\mu := \eta - \gamma$. Mit der Formel

$$\frac{1}{2}\int_{-2\lambda}^{2\lambda} \{1 - |t|/2\lambda\} e^{itv}\, dt = \frac{\sin^2(\lambda v)}{\lambda v^2}, \qquad \lambda > 0,\ v \text{ reell},$$

erhält man für $\lambda \geq 1$, $y \geq 1$ die Gleichung

$$\frac{1}{2}\int_{-2\lambda}^{2\lambda} g(\eta + it)\{1 - |t|/2\lambda\} e^{(it+\mu)y}\, dt = \int_0^\infty R^*(x) e^{\mu(y-x)} \frac{\sin^2(\lambda(y-x))}{\lambda(y-x)^2}\, dx, \tag{90}$$

indem man auf der linken Seite die Beziehung (89) einsetzt und sich überlegt, dass die Integrationsreihenfolge vertauscht werden darf. Man setzt $\lambda = \lambda(y) := e^{2\xi y}$, mit dem in der Voraussetzung b) auftretenden, festen $\xi > \beta_1 - \gamma > 0$. Für $y \geq 1$ ist dann $\lambda > 1$. Sei

$$T(y) := \operatorname{Im} \int_\eta^{\eta+2\lambda i} g(s)\left\{1 - \frac{s-\eta}{2\lambda i}\right\} e^{(s-\gamma)y}\, ds. \tag{91}$$

Wegen $g(s) = \bar{g}(\bar{s})$ für $\sigma \geq \gamma$, ist die linke Seite von (90) gleich $T(y)$ und indem man auf der rechten Seite $u := \lambda(y-x)$ substituiert, ergibt sich

$$T(y) = \int_{-\infty}^{\lambda y} R^*(y - u/\lambda) e^{\mu u/\lambda} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du. \tag{92}$$

Definiert man

$$P(x) := A(x) e^{-\gamma x} - R^*(x) = \sum_{j=1}^{q} \frac{v_j}{a_j!} x^{a_j} e^{(s_j-\gamma)x}, \tag{93}$$

so erhält man aus (92)

$$T(y)+\int_{-\infty}^{\lambda y} P(y-u/\lambda)e^{\mu u/\lambda}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du = \int_{-\infty}^{\lambda y} A(y-u/\lambda)e^{-\gamma y+\eta u/\lambda}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du. \quad (94)$$

Nun lassen sich die Voraussetzungen über A ausnützen. Wegen $A(x)\geq 0$, $x\geq 0$, ist der ganze Integrand auf der rechten Seite von (94) nicht negativ. Da zudem A monoton wachsend ist, folgt aus (94) für beliebige a, $1\leq a\leq \lambda y$:

$$T(y)+\int_{-\infty}^{\lambda y} P(y-u/\lambda)e^{\mu u/\lambda}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du \geq \int_{-a}^{a} A(y-a/\lambda)e^{-\gamma y+\eta u/\lambda}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du. \quad (95)$$

Man wählt $a=a(y):=\lambda(y)^{1/2}=e^{\xi y}$. Für $y\geq 1$ ist dann $1\leq a\leq \lambda y$ und durch beidseitige Subtraktion des Terms

$$\int_{-a}^{a} P(y-1/a)e^{\eta u/a^2-\gamma/a}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$$

erhält man aus (95)

$$R^*(y-1/a)\leq \frac{1}{S_1(y)}\{T+S_2+S_3\}(y), \quad (96)$$

mit

$$S_1(y):=e^{-\gamma/a}\int_{-a}^{a} e^{\eta u/a^2}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du>0, \qquad a(y)>0,$$

$$S_2(y):=\int_{-a}^{a}\{P(y-u/a^2)-e^{\gamma(u/a^2-1/a)}P(y-1/a)\}e^{\mu u/a^2}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du,$$

$$S_3(y):=\left\{\int_{-\infty}^{-a}+\int_{a}^{a^2 y}\right\}P(y-u/a^2)e^{\mu u/a^2}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du.$$

Man wählt $\eta>\beta_1$ so, dass $\beta_1-\gamma<\eta-\gamma=\mu<\xi$ ist. Die rechte Seite von (96) soll nun in Funktion von y nach oben abgeschätzt werden. Die Funktionen $S_j(y)$, $j=1,2,3$ sind unabhängig von $f(s)$ definiert. Zu ihrer Abschätzung macht man somit keinen Gebrauch von den Voraussetzungen über $f(s)$. Offenbar ist

$$\lim_{y\to\infty} S_1(y)=\pi. \quad (97)$$

Mit der aus der Definition (93) ersichtlichen Abschätzung

$$P(y-u/a^2)-e^{\gamma(u/a^2\pm 1/a)}P(y\pm 1/a)=O(e^{(\beta_1-\gamma)y}y^\nu/a)$$
$$=O(y^\nu e^{(\beta_1-\gamma-\xi)y}) \quad \text{für} \quad -a\le u\le a, \quad \nu:=\max_{\beta_j=\beta_1} a_j, \tag{98}$$

folgt wegen $\beta_1-\gamma<\xi$:

$$S_2(y)=o(1) \quad \text{für} \quad y\to\infty. \tag{99}$$

Es ist auch $\beta_1-\gamma<\mu<\xi$ und nach (93) $P(x)=O(x^\nu e^{(\beta_1-\gamma)x})=O(e^{\mu x})$, gleichmässig in $0\le x<\infty$. Also gilt $S_3(y)=O(e^{\mu y}/a)=O(e^{(\mu-\xi)y})$ und somit

$$S_3(y)=o(1) \quad \text{für} \quad y\to\infty. \tag{100}$$

Da $g(s)$ analytisch ist für $\sigma\ge\gamma$, lässt sich die unter (91) definierte Funktion $T(y)$ folgendermassen darstellen:

$$T(y)=\operatorname{Im}\int_{W_1+W_2+W_3} g(s)\left\{1-\frac{s-\eta}{2\lambda i}\right\}e^{(s-\gamma)y}\,ds,$$

mit $W_1:=\{s\mid \eta\ge s\ge\gamma\}$, $W_2:=\{s=\gamma+it\mid 0\le t\le 2\lambda\}$, $W_3:=\{s=\sigma+2\lambda i\mid \gamma\le\sigma\le\eta\}$, $\lambda=\lambda(y):=e^{2\xi y}$. Auf W_1 ist s reell, also $g(s)e^{(s-\gamma)y}$ reell und $\operatorname{Im}\{1-(s-\eta)/2\lambda i\}=O(1/\lambda)$. Auf W_3 ist $\{1-(s-\eta)/2\lambda i\}=O(1/\lambda)$. Zudem ist mit $f(s)$ – wie vorausgesetzt unter (a) – auch $g(s)=O(1)$, gleichmässig in $\sigma\in[\gamma,\beta_1+1]$. Somit sind die Beiträge der Integrale über W_1 und W_3 je gleich $O(e^{\mu y}/\lambda)=O(e^{(\mu-\xi)y})=o(1)$ für $y\to\infty$. Weiter ist

$$\operatorname{Im}\int_{W_2} g(s)\left\{1-\frac{s-\eta}{2\lambda i}\right\}e^{(s-\gamma)y}\,ds=\operatorname{Re}\int_0^{2\lambda} g(\gamma+it)\left\{1-\frac{-\mu+it}{2\lambda i}\right\}e^{ity}\,dt$$
$$=O(w(y))+O(1).$$

Die O-Abschätzung ergibt sich durch partielle Integration unter Beachtung der Voraussetzung (b) und der Definition von $g(s)$. Damit wird, da w nicht fallend vorausgesetzt ist

$$T(y)=O(w(y)), \tag{101}$$

und (97), sowie (99) bis (101), eingesetzt in (96) ergeben die zu verifizierende

Beziehung (88). Der Hilfssatz ist bewiesen, wenn noch gezeigt wird

$$R^*(x) \geq O(w(x)). \tag{102}$$

Sei wie oben $\eta > \beta_1$ so, dass $\beta_1 - \gamma < \mu := \eta - \gamma < \xi$ ist. Es kann $w(y) = O(e^{\mu y})$ angenommen werden, da andernfalls nichts zu beweisen ist. Aus (92) folgt, wenn man für $y \geq 1$ wieder setzt $a = a(y) := \lambda(y)^{1/2} = e^{\xi y}$ und (88) beachtet

$$\begin{aligned} T(y) &\leq c_3 \left\{ \int_{-\infty}^{-a} + \int_{a}^{a^2 y} \right\} w(y - u/a^2) e^{\mu u/a^2} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du \\ &\quad + \int_{-a}^{a} R^*(y - u/a^2) e^{\mu u/a^2} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du \\ &= O(e^{\mu y}/a) + \int_{-a}^{a} R^*(y - u/a^2) e^{\mu u/a^2} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du. \end{aligned}$$

Wegen $R^*(x) = A(x) e^{-\gamma x} - P(x)$ ist also mit (101) und $O(e^{\mu y}/a) = O(e^{(\mu - \xi) y}) = o(1)$ für $y \to \infty$:

$$\begin{aligned} O(w(y)) + \int_{-a}^{a} P(y - u/a^2) e^{\mu u/a^2} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du &\leq \int_{-a}^{a} A(y - u/a^2) e^{-\gamma y + \eta u/a^2} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du \\ &\leq \int_{-a}^{a} A(y + 1/a) e^{-\gamma y + \eta u/a^2} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du. \end{aligned} \tag{103}$$

Die letzte Ungleichung ist eine Folge davon, dass A nicht negativ und monoton wachsend vorausgesetzt wurde. Auf beiden Seiten der Ungleichung (103) subtrahiert man den Term

$$\int_{-a}^{a} P(y + 1/a) e^{\eta u/a^2 + \gamma/a} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du.$$

Beachtet man (93), sowie (97) und die Tatsache, dass wegen (98) gilt

$$\int_{-a}^{a} \{P(y - u/a^2) - e^{\gamma(u/a^2 + 1/a)} P(y + 1/a)\} e^{\mu u/a^2} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du = o(1) \quad \text{für} \quad y \to \infty,$$

so erhält man die Abschätzung (102). Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

LITERATURANGABEN

[1] AVACUMOVIĆ, G. V., *Ueber die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemann'schen Manigfaltigkeiten.* Math. Zeit. *65* (1956), 327–344.
[2] CHANDRASEKHARAN, K. und MINAKSHISUNDARAM, S., *Typical Means.* (Oxford 1952).
[3] CHANDRASEKHARAN, K., Introduction to Analytic Number Theory. Springer 1968.
[4] ——, Arithmetical functions. Springer 1970.
[5] CHANDRASEKHARAN, K. und NARASIMHAN, R., *Hecke's functional equation and arithmetical identities.* Ann. of Math. *74* (1961), 1–23.
[6] ——, *Hecke's functional equation and the average order of arithmetical functions.* Acta Arithm. *6* (1961), 487–503.
[7] ——, *Functional equations with multiple gamma factors and the average order of arithmetical functions.* Ann. of Math., *76* (1962), 93–136.
[8] ——, *The approximate functional equation for a class of zeta-functions.* Math. Ann. *152* (1963), 30–64.
[9] COURANT, R., *Differential and Integral Calculus.* Vol. I, Blackie and Son, second edition.
[10] FRICKER, F., *Ein Gitterpunktproblem im dreidimensionalen hyperbolischen Raum.* Comment. Math. Helv. *43* (1968), 402–416.
[11] HÖRMANDER, L., *The spectral function of an elliptic operator.* Acta Math. *121* (1968), 193–218.
[12] HUBER, H., *Ueber eine Klasse automorpher Funktionen und ein Gitterpunktproblem in der hyperbolischen Ebene.* Comment. Math. Helv. *30* (1956), 20–62.
[13] ——, *Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen.* Math. Ann. *138* (1959), 1–26. *142* (1961), 385–398, *143* (1961), 463–464.
[14] MINAKSHISUNDARAM, S. und PLEIJEL, A., *Some properties of the Eigenfunctions of the Laplace-operator on Riemannian manifolds.* Canad. Journ. of Math. *1* (1949), 242–256.
[15] SELBERG, A., *On discontinous groups in higher dimensional symmetric spaces.* Contr. to function theory (Tata Institute, Bombay 1960), 147–164.
[16] STEINIG, J., *The changes of sign of certain arithmetical error-terms.* Comment. Math. Helv. *44* (1968), 385–401.
[17] THURNHEER, P., Une généralisation du théorème de Wiener–Ikehara. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 290 (1980), 499.
[18] ——, *Le terme de reste dans un problème de réseau hyperbolique.* C.R. Acad. Sc. Paris, t. 290 (1980), 581–583.
[19] TITCHMARSH, E. C., *The theory of functions.* Oxford University Press, 1932.

Eidgenössische Technische Hochschule,
Hg G 66.2
Rämistrasse 101
CH-8092 Zürich

Eingegangen den 21. August 1980