

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 56 (1981)  
  
**Artikel:** Sur les invariants d'homotopie rationnelle liés à la L.S. catégorie.  
**Autor:** Lemaire, J.-M. / Sigrist, Francois  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43233>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 31.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## **Sur les invariants d'homotopie rationnelle liés à la L.S. catégorie**

JEAN-MICHEL LEMAIRE ET FRANÇOIS SIGRIST

### **§0. Introduction**

Le but de cet article est de montrer l'utilité du modèle minimal homologique ("modèle de Quillen") dans la détermination de la catégorie de Lusternik–Schnirelmann rationnelle. Nous avons choisi un espace  $X$  pour lequel la détermination de  $\text{cat}(X)$  nécessite le calcul explicite d'un invariant de Hopf délicat (au sens de Hilton–Berstein). La simplicité du calcul à l'aide du modèle minimal homologique nous a paru convaincante, d'autant plus que les estimations classiques de  $\text{cat}(X)$  sont inopérantes pour l'espace en question.

Un résultat préalable, que le modèle minimal homologique fournit rapidement et facilement, est la détermination de la catégorie des espaces formels. Nous en prenons prétexte pour déployer simultanément les propriétés principales des espaces formels et une panoplie d'estimations de  $\text{cat}(X)$ , tant par défaut que par excès. Un contre-exemple récent [5] ne laisse qu'une conjecture en suspens: un espace de catégorie  $n$  est-il toujours un cône itéré  $n$  fois? L'équivalence de cette conjecture avec une propriété géométrique simple nous incline vers l'affirmative.

Ce travail est le fruit d'une longue collaboration, encouragée par le Troisième cycle romand de mathématiques, que nous tenons à remercier ici.

Pour faciliter la lecture, nous donnons ici un résumé télégraphique de ce travail.

- |                           |   |
|---------------------------|---|
| §1. Topologie algébrique. | Catégorie de Lusternik–Schnirelmann, définitions équivalentes. Estimations par défaut, contrôle de qualité.       |
| §2. Modèle de Quillen.    | Description et premières propriétés. Nouveaux invariants estimant $\text{cat}(X)$ par excès. Contrôle de qualité. |
| §3. Espaces formels.      | Description axiomatique. Etude des applications formalisables. Coïncidence des invariants.                        |
| §4. Exemple explicite.    |   |

## §1. Invariants

Nous supposerons dans cet article, avec les abus de langage traditionnels, que les espaces topologiques sont rationnels, CW et nilpotents sinon simplement connexes.

La catégorie de Lusternik–Schnirelmann d'un espace  $X$  est un invariant homotopique entier dont la définition est:

$$\text{cat}(X) \leq n \Leftrightarrow X \text{ est réunion de } n+1 \text{ ouverts contractiles dans } X.$$

En approche directe, la détermination de  $\text{cat}(X)$  est malaisée; quelques échantillons utiles cependant:

LEMME (1.1).  $\text{cat}(X) \leq 1 \Leftrightarrow X$  est un co- $H$ -espace

LEMME (1.2). Soit  $Cf$  le cône de  $f: X \rightarrow Y$ . Alors  $\text{cat}(Cf) \leq \text{cat}(Y) + 1$

LEMME (1.3). Si  $\text{cat}(X) \leq n$ , tout cup-produit de longueur  $n+1$  dans  $\tilde{H}^*(X)$  est nul.

Les progrès décisifs dans l'estimation de la catégorie de Lusternik–Schnirelmann s'appuient sur deux interprétations dues respectivement à G. Whitehead [17] et T. Ganea [6].

*Première interprétation.* Notons  $\Delta: X \rightarrow X^{n+1}$  la diagonale,  $i: T^n X \rightarrow X^{n+1}$  l'inclusion du bouquet garni, et (pour la suite)  $q: X^{n+1} \rightarrow X^{(n+1)}$  le quotient. Alors  $\text{cat}(X) \leq n \Leftrightarrow$  il existe  $\phi: X \rightarrow T^n X$  factorisant homotopiquement  $\Delta: i \circ \phi \simeq \Delta$ .

*Deuxième interprétation.* Considérons la construction de Milnor de  $B\Omega X$ , classifiant du  $H$ -espace  $\Omega X$ . Il en résulte une filtration de  $B\Omega X$  par ses espaces projectifs successifs:

$$\Sigma\Omega X = \Omega XP(1) \rightarrow \Omega XP(2) \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega XP(n) \rightarrow \cdots \rightarrow B\Omega X \simeq X.$$

Notons abusivement  $\gamma: \Omega XP(n) \rightarrow X$  la conversion de l'application  $\Omega XP(n) \rightarrow B\Omega X$  en fibration de base  $X$ . Pour la suite également désignons par  $\kappa: X \rightarrow C\gamma$  la cofibre de  $\gamma$ . Alors  $\text{cat}(X) \leq n \Leftrightarrow$  la fibration  $\gamma$  a une section.

Outre les références originales, le lecteur consultera avec profit un article de Gilbert [7], bien documenté, qui contient la démonstration de l'équivalence des deux interprétations ci-dessus; nous nous contenterons de signaler que cette

équivalence résulte de l'existence d'un carré

$$\begin{array}{ccc} \Omega XP(n) & \xrightarrow{\gamma} & X \\ \downarrow & & \downarrow \Delta \\ T^n X & \xrightarrow{i} & X^{n+1} \end{array}$$

cartésien à homotopie près (homotopy cartesian).

Avec les notations introduites, définissons maintenant:

$c(X)$  = "cup-length" de  $X$ :

$$c(X) \leq n \Leftrightarrow (q \circ \Delta)_* = 0.$$

$e(X)$  = longueur d'Eilenberg-Moore de  $X$ :

$$e(X) \leq n \Leftrightarrow \kappa_* = 0.$$

$w \text{ cat } (X)$  = catégorie faible de  $X$ :

$$w \text{ cat } (X) \leq n \Leftrightarrow q \circ \Delta \simeq *$$

$Gw \text{ cat } (X)$  = catégorie faible de Ganea de  $X$ :

$$Gw \text{ cat } (X) \leq n \Leftrightarrow \kappa \simeq *.$$

L'examen des définitions nous donne immédiatement la

**PROPOSITION (1.4).**

$$c(X) \leq \min_{e(X)} w \text{ cat } (X) \leq Gw \text{ cat } (X) \leq \text{cat } (X).$$

Ces différents invariants peuvent coïncider dans des cas de stabilité bien précis. Par exemple:

**LEMME (1.5).** Soit  $X$   $(r-1)$ -connexe de dimension  $\leq 2(k+1)r-2$ . Alors

$$c(X) \leq k \Rightarrow w \text{ cat } (X) \leq k$$

$$e(X) \leq k \Rightarrow Gw \text{ cat } (X) \leq k.$$



*Démonstration.*  $(q \circ \Delta)_* = 0$  équivaut à  $\Sigma(q \circ \Delta) \simeq *$ . C'est un résultat général d'homotopie rationnelle que nous démontrerons ci-après (Proposition 3.12). Dans ce cas particulier, il s'agit du résultat de Toomer [16]:  $c(X) = \text{conil}(\Sigma X)$ . Les restrictions dimensionnelles sont celles du théorème de suspension de Freudenthal, nous pouvons donc conclure que  $(q \circ \Delta) \simeq *$ . Pour la deuxième assertion, le raisonnement est identique.

**LEMME (1.6).** *Soit  $X$   $(r-1)$ -connexe de dimension  $\leq (k+2)r-2$ . Alors*

$$w \text{ cat}(X) \leq k \Rightarrow \text{cat}(X) \leq k$$

$$Gw \text{ cat}(X) \leq k \Rightarrow \text{cat}(X) \leq k.$$

*Démonstration.* La fibre homotopique commune à  $i: T^k X \rightarrow X^{k+1}$  et à  $\gamma: \Omega X P(k) \rightarrow X$  est le joint  $k$  fois itéré  $\Omega X * \Omega X * \cdots * \Omega X$ . Les hypothèses dimensionnelles sont celles du théorème de Blakers–Massey qui donne directement les deux assertions.

Les méthodes de détermination inductive de  $\text{cat}(X)$  font appel aux diverses notions d'invariant de Hopf. De l'article fondamental de Berstein–Hilton [2], nous extrayons le résultat qui nous sera utile par la suite.

**THÉORÈME (1.7).** *Soit  $Y$   $(r-1)$ -connexe de dimension  $\leq (k+1)r-2$  et  $f: S^N \rightarrow Y$  avec  $N \geq r+2$ . Notons  $i: Y \rightarrow X = Cf$ . Alors*

- (a)  $\text{cat } Y \leq k$ . En outre  $\phi: Y \rightarrow T^k Y$  factorisant  $\Delta$  est unique à homotopie près.
- (b)  $\text{cat } X \leq k \Leftrightarrow T^k(i) \circ \phi \circ f \simeq *: S^N \rightarrow T^k X$ .

## §2. Le modèle de Quillen

(2.1) Soit  $X$  un espace simplement connexe. Le modèle de Quillen  $L_X$  de  $X$  est une  $\mathbf{Q}$ -algèbre de Lie différentielle graduée minimale [1] qui détermine le type d'homotopie rationnelle de  $X$  au sens suivant:  $L_X$  est défini à isomorphisme près, et tout choix de foncteur  $X \rightsquigarrow L_X$  est une équivalence de catégories d'homotopie entre les espaces 1-connexes rationnels et les  $\mathbf{Q}$ -algèbres graduées connexes minimales.

La description de  $L_X$  peut se résumer ainsi: (cf. [11])  $L_X$  est l'algèbre de Lie libre  $\mathbf{L}(s^{-1}\tilde{H}(X))$  sur la désuspension de l'homologie rationnelle réduite, munie d'une différentielle dont la partie quadratique (restreinte aux générateurs) est à désuspension près la diagonale réduite de  $\tilde{H}$ . En d'autres termes,  $L_X$  est isomorphe comme algèbre de Lie aux primitifs de la cobar-construction  $P\Omega H(X)$ ,

et la différentielle de  $L_X$  est de la forme  $d + \delta$ , où  $d$  est la différentielle de  $P\Omega H(X)$  et  $\delta$  une dérivation qui augmente la filtration de Lie de  $+2$ .

Rappelons enfin la propriété fondamentale de  $L_X$ : il existe un isomorphisme naturel d'algèbres de Lie:  $H(L_X) \cong \pi(X) = \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$  où  $\pi(X)$  est munie du crochet de Samelson.

L'existence de cet isomorphisme résulte de l'équivalence de catégories mentionnée ci-dessus.

Une autre conséquence de cette équivalence de catégories d'homotopie, qui résulte du travail fondamental de Quillen ([13]; cf. [8] (4.4.6)) est la suivante:

**LEMME (2.2).** *Soit  $X$  un espace 1-connexe rationnel,  $f: S^{n+1} \rightarrow X$  continue, et soit  $Y = X \bigcup_f e^{n+2}$ . Soit  $\alpha \in L_X$  un cycle représentant  $[f] \in H_n(L_X) = \pi_{n+1}(X)$ . Alors  $L_Y$  est un modèle minimal de l'algèbre de Lie  $L_X \amalg \mathbf{L}(a)$ , où  $|a| = n+1$  et  $da = \alpha$ .*

Ceci suggère la définition suivante: soit  $L$  une DG algèbre de Lie libre, connexe.

**DÉFINITION (2.3).** Une filtration admissible sur  $L$  est la donnée

- (a) d'un espace vectoriel générateur minimal  $V \subset L$  (de sorte que  $L \cong \mathbf{L}(V)$ )
- (b) d'une filtration croissante  $(F_p V)$  de  $V$  vérifiant  $F_0 V = 0$  et  $d(F_p V) \subset \mathbf{L}(F_{p-1} V) \subset L$ .

On dira que l'algèbre  $L$  est de longueur  $\leq n$  si elle admet une filtration admissible de longueur  $n$ , i.e. vérifiant  $F_n V = V$ .

**Remarque (2.4).** Si  $L$  est de longueur  $n$ , il est en général faux que tout espace générateur minimal porte une filtration admissible de longueur  $n$ : ainsi, soit

$$L = \mathbf{L}(a, b, c, e, f)$$

$$|a| = |b| = 1, \quad |c| = 3, \quad |e| = 4, \quad |f| = 6$$

munie de la différentielle définie par  $da = 0 = db$ ,  $dc = [a, b]$ ,  $de = 0$ ,  $df = [a, e] + [a, [b, c]]$ .

La filtration admissible la plus courte sur ces générateurs est de longueur 3, mais si l'on pose  $e' = e + [b, c]$  le système de générateurs  $a, b, c, e', f$  admet une filtration admissible de longueur 2.

A partir de la définition (2.3), nous introduisons les invariants d'homotopie rationnelle  $f$  et  $F$  comme suit:

**DÉFINITION (2.5).** Soit  $X$  un espace 1-connexe;  $f(X)$  est le plus petit entier  $n$  tel qu'il existe une algèbre de Lie libre de longueur  $n$  quasi-isomorphe à  $L_X$ .

**DÉFINITION (2.6).**  $F(X)$  est la longueur de  $L_X$ .

Le lemme (2.2) fournit immédiatement une interprétation géométrique des invariants  $f$  et  $F$ :

**PROPOSITION (2.7).** Soit  $X$  un espace rationnel 1-connexe.

(a) On a  $f(X) \leq n$  si et seulement si  $X$  a le type d'homotopie d'un cône itéré  $X_n$ , défini par

$$X_0 = *, \quad X_i = C(f_i : Y_i \rightarrow X_{i-1})$$

où les  $Y_i$  sont des bouquets de sphères (rationalisés) pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

(b) On a  $F(X) \leq n$  si de plus les applications d'attachement  $f_i$  sont instables ( $\Sigma f_i \sim *$ ) pour  $i = 2, \dots, n$ .

Le lemme (1.2) fournit immédiatement les inégalités:

**PROPOSITION (2.8).**  $\text{cat}(X) \leq f(X) \leq F(X)$ .

Parvenus à ce point, il nous a longtemps semblé que la conjecture raisonnable était  $\text{cat}(X) = F(X)$ . Nous verrons d'ailleurs que les espaces formels et les espaces coformels vérifient cette propriété, ainsi que l'exemple qui termine cet article. C'est à Yves Félix que nous devons le premier contre-exemple, à savoir un espace vérifiant  $\text{cat} = f = 3$ ,  $F = 4$ . L'invariant  $F$  est donc un majorant strict de la catégorie rationnelle: il permet néanmoins dans certains cas d'obtenir des majorations intéressantes:

On a tout d'abord:

**PROPOSITION (2.9)** Si  $F(X) \leq 3$ , alors  $F(X) = f(X)$ .

*Démonstration.* Il est clair que  $F(X) = 1$  entraîne  $f(X) = 1$ . Compte tenu des inégalités (2.8) il suffit d'établir que le modèle minimal d'une algèbre de longueur 2 est de longueur  $\leq 2$ . Une algèbre de longueur 2 peut s'écrire  $\mathbf{L}(V \oplus W)$  avec  $d|V = 0$  et  $dW \subset \mathbf{L}(V)$ ; soit  $\pi : \mathbf{L}(V) \rightarrow \mathbf{QL}(V) = V$  la projection canonique sur

les indécomposables, soit  $W' = \text{Ker}(\pi d)$  et soit  $W''$  un supplémentaire de  $W'$  dans  $W$ . Soit  $V' = d(W'') \subset \mathbf{L}(V)$  et soit  $V''$  un sous-espace de  $\mathbf{L}(V)$  tel que  $V' \oplus V''$  soit un espace générateur minimal de  $\mathbf{L}(V)$ . Le quotient de  $\mathbf{L}(V \oplus W)$  par l'idéal engendré par  $V' \oplus W''$  est quasi-isomorphe à  $\mathbf{L}(V \oplus W)$  d'après [1] (Proposition 1.5) or par construction il est isomorphe à  $\mathbf{L}(V'' \oplus W')$  avec une différentielle nulle sur  $V''$  et  $dW' \subset [\mathbf{L}(V''), \mathbf{L}(V'')]$ : cette dernière algèbre est donc le modèle minimal de  $\mathbf{L}(V \oplus W)$  et elle est de longueur 2.

Ce résultat est le meilleur possible:

**PROPOSITION (2.10) [5].** *Il existe des espaces  $X_n$ , pour tout  $n \geq 0$ , vérifiant  $f(X_n) = 3$  et  $F(X_n) = 3 + n$ .*

La seule question qui reste ouverte est donc:

**CONJECTURE (2.11).** Pour tout espace 1-connexe  $X$ , on a  $\text{cat}(X) = f(X)$ .

Nous concluons ce paragraphe en montrant comment l'invariant  $F$  permet d'établir des inégalités de contrôle dimensionnel de  $\text{cat}(X)$ .

Le corollaire (2.14) ci-dessous est une reformulation partielle de (1.5) et (1.6), le corollaire (2.15) est nouveau.

**DÉFINITION (2.12).** Soit  $(x_i)$  un système minimal de générateurs de l'algèbre de Lie libre  $L$ . Une chaîne descendante de longueur  $k$  est une suite  $x_k, \dots, x_{i_1}$  d'éléments de ce système telle que  $dx_{i_1} = 0$ , et, pour tout  $j = 1, \dots, k-1$ ,  $dx_{i_{j+1}}$  admet au moins une coordonnée non-nulle suivant un crochet basique où figure  $x_{i_j}$ .

Il est clair que toute algèbre de Lie de longueur  $\geq n$  admet une chaîne descendante de longueur  $\geq n$ . On remarque alors:

**LEMME (2.13).** Soit  $X$  un espace  $(r-1)$ -connexe, et soit  $(x_k, \dots, x_1)$  une chaîne descendante de  $L_X$ . On a

$$|x_k| \geq kr - 1$$

En particulier,  $\dim X \geq kr$ .

**Démonstration.** Comme  $L_X \cong \mathbf{L}(s^{-1}\tilde{H}(X))$ , on a,  $\forall x \in L_X$ ,  $|x| \geq r-1$  ou  $x = 0$  et comme  $L_X$  est minimale, tout bord est de filtration de Lie au moins 2, d'où

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, k-1\}, \quad |x_{i+1}| = |dx_{i+1}| + 1 \geq |x_i| + r - 1 + 1.$$

d'où le résultat par sommation. ■

Remarquons qu'on retrouve, au moins pour les espaces rationnels, le résultat classique:

$$\text{cat}(X) \leq \frac{\dim X}{r}.$$

**COROLLAIRE (2.14)** (Toomer [16]). *Si  $X$  est  $(r-1)$ -connexe, on a :*

$$(c(X) = k \quad \text{et} \quad F(X) \geq k+1) \Rightarrow \dim X \geq (k+2)r-1.$$

*Démonstration.* Soit  $x_{k+1}, \dots, x_1$  une chaîne descendante de  $L_X$ . Comme la partie quadratique de la différentielle d'un générateur est la transposée du cup-produit, il existe au moins un indice  $i_0$  tel que  $x_{i_0}$  figure dans un crochet basique de longueur  $\geq 3$  apparaissant dans  $dx_{i_0+1}$ . On a alors  $|x_{i_0+1}| \geq |x_{i_0}| + 2(r-1) + 1$  d'où

$$\dim X - 1 \geq |x_k| \geq (k+1)r - 1 + r - 1. \quad \blacksquare$$

On obtient de même le résultat suivant:

**COROLLAIRE (2.15).** *Soit  $X$  un espace  $(r-1)$ -connexe à cup-produit rationnel trivial. Alors*

$$\text{cat } X \leq \frac{\dim X + r - 1}{2r - 1} < \frac{\dim X}{2r - 1} + \frac{1}{2}.$$

*Démonstration.* Cette inégalité résulte de l'implication:

$$(c(X) = 1 \quad \text{et} \quad F(X) \geq k) \Rightarrow \dim X \geq (2k-1)r - k + 1$$

qu'on obtient en remarquant que tout bord de  $L_X$  est de filtration de Lie  $\geq 3$ .

### §3. Espaces et applications formelles

Nous rassemblons dans ce paragraphe quelques résultats sur les espaces et les applications formelles qui sont nécessaires pour la justification des propriétés de notre exemple du paragraphe suivant, ainsi que quelques autres résultats intéressants. Les notations adoptées sont celles de [1].

**THÉORÈME ET DÉFINITION (3.1).** *Les propositions suivantes sont équivalentes: tout espace 1-connexe  $X$  vérifiant l'une d'elles sera dit formel.*

(HF 1)  $L_X \cong P\Omega H_*(X)$  (comme DG algèbres de Lie)

(HF 2) *Il existe un espace vectoriel générateur minimal  $V \subset L_X$  tel que  $d(V) \subset [V, V] \subset L_X$*

(HF 3) *Soit  $E_X$  le modèle de Sullivan. La projection canonique  $ZE_X \rightarrow H(E_X) = H^*(X)$  admet une extension multiplicative à  $E_X$ :*

$$\begin{array}{ccc} ZE_X & \longrightarrow & H^*(X) \\ \downarrow & \nearrow & \\ E_X & & \end{array}$$

(HF 4) *Il existe un quasi-isomorphisme d'algèbres de cochaînes*

$$E_X \xrightarrow{\sim} H^*(X).$$

### (3.2) Exemples d'espaces formels

(a) Les sphères et les  $K(\mathbf{Q}, n)$  sont formels.

(b) Un produit, un wedge d'espaces formels est formel.

(c) (R. Douglas) Un rétracte d'espace formel est formel (d'après HF 3).

(d) Une variété kaehlérienne compacte, un espace riemannien homogène symétrique compact sont des espaces formels ([3],[15]) lorsqu'ils sont 1-connexes.

Pour une autre caractérisation des espaces formels en termes de “modèles filtrés”, voir [14].

La catégorie rationnelle d'un espace formel est des plus faciles à calculer:

**PROPOSITION (3.3).** *Si  $X$  est formel, on a*

$$c(X) = F(X) = \text{cat}(X).$$

*Démonstration.* D'après HF 1, on a  $L_X \cong P\Omega H_*(X)$ . Or la filtration de co-algèbre de  $H_*(X)$  est admissible, et de longueur  $c(X)$ . ■

Ainsi, tous les invariants que nous avons cités ou introduits coïncident sur les espaces formels.

**Remarque (3.4).** Les espaces coformels ([18], [4]) ou  $\pi$ -formels ([9], [11]) vérifient par définition les conditions suivantes, duales des  $(HF_i)$ .

$(\pi F_1)$   $E_X \cong \text{Hom}(\mathcal{C}\pi(X), \mathbf{Q})$  où  $\mathcal{C}$  est la construction de Koszul, ([1], (0.18)).

$(\pi F_2)$  Il existe un espace vectoriel générateur minimal  $U \subset E_X$  tel que  $d(U) \subset S^2 U \subset E_X$ .

$(\pi F_3)$  Il existe une extension multiplicative

$$\begin{array}{ccc} ZL_X & \longrightarrow & \pi(X) \\ \downarrow & \nearrow & \\ L_X & & \end{array}$$

$(\pi F_4)$  Il existe un quasi-isomorphisme d'algèbres de Lie

$$L_X \xrightarrow{\sim} \pi(X).$$

Plus précisément, on peut “dualiser” les idées de Stasheff et Halperin ([14]; cf. [11], [4]) et exprimer plus précisément  $(\pi F_4)$  en disant que  $L_X$  est le modèle bigradué de  $\pi(X)$ . La filtration associée au premier degré est admissible, et coïncide sur les générateurs de  $L_X$  – à savoir  $s^{-1}\tilde{H}_*(X)$  – avec la filtration d'Eilenberg–Moore. On établit ainsi:

**PROPOSITION (3.5).** *Si  $X$  est coformel, on a*

$$e(X) = F(X)$$

*et par conséquent  $e(X) = \text{Gw cat}(X) = \text{cat}(X) = F(X)$ .*

Ainsi  $(S^3 \vee S^3) \bigcup_{\gamma} e^{2N+2}$ , où  $\gamma$  est un élément quelconque de filtration de Lie  $N$  de l'algèbre de Lie libre  $\pi_*(S^3 \vee S^3) \otimes \mathbf{Q}$ , est un espace coformel, vérifiant  $e = \text{cat} = F = 2$ , (cf. [10], Ex. 1) et  $c = 1$ . Notons que cet espace vérifie  $w \text{ cat} = 1$  pour tout  $N$ , d'après ([2] Th. 4.3.). (Pour  $N \leq 4$  cela résulte évidemment de (1.5).)

Un espace formel est un espace dont le type d'homotopie rationnel est déterminé par l'homologie. La notion analogue pour les applications peut être introduite, moyennant quelques précautions dues au fait que les modèles ne sont définis qu'à isomorphisme près.

Rappelons d'abord que l'on a des isomorphismes *naturels*:

$$\alpha_X: QL_X \xrightarrow{\cong} s^{-1}\tilde{H}_*(X; \mathbf{Q})$$

$$\beta_X: H(E_X) \xrightarrow{\cong} H^*(X, \mathbf{Q}).$$

La naturalité tient au fait que les modèles minimaux sont uniques à isomorphisme près, lui-même unique à homotopie près. Un espace  $X$  est formel s'il existe  $\varphi_X : L_X \rightarrow P\Omega H_*(X)$  tel que  $Q\varphi_X = \alpha_X$ , ou encore s'il existe  $\psi_X : E_X \rightarrow H^*(X)$  tel que  $H(\psi_X) = \beta_X$ .

Ceci conduit à la définition suivante:

**THÉORÈME ET DÉFINITION (3.6).** *Les conditions suivantes sont équivalentes pour une application  $f : X \rightarrow Y$  entre espaces formels  $X$  et  $Y$ :*

(AF 1) *Il existe des isomorphismes  $\varphi_X$  et  $\varphi_Y$ , tels que  $Q\varphi_X = \alpha_X$ ,  $Q\varphi_Y = \alpha_Y$  et que le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc}
 L_X & \xrightarrow{L_f} & L_Y \\
 \varphi_X \downarrow \cong & & \downarrow \varphi_Y \cong \\
 P\Omega H_*(X) & \xrightarrow{P\Omega f_*} & P\Omega H_*(Y)
 \end{array} \tag{3.6.1}$$

*commute à homotopie près.*

(AF 2) *Il existe des quasi-isomorphismes  $\psi_X$  et  $\psi_Y$ , tels que  $(\psi_X)^* = \beta_X$  et  $(\psi_Y)^* = \beta_Y$ , et que le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc}
 E_X & \xleftarrow{E_f} & E_Y \\
 \sim \downarrow \psi_X & & \downarrow \sim \psi_Y \\
 H^*(X) & \xleftarrow{f^*} & H^*(Y)
 \end{array} \tag{3.6.2}$$

*commute à homotopie près.*

*On dira que  $f$  est formalisable si elle vérifie (AF 1) ou (AF 2).*

L'équivalence de (AF 1) et (AF 2) provient du fait que ([1], §3) les foncteurs  $\min P\Omega \text{Hom} (?, \mathbf{Q})$  et  $\min \text{Hom} (\mathcal{C}?, \mathbf{Q})$  sont des équivalences de catégories d'homotopie entre  $[\min \text{Alg}^*]$  et  $[\min \text{Lie}_*]$ , compatibles avec l'homologie (ou la cohomologie).

**Remarque (3.7).** Nous évitons l'usage de l'adjectif "formelle" dans ce contexte, dans la mesure où il n'existe pas de choix naturel pour  $\varphi_X$  ou  $\psi_X$ . Un tel choix est cependant possible sur certaines sous-catégories d'espaces topologiques, par exemple la catégorie des variétés kaehlériennes compactes et des applications holomorphes: la théorie de Hodge fournit alors un quasi-isomorphisme naturel



entre les formes différentielles complexes et la cohomologie: ceci justifie l'assertion «les applications holomorphes entre variétés kaehlériennes compactes sont formelles» qui se trouve dans [3].

On remarquera en particulier qu'il n'y a aucune raison pour que la composée de deux applications formalisables le soit: nous donnons un exemple de cette situation en (3.10).

**EXEMPLES (3.8).** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces formels. Les projections  $X \times Y \rightarrow X, Y$ , les diagonales  $\Delta^n: X \rightarrow X^n$ , sont des applications formalisables: ceci résulte de l'isomorphisme naturel  $E_{X \times Y} = E_X \otimes E_Y$ .

On a évidemment:

**LEMME (3.9).** *Une application formalisable et homologiquement triviale est (rationnellement) homotope à zéro.*

**EXEMPLE (3.10).** Soit  $X = S^7$ ,  $Y = \Sigma(S^3 \times S^3) = S^4 \vee S^4 \vee S^7$ ,  $Z = S^4$ . Soit  $j: X \rightarrow Y$  l'inclusion de  $S^7$ , et  $f: Y \rightarrow Z$  la suspension de la multiplication de  $S^3$ . La composée  $f \circ j$  est l'application de Hopf  $S^7 \rightarrow S^4$  qui est rationnellement non-triviale, et par conséquent non-formalisable, d'après le lemme précédent. Or  $j$  est évidemment formalisable, et  $f$  l'est aussi. En effet

$$L_Y = \mathbf{L}(a_3, b_3, c_6), \quad d = 0$$

$$L_Z = \mathbf{L}(e_3)$$

$L_f: a \mapsto e, b \mapsto e, c \mapsto \lambda[e, e]$ , (pour un certain  $\lambda \in \mathbf{Q}^*$ ) et il suffit de choisir  $\varphi_X: L_X \rightarrow P\Omega H_*(X) = L_X$  défini par

$$\varphi_X(a) = a, \quad \varphi_X(b) = b, \quad \varphi_X(c) = c - \lambda[a, b]$$

et  $\varphi_Y = id$ , pour obtenir le carré commutatif (3.6.1) ■

**EXEMPLE (3.11).** On peut montrer qu'une suspension est toujours formalisable (cf. l'exemple précédent).

Nous nous contenterons d'établir l'énoncé suivant, qui résulterait de (3.9) et (3.11), et que nous avons utilisé dans (1.5):

**PROPOSITION (3.12).** *Soit  $f: X \rightarrow Y$  une application continue entre espaces rationnels. Si  $0 = f_*: \tilde{H}_*(X; \mathbf{Q}) \rightarrow \tilde{H}_*(Y; \mathbf{Q})$ , alors  $\Sigma f$  est homotope à zéro.*

*Preuve.* Nous aurons besoin d'introduire la notion suivante: soit  $u : L \rightarrow M$  un morphisme d'algèbres de Lie libres. Filtrons  $L$  et  $M$  par la filtration de Lie. Si  $u \neq 0$ , il existe un entier  $k \geq 0$  et un seul tel que  $u$  augmente la filtration de  $k$  et pas de  $k + 1$ . Le morphisme  $u$  induit alors une application polynomiale homogène de degré d'homogénéité  $k + 1$

$$p(u) : QL = F^1 L / F^2 L \rightarrow E_0^{k+1} M = F^{k+1} M / F^{k+2} M$$

que nous appellerons la partie principale de  $u$ . Comme une suspension a le type d'homotopie rationnel d'un bouquet de sphères, on a

$$L_{\Sigma X} = (\mathbf{L}(\tilde{H}_*(X)), d = 0) = L$$

$$L_{\Sigma Y} = (\mathbf{L}(\tilde{H}_*(Y)), d = 0) = M$$

et  $L_{\Sigma f} : L_{\Sigma X} \rightarrow L_{\Sigma Y}$  est homotope à zéro si et seulement si elle est nulle. Posons abusivement pour alléger l'écriture,  $\Sigma f = L_{\Sigma f}$ .

Exprimons à présent que  $\Sigma f$  est un morphisme de co- $H$ -espaces: on obtient le diagramme *commutatif* (car les différentielles sont nulles!):

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\Sigma f} & M \\ C_{\Sigma Y} \downarrow & \searrow g & \downarrow C_{\Sigma X} \\ L \amalg L & \xrightarrow{\Sigma f \vee \Sigma f} & M \amalg M \end{array}$$

où  $C_{\Sigma X}$  et  $C_{\Sigma Y}$  sont les comultiplications des suspensions  $\Sigma X$  et  $\Sigma Y$ . Il est clair que la partie principale de ces comultiplications est la diagonale  $x \rightarrow (x, x)$  sur les indécomposables. Posant  $g = (\Sigma f \vee \Sigma f) \circ C_{\Sigma X} = C_{\Sigma Y} \circ \Sigma f$ , la partie principale de  $g$  vérifie:

$$\forall x \in QL, p(g)(x) = (p(g)(x))' + (p(g)(x))''$$

où ' et '' désignent les inclusions de  $M$  dans  $M \amalg M$ . En composant avec les codiagonales  $L \amalg L \rightarrow L$  et  $M \amalg M \rightarrow M$ , on obtient:

$$\forall x \in QL, \quad p(\Sigma f)(2x) = 2p(\Sigma f)(x)$$

ce qui montre que  $p(\Sigma f)$  doit être homogène de degré 1, et alors

$$p(\Sigma f) = Q\Sigma f = f_* \neq 0, \quad \text{ou bien} \quad \Sigma f = 0.$$

Ceci achève la démonstration. ■

Nous terminons ce paragraphe par l'étude de la diagonale  $\Delta^{n+1} : X \rightarrow X^{n+1}$  ( $n \geq 1$ ) d'un espace formel de catégorie  $k$ .

D'après (3.3), l'espace  $X$  est de catégorie  $k$  si et seulement si  $c(X) = k$ . Par ailleurs, la diagonale  $\Delta^{n+1}$  est formalisable. Le choix approprié du foncteur  $L$  permet donc de supposer que  $L_{\Delta^{n+1}} = P\Omega\Delta_*^{n+1}$ , où

$$\Delta_*^{n+1} : H_*(X) \rightarrow H_*(X^{n+1}) = H_*(X)^{\otimes n+1}$$

est la comultiplication itérée de  $H_*(X)$ , qui est un morphisme de coalgèbres. Dire que  $c(X) \leq k$  revient à dire que l'image de  $\Delta_*^{n+1}$  est contenue dans  $F_k H_*(X)$ , où  $F_* H_*(X)$  est la filtration canonique de coalgèbre; si  $k \leq n$ , on a la factorisation:

$$L_{\Delta^{n+1}} = P\Omega\Delta_*^{n+1} : L_X = P\Omega H_*(X) \rightarrow P\Omega(F_n H_*(X)) \subset L_{X^{n+1}}.$$

Cette factorisation fournit la factorisation "catégorique" de  $\Delta^{n+1}$ ! En effet:

LEMME (3.13). *Si  $X$  est formel, le bouquet garni  $T^n X \subset X^{n+1}$  est formel.*

COROLLAIRE (3.14). *On a  $L_{T^n X} \cong P\Omega(F_n H_*(X))$ .*

*Preuve du corollaire.* On a bien  $H_*(T^n X) = F_n H_*(X)$ . ■

*Preuve de (3.13).* On considère  $T^n X$  comme somme amalgamée d'exemplaires de  $X^n$  le long d'exemplaires de  $X^{n-1}$ . Le lemme résulte alors du:

LEMME (3.14). *Soit*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_1} & X_1 \\ \downarrow i_2 & & \downarrow j_2 \\ X_2 & \xrightarrow{j_1} & Y \end{array}$$

*un carré cocartésien dans lequel les flèches  $i_1, i_2$  sont des cofibrations fermées, les espaces  $X, X_1, X_2$  sont formels et les inclusions  $i_1, i_2$  sont formalisables et injectives*

en homologie. Alors  $Y$  est formel et  $j_1, j_2$  sont formalisables et injectives en homologie.

*Preuve.* En choisissant convenablement les modèles minimaux, on peut supposer que

$$L_{i_j} = P\Omega(i_j)_* : P\Omega H_*(X) \rightarrow P\Omega H_*(X_j), \quad j = 1, 2.$$

Comme le foncteur  $L$  est une équivalence de catégories d'homotopie qui respecte les fibrations et les cofibrations, on a :

$$L_Y \cong P\Omega H_*(X_1) \mu_{P\Omega H_*(X)} P\Omega H_*(X_2)$$

L'algèbre  $L_Y$  est engendrée par  $H_*(X_1) + H_*(X_2) = H_*(X_1) \oplus_{H_*(X)} H_*(X_2) = H_*(Y)$ , et la restriction de la différentielle est quadratique, donc  $L_Y \cong P\Omega H_*(Y)$  d'après (HF 2).

*Remarque (3.15).* On peut démontrer (3.13) au moyen du modèle de Sullivan, à partir du fait que  $E_{T^n X}$  est le modèle minimal de l'algèbre  $(E_X)^{\otimes n+1}/I$ , où  $I = \bar{E}_X^{\otimes n+1}$  est le produit tensoriel des idéaux d'augmentation de chaque facteur, et ceci pour  $X$  connexe quelconque, formel ou non (Y. Félix, non publié).

Remarquons enfin que l'étude qui précède fournit une autre démonstration de l'inégalité  $\text{cat}(X) \leq c(X)$  pour un espace formel  $X$ .

#### §4. Un exemple

A l'appui de notre conjecture (2.9), nous avons choisi un espace à quatre cellules se prêtant à la détermination de tous les invariants introduits aux paragraphes 1 et 2. Considérons

$$X = (S^2 \vee \mathbb{C}P^2) \bigcup_{\alpha} e^7$$

le complexe cellulaire dans lequel l'application attachante  $\alpha$  est le produit de Whitehead de l'identité de  $S^2$  et de l'application de Hopf  $\gamma : S^5 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ . Notre but est le

**THÉORÈME (4.1).**

$$c(X) = w \text{ cat}(X) = e(X) = Gw \text{ cat}(X) = 2 \quad \text{cat}(X) = f(X) = F(X) = 3.$$

La détermination de  $\text{cat}(X)$  nécessite un calcul détaillé de modèles minimaux, et constitue la partie principale du théorème; au préalable, nous commentons les autres propriétés.

Il est clair que  $c(X) = 2$ . Quant à  $e(X) = 2$ , il faut soit faire appel à l'autopsie des meurtres [10], soit raisonner avec la nilpotence homologique du modèle de Sullivan. Cette dernière technique fournit une démonstration assez aisée, mais sort totalement du cadre de cet article.

Comme  $X$  est simplement connexe de dimension 7, on obtient  $w \text{ cat}(X) = 2$  et  $Gw \text{ cat}(X) = 2$  par le lemme (1.5). Bien entendu, le lemme (1.6) est inapplicable!

Finalement, il est immédiat que  $F(X) \leq 3$  par la proposition (2.7): l'écriture même de la décomposition cellulaire de  $X$  le montre comme triple cône avec des attachements homologiquement triviaux, donc instables par la proposition (3.12). Vu le résultat final, il est inutile de démontrer que  $F(X) = 3$ . Il reste  $\text{cat}(X)$  à déterminer.

En notant  $Y = S^2 \vee \mathbf{CP}^2$ , nous nous trouvons exactement dans les notations et les hypothèses du théorème de Berstein–Hilton (1.7). Pour établir que  $\text{cat}(X) = 3$ , il suffit donc de montrer que  $T^2(i) \cdot \phi \cdot \alpha : S^6 \rightarrow T^2X$  est homotopiquement non-triviale. Par approximation cellulaire, nous sommes ramenés à étudier l'application

$$S^6 \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\phi} T^2Y \hookrightarrow T^2Y \bigcup_{\alpha_1} e^7 \bigcup_{\alpha_2} e^7 \bigcup_{\alpha_3} e^7 = Z$$

ce que nous ferons à l'aide des modèles minimaux.

**PROPOSITION (4.2).** *Le modèle minimal de  $\mathbf{CP}^2$  est  $\mathbf{L}(y, z)$  avec*

$$|y| = 1 \quad dy = 0$$

$$|z| = 3 \quad dz = \frac{1}{2}[y, y].$$

*Dans ce modèle, l'application de Hopf  $\gamma : S^5 \rightarrow \mathbf{CP}^2$  a  $[y, z]$  comme cycle représentatif.*

**Démonstration.** Le modèle minimal de la sphère  $S^2$  est  $\mathbf{L}(y)$ , avec  $|y| = 1$  et  $dy = 0$ . Il est donc additivement engendré, comme son homologie, par  $y$  en dimension 1 et  $[y, y]$  en dimension 2. (Rappelons que  $[y, [y, y]] = 0$ .) L'homotopie rationnelle de  $S^2$  a donc deux générateurs correspondant à  $y$  et  $[y, y]$ . En notation habituelle, ceux-ci sont  $\iota \in \pi_2(S^2)$  et  $[\iota, \iota] \in \pi_3(S^2)$ . Un cycle représentant l'application de Hopf  $S^3 \rightarrow S^2$  est donc  $\frac{1}{2}[y, y]$ . Par le Lemme (2.2), le modèle minimal de  $\mathbf{CP}^2$  a bien la structure annoncée. Il en résulte que  $\mathbf{CP}^2$  est formel, puisque les

différentielles du modèle sont purement quadratiques (HF 2). A l'aide de (HF 1), nous pouvons confirmer le résultat en explicitant la coalgèbre d'homologie de  $\mathbf{CP}^2$ . En notant abusivement  $y$  et  $z$  les générateurs homologiques, il vient en effet

$$\begin{aligned}\Delta_*(y) &= 1 \otimes y + y \otimes 1 & \tilde{\Delta}_*(y) &= 0 \\ \Delta_*(z) &= 1 \otimes z + y \otimes y + z \otimes 1 & \tilde{\Delta}_*(z) &= y \otimes y = \tfrac{1}{2}[y, y].\end{aligned}$$

Le calcul (facile) de l'homologie du modèle minimal de  $\mathbf{CP}^2$  fournit un seul générateur en dimension 4, représenté par le cycle  $[y, z]$ .

L'application de Hopf  $\gamma : S^5 \rightarrow \mathbf{CP}^2$  a donc un cycle représentatif qui est un multiple de  $[y, z]$ , purement quadratique. Il s'ensuit que l'espace  $\mathbf{CP}^3$  est formel. Le calcul de la coalgèbre d'homologie de  $\mathbf{CP}^2$  analogue au précédent, fournit alors facilement  $[\gamma] = [y, z]$  achevant la démonstration. Bien entendu, la formalité de  $\mathbf{CP}^3$  résulte aussi de [3]!

**COROLLAIRE (4.3).** *Le modèle minimal de  $Y = S^2 \vee \mathbf{CP}^2$  est  $\mathbf{L}(x, y, z)$  avec*

$$\begin{aligned}|x| &= |y| = 1 & dx &= dy = 0 \\ |z| &= 3 & dz &= \tfrac{1}{2}[y, y].\end{aligned}$$

**PROPOSITION (4.4).** *Le modèle minimal de  $T^2Y$  est  $\mathbf{L}(x_i, y_i, z_i, x_i x_j, x_i y_j, y_i x_j, y_i y_j, x_i z_j, z_i x_j, y_i z_j, z_i y_j, z_i z_j)$   $i = 1, 2, 3, (i, j) = (1, 2), (1, 3), (2, 3)$ , avec*

$$\begin{aligned}|x_i| &= |y_i| = 1 & dx_i &= dy_i = 0 \\ |z_i| &= 3 & dz_i &= [y_i, y_i] \\ |x_i x_j| &= 3 & dx_i x_j &= [x_i, x_j] \\ |x_i y_j| &= 3 & dx_i y_j &= [x_i, y_j] \\ |y_i x_j| &= 3 & dy_i x_j &= [y_i, x_j] \\ |y_i y_j| &= 3 & dy_i y_j &= [y_i, y_j] \\ |x_i z_j| &= 5 & dx_i z_j &= [x_i, z_j] + [x_i y_j, y_j] \\ |z_i x_j| &= 5 & dz_i x_j &= [z_i, x_j] + [y_i x_j, y_i] \\ |y_i z_j| &= 5 & dy_i z_j &= [y_i, z_j] + [y_i y_j, y_j] \\ |z_i y_j| &= 5 & dz_i y_j &= [z_i, y_j] + [y_i y_j, y_i] \\ |z_i z_j| &= 7 & dz_i z_j &= [z_i, z_j] + [y_i z_j, y_i] + [z_i y_j, y_j] + \tfrac{1}{2}[y_i y_j, y_i y_j].\end{aligned}$$

*Démonstration.* La liste des générateurs est bien sûr  $s^{-1}\tilde{H}_*(T^2Y)$ . Le corollaire (3.14) ramène à nouveau le calcul des différentielles à celui des coproduits en homologie. Nous donnons seulement deux échantillons de calcul explicite, qui suffisent à expliquer les notations et les quelques abus de langage:

$$\begin{aligned}\Delta_*(x_1z_2) &= (1 \otimes x_1 + x_1 \otimes 1)(1 \otimes z_2 + y_2 \otimes y_2 + z_2 \otimes 1) = \\ &= 1 \otimes x_1z_2 + x_1 \otimes z_2 + y_2 \otimes x_1y_2 + x_1y_2 \otimes y_2 + z_2 \otimes x_1 + x_1z_2 \otimes 1\end{aligned}$$

$$\tilde{\Delta}_*(x_1z_2) = [x_1, z_2] + [x_1y_2, y_2]$$

$$\begin{aligned}\Delta_*(z_1z_2) &= (1 \otimes z_1 + y_1 \otimes y_1 + z_1 \otimes 1)(1 \otimes z_2 + y_2 \otimes y_2 + z_2 \otimes 1) \\ &= 1 \otimes z_1z_2 + y_1 \otimes y_1z_2 + z_1 \otimes z_2 + y_2 \otimes z_1y_2 + y_1y_2 \otimes y_1y_2 + z_1y_2 \otimes y_2 \\ &\quad + z_2 \otimes z_1 + y_1z_2 \otimes y_1 + z_1z_2 \otimes 1\end{aligned}$$

$$\tilde{\Delta}_*(z_1z_2) = [z_1, z_2] + [y_1z_2, y_1] + [z_1y_2, y_2] + \frac{1}{2}[y_1y_2, y_1y_2].$$

**PROPOSITION (4.5).** *L'application  $\phi : Y \rightarrow T^2Y$  factorisant  $\Delta^3$  est donnée sur les modèles minimaux par:*

$$\phi_*(x) = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\phi_*(y) = y_1 + y_2 + y_3$$

$$\phi_*(z) = z_1 + z_2 + z_3 + y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3.$$

*Démonstration.*  $Y$  est un espace formel de catégorie 2. Il suffit donc de remplacer  $\phi_*$  par  $\Delta^3_*$ , en vertu de Lemme (3.13). Le calcul est alors immédiat.

**PROPOSITION (4.6).** *Le modèle minimal de  $Z = T^2Y \bigcup_{\alpha_1} e^7 \bigcup_{\alpha_2} e^7 \bigcup_{\alpha_3} e^7$  est  $\mathbf{L}_{T^2Y} \amalg \mathbf{L}(u_1, u_2, u_3)$  avec  $|u_i| = 6$  et  $du_i = [x_i, [y_i, z_i]]$ .*

*Démonstration.* L'application  $\alpha : S^6 \rightarrow S^2 \vee \mathbf{CP}^2$  a  $[x, [y, z]]$  comme cycle représentatif. Comme les différentielles  $du_i$  sont décomposables, le modèle obtenu par l'application du Lemme (2.2) est minimal.

*Démonstration du théorème (4.1).* Nous devons démontrer que l'application  $S^6 \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\phi} T^2Y \hookrightarrow Z$  est non triviale. Par la Proposition (4.5), cette composition a

dans  $L_Z$

$$[x_1 + x_2 + x_3, [y_1 + y_2 + y_3, z_1 + z_2 + z_3 + y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3]]$$

comme cycle représentatif. Tout revient donc à montrer que ce cycle n'est pas un bord. Une inspection très simple des différentielles de  $L_Z$  mène rapidement au résultat: les seules différentielles de  $L_Z$  qui contiennent le générateur  $y_1y_2$  sont

$$dy_1z_2 = [y_1, z_2] + [y_1y_2, y_2]$$

$$dz_1y_2 = [z_1, y_2] + [y_1y_2, y_1]$$

$$dz_1z_2 = [z_1, z_2] + [y_1z_2, y] + [z_1y_2, y_2] + \frac{1}{2}[y_1y_2, y_1y_2].$$

Aucun bord ne peut donc atteindre  $[x_1, [y_3, y_1y_2]]$  qui est manifestement touché par le cycle donné. Donc  $\text{cat}(X) = 3$ , achevant la démonstration du théorème (4.1).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAUES, H. and LEMAIRE, J. M., *Minimal models in homotopy theory*. Math. Ann. 225, (1977) 219–242.
- [2] BERSTEIN, I. and HILTON, P., *Category and generalized Hopf invariants*. Illinois J. Math. 4, (1960), 437–451.
- [3] DELIGNE, P., GRIFFITHS, P. A., MORGAN, J., SULLIVAN, D., *Real homotopy type of Kähler manifolds*. Invent. Math. 29, (1975) 245–274.
- [4] FELIX, Y., *Modèles et comodèles*. Rapport interne N°88, Université de Louvain, (Nov. 1979).
- [5] FELIX, Y., LEMAIRE, J. M. and SIGRIST, F., *Sur les cônes itérés et la catégorie de Lusternik–Schnirelman rationnelle*. C.R. Acad. Sc. Paris. 290A (1980) 905–907.
- [6] GANEA, T., *Lusternik–Schnirelmann category and strong category*. Illinois J. Math. 11, (1967) 417–427.
- [7] GILBERT, W., *Some examples for weak category and conilpotency*. Illinois J. Math. 12, (1968) 421–431.
- [8] LEMAIRE, J. M., *Algèbres connexes et homologie des espaces de lacets*. Lect. Notes in Math. 422, Springer, (1974).
- [9] —, *Modèles minimaux pour les algèbres de chaînes*. Pub. Math., Lyon (1976), 13, N°3.
- [10] —, *Autopsie d'un meurtre...* Ann. Sc. E.N.S. 11, (1978) 93–100.
- [11] OUKILI, A., *Thèse 3e cycle*, Nice 1978.
- [12] LEMAIRE, J. M., SIGRIST, F., *Dénombrement de types d'homotopie rationnelle*. C.R. Acad. Sc., Paris, 287A, (1978) 109–112.
- [13] QUILLEN, D., *Rational homotopy theory*. Ann. Math. 90, (1969) 205–295.
- [14] STASHEFF, J., HALPERIN, S., *Obstructions to homotopy equivalences*. Advances Math. 32, (1979) 233–279.
- [15] SULLIVAN, D., *Infinitesimal computations in topology*. Pub. Math. I.H.E.S., 47 (1978) 269–331.
- [16] TOOMER, G., *Lusternik–Schnirelmann category and the Moore spectral sequence*. Math. Z. 138, (1974) 123–143.



- [17] WHITEHEAD, G., *The homology suspension*. Coll. top. alg., Louvain (1956), 89–65. Liège: Georges Thone; Paris: Masson & Cie. (1957).
- [18] MILLER, T., NEISENDORFER, J., *Formal and Coformal spaces*. Illinois J. Math. (à paraître).

*Jean-Michel Lemaire*  
*Département de Mathématiques*  
*L.A. au C.N.R.S. N°168*  
*Université de Nice-Parc Valrose*  
*F-06034 NICE CEDEX*

*François Sigrist*  
*Institut de Mathématiques*  
*Université de Neuchâtel*  
*Chantemerle 20*  
*CH-2000 NEUCHÂTEL*

Reçu le 6 juin 1980