Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 55 (1980)

Artikel: Ueber die Dimension der Eigenräume des Laplace-Operators auf Riemannschen Flächen.

Autor: Huber, Heinz

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-42384

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici **55** (1980) 390–397 Birkhäuser Verlag, Basel

Ueber die Dimension der Eigenräume des Laplace-Operators auf Riemannschen Flächen

HEINZ HUBER (Basel)

Ernst Specker zum 60. Geburtstag gewidmet

1

Eine kompakte Riemannsche Fläche $\mathscr{F}$ vom Geschlecht $g \geqslant 2$ besitzt genau eine mit der konformen Struktur verträgliche Metrik konstanter Krümmung -1: die Poincarémetrik. Es sei Δ der zugehörige Laplace-Beltrami-Operator und

$$\mathscr{E}_\lambda = \{f \in C^2(\mathscr{F}) \mid -\Delta f = \lambda f\}, \qquad \lambda \geqslant o,$$

wobei nur *reellwertige* Eigenfunktionen zugelassen werden. Es ist bekannt ([1]–3]), dass

$$\sum_{\lambda \leq t} \dim \mathscr{E}_\lambda = (g-1)t + O(t^{1/2}), \qquad t \to +\infty.$$

Daraus ist zu entnehmen, dass jedenfalls $\dim \mathscr{E}_\lambda = O(\lambda^{1/2})$. Diese bloss infinitäre Aussage kann folgendermassen[1] präzisiert werden:

Es sei

$$\delta = \min_{p \in \mathscr{F}} d(p), \qquad d(p) = \operatorname*{Max}_{q \in \mathscr{F}} \operatorname{dist}(p, q).$$

Dann gilt für $\lambda \geqslant 0$:

$$\dim \mathscr{E}_\lambda < e^\delta (\lambda + \tfrac{1}{2})^{1/2} \left(1 + \frac{e(3\delta+1)}{(2\lambda+1)^{1/4}}\right) + 1.$$

(Zwischen δ und dem Durchmesser δ^* von $\mathscr{F}$ besteht offenbar die Relation $\delta^*/2 \leqslant \delta \leqslant \delta^*$).

2. Beweis

0. Wir versehen den Einheitskreis $E = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ mit der hyperbolischen Metrik

$$ds^2 = 4 \frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}, \tag{1}$$

---

[1] Siehe auch [4], [5].

welche die Krümmung -1 besitzt. Es sei $\rho(0, z)$ die hyperbolische Distanz der Punkte $0, z$, und

$$K_r = \{z \in E \mid \rho(0, z) \leq r\}.$$

Führen wir geodätische Polarkoordinaten

$$\rho = \rho(0, z), \qquad \vartheta = \arg z$$

ein, so wird $ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho \, d\vartheta^2$. Daher erhält man für das Flächenelement und die Beltrami-Operatoren der Metrik (1):

$$d\omega = \sinh \rho \, d\rho \, d\vartheta \tag{2}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \operatorname{ctgh} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \sinh^{-2} \rho \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \tag{3}$$

$$\nabla = |\operatorname{grad}|^2 = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\right)^2 + \sinh^{-2} \rho \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right)^2 \tag{4}$$

1. Wir wählen auf $\mathcal{F}$ einen Punkt p mit $d(p) = \delta$. Weil das Geschlecht von $\mathcal{F}$ grösser als eins ist, gibt es eine konforme Ueberlagerungsabbildung $\pi : E \to \mathcal{F}$ mit $\pi(0) = p$. Verpflanzen wir die Metrik (1) mit dieser Abbildung, so erhalten wir gerade die in der Einleitung charakterisierte Poincarémetrik von $\mathcal{F}$. Es sei Γ die zu π gehörige Gruppe der Deckisometrien von E. Dann ist

$$D = \{z \in E \mid \rho(0, z) \leq \rho(T(0), z) \; \forall T \in \Gamma\}$$

ein Fundamentalbereich von Γ, und es gilt für alle $z \in D$:

$$\operatorname{dist}(p, \pi(z)) = \rho(0, z).$$

Daher wird $\operatorname{Max}_{z \in D} \rho(0, z) = d(p) = \delta$:

$$D \subset K_\delta. \tag{5}$$

2. Wir definieren für $f \in \mathcal{E}_\lambda$

$$\hat{f}(\rho, \vartheta) = (f \circ \pi)(z) \tag{6}$$

und beweisen folgendes

LEMMA. *Zu jeder ganzen Zahl k gibt es ein lineares Funktional $c_k : \mathcal{E}_\lambda \to \mathbf{C}$ derart, dass*

$$\int_0^{2\pi} \hat{f}(\rho, \vartheta) e^{ik\vartheta} \, d\vartheta = c_k(f) F_k(\rho).$$

Dabei ist $y = F_k(\rho)$ die einzige Lösung der Gleichung

$$y'' + (\operatorname{ctgh} \rho) y' + (\lambda - k^2 \sinh^{-2} \rho) \, y = 0 \tag{7}$$

in $(0,\infty)$ *mit* $\lim_{\rho\to 0}\rho^{-|k|}y(\rho)=1$. *Da* $F_k=F_{-k}$ *reellwertig ist, gilt*

$$\overline{c_k(f)}=c_{-k}(f)\quad \forall f\in\mathscr{E}_\lambda\,. \tag{8}$$

Beweis. Wegen (6) und (3) gilt für jedes $f\in\mathscr{E}_\lambda$:

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\hat{f}+\operatorname{ctgh}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\hat{f}+\sinh^{-2}\rho\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\hat{f}+\lambda\hat{f}=0\,.$$

Daraus ergibt sich sofort, dass

$$G(\rho):=\int_0^{2\pi}\hat{f}(\rho,\vartheta)e^{ik\vartheta}\,d\vartheta,\qquad \rho>0,$$

eine Lösung der Gleichung (7) ist. Diese Gleichung hat an der Stelle $\rho=0$ eine reguläre Singularität mit den Exponenten k und $-k$. Daher besitzt sie genau eine Lösung

$$F_k(\rho)=\rho^{|k|}h_k(\rho),\qquad h_k\in C^2[0,\infty),\qquad h_k(0)=1\,. \tag{9}$$

(F_k ist somit reellwertig und es gilt $F_{-k}=F_k$). Die Wronski-Determinante

$$W=F_kG'-F_k'G \tag{10}$$

ist Lösung der Gleichung $W'+(\operatorname{ctgh}\rho)W=0$. Daher wird

$$W(\rho)=\alpha/\sinh\rho \tag{11}$$

mit einer passenden Konstanten α. Aus (9)–(11) ergibt sich:

$$\rho^{|k|+1}G'(\rho)=|k|\,\rho^{|k|}G+\rho^{|k|+1}Gh_k'/h_k+\alpha\rho/h_k\sinh\rho\,.$$

Da G beschränkt ist, folgt hieraus

$$\lim_{\rho\to 0}\rho^{|k|+1}G'(\rho)=\alpha\,.$$

Daraus schliessen wir, dass $\alpha=0$ sein muss, da sonst G nicht beschränkt sein könnte. Somit verschwindet die Wronski-Determinante im ganzen Intervall $(0,\infty)$: G und F_k sind linear abhängig. Damit ist aber das Lemma bewiesen.

3. Da die rechte Seite der zu beweisenden Ungleichung grösser als eins ist, dürfen wir gleich annehmen, dass

$$\dim\mathscr{E}_\lambda=2n \text{ oder } 2n+1,\qquad n\geqslant 1. \tag{12}$$

Wir zeigen nun: Es gibt eine Eigenfunktion $f\in\mathscr{E}_\lambda$ derart, dass

$$\int_D\hat{f}^2\,d\omega=1\,, \tag{13}$$

$$\int_0^{2\pi}\hat{f}(\rho,\vartheta)e^{ik\vartheta}\,d\vartheta=0\qquad \forall\rho>0,\qquad |k|\leqslant n-1\,. \tag{14}$$

In der Tat: Es gibt Eigenfunktionen $f_1, \ldots, f_{2n} \in \mathscr{E}_\lambda$ mit

$$\int_D \hat{f}_j \hat{f}_l \, d\omega = \delta_{jl} \qquad 1 \leqslant j, l \leqslant 2n.$$

Machen wir für die gesuchte Funktion den Ansatz

$$f = \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j f_j, \qquad \alpha_j \in \mathbf{R}, \tag{15}$$

so folgt aus dem Lemma:

$$\int_0^{2\pi} \hat{f}(\rho, \vartheta) e^{ik\vartheta} \, d\vartheta = \left(\sum_{j=1}^{2n} c_k(f_j) \alpha_j \right) F_k(\rho).$$

Das homogene System

$$\sum_{j=1}^{2n} c_k(f_j) \alpha_j = 0, \qquad |k| \leqslant n-1$$

besteht aus $2n-1$ linearen Gleichungen für die $2n$ Unbekannten α_j. Daher besitzt es eine nicht triviale Lösung $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n} \in \mathbf{C}$, und somit wegen (8) sogar eine reelle Lösung mit $\sum \alpha_j^2 = 1$. Die zugehörige Funktion (15) hat nun die gewünschten Eigenschaften.

4. Für diese Funktion f definieren wir jetzt

$$A(r) = \int_{K_r} \hat{f}^2 \, d\omega, \qquad B(r) = \int_{K_r} \nabla \hat{f} \, d\omega. \tag{16}$$

Dann ist nach (2)

$$A(r) = \int_0^r a(\rho) \sinh \rho \, d\rho, \qquad B(r) = \int_0^r b(\rho) \sinh \rho \, d\rho \tag{17}$$

mit

$$a(\rho) = \int_0^{2\pi} \hat{f}^2(\rho, \vartheta) \, d\vartheta, \qquad b(\rho) = \int_0^{2\pi} (\nabla \hat{f})(\rho, \vartheta) \, d\vartheta, \tag{18}$$

und wegen (4) gilt:

$$b(\rho) \geqslant \sinh^{-2} \rho \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \vartheta} \right)^2 d\vartheta. \tag{19}$$

Aus (14) folgt nun aber, dass

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \vartheta} \right)^2 d\vartheta \geqslant n^2 \int_0^{2\pi} \hat{f}^2 \, d\vartheta.$$

Daher folgt aus (19):

$$b(\rho) \geqslant n^2 (\sinh \rho)^{-2} a(\rho) \geqslant n^2 (\sinh r)^{-2} a(\rho) \quad \text{für} \quad 0 < \rho \leqslant r,$$

und somit

$$B(r) \geqslant n^2(\sin r)^{-2} A(r). \tag{20}$$

Aus

$$\Delta(\hat{f}^2) = 2\hat{f}\Delta\hat{f} + 2\nabla\hat{f}, \qquad \Delta\hat{f} = -\lambda\hat{f}$$

und (3) folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\hat{f}^2 + \operatorname{ctgh}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\hat{f}^2 + \sinh^{-2}\rho\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\hat{f}^2 + 2\lambda\hat{f}^2 = 2\nabla\hat{f}.$$

Daraus und aus (18) ergibt sich:

$$a''(\rho) + (\operatorname{ctgh}\rho)a'(\rho) + 2\lambda a(\rho) = 2b(\rho),$$

oder, nach Multiplikation dieser Gleichung mit $\sinh\rho$:

$$(a'(\rho)\sinh\rho)' + 2\lambda a(\rho)\sinh\rho = 2b(\rho)\sinh\rho.$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$a'(r)\sinh r + 2\lambda A(r) = 2B(r). \tag{21}$$

Nach (17) ist aber

$$A''(r) = a'(r)\sinh r + a(r)\cosh r. \tag{22}$$

Aus (20)–(22) ergibt sich:

$$A''(r) + 2\lambda A(r) \geqslant 2n^2(\sinh r)^{-2} A(r). \tag{23}$$

5. Es sei jetzt

$$R = \delta + y, \tag{24}$$

wobei $y > 0$ später geeignet gewählt werden wird. Dann folgt aus (23):

$$A''(r) - \mu A(r) \geqslant 0 \text{ in } [\delta, R] \tag{25}$$

mit

$$\mu = 2(n^2\sinh^{-2} R - \lambda). \tag{26}$$

Wir nehmen zunächst an, dass $\mu > 0$ und setzen

$$A(r) = F(r)\cosh\sqrt{\mu}(r-\delta). \tag{27}$$

Dann ist

$$F(\delta) = A(\delta), \qquad F'(\delta) = A'(\delta) = a(\delta)\sinh\delta \geqslant 0, \tag{28}$$

und aus (25) ergibt sich:

$$F''(r)\cosh\sqrt{\mu}(r-\delta) + 2\sqrt{\mu}F'(r)\sinh\sqrt{\mu}(r-\delta) \geqslant 0 \text{ in } [\delta, R]. \tag{29}$$

Setzen wir weiter

$$F'(r) = h(r)\cosh^{-2}\sqrt{\mu}(r-\delta), \tag{30}$$

so wird $h(\delta) = F'(\delta) \geqslant 0$, und aus (29) ergibt sich, dass $h' \geqslant 0$ in $[\delta, R]$. Folglich ist $h \geqslant 0$ in $[\delta, R]$. Daraus folgt nach (30), (28) und (27):

$$A(R) \geqslant A(\delta)\cosh\sqrt{\mu}(R-\delta) = A(\delta)\cosh\sqrt{\mu}y.$$

Nach (5), (13) und (16) ist aber $A(\delta) \geqslant 1$ und somit

$$A(R) \geqslant \cosh\sqrt{\mu}y. \tag{31}$$

6. Nun schätzen wir $A(R)$ nach oben ab: Sei

$$\Gamma' = \{T \in \Gamma \mid T(D) \cap K_R \neq \emptyset\}, \qquad m = \operatorname{card}\Gamma'.$$

Dann gilt

$$A(R) \leqslant m, \tag{32}$$

da die Fundamentalbereiche $T(D)$, $T \in \Gamma'$, die Kreisscheibe K_R überdecken. Weil diese Bereiche paarweise nicht überlappen und wegen (5) in $K_{R+2\delta}$ enthalten sind, so gilt:

$$m\int_D d\omega \leqslant \int_{K_{R+2\delta}} d\omega = 2\pi(\cosh(R+2\delta)-1).$$

Daraus folgt wegen

$$\int_D d\omega = 4\pi(g-1), \qquad g \geqslant 2:$$

$$m < \cosh(R+2\delta) = \cosh(y+3\delta). \tag{33}$$

Aus (31)–(33) schliessen wir nun, dass $\sqrt{\mu}y < y + 3\delta$. Daraus und aus (26) ergibt sich:

$$n^2\sinh^{-2}R < \lambda + \frac{1}{2}\left(1+\frac{3\delta}{y}\right)^2, \qquad R = \delta + y. \tag{34}$$

Dabei hatten wir angenommen, dass $\mu > 0$. Wenn aber $\mu \leqslant 0$, so ist nach (26) sogar $n^2\sinh^{-2}R \leqslant \lambda$. Somit gilt die Ungleichung (34) ausnahmslos für jedes $y > 0$.

7. Für $\lambda \geqslant 0$, $y > 0$ gilt:

$$\lambda + \frac{1}{2}\left(1+\frac{3\delta}{y}\right)^2 \leqslant \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{a}{y}\right)^2 \tag{35}$$

mit

$$a = \frac{3\delta}{(2\lambda+1)^{1/2}} \leqslant 3\delta. \tag{36}$$

Aus (34) und (35) folgt nun:

$$2n < e^{\delta}(\lambda+\tfrac{1}{2})^{1/2} e^{y}\left(1+\frac{a}{y}\right), \qquad y>0. \tag{37}$$

Jetzt wird $y>0$ so gewählt, dass die rechte Seite minimal wird. Dieses y ist Lösung der Gleichung

$$1+\frac{a}{y}-\frac{a}{y^2}=0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{a}{y} = y+a \tag{38}$$

$$y = \tfrac{1}{2}((a^2+4a)^{1/2}-a) \tag{39}$$

Aus (39) folgt zunächst $y<1$ und somit

$$e^{y} = 1+y\left(1+\frac{y}{2!}+\cdots\right) < 1+y\left(1+\frac{1}{2!}+\cdots\right) = 1+(e-1)y$$

Daher wird wegen (38)

$$e^{y}\left(1+\frac{a}{y}\right) < 1+\frac{a}{y}+(e-1)(y+a) = 1+e(y+a). \tag{40}$$

Aus (39) und (36) ergibt sich:

$$y+a = \tfrac{1}{2}a^{1/2}((a+4)^{1/2}+a^{1/2}) \leqslant \tfrac{1}{2}a^{1/2}((3\delta+4)^{1/2}+(3\delta)^{1/2}) < \frac{3\delta+1}{(2\lambda+1)^{1/4}}. \tag{41}$$

Aus (37), (40) und (41) folgt endlich:

$$2n < e^{\delta}(\lambda+\tfrac{1}{2})^{1/2}\left(1+\frac{e(3\delta+1)}{(2\lambda+1)^{1/4}}\right).$$

Damit ist aber wegen (12) unser Satz bewiesen.

LITERATUR

[1] AVAKUMOVIĆ, V. G., *über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten*, Math. Zeitschr. *65* (1956) 327–344.

[2] HÖRMANDER, L., *The spectral function of an elliptic operator*, Acta Math *121* (1968), 193–218.
[3] HEJHAL, D. A., *The Selberg Trace Formula for* PSL(2, **R**), vol. 1, Lecture Notes 548 (Springer 1976).
[4] CHENG, S. Y., *Eigenfunctions and nodal sets*, Comment. Math. Helv. *51* (1976), 43–55.
[5] BESSON, G., *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes*, Thèse présentée à l'université Paris VII (1979).

Eingegangen den 22. November 1979