

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 55 (1980)  
  
**Artikel:** Über Membranen mit speziellen Knotenlinien.  
**Autor:** Brüning, Jochen  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-42361>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Über Membranen mit speziellen Knotenlinien

JOCHEN BRÜNING\*

Unter einer Membran  $M$  wollen wir im Folgenden ein beschränktes Gebiet des  $\mathbb{R}^2$  verstehen, dessen Rand  $\partial M$  der folgenden Regularitätsbedingung genügt:  $\partial M$  besteht aus endlich vielen paarweise disjunkten Kurven in  $\mathbb{R}^2$ , von denen jede homöomorph zu  $S^1$  und stückweise unendlich oft differenzierbar ist. Wir betrachten die Eigenwerte  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  des Dirichletproblems für den Laplaceoperator  $\Delta$  in  $M$  und zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum, der bekanntlich aus in  $M$  reell-analytischen und auf  $\bar{M}$  stetigen Funktionen besteht, die auf  $\partial M$  verschwinden. Über weitere allgemeine Eigenschaften dieser Eigenfunktionen, etwa in welcher Weise die Geometrie von  $M$  die Formierung von Knotenlinien und Knotengebieten beeinflußt, ist nur wenig bekannt (s. [1], Kap. VI, §6 und [2]). Wir wollen daher in der vorliegenden Note die Fragestellung umkehren und untersuchen, wie eine vorgegebene Eigenschaft der Eigenfunktionen die Geometrie von  $M$  einschränkt. Die in Rede stehende Eigenschaft fällt z.B. ins Auge, wenn man die Eigenfunktionen eines Quadrates betrachtet:

**EIGENSCHAFT (K).** *Es gibt unendlich viele Eigenfunktionen  $\psi_j$  in  $M$ , deren sämtliche (innere) Knotenlinien Geradenstücke sind.*

Wir können diese Situation auffassen als besonders enge Analogie zum Fall der schwingenden Saite. Es stellt sich nun heraus, daß alle Membranen mit der Eigenschaft (K) aufgezählt werden können.

**SATZ.** *Die folgende Liste von Membranen mit der Eigenschaft (K) ist vollständig:*

- a) Kreise,
- b) Kreissektoren,
- c) Kreisringe,
- d) Kreisringsektoren,
- e) alle Membranen, die sich durch endlich viele Spiegelungen an den Seiten aus einem der folgenden Polygone gewinnen lassen:
  - $\alpha$ ) ein Rechteck,

---

Diese Arbeit wurde verfaßt mit Unterstützung des Sonderforschungsbereichs 40 "Theoretische Mathematik" an der Universität Bonn.

$\beta)$  ein Dreieck mit den Winkeln  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ ,

$\gamma)$  ein Dreieck mit den Winkeln  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ .

Der Beweis des Satzes wird sich aus einer Reihe von Hilfssätzen ergeben. Wir betrachten also eine feste Membran  $M$  mit der Eigenschaft  $(K)$ . Bezeichnet  $l_j$  die Anzahl der inneren Knotenlinien der Eigenfunktion  $\psi_j$ , d.h. die Anzahl der in  $M$  von Rand zu Rand laufenden Geradenstücke, auf denen  $\psi_j$  verschwindet, so ist unsere erste Bemerkung, daß  $l_j$  mit  $j$  gegen Unendlich strebt. Genauer gilt

**HILFSSATZ 1.** *Es bezeichne  $\mu_j$  den zu  $\psi_j$  gehörigen Eigenwert. Dann gibt es eine Konstante  $C > 0$  und  $j_0 \in \mathbb{N}$ , so daß für  $j \geq j_0$*

$$l_j \geq C\sqrt{\mu_j}.$$

*Beweis.* Bezeichnet  $L_j$  die Gesamtlänge der inneren Knotenlinien von  $\psi_j$  und  $d(M)$  den Durchmesser von  $M$ , so ist

$$L_j \leq d(M)l_j.$$

Damit folgt die Behauptung aus [2].

Der nächste Hilfssatz enthält den Schlüssel zum Beweis des Satzes.

**HILFSSATZ 2.** *Es sei  $N \subset M$  ein Knotengebiet von  $\psi_j$ ,  $c: (a, b) \rightarrow M$  ein inneres Geradenstück  $\subset \psi_j^{-1}(0)$ , das  $N$  berandet,  $g$  die zugehörige Gerade im  $\mathbb{R}^2$  und  $\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Spiegelung an  $g$ . Dann liegt  $N$  ganz auf einer Seite von  $g$  und  $\sigma(N)$  ist ebenfalls ein Knotengebiet von  $\psi_j$ .*

*Insbesondere sind alle Knotengebiete von  $\psi_j$  kongruent.*

*Beweis.* Es sei  $g_0 := c((a, b))$ . Wir setzen für  $p \in \sigma(N) \cup g_0$

$$\tilde{\psi}_j(p) := -\psi_j \circ \sigma(p).$$

Dann löst  $\tilde{\psi}_j$  das Anfangswertproblem

$$(\Delta + \mu_j)\tilde{\psi}_j = 0 \quad \text{in } \sigma(N),$$

$$\tilde{\psi}_j = 0 \quad \text{längs } g_0,$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial n} = \frac{\partial \psi_j}{\partial n} \text{ längs } g_0.$$

Hierbei bezeichnet  $\mu_j$  den zu  $\psi_j$  gehörigen Eigenwert und  $n$  die nach  $\sigma(N)$  weisende Normale von  $g_0$ . Da  $\psi_j$  dasselbe Problem löst, stimmen nach dem Satz von Cauchy-Kowalewski  $\psi_j$  und  $\tilde{\psi}_j$  überein in  $\bar{X}$ , wenn  $X$  die von  $g_0$  berandete Komponente von  $\sigma(N) \cap M$  bezeichnet. Wäre nun nicht  $\sigma(N) \subset M$ —und damit  $X = \sigma(N)$ —, so gäbe es  $p \in \bar{X}$  mit  $p \in \sigma(N) \cap \partial M$ ; dann folgte aber  $\tilde{\psi}_j(p) = \psi_j(p) = 0$  und damit  $\psi_j \circ \sigma(p) = 0$ , was wegen  $\sigma(p) \in N$  nicht sein kann. Also ist  $\sigma(N) \subset M$  und deshalb ein Knotengebiet von  $\psi_j$ . Dann ist aber auch  $N \cap \sigma(N) = \emptyset$ , so daß  $N$  ganz auf einer Seite von  $g$  liegt. Wir nennen nun zwei Knotengebiete  $N', N''$  von  $\psi_j$  äquivalent, wenn es Knotengebiete  $N' = N_0, N_1, \dots, N_k = N''$  gibt derart, daß  $\bar{N}_i$  und  $\bar{N}_{i+1}$  eine innere (gerade) Knotenlinie von  $\psi_j$  gemeinsam haben. Es seien  $N = N_0, N_1, \dots, N_l$  die Elemente der Äquivalenzklasse von  $N$ , die nach dem bisher Bewiesenen alle zu  $N$  kongruent sind. Setzen wir dann

$$Y := \bigcup_{i=0}^l \bar{N}_i,$$

so ist  $Y \subset \bar{M}$  und  $\partial Y \subset \psi_j^{-1}(0)$ ; nach Konstruktion ist also  $\partial Y \subset \partial M$  und damit  $Y = \bar{M}$ , d.h. alle Knotengebiete von  $\psi_j$  sind kongruent.

Die Einschränkungen für die geometrische Gestalt von  $M$  folgen nun wesentlich aus der Tatsache, daß **unendlich viele** Eigenfunktionen gerade Knotenlinien haben.

**HILFSSATZ 3.**  *$M$  wird von mindestens einem  $C^\infty$ —Bogen konstanter Krümmung berandet.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung besteht  $\partial M$  aus endlich vielen  $C^\infty$ —Bögen  $c_1, \dots, c_l$ , die doppelpunktfrei oder geschlossen sind und höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Die  $l_j$  Knotenlinien von  $\psi_j$  verbinden nun jeweils zwei Randpunkte von  $M$ . Die Anzahl  $m_j$  der verschiedenen Randpunkte von  $M$ , die von Knotenlinien von  $\psi_j$  getroffen werden, strebt dann mit  $j$  gegen Unendlich; wäre nämlich etwa  $m_j \leq m$ , so müßten in wenigstens einem Punkt von  $\partial M$  mindestens  $[2l_j]/m$  verschiedene Knotenlinien zusammentreffen, was  $m_j \geq [2l_j]/m + 1$  zur Folge hat und wegen Hilfssatz 1 zum Widerspruch führt. Wir können also annehmen, daß die Anzahl  $n_j$  der verschiedenen Punkte von  $c_1$ , die von Knotenlinien von  $\psi_j$  getroffen werden, unbegrenzt wächst. Wird  $c_1$  mit Bogenlänge parametrisiert,  $c_1 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , so treffen die Knotenlinien von  $\psi_j$  nach Hilfssatz 2 genau die Punkte  $c_1[i(L/n_j)]$ ,  $0 \leq i \leq n_j$ . Bezeichnet dann  $\kappa$  die Krümmung von  $c_1$ , so finden



wir weiter mit Hilfssatz 2

$$\begin{aligned} \max_{t, t' \in [0, L]} |\kappa(t) - \kappa(t')| &= \max_{t, t' \in [0, L/n_j]} |\kappa(t) - \kappa(t')| \\ &\leq \frac{L}{n_j} \max_{t \in [0, L]} |\kappa'(t)|, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Nach Hilfssatz 3 hat also etwa die Randkurve  $c_1$  von  $M$  konstante Krümmung, d.h.  $c_1$  ist ein Kreisbogen oder ein Geradenstück.

**HILFSSATZ 4.** *Ist  $c_1$  ein Kreisbogen, so ist  $M$  ein Kreis, ein Kreissektor, ein Kreisring oder ein Kreisringsektor.*

*Beweis.* Wir beginnen mit der Bemerkung, daß nach Hilfssatz 2 alle inneren Knotenlinien einer Eigenfunktion  $\psi_j$   $c_1$  senkrecht treffen. In Polarkoordinaten sei  $c_1$  gegeben durch

$$\{(R, \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq \alpha\}$$

für ein  $R > 0$  und  $0 < \alpha \leq 2\pi$ . Wir nehmen zunächst an, daß  $M$  linkerhand von  $c_1$  liegt. Setzen wir  $S := \{(r, \varphi) \mid 0 < r < R, 0 < \varphi < \alpha\}$ , so ist also  $S \cap M \neq \emptyset$ . Ist dann  $S \subset M$ , so wählen wir eine Eigenfunktion  $\psi_j$  aus mit  $n_j \geq 4$  (s. Beweis von Hilfssatz 3). Wir setzen dann

$$S' := \left\{ (r, \varphi) \mid 0 < r < R, \frac{\alpha}{n_j} < \varphi < \frac{2\alpha}{n_j} \right\}$$

und bemerken, daß  $S'$  ein Knotengebiet von  $\psi_j$  ist. Anderenfalls enthielte nämlich  $S'$  zwei Knotengebiete, von denen eins von einem Kreisbogen berandet wird, während das andere ein Polygon ist; dies widerspricht Hilfssatz 2. Damit folgt aber—ebenfalls aus Hilfssatz 2—, daß  $M$  ein Kreis oder ein Kreissektor ist.

Ist hingegen  $S \not\subset M$ , so gibt es  $p = (r_0, \varphi_0) \in S \cap \partial M$ . Wir können annehmen, daß  $\{(r, \varphi) \mid r_0 < r < R, \varphi = \varphi_0\} \subset M$ . Eine Umgebung von  $p$  in  $\partial M$  sei gegeben durch  $\{(r(t), \varphi(t)) \mid |t| < \varepsilon\}$  mit  $r(0) = r_0, \varphi(0) = \varphi_0$ . Nach Wahl von  $r_0$  ist die Funktion  $t \mapsto \varphi(t)$  in keiner Umgebung von 0 konstant. Weiter folgt aus der Maximalität von  $r_0$ , daß für hinreichend kleines  $\delta < \varepsilon$   $\{(r, \varphi(t)) \mid r(t) < r < R, -\delta \leq t \leq 0\} \subset M$  oder aber  $\{(r, \varphi(t)) \mid r(t) < r < R, 0 \leq t \leq \delta\} \subset M$ . Damit haben wir aber wieder ein Randstück von  $M$  gefunden, das von unendlich vielen inneren Knotenlinien

getroffen wird. Die Schlußweise des Beweises von Hilfssatz 3 liefert dann, daß dieses Randstück ebenfalls konstante Krümmung hat. Wäre es ein Geradenstück, so ergäbe sich mit Hilfssatz 2 sofort die Existenz einer Eigenfunktion mit zwei nicht kongruenten Knotengebieten. Also haben wir einen Kreisbogen, der dann nach der Anfangsbemerkung zu  $c_1$  konzentrisch sein muß. Also gibt es eine Eigenfunktion  $\psi_j$ , die einen Kreisringsektor als Knotengebiet besitzt; nach Hilfssatz 2 ist dann  $M$  selbst ein Kreisring oder ein Kreisringsektor.

Es verbleibt der Fall, daß  $M$  rechts von  $c_1$  liegt. Ein ganz analoges Vorgehen liefert dann, daß  $M$  ein Kreisring oder ein Kreisringsektor ist.

**HILFSSATZ 5.** *Ist  $c_1$  ein Geradenstück, so muß  $M$  eine Membran von der im Satz unter e) genannten Art sein.*

*Beweis.* Wir können annehmen, daß  $c_1$  gegeben ist durch  $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq L\}$  und daß  $M$  oberhalb von  $c_1$  liegt. Wir wissen dann, daß die Punkte

$$p_j^1 := \left( \left[ \frac{n_j}{2} \right] \frac{L}{n_j}, 0 \right)$$

und

$$p_j^2 := \left( \left( \left[ \frac{n_j}{2} \right] + 1 \right) \frac{L}{n_j}, 0 \right)$$

von inneren Knotenlinien der Eigenfunktion  $\psi_j$  getroffen werden, aber kein Punkt von  $c_1$  zwischen  $p_j^1$  und  $p_j^2$ . Es bezeichne  $m_j^l$  die Anzahl der Knoten von  $\psi_j$ , die  $p_j^l$  treffen,  $l=1,2$ . Wir untersuchen zunächst den Fall, daß  $m_j^1 = m_j^2 = 1$  für unendlich viele  $j$ . Nach Hilfssatz 2 ist es klar, daß für diese  $j$  alle inneren Knotenlinien von  $\psi_j$   $c_1$  senkrecht treffen. Nun finden wir mit derselben Überlegung wie im zweiten Teil des Beweises von Hilfssatz 4 ein oberhalb von  $c_1$  gelegenes Randstück von  $M$  mit konstanter Krümmung. Eine weitere Anwendung von Hilfssatz 2 zeigt, daß dies Randstück ein zu  $c_1$  paralleles Geradenstück sein muß und daß es eine Eigenfunktion  $\psi_j$  gibt, die ein Rechteck als Knotengebiet besitzt. Damit entsteht  $M$  aus diesem Rechteck durch sukzessive Spiegelungen.

Im anderen Fall können wir annehmen, daß  $m_j^1 > 1$  für unendlich viele  $j$ . Um diese Situation behandeln zu können, machen wir von der Tatsache Gebrauch, daß die inneren Knotenlinien von  $\psi_j$  sich in Punkten von  $M$  unter gleichen Winkeln schneiden und daß dies auch in den inneren Punkten von  $c_1$  gilt, wenn

man  $c_1$  als Knotenlinie mitzählt (der erste Teil der Behauptung ist z.B. in [3] bewiesen; der zweite Teil wird auf den ersten zurückgeführt durch Fortsetzung der Eigenfunktion mittels Spiegelung an  $c_1$ ). Wir betrachten nun das Dreieck mit der Strecke von  $p_j^1$  nach  $p_j^2$  als Basis und den Winkeln  $\pi/m_j^1 + 1$  bzw.  $\pi/m_j^2 + 1$  bei  $p_j^1$  bzw.  $p_j^2$ . Für genügend großes  $j$  ist die Spitze dieses Dreiecks ein Schnittpunkt von Knotenlinien der Eigenfunktion  $\psi_j$ . Also gibt es  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , so daß

$$\frac{\pi}{m_j^1 + 1} + \frac{\pi}{m_j^2 + 1} + \frac{\pi}{k} = \pi \quad \text{oder}$$

$$k = \frac{(m_j^1 + 1)(m_j^2 + 1)}{m_j^1 m_j^2 - 1}.$$

Da dieser Ausdruck  $< 2$  ist für  $m_j^2 > 5$ , rechnet man nun einfach die möglichen Werte für  $m_j^1$ ,  $m_j^2$  und  $k$  aus. Es ergibt sich, daß das Dreieck nur gleichseitig, rechtwinklig-gleichschenkelig oder rechtwinklig mit den restlichen Winkeln  $\pi/3$  und  $\pi/6$  sein kann. Wir wollen noch zeigen, daß das Dreieck auch ein Knotengebiet von  $\psi_j$  ist für großes  $j$ . Dann ist sicher das Innere des Dreiecks enthalten in  $M$ ; wäre es kein Knotengebiet, so würde jede innere Knotenlinie von  $\psi_j$  die von  $p_j^1$  und  $p_j^2$  ausgehenden Seiten treffen, sofern sie das offene Dreieck trifft. Nun folgt aber leicht durch Induktion, daß  $\psi_j$  zwei nicht kongruente Knotengebiete hätte, nämlich ein Dreieck und ein Polygon mit mindestens vier Seiten. Da eine Membran, die durch sukzessive Spiegelungen aus einem gleichseitigen Dreieck entsteht, auch durch sukzessive Spiegelung aus einem Dreieck mit den Winkeln  $\pi/2$ ,  $\pi/3$  und  $\pi/6$  entsteht, ist der Beweis wegen Hilfssatz 2 vollständig.

Wir haben damit gezeigt, daß höchstens die im Satz genannten Membranen die Eigenschaft (K) haben. Daher bleibt noch zu zeigen, daß dies auch wirklich der Fall ist. Für Kreis, Kreissektor, Kreisring und Kreisringsektor rechnet man die Eigenschaft (K) unmittelbar nach. Die Membranen der unter e) genannten Art sind alle enthalten in Parkettierungen der Ebene bestehend aus kongruenten Rechtecken oder kongruenten Dreiecken mit den Winkeln  $\pi/2$ ,  $\pi/4$ ,  $\pi/4$  bzw.  $\pi/2$ ,  $\pi/3$ ,  $\pi/6$ . Diese Parkettierungen lassen sich unbegrenzt verfeinern, indem man die Grundfigur in 4 bzw. 2 bzw. 4 kongruente Teile zerlegt, die der Grundfigur ähnlich sind. Zu jeder Verfeinerung betrachtet man die erste Eigenfunktion des Dirichletproblems für  $\Delta$  in einer festen Grundfigur; diese Funktion besitzt eine reellanalytische Fortsetzung auf ganz  $\mathbb{R}^2$ , deren Nullstellen genau die Ränder der Parkettierung sind. Also liefert ihre Einschränkung auf  $M$  eine Eigenfunktion des Dirichletproblems für  $\Delta$  in  $M$ , deren sämtliche innere Knotenlinien Geradenstücke sind. Der Beweis des Satzes ist damit beendet.

LITERATUR

- [1] R. COURANT, D. HILBERT: Methoden der mathematischen Physik I. 2. Auflage. Berlin: Springer 1930
- [2] J. BRÜNING, D. GROMES: Über die Länge der Knotenlinien schwingender Membranen. Math. Z. 124 (1972), 79–82
- [3] J. BRÜNING: Über Knoten von Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami-Operators. Math. Z. 158 (1978), 15–21

Dr. J. Brüning  
Fachbereich Mathematik  
der Philipps-Universität  
Lahnberge  
3550 Marburg  
Bundesrepublik Deutschland

Eingegangen den 15. Februar 1979